LES CAHIERS DU MIDEO
ANCIENT AND CLASSICAL SCIENCES AND PHILOSOPHY
– 3 –

Œuvre mathématique d'al-Sijzī

VOLUME I

Géométrie des coniques et théorie des nombres au X^{e} siècle

Roshdi RASHED

ÉDITIONS PEETERS

Louvain – Paris
2004

Géométrie des coniques et théorie des nombres
au X^e siècle

LES CAHIERS DU MIDEO
ANCIENT AND CLASSICAL SCIENCES AND PHILOSOPHY
– 3 –

Œuvre mathématique d'al-Sijzī

VOLUME I

Géométrie des coniques et théorie des nombres au X^{e} siècle

Roshdi RASHED

ÉDITIONS PEETERS

Louvain – Paris
2004

Cahiers du Mideo 3
ISBN 90-429-1593-5 (Peeters Leuven)
ISBN 2-87723-856-3 (Peeters France)
D. 2004/0602/161

Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire
1 rue Masna Al-Tarabich, B.P. 18 Abbassiah, 11381 Le Caire
Responsable de la publication: Régis Morelon, o.p.

PRÉFACE

La recherche historique récente a permis d'établir ce que l'on soupçonnait depuis bien longtemps déjà : le dixième siècle est assurément l'une des cimes des mathématiques classiques, phénomène sans précédent si ce n'est la prééminence d'Alexandrie au troisième siècle avant J.-C., et qu'il faudra attendre le XVII[e] siècle pour observer à nouveau, en Europe de l'Ouest cette fois. C'est au cours du X[e] siècle en effet que se déploient les anciennes traditions de recherche, en même temps que se développent celles qu'avaient inaugurées un siècle auparavant des mathématiciens comme les Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, al-Khwārizmī et leurs successeurs. Mais ce même siècle voit aussi l'essor de nouvelles traditions de recherche en géométrie des coniques, en géométrie infinitésimale, en géométrie sphérique, en trigonométrie, en algèbre polynomiale, en théorie géométrique des équations, en analyse diophantienne rationnelle, en analyse diophantienne entière, bref dans les divers chapitres des mathématiques ; ainsi qu'en optique, en astronomie, en statique, etc.

Ce volume n'est pas destiné à décrire et à comprendre ce phénomène historique, tâche à laquelle nous nous sommes employé à plusieurs reprises ailleurs ; il veut enrichir notre connaissance de ce point culminant de la recherche mathématique et des traditions qui s'y rencontrent, à l'aide de nouveaux matériaux qui nous permettront d'engager de nouvelles lectures. Plus précisément, il s'agit ici d'établir, de traduire et de commenter l'œuvre d'un mathématicien de cette époque : Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī.

Fils de la seconde moitié du X[e] siècle, al-Sijzī était actif entre les années soixante du X[e] siècle et le début du XI[e] siècle — il nous est en effet parvenu quelques écrits antérieurs à 969 et d'autres datés de 998. Mathématicien persan, lui-même fils d'un mathématicien, il est né en Iran où il a vécu. Sa position à la croisée de courants de recherche mathématique et son apport à chacun d'eux font d'al-Sijzī un excellent représentant de la science mathématique de son temps, et sont à l'origine de notre choix. Sa biobibliographie nous suggère le portrait d'un géomètre, et rien ne montre qu'il aurait composé quoi que ce soit en algèbre. Même en théorie des nombres, il demeure géomètre. Ce caractère, qui mérite d'être souligné, tout en désignant la communauté de chercheurs qui est la sienne, exprime aussi la singularité d'al-Sijzī.

Géomètre fécond, il a laissé une œuvre considérable — une cinquantaine de traités — et une correspondance scientifique, tout aussi importante, avec les mathématiciens de l'époque. Celle-ci est un document particulièrement précieux pour l'histoire, car elle met en scène, *in vivo*, la recherche mathématique du temps. Une partie substantielle de l'œuvre d'al-Sijzī a été conservée et a attiré l'attention des historiens au XIX^e^ siècle déjà, comme l'attestent les travaux de F. Woepcke et, plus tard, de C. Schoy. Aujourd'hui, on observe un regain d'intérêt pour la contribution d'al-Sijzī. Mais toutes ces études, bienvenues certes, et utiles, restent partielles et sans unité : on s'y intéresse isolément à l'un des mémoires d'al-Sijzī, voire à une partie d'un mémoire ; ce qui ne permet pas de dégager une idée précise du projet scientifique d'al-Sijzī et de ses réalisations, dont n'émane qu'une image éclatée et souvent affadie.

Or, s'interroger sur le sens de la contribution d'al-Sijzī, c'est vouloir repérer les axes suivis par le mathématicien dans ses recherches, se demander à quelles traditions il appartient effectivement et quelle orientation il leur a donnée. Mais pour répondre à ces questions et à d'autres semblables qu'elles suscitent, il faut reprendre systématiquement *toute* l'œuvre mathématique d'al-Sijzī, pour en donner une édition critique, une traduction rigoureuse et un commentaire extensif. Il n'y a pas d'autre voie qui permette d'en saisir le sens, et de retracer la carte du continent investi par son auteur. C'est alors qu'on sera en mesure de déterminer sa juste place au Xe siècle et, plus généralement, dans l'histoire des mathématiques.

C'est à cette immense tâche que Pascal Crozet et moi-même avons voulu nous attaquer, il y a de cela une quinzaine d'années. Notre but était double : comprendre et restituer les travaux d'al-Sijzī ; réécrire aussi fidèlement que possible l'histoire des mathématiques au Xe-XIe siècle. Plusieurs volumes y sont consacrés, tantôt rédigés par l'un ou par l'autre, tantôt par l'un et l'autre. L'ordre que nous avons suivi n'est pas celui de la chronologie, mais il est fonction du domaine étudié et régi par la logique de l'invention. Telle est l'organisation de ce premier volume que je mets aujourd'hui entre les mains des lecteurs. Tout entier consacré aux écrits d'al-Sijzī sur la géométrie des coniques et sur la théorie des nombres, il regroupe des écrits qui, par leur présence même et aussi par leur extension, nous dévoilent deux axes de l'activité mathématique d'al-Sijzī jusqu'à présent mal perçus : la géométrie des coniques comme théorie et comme application, et l'analyse diophantienne entière étudiée par un géomètre. Ainsi, une partie substantielle de l'œuvre du mathématicien s'inscrit dans le sillage de ses prédécesseurs et aînés — al-Ḥasan ibn Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibrāhīm ibn Sinān, al-Qūhī, Ibn Sahl —, et comme une extension de leurs écrits. Al-Sijzī, on le verra, s'intéresse en effet aux différents chapitres de la géométrie des coniques : les lieux en surfaces quadratiques, le tracé des courbes coniques, les propriétés asymptotiques de l'hyperbole, l'application de la théorie des coniques à la construction géométrique des problèmes solides. Ces titres suffisent à montrer qu'il s'agit bien d'une démarche délibérée, qu'al-Sijzī poursuit avec ses contemporains, pour étudier d'autres parties du champ des coniques que ni Apollonius ni ses successeurs n'avaient visitées. On trouve donc regroupés ici tous les écrits d'al-Sijzī sur la géométrie des coniques qui ont survécu, et ainsi l'*editio princeps* aussi bien que la première traduction et le premier commentaire des traités suivants :

1° *Sur les propriétés de la coupole hyperbolique et de la coupole parabolique*
2° *Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique*
3° *Sur la description des sections coniques*
4° *Toutes les figures sont à partir du cercle*
5° *Sur la construction du compas parfait*
6° *Comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent et ne se rencontrent pas*
7° *Sur la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales*
8° *Sur la détermination des deux moyennes par la géométrie*

Pour être complet et pour que le lecteur dispose en un seul et même volume de tous les écrits d'al-Sijzī sur ce thème, nous avons jugé opportun de reprendre notre édition, traduction et commentaire, publiés ailleurs[1], du mémoire d'al-Sijzī :

9° *La construction de l'heptagone régulier et la trisection de l'angle.*

Mais ce géomètre s'est également occupé de la théorie des nombres. Il a voulu fonder la solution de l'équation générale des triangles rectangles numériques sur des bases géométriques solides. C'est le second thème de ce premier volume. On y trouve donc l'*editio princeps*, la première traduction et le premier commentaire de son traité :

10° *La solution par une méthode universelle d'un problème numérique.*

[1] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, 2000.

L'histoire de la tradition manuscrite de ces traités précède immédiatement leur édition critique.

Quant à la biographie et à la bibliographie d'al-Sijzī, à l'histoire des traditions manuscrites de ses écrits, elles ont fait l'objet d'une étude critique détaillée de Pascal Crozet et de moi-même. Aussi les trouvera-t-on dans le second volume, rédigé en commun, qui suivra incessamment celui-ci, et qui regroupe les autres travaux d'al-Sijzī en géométrie.

Je tiens pour finir à remercier Messieurs Christian Houzel, Directeur de Recherche Émérite au CNRS, et Pascal Crozet, Chargé de Recherche au CNRS, qui ont bien voulu relire l'une ou l'autre partie de ce livre et proposé certaines améliorations. Ma gratitude va aussi à Madame Aline Auger, Ingénieur d'Études au CNRS, qui a composé les index et a préparé ce volume en *camera-ready*.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Monsieur Seyed M. Sadegh Kharazi, Ambassadeur de la République Islamique d'Iran pour avoir soutenu la publication de ce livre.

CHAPITRE I

LA GÉOMÉTRIE DES CONIQUES

INTRODUCTION

Au nombre des domaines où la recherche mathématique est la plus active figure assurément la géométrie des coniques. Dès ses débuts, avec les trois frères Banū Mūsā, en passant par de prestigieux géomètres au Xe siècle et durant quelques siècles encore, ce terrain a été constamment cultivé et fécondé. D'emblée, l'historien des mathématiques a le regard attiré par deux faits qui mériteraient d'être soulignés. Le premier nous ramène à l'œuvre d'Apollonius : jamais, et particulièrement les *Coniques*, elle n'a été aussi massivement enseignée et travaillée qu'à partir du milieu du IXe siècle, avec les Banū Mūsā et la tradition mathématique qu'ils ont inaugurée. Ce fait d'histoire en recouvre un autre, dont la valeur épistémique est singulière : la géométrie des coniques a jeté des ponts et tissé des réseaux entre les disciplines mathématiques existantes — que l'on pense par exemple aux relations entre géométrie et algèbre, ou à la constitution de l'anaclastique, etc. À partir du IXe siècle donc, elle investit des contrées qu'Apollonius n'avait pu imaginer, non plus que Pappus ou Eutocius, provoquant le remaniement et le redéploiement d'anciens chapitres de la géométrie tout en suscitant l'avènement de nouveaux. C'est ainsi qu'à partir de *La Mesure du Cercle* et *La Sphère et le Cylindre*, ignorant *Les Conoïdes et les Sphéroïdes* du mathématicien de Syracuse, les mathématiciens arabes ont mis à profit leur connaissance de la géométrie des coniques pour renouveler les recherches en mathématiques infinitésimales. Il suffit d'évoquer les noms des Banū Mūsā, de Thābit ibn Qurra, d'al-Māhānī, d'Ibrāhīm ibn Sinān, d'al-Qūhī, d'Ibn Sahl et d'Ibn al-Haytham pour mesurer la portée de ce prolongement et l'ampleur de ce renouvellement[1]. C'est à la même époque, à partir du milieu du IXe siècle, avec entre autres al-Farghānī, puis al-Qūhī, al-Ṣāghānī et al-Bīrūnī, pour ne citer qu'eux, que l'on a pensé certaines propriétés projectives des coniques — toute une tradition qui a intégré la chose et le nom au sein des disciplines géométriques. Conçue par Ibn Sahl et poursuivie

[1] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*. Vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, London, 1996 ; vol. II : *Ibn al-Haytham*, London, 1993 ; vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, 2000.

par Ibn al-Haytham, l'étude systématique des propriétés optiques des coniques est un acquis de la même époque. C'est encore la géométrie des coniques qui a permis au contemporain d'al-Sijzī, Abū al-Jūd, de mettre en chantier une recherche active sur la résolution des équations cubiques, avant qu'al-Khayyām élabore le premier traité en géométrie algébrique des coniques. Enfin, c'est à cette même époque que le nombre des constructions géométriques par les coniques a connu une extension sans précédent. On pourrait sans doute évoquer bien d'autres secteurs de la recherche qui relèvent de la géométrie des coniques, comme le tracé continu des courbes coniques, l'étude des surfaces quadratiques, etc.

Au cœur de ces traditions, al-Sijzī a même participé à l'édification de certaines d'entre elles. Rien d'étonnant donc s'il s'occupe à son tour de la géométrie des coniques : et de fait le tiers environ de ses écrits s'y rapporte. Il a pu, on le verra plus loin, achever certaines recherches engagées par ses contemporains, de même qu'il a organisé les différents acquis en un chapitre, développé et resserré les liens établis par ses prédécesseurs entre la tradition des catoptriciens et celle d'Apollonius dans l'étude des coniques. On lui doit également la conception d'autres domaines.

L'œuvre d'al-Sijzī en géométrie des coniques se répartit en trois groupes.

Dans le premier, on trouve les mémoires suivants :

1.1. *Sur les propriétés des solides hyperbolique, elliptique et parabolique*
1.2. *Sur les propriétés de la coupole hyperbolique et de la coupole parabolique*

Ces deux traités nous sont parvenus, alors que les deux suivants sont aujourd'hui perdus.

1.3. *Sur les propriétés de la figure ovale et de la figure lenticulaire*
1.4. *Épître à Abū Sahl ibn Rustam al-Qūhī pour établir les propriétés de l'ellipse à partir du cylindre*[1]

Le second groupe porte sur le tracé des coniques et les problèmes afférents :

2.1. *Sur le tracé des sections coniques*
2.2. *Le compas des sections coniques*

[1] On trouve sur la liste donnée dans le ms. de Lahore le titre suivant : *Épître pour établir les propriétés de la section appelée ellipse*. Al-Sijzī, lui-même, cite un écrit sous le titre *Sur les propriétés de l'ellipse* ou tout simplement *Sur l'ellipse*.

2.3. *Comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent, et qui ne se rencontrent pas*
2.4. *Toutes les figures sont à partir du cercle*

Le troisième groupe traite de l'application des coniques aux problèmes classiques de construction géométrique :

3.1. *Construction de l'heptagone régulier et la trisection de l'angle*
3.2. *Détermination des deux moyennes et division de l'angle à côtés droits en trois parties égales par la géométrie, rectification d'al-Sijzī*[1]
3.3. *Division de l'angle à côtés droits en trois parties égales*

Certains de ces écrits sont perdus. Ceux d'entre eux qui nous parvenus seront établis, traduits et commentés ici, afin qu'al-Sijzī trouve sa place dans l'histoire de la géométrie des coniques.

[1] On trouve sur la liste donnée dans le ms. Chester Beatty 3652, sous le n° 21, le titre suivant : *Rectification de la détermination des deux moyennes et de la trisection de l'angle.*

I. LES LIEUX EN SURFACES QUADRATIQUES

Al-Sijzī dans ses écrits se réfère plus d'une fois à son livre *Sur l'ellipse*. De ce traité aujourd'hui perdu, le peu qu'il dit nous permet cependant de deviner qu'il contenait une étude des propriétés de l'ellipse à partir de deux solides : l'ovale et le lenticulaire, obtenus par la rotation de l'ellipse autour de son grand axe et de son petit axe, respectivement. Il a aussi consacré un écrit à ces derniers : *Sur les propriétés de la figure ovale et de la figure lenticulaire*, également perdu. Cette orientation est encore celle d'al-Sijzī dans deux autres traités qui, eux, nous sont parvenus. Leurs titres — *Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique* et, pour le second, *Sur les propriétés de la coupole hyperbolique et de la coupole parabolique* — sont pour le moins évocateurs et nous dispensent de tout commentaire : il s'agit de déterminer les propriétés des sections coniques comme sections planes des solides. Plus précisément, al-Sijzī s'est donné pour but dans ces trois écrits de caractériser un certain nombre de surfaces quadratiques par leurs sections planes, ainsi que de les classer à partir d'une notion qu'il définit, celle de « rang » (*martaba*) : le rang est fonction du nombre des sections, limitées ou illimitées, associées à la surface.

L'importance de ces recherches est visible à l'œil nu, même si jusqu'à présent on les a ignorées. C'est en effet dans ces écrits qu'apparaît la première contribution connue à une théorie des surfaces quadratiques. On peut certes repérer dans *Les Conoïdes et les Sphéroïdes* l'examen de quelques lieux en surface. On répondra que cet ouvrage d'Archimède était ignoré des mathématiciens arabes, lesquels n'ont pas manqué, à partir du milieu du IXᵉ siècle, de retrouver ces lieux par leurs propres moyens. Ainsi al-Ḥasan ibn Mūsā et son élève Thābit ibn Qurra s'y sont intéressés à l'occasion de leurs travaux sur l'ellipsoïde et le paraboloïde. Le second est même allé assez loin dans son traité *Sur la mesure des paraboloïdes* en commençant par une étude des coupoles paraboliques. Ibn Sahl s'est lui aussi, dans ses travaux anaclastiques, occupé des conoïdes. Mais s'il est indubitable que ces ouvrages des archimédiens arabes ont fourni à al-Sijzī idées et résultats, il n'en demeure pas moins que, à l'instar de celles d'Archimède, toutes ces recherches étaient orientées vers la détermination du volume des solides engendrés par la rotation d'une figure curviligne. Avec al-Sijzī, la perspective est différente : il s'agit cette fois de la géométrie des lieux en surface, ou encore de l'étude des lieux pour eux-mêmes, c'est-à-dire en tant qu'objets géométriques. Ainsi se précise la place de la contribution d'al-Sijzī, et s'éclaire son sens. Cette nouvelle perspective met en effet en relief ses traits distinctifs. Tout d'abord, et c'est le premier trait, la contribution d'al-Sijzī apparaît comme le prolongement, mais dans une nouvelle direction, de la recherche sur les coniques précisément accomplie par ses prédécesseurs et ses contemporains — les Banū Mūsā, Ibn Qurra, al-Qūhī et Ibn Sahl notamment. Les premiers ont examiné la sphère, l'ellipsoïde et le paraboloïde à partir du cône et du cylindre ; et c'est à l'occasion de ses recherches sur les miroirs et les lentilles ardents que le dernier, Ibn Sahl, a étudié le paraboloïde et l'hyperboloïde ainsi que les plans tangents. C'est dire qu'al-Sijzī arrive à point nommé et au moment opportun pour recueillir ces recherches dispersées ; mais c'est une nouvelle perspective qui l'oriente et qui ouvre un nouveau chapitre de la géométrie des coniques : celui des lieux en surfaces quadratiques.

Ce nouveau champ se déploie donc dans l'extension pour ainsi dire naturelle de la géométrie des coniques. Or une telle localisation éclaire en retour deux autres traits de la contribution d'al-Sijzī. Le premier est relatif à la méthode : celle-ci ne doit rien à l'algèbre, non plus d'ailleurs qu'à une géométrie dans l'espace, puisqu'elle commande de se ramener à la géométrie plane en coupant par un plan quelconque. Le second concerne les frontières de ce champ des lieux en surfaces. Al-Sijzī se limite en effet à certaines quadriques, celles de révolution. Suivi en cela durant huit siècles encore, il ne considère aucune quadrique réglée (hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique).

Plusieurs de ces traits caractériseront encore la reprise de ce chapitre, aux mains de Fermat dans son écrit de 1643 intitulé *Introduction aux lieux en surfaces*. S'il est vrai que ce recommencement se signale par une certaine allure algébrique, Fermat ne traite lui non plus que de quelques lieux en surfaces quadratiques, par une méthode semblable à celle d'al-Sijzī, qui consiste elle aussi à se ramener à la géométrie plane.

Il nous reste donc à analyser la contribution d'al-Sijzī et à donner l'*editio princeps* de ses deux écrits ainsi que leur traduction.

1.1 *Sur les propriétés des coupoles hyperboliques et paraboliques*

Dans ce traité sur les propriétés des coupoles hyperboliques et paraboliques, al-Sijzī poursuit un double but. D'une part, si Apollonius a étudié les quatre figures — cercle, ellipse, hyperbole et parabole — à partir des sections planes du cône à base circulaire, al-Sijzī, à la suite d'al-Ḥasan ibn Mūsā et de Thābit ibn Qurra, propose d'étudier l'ellipse à partir du cylindre. Il entend ainsi montrer qu'il existe d'autres procédés que ceux d'Apollonius pour obtenir les quatre espèces de sections planes mentionnées. C'est ainsi qu'il considère les solides de révolution engendrés à partir de ces quatre sections et indique le nombre des sections planes que l'on peut obtenir dans chacun de ces solides. Il évoque en particulier le solide ovale et le solide lenticulaire qu'il avait, semble-t-il, étudiés dans son traité perdu sur l'ellipse ; ainsi que les coupoles hyperboliques et paraboliques dont il donne une étude détaillée.

Son second but est de classer, d'une manière « naturelle » dit-il, les solides de révolution, c'est-à-dire en fonction du nombre des sections planes de nature différente obtenues ainsi que du nombre des sections illimitées. Ces deux nombres vont définir le « rang » d'un solide.

C'est donc dans les travaux d'al-Ḥasan ibn Mūsā et de Thābit ibn Qurra qu'al-Sijzī trouve ici son point de départ. Ibn Qurra, rappelons-le, avait défini dans son traité *Sur la mesure des paraboloïde*[1] cinq solides paraboliques dont trois ont été appelés « coupoles ». Celles-ci sont engendrées à partir d'une portion de plan limitée par un arc *AB* de parabole, le diamètre issu de *A* et l'ordonnée *BC* du point *B*, par rotation de cette portion autour du diamètre *AC*.

Si *AC* est l'axe de la parabole, la coupole est dite « à sommet régulier » — c'est celle dont al-Sijzī étudie ensuite les sections planes. Si *AC* est un diamètre quelconque, on obtient la coupole dite « à sommet pointu », ou la coupole dite « à sommet enfoncé ». Ces deux dernières coupoles ne sont pas des surfaces quadratiques.

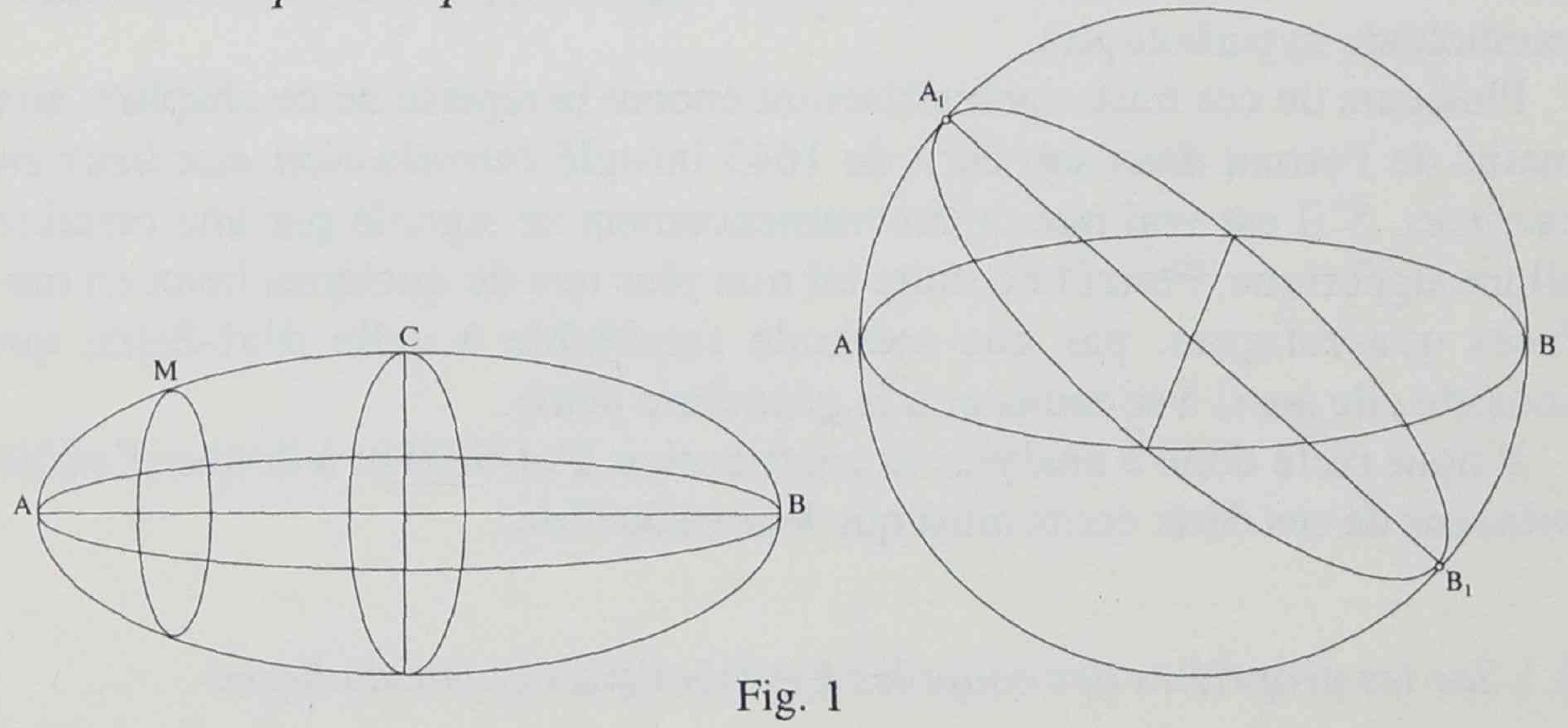


Fig. 1

Ibn Qurra, lui, s'occupe de la mesure des volumes des trois coupoles. Al-Sijzī pour sa part entend étudier les sections planes de tous les solides engendrés à partir de toutes les courbes coniques : cercle, ellipse, parabole et hyperbole, en rotation autour d'un axe (transverse dans le cas de l'hyperbole). Ainsi, dans son introduction à ce traité, il rappelle que

[1] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I, chap. II.

• par rotation d'un cercle autour d'un diamètre, on engendre une sphère, et que toutes les sections planes de la sphère sont des cercles dont le rayon est inférieur ou égal à celui du cercle initial ;

• par rotation d'une ellipse autour de son grand axe, on obtient un ellipsoïde de révolution appelé « ovale » ; et par rotation autour du petit axe, on obtient une « lenticulaire ».

Dans ces deux solides, les sections planes sont des cercles ou des ellipses. Al-Sijzī semble avoir étudié ces solides dans son livre perdu sur l'ellipse ;

• par rotation d'une parabole autour de son axe, on engendre une coupole parabolique dont les sections planes sont des cercles, des ellipses et des paraboles ;

• par rotation d'une hyperbole autour de son axe, on engendre une coupole hyperbolique dont les sections planes sont des cercles, des ellipses et des hyperboles.

Al-Sijzī signale toutefois que le cercle est obtenu comme section plane dans toutes les surfaces de révolution ; et qu'en fait le cercle n'est qu'une ellipse particulière, figurant de ce fait dans toutes les classes précédentes.

Al-Sijzī donne alors une classification des solides, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :

Solides	*Sections planes*	*Rang*
Sphère	Cercle	1
Solide ovale ou lenticulaire	Cercle, ellipse	2
Solide cylindrique	Cercle, ellipse illimitée	3
Coupole parabolique ou hyperbolique	Cercle, ellipse, parabole ou hyperbole	4
Solide conique	Cercle, ellipse, parabole hyperbole, triangle (courbes illimitées)	5

La notion de « rang » introduite par al-Sijzī est liée au nombre des sections planes et à la présence des courbes illimitées. Ce dernier terme « illimité » a un double sens dans ce texte d'al-Sijzī : une courbe est illimitée si elle s'éloigne à l'infini, ce qui ne se produit que pour les paraboles et les hyperboles ; une famille d'ellipses est illimitée si les diamètres de ces ellipses ne sont pas bornés. Expliquons-nous sur la signification de ces dernières.

Dans le premier livre des *Coniques* (propositions 8, 9) Apollonius a précisé que, suivant la position du plan sécant du cône, on aura deux classes de courbes : les courbes fermées — des cercles qu'il étudie dans les propositions I.4 et I.5 — et des courbes non circulaires, c'est-à-dire des ellipses, qu'il étudie dans la proposition I.13 ; et des courbes illimitées (proposition

I.8), c'est-à-dire la parabole étudiée dans I.11 et l'hyperbole étudiée dans I.12. Dans ce cas Apollonius précise que la surface latérale du cône et le plan sécant peuvent être prolongés indéfiniment.

Mais, d'après la tradition des Banū Mūsā et de Thābit ibn Qurra, on joint au cône le cylindre de révolution. Or, dans le solide cylindrique, on trouve des cercles *limités* et des ellipses *illimitées*, c'est-à-dire que le grand axe d'une telle ellipse peut être aussi grand qu'on veut ; et dans le solide conique des cercles *illimités* de part et d'autre « en grandeur et en petitesse » et des ellipses *illimitées*.

Il est clair que par « cercles illimités » et « ellipses illimitées » al-Sijzī veut dire que les courbes peuvent être aussi grandes que l'on veut. Dans le cas du cylindre de révolution, il faut alors considérer non pas le solide limité par ses deux bases, mais la surface cylindrique prolongée indéfiniment. Toutes les sections planes circulaires sont alors égales, et pour les sections elliptiques on pourra avoir un grand axe aussi grand que l'on veut avec un petit axe toujours égal au rayon du cercle de base.

Ainsi, dans le cas du cylindre, si r est le rayon du cercle de base, AB le grand axe de l'ellipse de longueur $d = \frac{2r}{\sin\alpha}$, avec α l'angle de l'axe avec le plan sécant, on a $d \to +\infty$ quand α tend vers 0.

Dans le cas du cône de révolution, al-Sijzī considère de toute évidence non pas le solide limité par le sommet du cône et sa base, mais la surface conique, de part et d'autre du sommet, et prolongée indéfiniment dans les deux directions. On peut alors obtenir de part et d'autre du sommet des cercles dont le rayon croît de 0 à l'infini, et des ellipses dont les deux axes peuvent croître indéfiniment. Les paraboles et les hyperboles sont prolongées comme la surface conique.

Il apparaît clairement que ces notions, à la base de l'étude d'al-Sijzī, sont également valables dans le cas des coupoles. La parabole (ou l'hyperbole) peut en effet être prolongée indéfiniment. On peut alors choisir pour la coupole une hauteur aussi grande que l'on veut et obtenir ainsi des sections planes aussi grandes que l'on veut.

Venons-en à présent au corps du traité d'al-Sijzī.

PROPOSITION 1 : Les sections planes d'une coupole parabolique sont ou bien une parabole, ou bien une ellipse, ou bien un cercle.

Soit une coupole parabolique engendrée par la rotation de la parabole *CAD*. Trois cas se présentent selon la position du plan sécant.

1er *cas* : Le plan sécant (*HEI*) est parallèle à l'axe de la parabole et le plan (*CAD*) lui est perpendiculaire.

Le plan (HEI) coupe le plan (CAD) suivant ER et la base suivant IH. On a $ER \parallel AB$ et $IH \perp CD$. Dans la parabole CAD on a les ordonnées EQ, KGL, MXN telles que ER coupe KL en S et MN en O. D'autre part dans les cercles de diamètres LK, MN dont le plan est perpendiculaire à AB, on mène $SP \perp LK$ et $OU \perp MN$; les points P et U sont sur le plan (HEI). On a

$$PS^2 = SK \cdot SL \text{ et } OU^2 = OM \cdot ON.$$

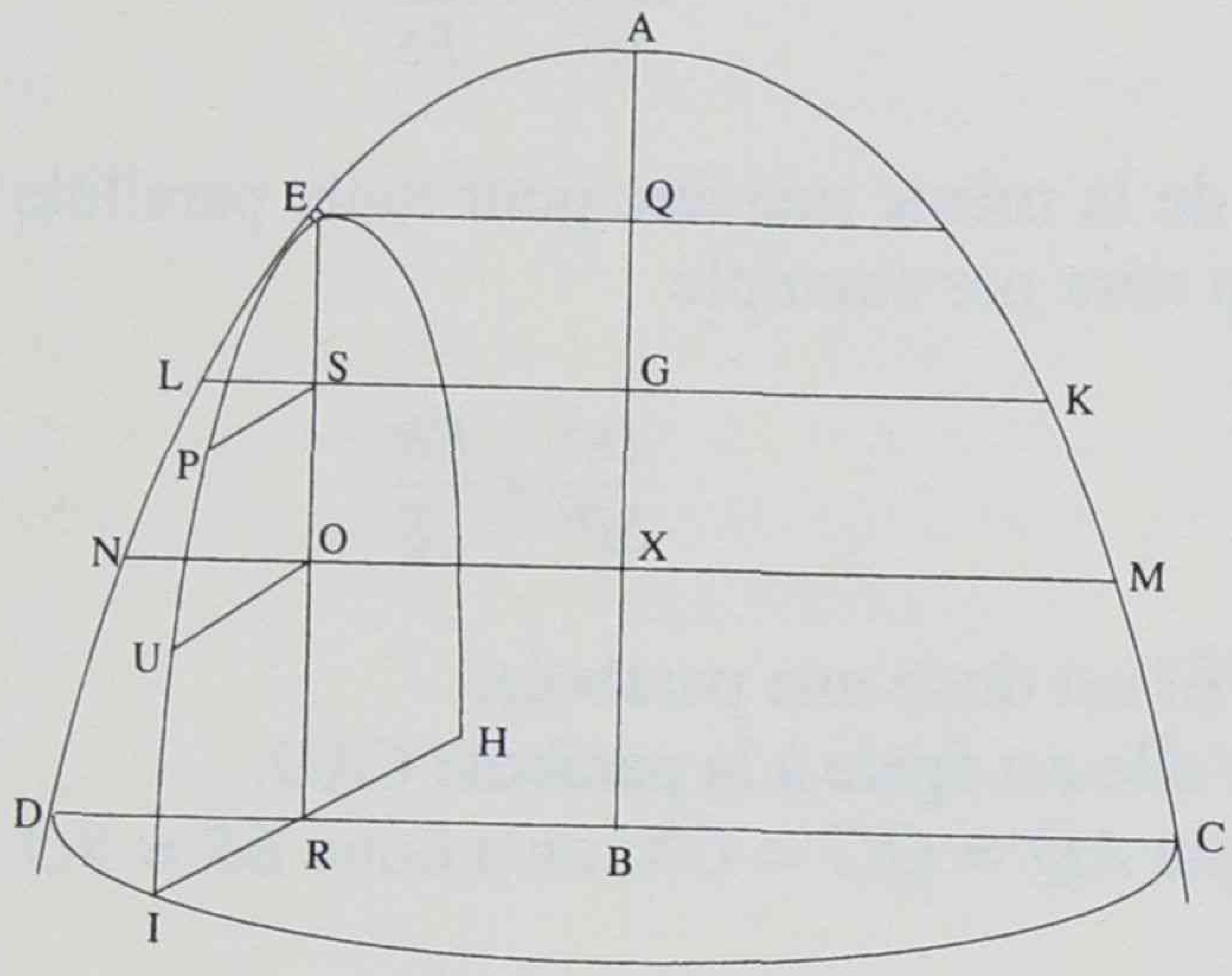


Fig. 2

D'autre part

$$MO \cdot ON = XN^2 - OX^2 = XN^2 - EQ^2$$

et

$$KS \cdot SL = GL^2 - GS^2 = GL^2 - EQ^2,$$

d'où

$$\frac{XN^2}{GL^2} = \frac{MO \cdot ON + EQ^2}{KS \cdot SL + EQ^2} = \frac{AX}{AG},$$

car $\frac{XN^2}{GL^2} = \frac{AX}{AG}$ d'après I.20 des *Coniques*.

D'autre part $KS \cdot SL = GL^2 - EQ^2$ entraîne

$$\frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = \frac{GL^2}{EQ^2} - 1 = \frac{AG}{AQ} - 1 = \frac{GQ}{AQ}.$$

De même $MO \cdot ON = XN^2 - EQ^2$ entraîne

$$\frac{MO \cdot ON}{EQ^2} = \frac{XN^2}{EQ^2} - 1 = \frac{AX}{AQ} - 1 = \frac{XQ}{AQ}.$$

On en déduit

$$\frac{MO \cdot ON}{KS \cdot SL} = \frac{XQ}{GQ} = \frac{OE}{SE},$$

d'où

$$\frac{OU^2}{SP^2} = \frac{EO}{ES}.$$

On raisonne de la même manière pour toute parallèle à SP menée par un point de ER ; on aura par exemple

$$\frac{IR^2}{SP^2} = \frac{ER}{ES}.$$

La section HEI est donc une parabole.

Montrons qu'elle est égale à la parabole CAD.

Supposons que $AQ = QG = GX$, on a donc $ES = SO = AQ$ et $EO = AG$, d'où

$$\frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = \frac{GQ}{QA} \text{ entraîne } KS \cdot SL = EQ^2,$$

ce qui entraîne $SP^2 = QE^2$.

De même

$$\frac{MO \cdot ON}{QE^2} = \frac{XQ}{QA} \text{ entraîne } MO \cdot ON = 2EQ^2 = GL^2,$$

puisque

$$\frac{GL^2}{EQ^2} = 1 + \frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = 2\ ;$$

ce qui entraîne $OU^2 = GL^2$.

À des abscisses égales correspondent des ordonnées égales ; les deux paraboles sont donc égales.

Remarques :

1) Dans cette proposition comme dans d'autres, al-Sijzī fait appel à la proposition I.20 des *Coniques*. Il recourra également ensuite à la proposition I.21. Celle-là est relative à la parabole, celle-ci à l'ellipse et à l'hyperbole.

Dans ces propositions d'Apollonius, les sections sont rapportées à un diamètre quelconque. Dans les problèmes d'al-Sijzī, elles sont rapportées à leur axe.

D'autre part, Apollonius n'a pas établi de réciproque pour ces deux propositions. Or al-Sijzī applique le résultat d'Apollonius à une parabole, et plus tard à une hyperbole, données. Mais c'est une réciproque qu'il utilise quand il veut démontrer quelle est la *nature* de la *ligne* obtenue comme section plane d'une des coupoles considérées.

Il démontre ainsi que les ordonnées de deux points de cette ligne vérifient une des égalités des propositions I.20 ou I.21 des *Coniques*. Il sous-entend d'autre part que la propriété est vérifiée pour tout couple de points pris sur la ligne étudiée. Il écrit en effet: «[...] et toute droite menée parmi les droites ordonnées sera dans le même état» (*infra*, p. 202). Il en déduit enfin la nature de la ligne étudiée. On remarque, non seulement dans ce traité, mais aussi dans le suivant, qu'il utilise les propositions I.20 et I.21 des *Coniques* sous forme directe et sous forme réciproque.

2) Si on désigne par c le côté droit de la parabole DAC, on peut montrer plus rapidement que la section HEI est une parabole d'axe ER et de côté droit c.

On a
$$GL^2 = c \cdot AG,\ XN^2 = c \cdot AX,\ EQ^2 = c \cdot AQ,\ BD^2 = c \cdot BA.$$

Posons $AQ = QG = GX$; d'où $AQ = ES = SO$, d'où

$$\frac{SP^2}{c \cdot SE} = \frac{SL \cdot SK}{c \cdot SE} = \frac{GL^2 - GS^2}{c \cdot SE} = \frac{GL^2 - EQ^2}{c \cdot SE} = \frac{AG - AQ}{SE} = 1,$$

car $SE = GQ$.

Par un calcul semblable on a
$$\frac{OU^2}{c \cdot EO} = \frac{XQ}{EO} = 1.$$

On a donc
$$\frac{SP^2}{c \cdot SE} = \frac{OU^2}{c \cdot EO} = 1.$$

La section HEJ est donc une parabole d'axe ER, de côté droit c et elle est égale à la parabole DAC.

Remarquons enfin que, pour un point quelconque P, qui se projette en S sur ER et en G sur AB, on a

$$PS^2 = SK \cdot SL = GL^2 - EQ^2 = c \cdot AG - c \cdot AQ = c \cdot QG = c \cdot ES,$$

où on reconnaît le symptôme d'une parabole égale à DAC.

2^e *cas* : Le plan sécant (GEI) n'est pas parallèle, ni perpendiculaire à l'axe AB de la coupole.

Soit EG l'intersection du plan sécant avec le plan DAC passant par AB et perpendiculaire à (GEI). Par le point S, intersection de AB et GE, on mène la droite ordonnée KL de la parabole DAC. On mène une deuxième ordonnée MN qui coupe EG en O. Dans les plans perpendiculaires à AB suivant KL et MN on mène $SP \perp KL$ et $OU \perp MN$. Les points P et U sont sur les cercles de diamètres KL et MN et sont aussi sur la section plane étudiée. Menons la tangente XY à la parabole DAC parallèle à EG ; elle touche la parabole en Y et rencontre en X la tangente AX au point A ; on a alors

$$\frac{GS \cdot SE}{KS \cdot SL} = \frac{XY^2}{AX^2} \text{ et } \frac{GO \cdot OE}{MO \cdot ON} = \frac{XY^2}{AX^2},$$

d'après la proposition III.17 des *Coniques*.

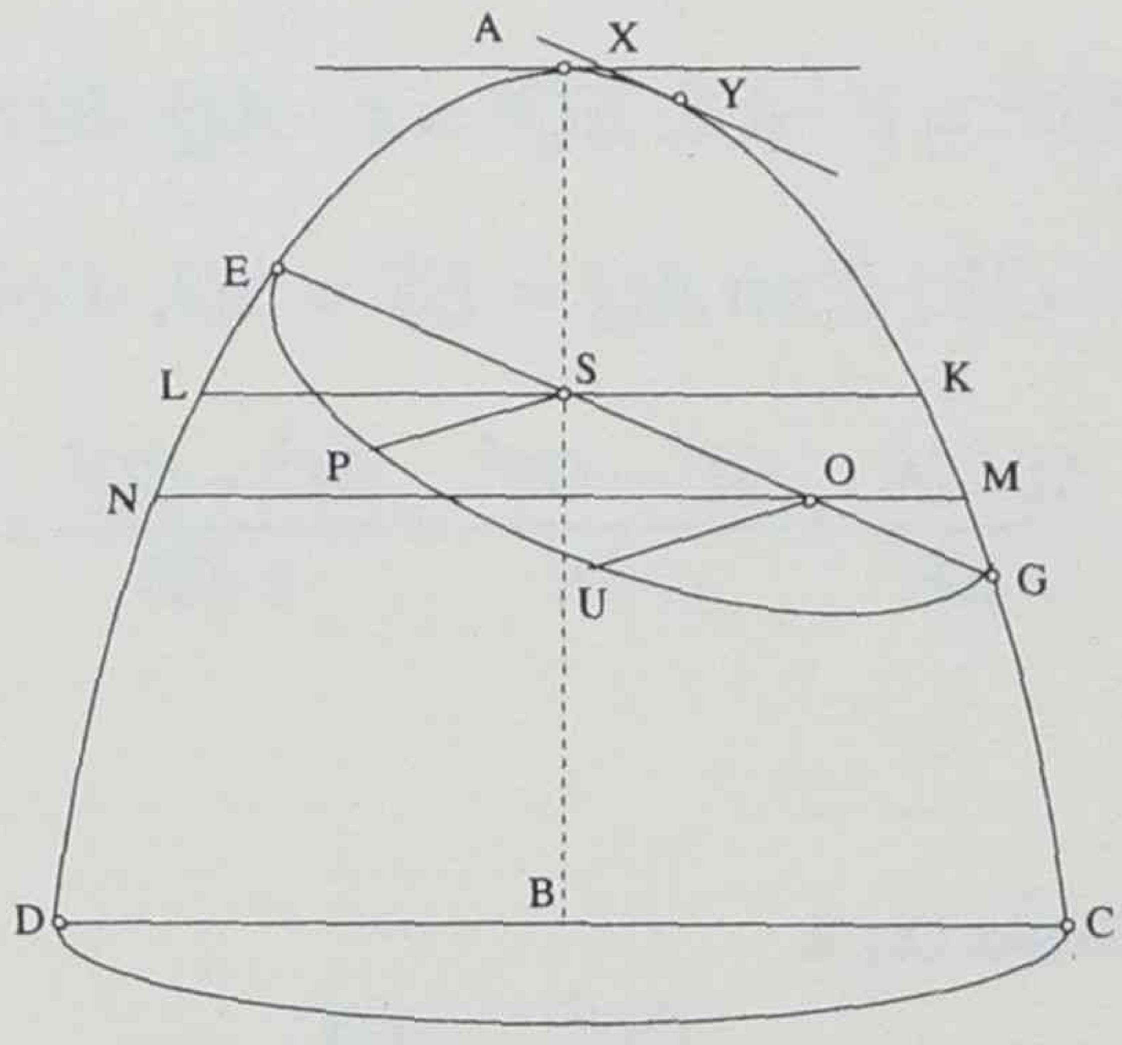


Fig. 3

Or $KS \cdot SL = SP^2$ et $MO \cdot ON = OU^2$; on a donc

$$\frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON} = \frac{GS \cdot SE}{GO \cdot OE} = \frac{SP^2}{OU^2}$$

et la section est une ellipse d'axe GE, d'après I.21 des *Coniques*.

3^e *cas*: Si le plan sécant est perpendiculaire à l'axe AB de la coupole, la section est un cercle.

Remarque: Al-Sijzī, on vient de le voir, a recours à la proposition III.17 des *Coniques*. Cette proposition est valable pour toute section conique. Elle se présente comme suit :

Soit AX et AY deux tangentes qui se coupent au point A. Par un point Z intérieur à la section on mène les sécantes $KE /\!/ AY$ et $\Delta\Theta /\!/ AX$. Apollonius montre que

$$\frac{Z\Theta \cdot Z\Delta}{ZK \cdot ZE} = \frac{AX^2}{AY^2}.$$

C'est sous cette forme qu'al-Sijzī l'utilise dans l'étude de la section elliptique de la coupole parabolique.

Il fait ensuite appel à des égalités de rapports qui se déduisent de cette proposition :

Si par un point $Z' \neq Z$ on mène $K'E' /\!/ AY$ et $\Delta'\Theta' /\!/ AX$, on a aussi

$$\frac{Z'\Theta' \cdot Z'\Delta'}{Z'K' \cdot Z'E'} = \frac{AX^2}{AY^2},$$

d'où

$$\frac{Z\Theta \cdot Z\Delta}{ZK \cdot ZE} = \frac{Z'\Theta' \cdot Z'\Delta'}{Z'K' \cdot Z'E'}.$$

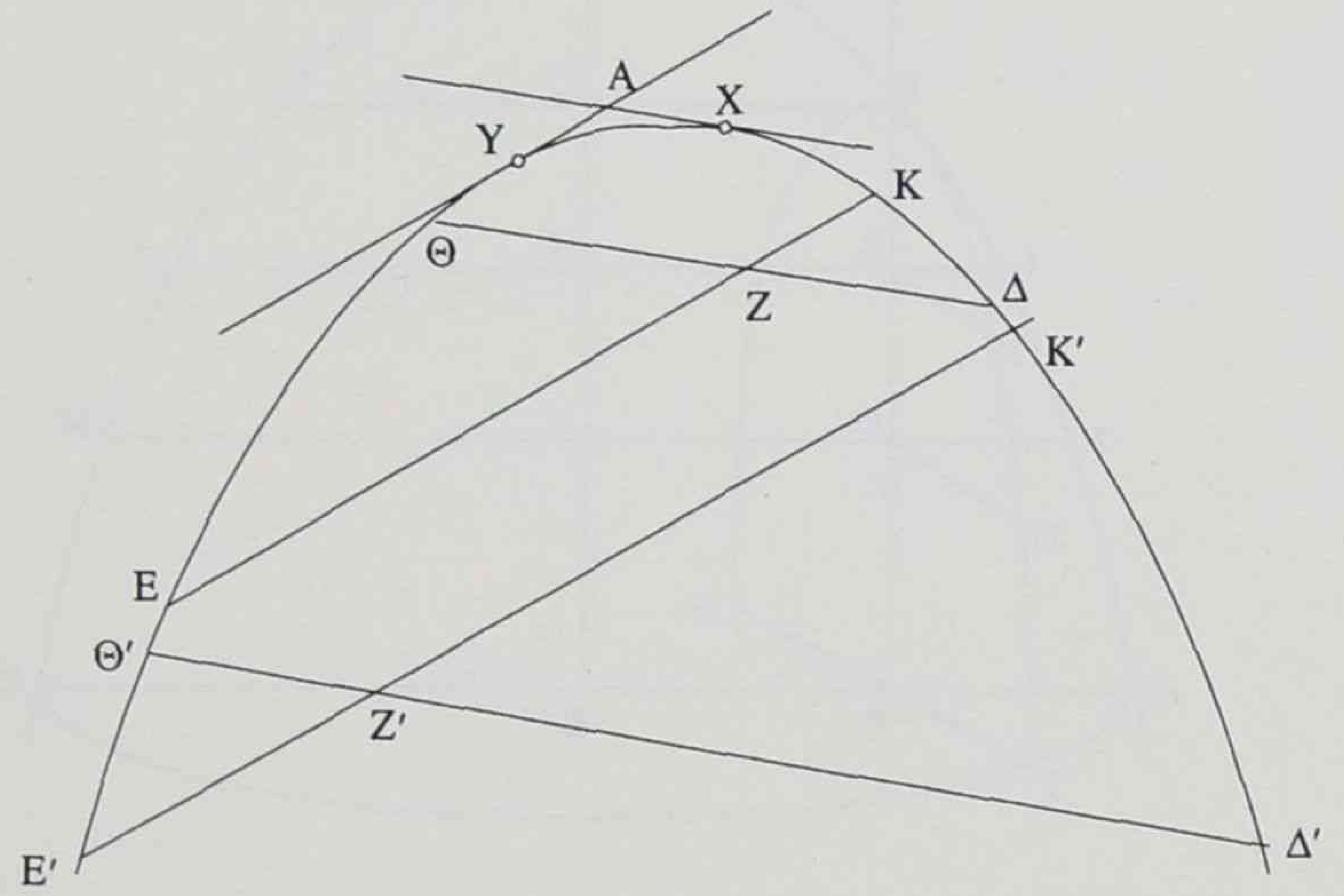


Fig. 4

Cette proposition s'applique à des sécantes issues de deux points distincts, sécantes deux à deux parallèles. Al-Sijzī l'appliquera plus tard sous cette forme, sans faire appel aux deux tangentes.

Il faut également l'appliquer si l'on veut justifier les résultats obtenus par al-Sijzī dans la dernière partie de l'étude de la coupole hyperbolique.

On reconnaît dans cette propriété l'énoncé de *la puissance d'un point par rapport à une conique* qui apparaît ici pour la première fois dans l'état actuel de notre connaissance. Cette propriété n'apparaîtra à nouveau qu'à la fin du XVII^e siècle. C'est MacLaurin qui la généralisera à toutes les courbes algébriques.

PROPOSITION 2 : Soit la coupole engendrée par la rotation de l'hyperbole *CAD* autour de son axe *AB* ; soit *AT* le diamètre transverse. La section *HEI* par un plan sécant est ou bien une hyperbole, ou bien une ellipse, ou bien un cercle.

Trois cas se présentent selon la position du plan sécant.

1er *cas* : Le plan sécant (*HEI*) est parallèle à l'axe *AB* et perpendiculaire au plan (*CAD*) suivant la droite *ER* et coupe la coupole suivant l'hyperbole *HEI*.

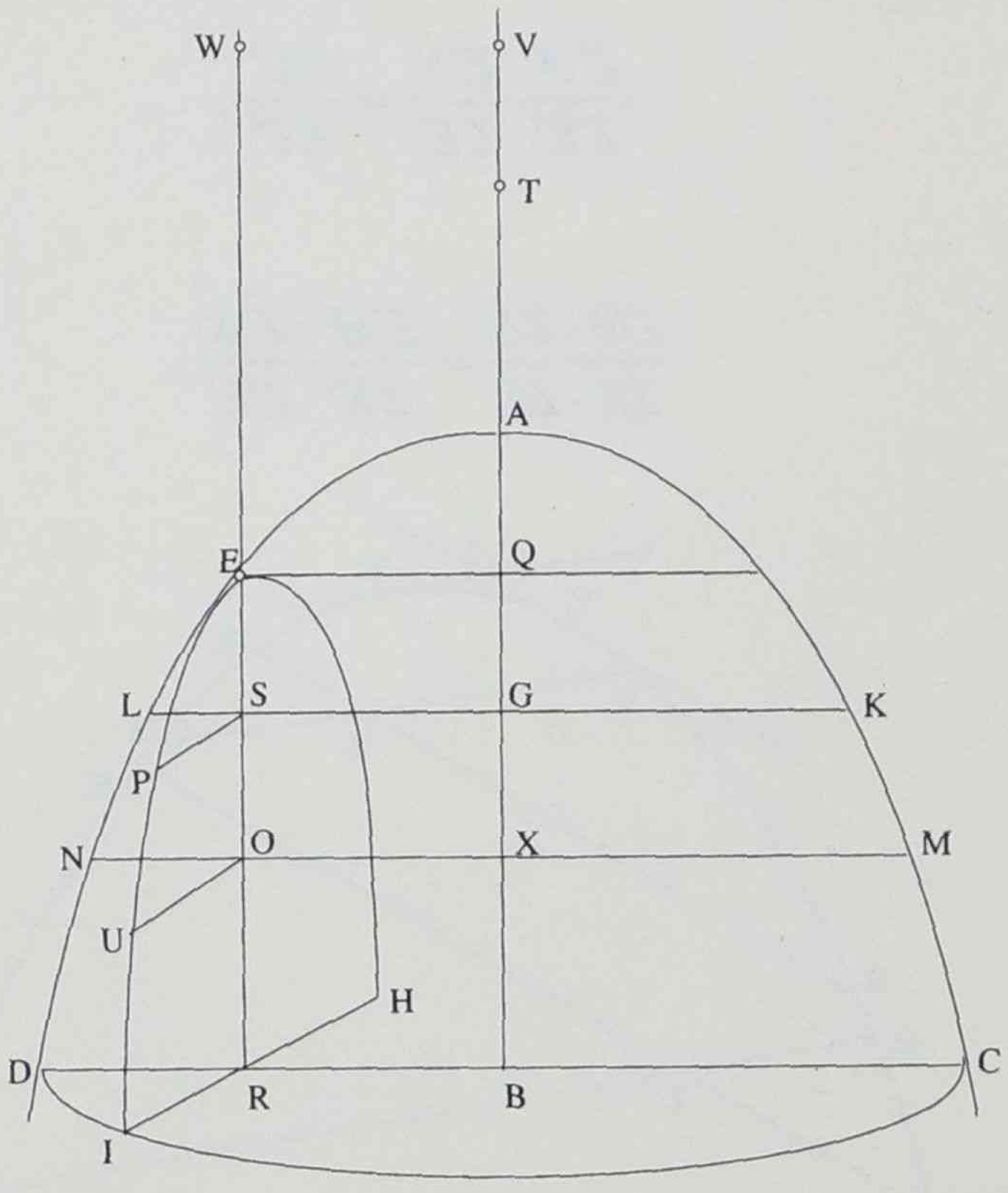


Fig. 5

On mène les ordonnées *EQ*, *KL* et *MN* dans l'hyperbole *CAD* d'axe *AB* et de diamètre transverse *AT*. On a, d'après I.21 des *Coniques*

$$\frac{QE^2}{GL^2} = \frac{TQ \cdot QA}{TG \cdot GA} \quad \text{et} \quad \frac{QE^2}{XN^2} = \frac{TQ \cdot QA}{TX \cdot XA},$$

d'où

$$\frac{XN^2 - QE^2}{XN^2} = \frac{TX \cdot XA - TQ \cdot QA}{TX \cdot XA} \text{ et } \frac{GL^2 - QE^2}{GL^2} = \frac{TG \cdot GA - TQ \cdot QA}{TG \cdot GA}.$$

Or on a

$$\frac{XN^2}{GL^2} = \frac{TX \cdot XA}{TG \cdot GA},$$

donc

$$\frac{XN^2 - QE^2}{GL^2 - QE^2} = \frac{TX \cdot XA - TQ \cdot QA}{TG \cdot GA - TQ \cdot QA}.$$

D'autre part

$$XN^2 - QE^2 = XN^2 - XO^2 = OM \cdot ON = OU^2$$

et

$$GL^2 - QE^2 = GL^2 - GS^2 = KS \cdot SL = SP^2.$$

On prolonge AT de $TV = QA$; on a alors

$$\begin{aligned} TX \cdot XA - TQ \cdot QA &= TX(XQ + QA) - (TX - XQ)QA = XQ(TX + QA) \\ &= VX \cdot XQ \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} TG \cdot GA - TQ \cdot QA &= TG(GQ + QA) - (TG - GQ)QA = GQ(TG + QA) \\ &= VG \cdot GQ. \end{aligned}$$

Posons $EW = QV$, on a $VG = WS$ et $VX = WO$; on a alors

$$\frac{OM \cdot ON}{KS \cdot SL} = \frac{VX \cdot XQ}{VG \cdot GQ},$$

$$\frac{OU^2}{SP^2} = \frac{WO \cdot OE}{WS \cdot SE}.$$

La section HEI est donc une hyperbole et son diamètre transverse est EW. Celui-ci excède le diamètre transverse de l'hyperbole CAD de $AQ + VT = 2AQ$, c'est-à-dire du double de l'abscisse de son sommet E. La section plane est bien cette hyperbole HEI.

2e *cas* : Le plan sécant (HEI) est non parallèle à l'axe AB mais passe par le centre T et il est perpendiculaire au plan (CAD). Celui-là coupe celui-ci suivant un diamètre TER. La section HEI est une hyperbole d'axe ER.

Soit cette fois AT la moitié du diamètre transverse de l'hyperbole CAD ; le point T est celui qu'Apollonius appelle « centre ». Soit $JT = ET$.

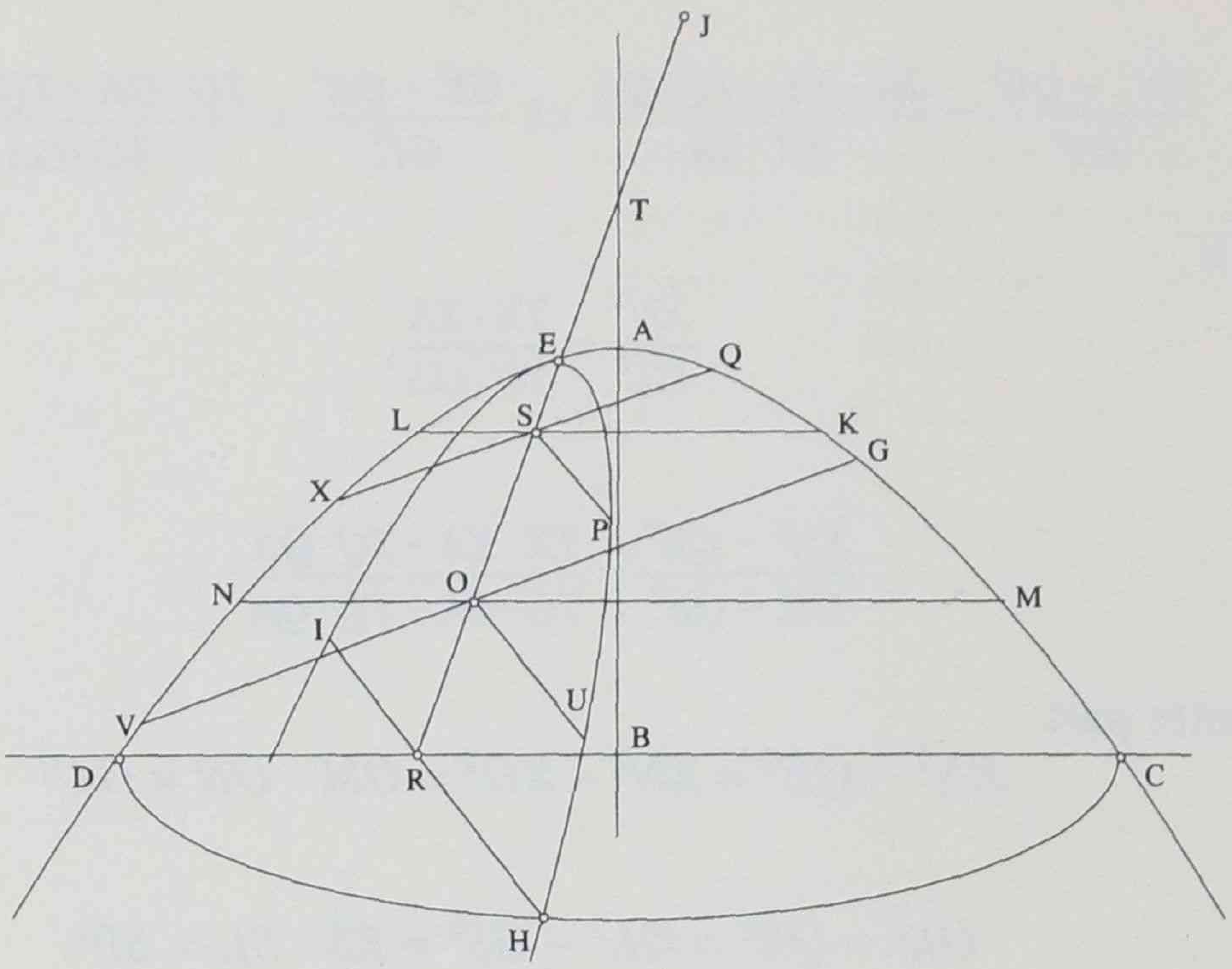


Fig. 6

Les ordonnées KL et MN relatives au diamètre AB coupent ER en S et O. On mène par ces points les ordonnées QX et GV relatives au diamètre ER. On mène $SP \perp QX$ et $OU \perp GV$ dans les plans des cercles de diamètres KL et MN. Comme dans le cas de la parabole, on a

$$\frac{QS \cdot SX}{GO \cdot OV} = \frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON};$$

mais $QS \cdot SX = SX^2$ et $GO \cdot OV = OV^2$ car ER est un diamètre.

D'autre part $KS \cdot SL = SP^2$ et $MO \cdot ON = OU^2$, donc

$$\frac{SX^2}{OV^2} = \frac{SP^2}{OU^2}.$$

Or dans l'hyperbole CAD, on a

$$\frac{SX^2}{OV^2} = \frac{JS \cdot SE}{JO \cdot OE},$$

d'où

$$\frac{JS \cdot SE}{JO \cdot OE} = \frac{SP^2}{OU^2};$$

la section HEI est donc une hyperbole de diamètre transverse EJ.

Al-Sijzī note que pour le plan sécant qui coupe la coupole hyperbolique, passe par l'une des ordonnées et est tel qu'il ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe, on démontre, de la même manière que pour la coupole parabolique, que la section est une *ellipse*. Mais si ce plan est perpendiculaire à l'axe, la section est un *cercle*.

3e *cas* : Le plan sécant est perpendiculaire au plan (*CAD*) et le coupe suivant une droite *ER* parallèle au diamètre transverse *TJI* (*J* sur l'hyperbole, *I* sur la base, *T* le milieu du diamètre transverse *JV*).

Al-Sijzī donne l'idée de la démonstration, que nous allons écrire en détail.

On mène l'ordonnée *EQ* relative au diamètre *TI* et les ordonnées qui lui sont parallèles : *KL* de milieu *G* et *MN* de milieu *X*. On a alors

$$\frac{VG \cdot GJ}{VX \cdot XJ} = \frac{KG \cdot GL}{MX \cdot XN} = \frac{KG^2}{MX^2}$$

et

$$\text{(1)} \qquad \frac{VG \cdot GJ}{VQ \cdot QJ} = \frac{KG^2}{EQ^2},$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{VX \cdot XJ}{VQ \cdot QJ} = \frac{MX^2}{EQ^2}.$$

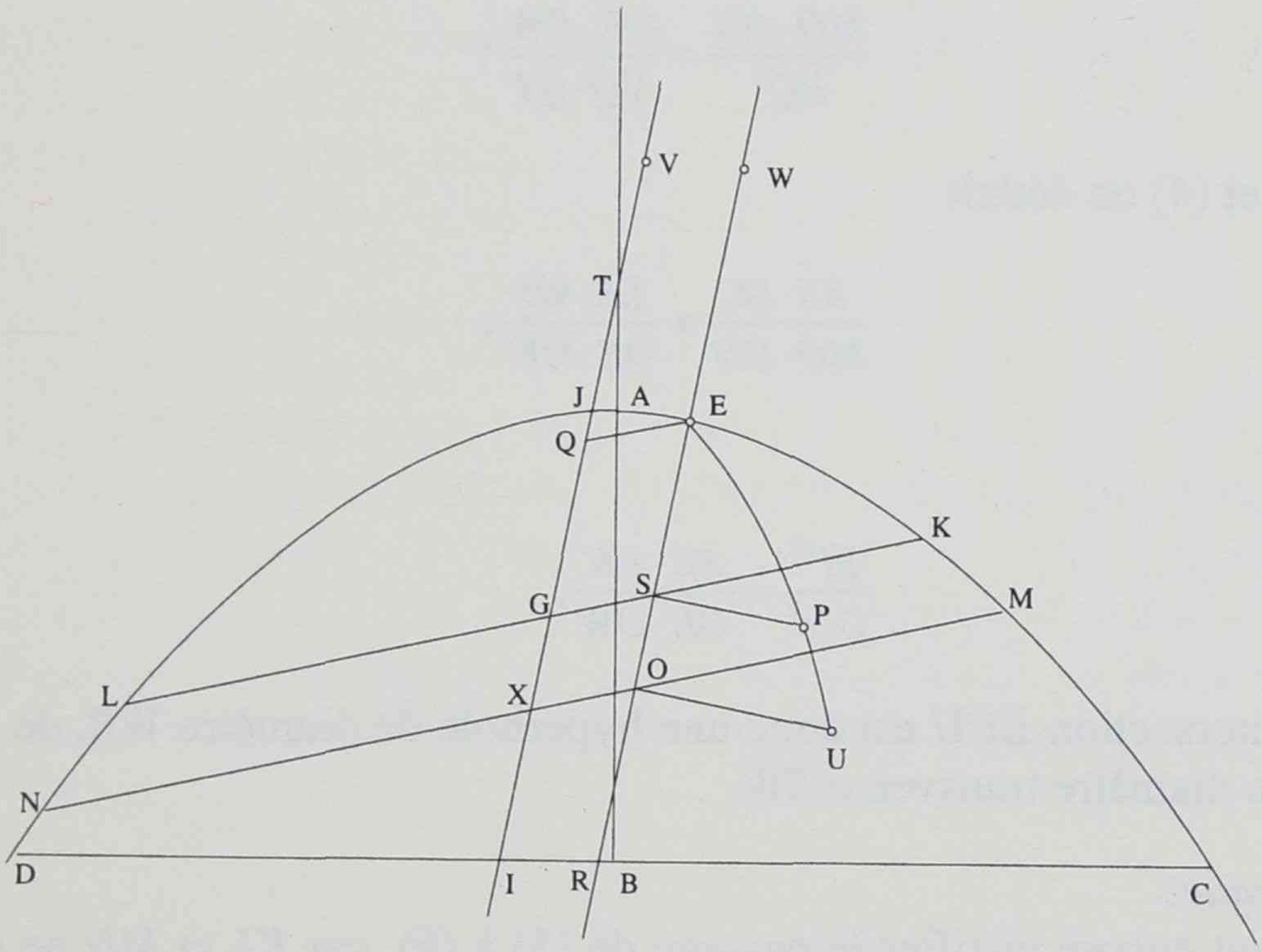


Fig. 7

De (1) on déduit

$$\frac{KG^2 - EQ^2}{EQ^2} = \frac{GQ(VG + QJ)}{VQ \cdot QJ};$$

mais on a $EQ = GS$ et $GQ = ES$, d'où

$$KG^2 - EQ^2 = KG^2 - GS^2 = KS \cdot SL.$$

On pose $WE = VQ + QJ$, d'où $VG + QJ = WS$, et par conséquent

$$\frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = \frac{ES \cdot WS}{VQ \cdot QJ}. \tag{3}$$

De la même manière, de (2) on déduit

$$\frac{MX^2 - EQ^2}{EQ^2} = \frac{XQ(VX + QJ)}{VQ \cdot QJ};$$

mais on a $EQ = OX$ et $XQ = OE$; donc

$$MX^2 - EQ^2 = MX^2 - OX^2 = MO \cdot ON \text{ et } VX + QJ = EW + OE = OW.$$

De (2) on déduit

$$\frac{MO \cdot ON}{EQ^2} = \frac{OE \cdot OW}{VQ \cdot QJ}; \tag{4}$$

de (3) et (4) on déduit

$$\frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON} = \frac{ES \cdot WS}{OE \cdot OW}, \tag{5}$$

d'où

$$\frac{SP^2}{OU^2} = \frac{SE \cdot SW}{OE \cdot OW}. \tag{6}$$

L'intersection EPU est donc une hyperbole de diamètre WR, de sommet E et de diamètre transverse EW.

Remarque:

Il faut encore justifier le passage de (5) à (6), car KL et MN ne sont pas cette fois des diamètres de cercle. Mais si par S et O on mène les plans perpendiculaires à l'axe AB, ils coupent la coupole suivant deux cercles de diamètres respectifs $K'L'$ et $M'N'$, et on aura

$$\frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON} = \frac{K'S \cdot SL'}{M'O \cdot ON'}$$ d'après III.17 des *Coniques*.

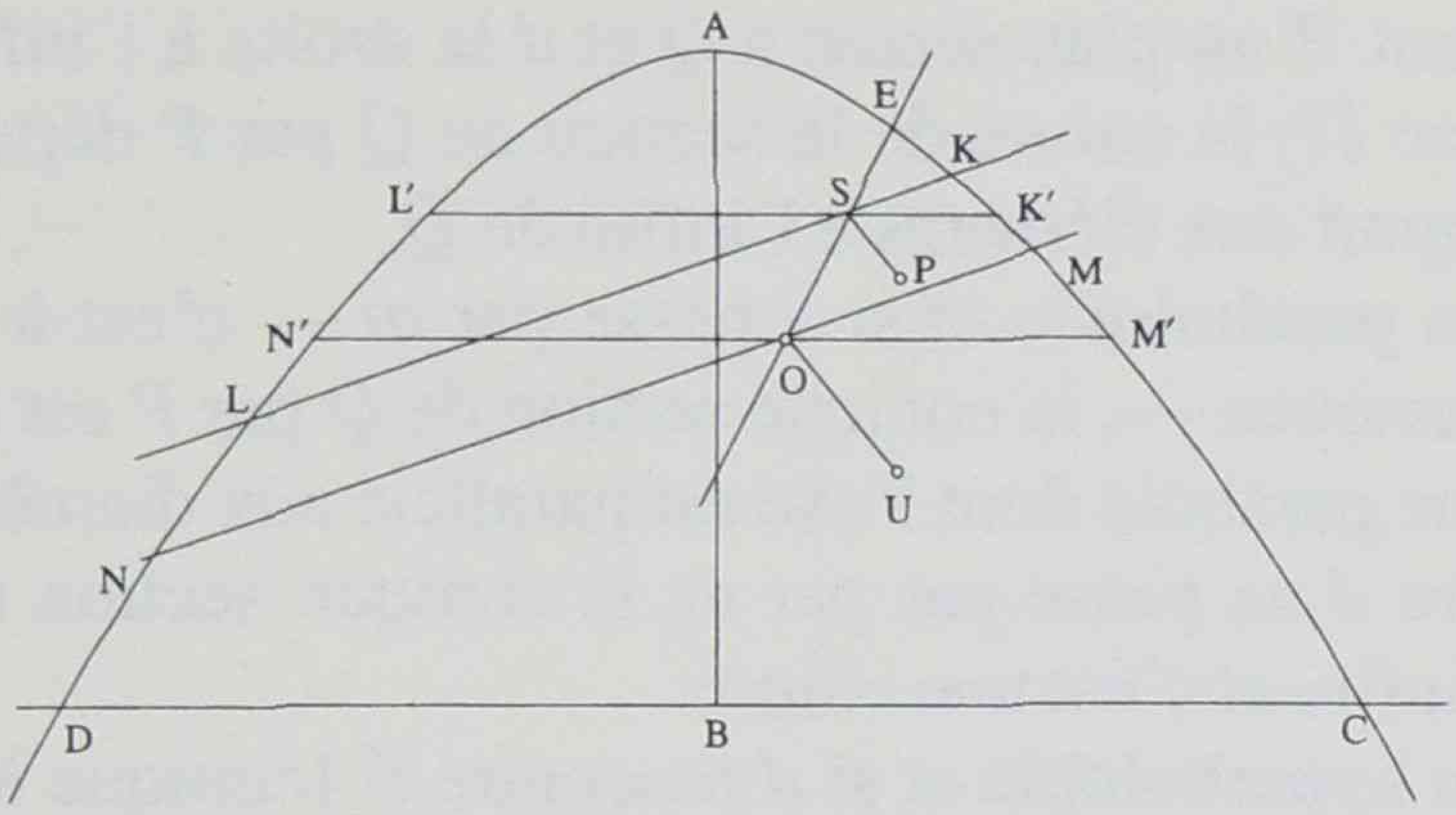


Fig. 8

D'autre part SP et OU sont perpendiculaires au plan (CAD), donc $SP \perp K'L'$ et $OU \perp M'N'$, d'où $K'S \cdot SL' = SP^2$ et $M'O \cdot ON' = OU^2$, et par conséquent on obtient (6).

1.2. *Interprétation projective du problème des sections planes d'une quadrique*

Cette interprétation, disons-le dès le début, est étrangère aux mathématiques d'al-Sijzī, mais elle nous permettra de voir directement le sens et les limites de la contribution du mathématicien.

Rappelons que l'intersection d'une quadrique Q et d'un plan P est une conique. En effet, Q est déterminée par une forme quadratique q dans l'espace vectoriel V qui définit l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$ où Q se trouve ; le plan P est déterminé par un sous-espace vectoriel W de V, de dimension 3 (hyperplan). L'intersection de Q et de P est déterminée par la restriction de q à l'hyperplan W; cette restriction est une forme quadratique sauf si elle est identiquement nulle. Ce dernier cas ne peut se produire que si P est contenu dans l'ensemble des points de Q, c'est-à-dire dans le cas où Q est dégénérée en deux plans (distincts ou confondus).

On se donne donc une quadrique Q quelconque (al-Sijzī ne considère que les quadriques de révolution et convexes) et sa situation par rapport au plan de l'infini Π de l'espace :

• Si Q est tangente à Π en un point ω, Q est un paraboloïde et ω donne la direction de ses diamètres.

• Si Q coupe Π suivant une conique C, Q est un hyperboloïde et C définit le cône asymptote de Q.

• Si Q ne rencontre pas Π, Q est un ellipsoïde.

Soit maintenant P un plan sécant à Q et d la droite à l'infini de P, intersection de P avec Π; la nature de la section de Q par P dépend de la situation de d par rapport aux éléments à l'infini de Q.

a) Si Q est un paraboloïde et si d passe par ω — c'est-à-dire que P est parallèle aux diamètres —, la conique section de Q par P est tangente à d en ω; c'est donc une parabole dont l'axe est parallèle aux diamètres de Q.

Si au contraire d ne passe pas par ω, la conique section de Q par P n'a pas de point à l'infini et c'est une ellipse.

b) Si Q est un hyperboloïde et si d rencontre C (conique à l'infini de Q), la conique section de Q par P rencontre d aux deux points de $d \cap C$; c'est donc une hyperbole.

Si au contraire d reste extérieure à C, la conique section de Q par P ne rencontre pas d et c'est donc une ellipse.

Ces deux cas se distinguent par le fait que le diamètre conjugué de la direction de P est non transverse dans le premier cas, donnant une section hyperbolique, et transverse dans le second cas, donnant une section elliptique.

Al-Sijzī indique la section elliptique seulement dans le cas particulier où P n'est pas parallèle à l'axe de Q, ce qui est insuffisant. Cette insuffisance est bien naturelle en l'absence d'une théorie des plans et diamètres conjugués par rapport à une quadrique.

Il reste un cas limite non envisagé par al-Sijzī : celui où d est tangente à C en un point ω; la conique section est alors tangente à d en ω et c'est donc une parabole. Ce cas se produit lorsque P est parallèle à un plan tangent au cône asymptote de Q. Ce cas s'ajoute à l'énumération donnée par al-Sijzī pour les surfaces hyperboliques ; celles-ci auraient donc dû être classées avec le cône dans le rang 5 et non pas dans le rang 4.

c) Si Q est un ellipsoïde, aucune de ses sections planes ne peut avoir de point à l'infini : ce sont donc toujours des ellipses ou des cercles.

Ajoutons que le cylindre, qui est cône dont le sommet ω est à l'infini, est à ranger avec le paraboloïde, tandis que le cône, qui a une conique C à l'infini est à ranger avec l'hyperboloïde.

On voit qu'en se posant ces questions al-Sijzī a ouvert un champ de recherche à la limite des mathématiques de son temps.

1.3. *Sur les propriétés des solides elliptiques, hyperboliques et paraboliques*

Dans son traité *Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique*, al-Sijzī part des définitions de ces trois solides et étudie leurs sections planes. Il commence par définir le solide elliptique en partant de deux ellipses égales tracées dans deux plans parallèles. On devrait ensuite préciser leurs positions relatives pour qu'une droite qui reste parallèle à celle qui joint leurs centres et qui rencontre la première ellipse rencontre aussi la seconde, autrement dit l'une des ellipses est déduite de l'autre par translation. La définition d'al-Sijzī semble s'inspirer de celle du cylindre à base circulaire que donne Thābit ibn Qurra[1]. Ce dernier part en effet de deux cercles égaux situés dans des plans parallèles pour définir le cylindre. Ainsi, si on joint les centres de ces cercles par une droite et si on mène par un point de l'un des cercles une parallèle à cette droite, elle rencontre l'autre cercle. Dans son mouvement autour des cercles, cette droite, tout en restant parallèle à la droite des centres, engendre la surface cylindrique. Les définitions de Thābit ibn Qurra, qui très vraisemblablement figuraient dans le livre de son maître al-Ḥasan ibn Mūsā déjà évoqué — définitions du côté du cylindre, du cylindre droit, du cylindre oblique, de la hauteur du cylindre — sont les mêmes que celles qu'on peut lire dans le traité d'al-Sijzī.

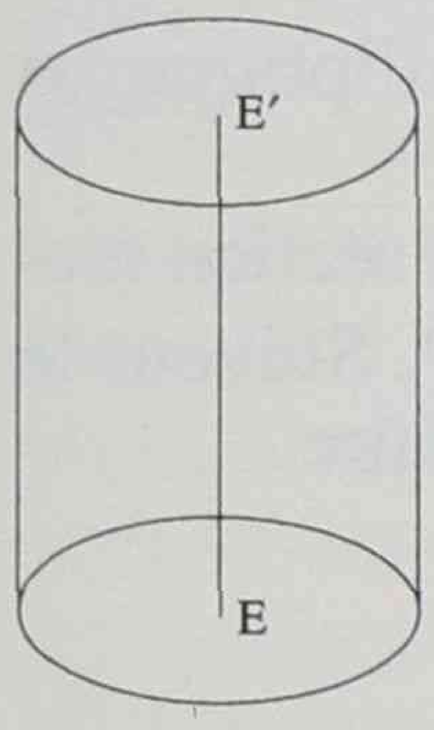


Fig. 9.1

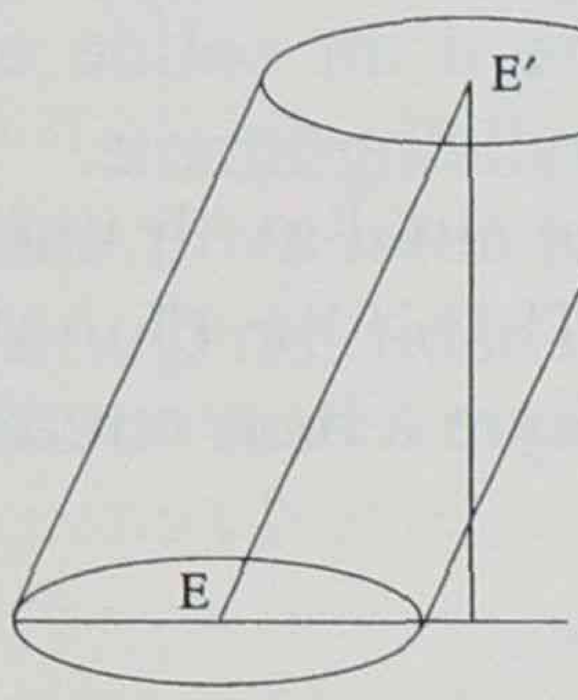


Fig. 9.2

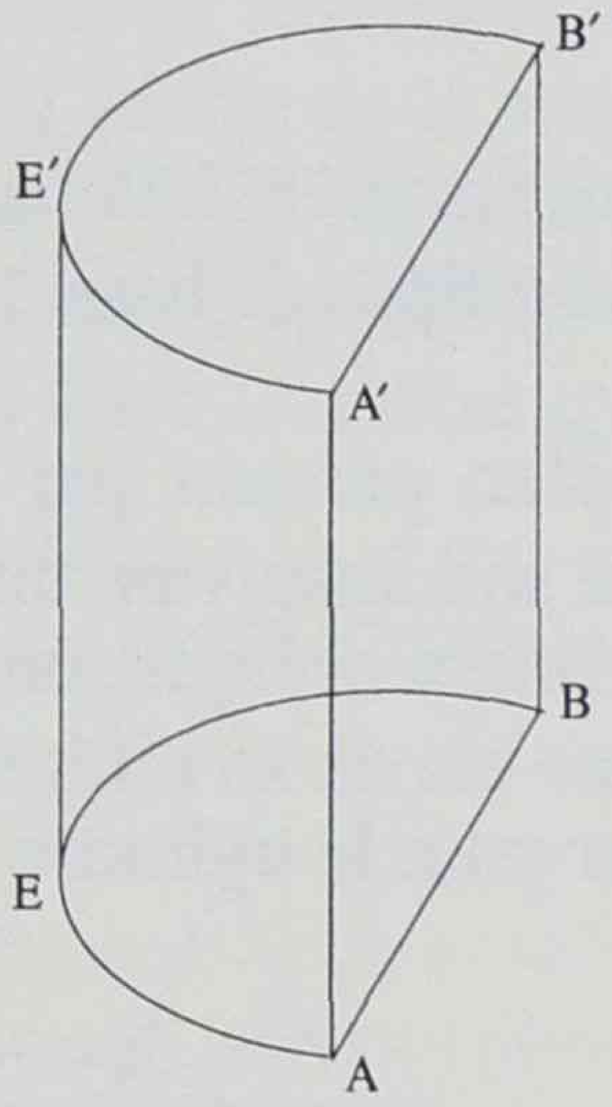


Fig. 9.3

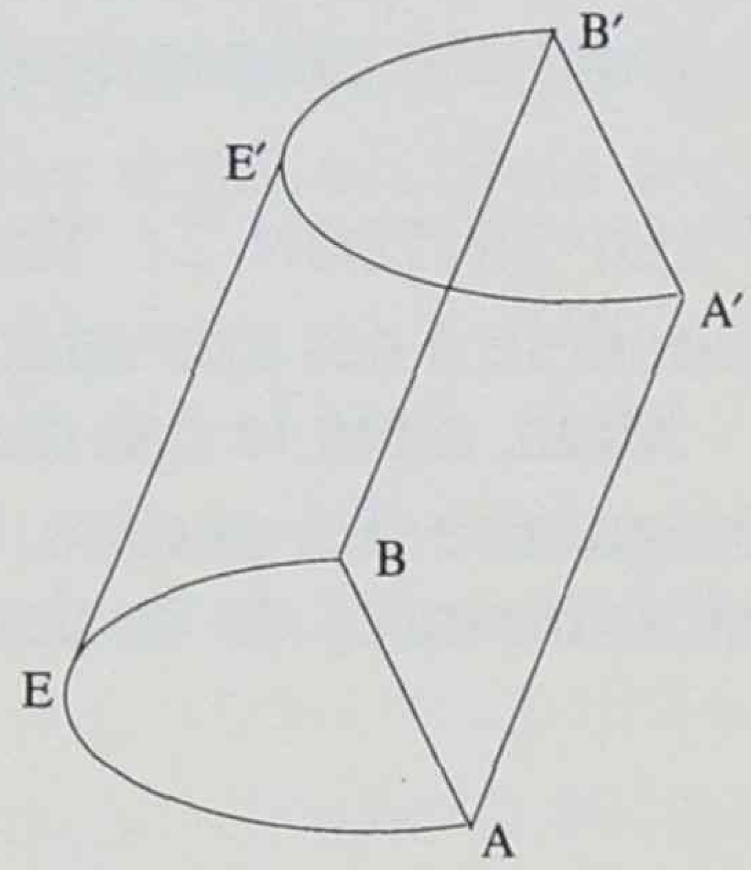


Fig. 9.4

Plus généralement, pour les trois solides, on considère un plan $\mathscr{P}$ et une droite D qui le coupe. Pour le solide elliptique, on considère une ellipse $\mathscr{E}$ dans le plan $\mathscr{P}$. Le mouvement d'une droite qui reste parallèle à D et suit le contour de l'ellipse engendre une surface cylindrique. L'intersection de celle-ci par un plan $\mathscr{Q}$ parallèle à $\mathscr{P}$ est une ellipse $\mathscr{E}'$ égale à $\mathscr{E}$. Si E et E' sont les centres respectifs de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, on a $EE' \,//\, D$ et les ellipses se correspondent dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EE'}$. Le solide compris entre les deux plans et la surface cylindrique est précisément le solide étudié par al-Sijzī. Quant au solide hyperbolique (ou parabolique), on considère un arc AEB d'hyperbole (ou de parabole) situé dans un plan $\mathscr{P}$ et limité par une

[1] *Les Mathématiques infinitésimales du* IX^e^ *au* XI^e^ *siècle*, vol. I, p. 502.

corde AB. Cette corde peut être choisie perpendiculaire ou non à l'axe de la section. Par le mouvement d'une droite qui reste parallèle à la droite D et suit le contour formé par l'arc AEB et la corde BA, on engendre une surface courbe, complétée par une bande plane. Si on coupe cette surface par un plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$, on obtient une figure $(A'E'B'A')$ égale à la figure $(AEBA)$ — hyperbole ou parabole. Si E et E' sont leurs sommets respectifs, elles se correspondent dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EE'}$.

Dans les trois cas, si D est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, le solide est dit droit ; sinon il est dit oblique, et pour ce dernier, on définit sa hauteur. La droite joignant les centres des deux ellipses est appelée *axe* du solide. Le segment de droite mobile compris entre les deux bases parallèles est, pour les trois solides, appelé *côté* du solide.

Après cette introduction, al-Sijzī établit huit propositions que nous allons examiner.

1.3.1. *Les sections planes*

PROPOSITION 1 : Tout plan parallèle à la base d'un solide elliptique le coupe suivant une ellipse égale à l'ellipse de base.

PROPOSITION 2 : Tout plan passant par l'axe d'un solide elliptique ou parallèle à cet axe coupe le solide suivant un parallélogramme.

Mais, dans le cas du cylindre oblique, on peut aussi avoir une section rectangulaire. Ici encore, force est de se référer à Thābit ibn Qurra[1]. Suivons le raisonnement de ce dernier pour le cylindre oblique à base circulaire.

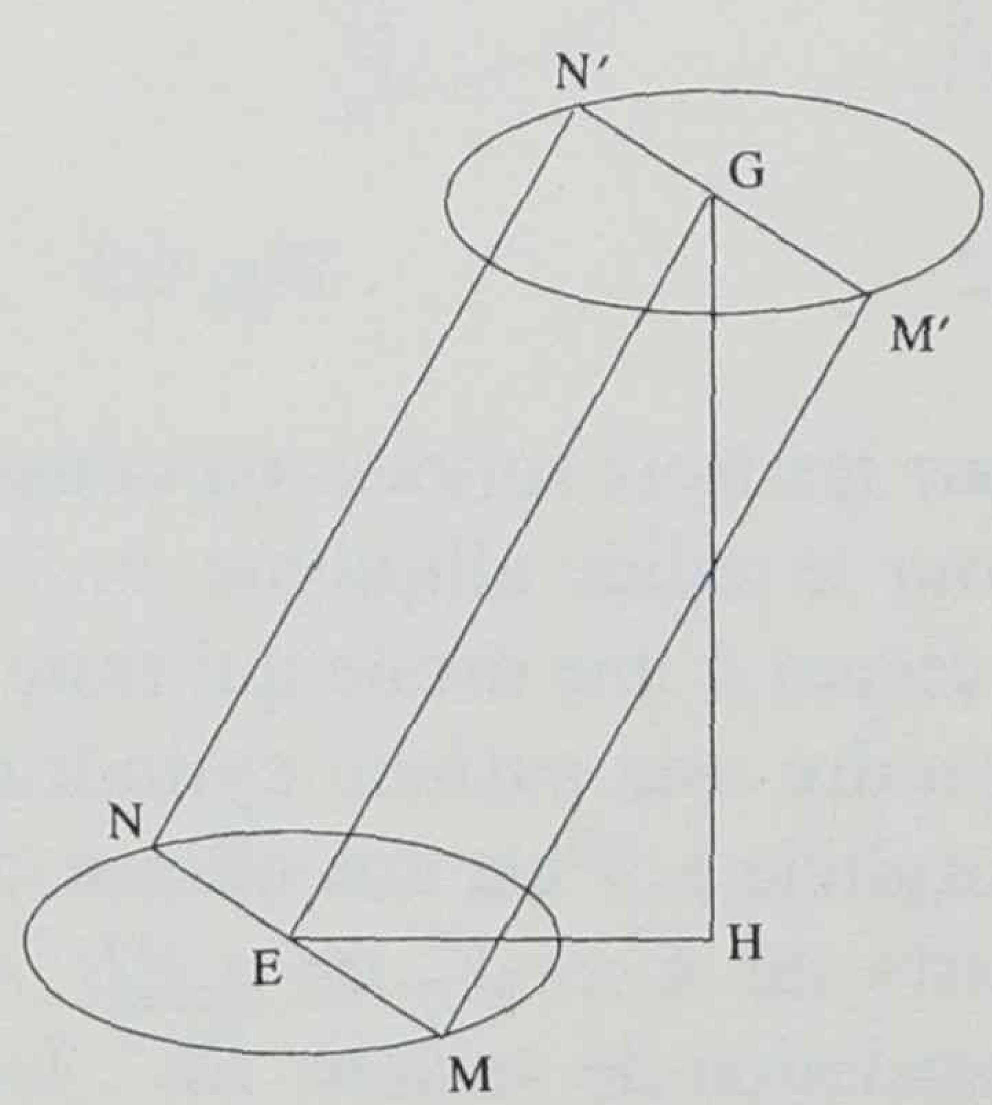


Fig. 10

[1] *Ibid.*, prop. 5, p. 512.

Soit EG l'axe du cylindre oblique et GH sa hauteur. On considère un plan $\mathscr{P}$ passant par EG et perpendiculaire au plan EGH. Le plan $\mathscr{P}$ coupe les bases suivant les cordes MN et $M'N'$ de milieux respectifs E et G. On a $MN \perp EG$, $MN = M'N'$ (translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$). On a alors $MN \parallel M'N'$; le parallélogramme est donc rectangle.

Thābit ibn Qurra montre également qu'un plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $MNN'M'$ donne aussi comme section plane un rectangle, et il précise que seuls les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ donnent une section rectangulaire. Contrairement à Thābit ibn Qurra, al-Sijzī ne s'occupe pas dans ce traité des sections rectangulaires. Les avait-il étudiées dans son traité, perdu, sur l'ellipse ?

PROPOSITION 3 : Les plans sécants au solide elliptique antiparallèles à la base le coupent suivant des ellipses égales et semblables à la base.

Commençons par rappeler que Thābit ibn Qurra, dans ce même traité *Sur les Sections du cylindre*, étudie la section par un plan antiparallèle au plan de base[1]. Il prend comme plan de référence le plan Π défini par l'axe du cylindre et la hauteur menée du centre de la base.

Soit $\mathscr{P}$ le plan de la base ; on a $\mathscr{P} \perp \Pi$. Soit AB leur intersection. Un plan $\mathscr{Q}$ antiparallèle à $\mathscr{P}$ vérifie $\mathscr{Q} \perp \Pi$ et coupe Π suivant la droite LK telle que $A\hat{K}L = K\hat{A}B = B\hat{E}I = E\hat{L}K$. Ibn Qurra montre que les deux sections sont égales.

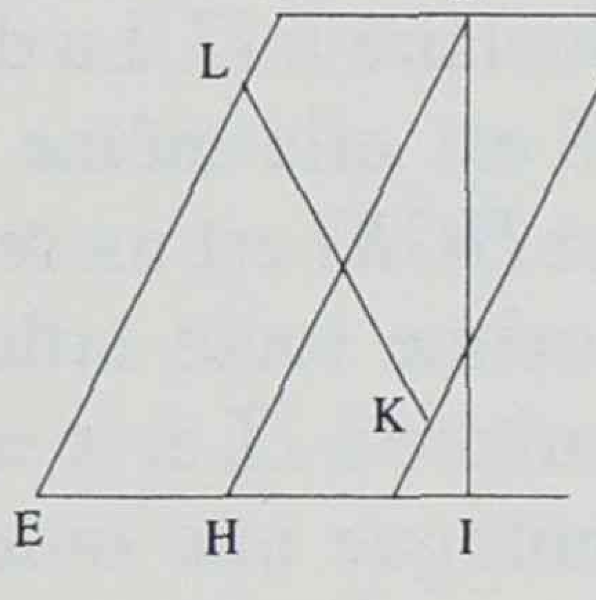


Fig. 11.1

Al-Sijzī, quant à lui, ne fait pas intervenir la hauteur du solide. La base du solide est une ellipse de grand axe AB, de petit axe EG et de centre H. Il prend comme plan de référence le plan Π défini par l'axe AB et les génératrices AC et BD. Ce plan contient donc l'axe du solide. Appelons $\mathscr{P}$ le plan de base $AEBG$. Pour définir un plan $\mathscr{Q}$ antiparallèle à $\mathscr{P}$ relativement au plan de référence Π, il faut supposer que $\mathscr{P}$ est perpendiculaire à Π (ce qu'al-Sijzī ne dit pas, et dans ce cas le plan Π contient la hauteur du solide). On prendra $\mathscr{Q}$ perpendiculaire à Π et coupant ce plan suivant la droite DC telle que $A\hat{C}D = B\hat{A}C$.

[1] *Ibid.*, prop. 9, p. 522.

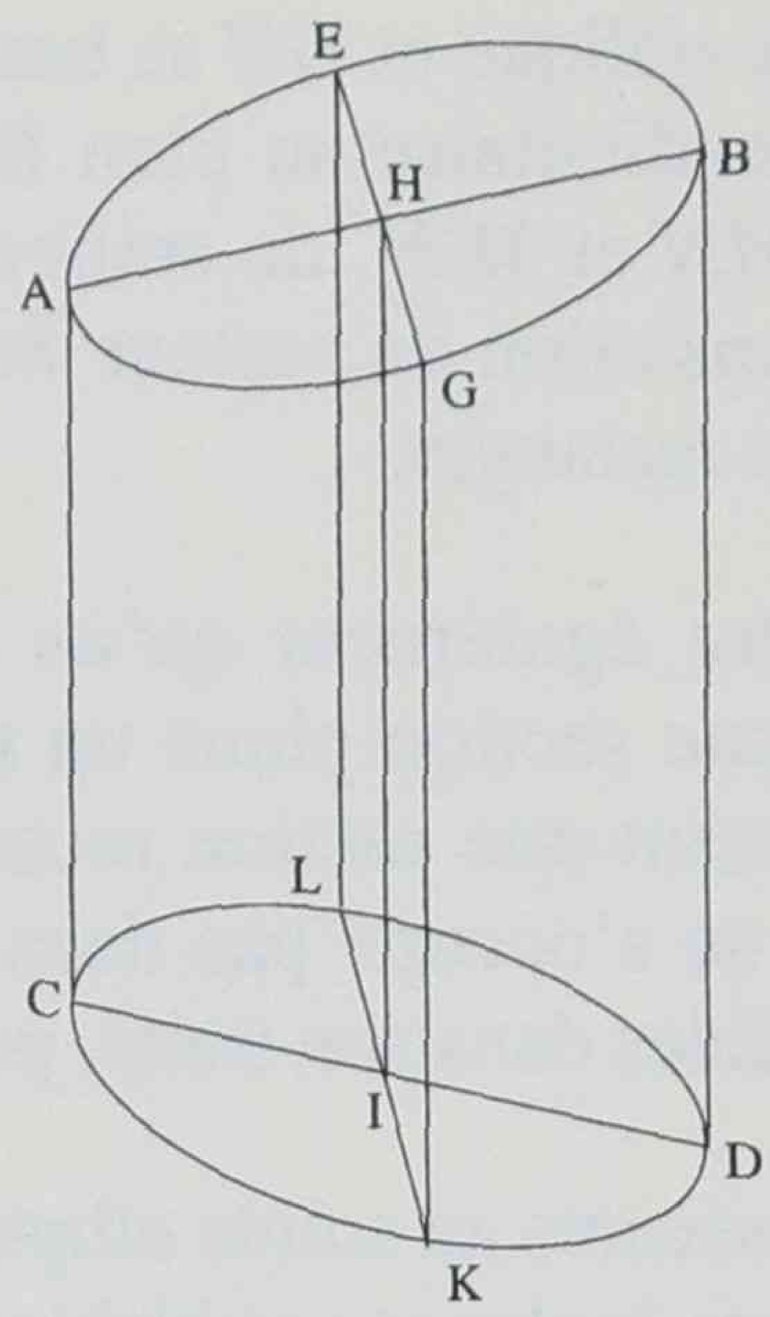


Fig. 11.2

Soit $DCKL$ la section du solide par le plan $\mathscr{Q}$; on a $AC \mathbin{//} BD$ et $\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$, donc $BACD$ est un trapèze isocèle et $AB = CD$. L'axe du solide, issu du milieu H de AB, passe aussi par le milieu I de CD. Par hypothèse $GH \perp AB$, donc GH est perpendiculaire au plan ($ABCD$), c'est-à-dire au plan Π. En effet, $\mathscr{P} \perp \Pi$; AB est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de Π; or $GH \subset \mathscr{P}$ et $GH \perp AB$; donc $GH \perp \Pi$. On a alors $GH \perp HI$. La parallèle à HI menée par G rencontre $\mathscr{Q}$ en K, qui est un point de la section cherchée. Le plan ($GHIK$) est perpendiculaire à Π. La droite IK intersection de deux plans perpendiculaires à Π est elle-même perpendiculaire à Π, donc $IK \mathbin{//} HG$; comme d'autre part $HGKI$ est un rectangle, on a $GH = IK$ et par conséquent $EG = KL$. De même toute ordonnée relative à AB dans la première ellipse est perpendiculaire à Π, et le même raisonnement permet de montrer qu'elle a pour homologue une ordonnée relative à DC dans la seconde section et que ces deux ordonnées sont égales. La seconde section est donc elle-même une ellipse égale à la première.

PROPOSITION 4 : Soit un solide elliptique dont la base a pour axes AB et CD et pour centre E. Coupons ce solide par un plan ($GIKH$). Les points G, I, H, K, L sont les homologues des points A, D, B, C, E. S'ils sont tels que $HL = LI$, alors la section est un cercle.

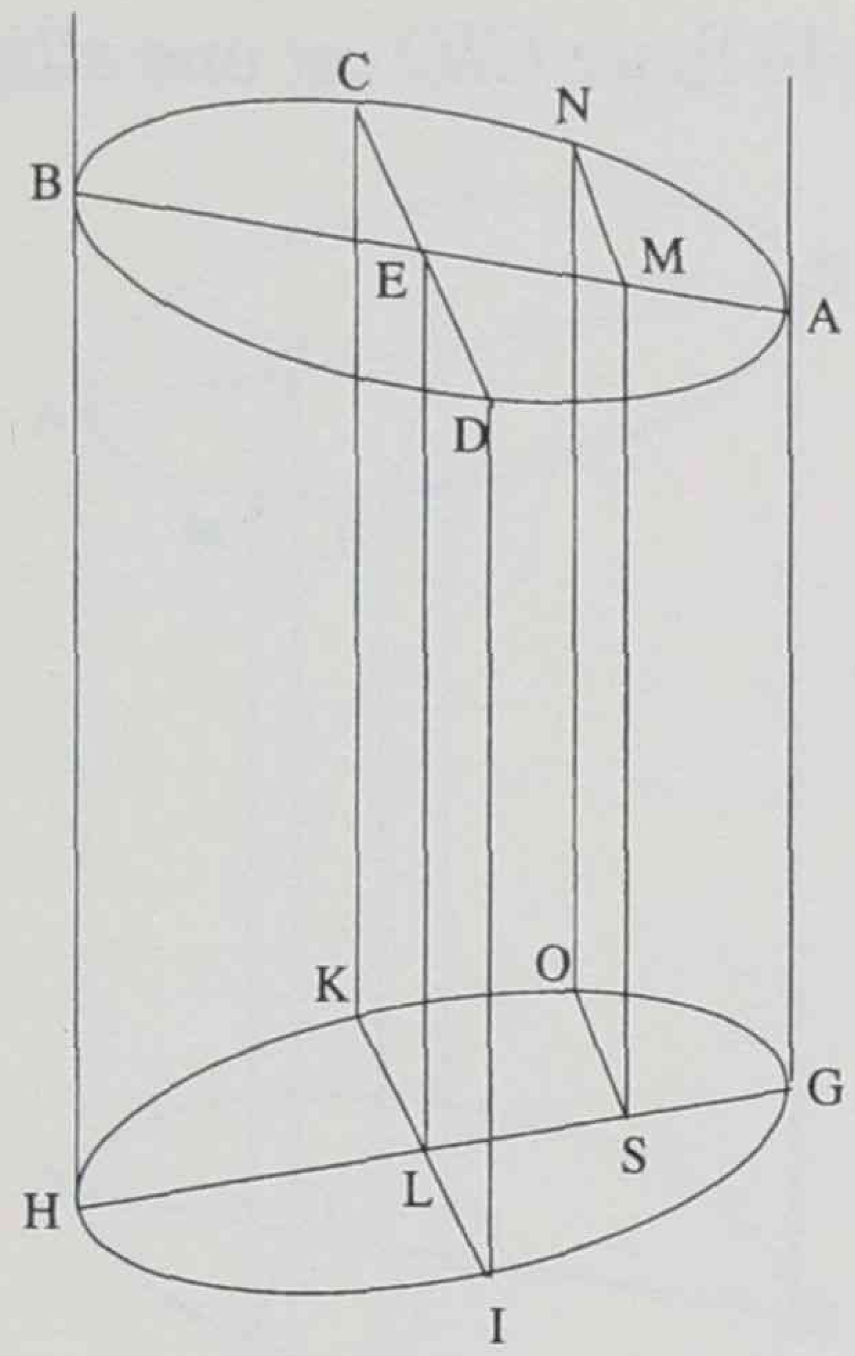


Fig. 12

Cette proposition est un cas particulier de la proposition suivante.

PROPOSITION 5 : La section d'un solide elliptique par un plan qui ne passe pas par l'axe et ne lui est pas parallèle est une ellipse qui peut dans certains cas être un cercle.

On coupe le solide elliptique de base *AHB* par un plan qui ne passe pas par l'axe et ne lui est pas parallèle. Soit *CID* ce plan et *AB* un diamètre de la base dont le centre est *E*. On mène les ordonnées *EH* et *KM*. On prend dans le plan sécant les points *C*, *D*, *G*, *L* homologues de *A*, *B*, *E*, *K* et *I*, *N* dans celui-là homologues à *H*, *M* dans celui-ci.

On a

$$(*) \qquad \frac{DG}{GC} = \frac{BE}{EA}, \ \frac{GL}{LC} = \frac{EK}{KA} \text{ et } \frac{EH}{MK} = \frac{IG}{NL}.$$

On a pour l'ellipse *ABH* :

$$\frac{EH^2}{MK^2} = \frac{BE \cdot EA}{BK \cdot KA},$$

d'où

$$\frac{IG^2}{NL^2} = \frac{DG \cdot GC}{DL \cdot LC},$$

car

$$\frac{BK \cdot KA}{DL \cdot LC} = \frac{BE \cdot EA}{DG \cdot GC}.$$

Si $IG^2 = DG \cdot GC$, alors $NL^2 = DL \cdot LC$ et la ligne *CID* est un cercle.

Si $IG^2 \neq DG \cdot GC$, alors la ligne CID est une ellipse.

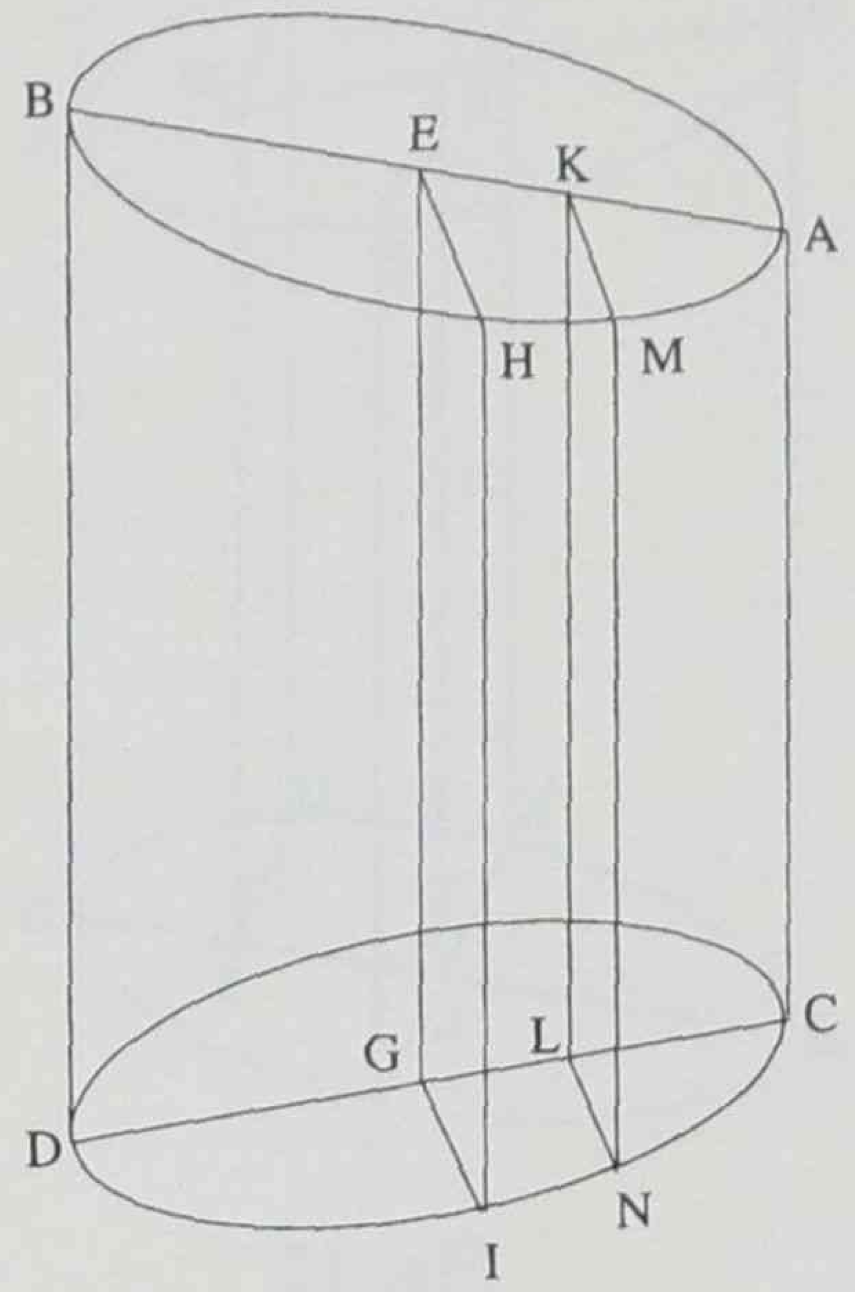


Fig. 13

Al-Sijzī au cours de la démonstration des deux propositions renvoie à son livre sur l'ellipse pour la démonstration de l'égalité (*) à partir des points homologues. Mais il n'indique pas comment choisir la position du plan sécant pour obtenir un cercle. Peut-être avait-il choisi de laisser ce point — facile — aux bons soins du lecteur. En effet, considérons d'abord le cylindre elliptique droit dont la base est l'ellipse de grand axe AB et de petit axe CD ; posons $AB = 2a$ et $CD = 2b$, avec $b < a$. Soit un plan sécant $\mathscr{P}$ passant par AB qui coupe en I la génératrice issue de C. L'angle $\widehat{IEC} = \alpha$ est le rectiligne du dièdre des plans $\mathscr{P}$ et ABC. Si on veut que la section par $\mathscr{P}$ soit un cercle, il faut que $IE = AE = a$, et donc que $\cos\alpha = \dfrac{CE}{EI} = \dfrac{b}{a}$.

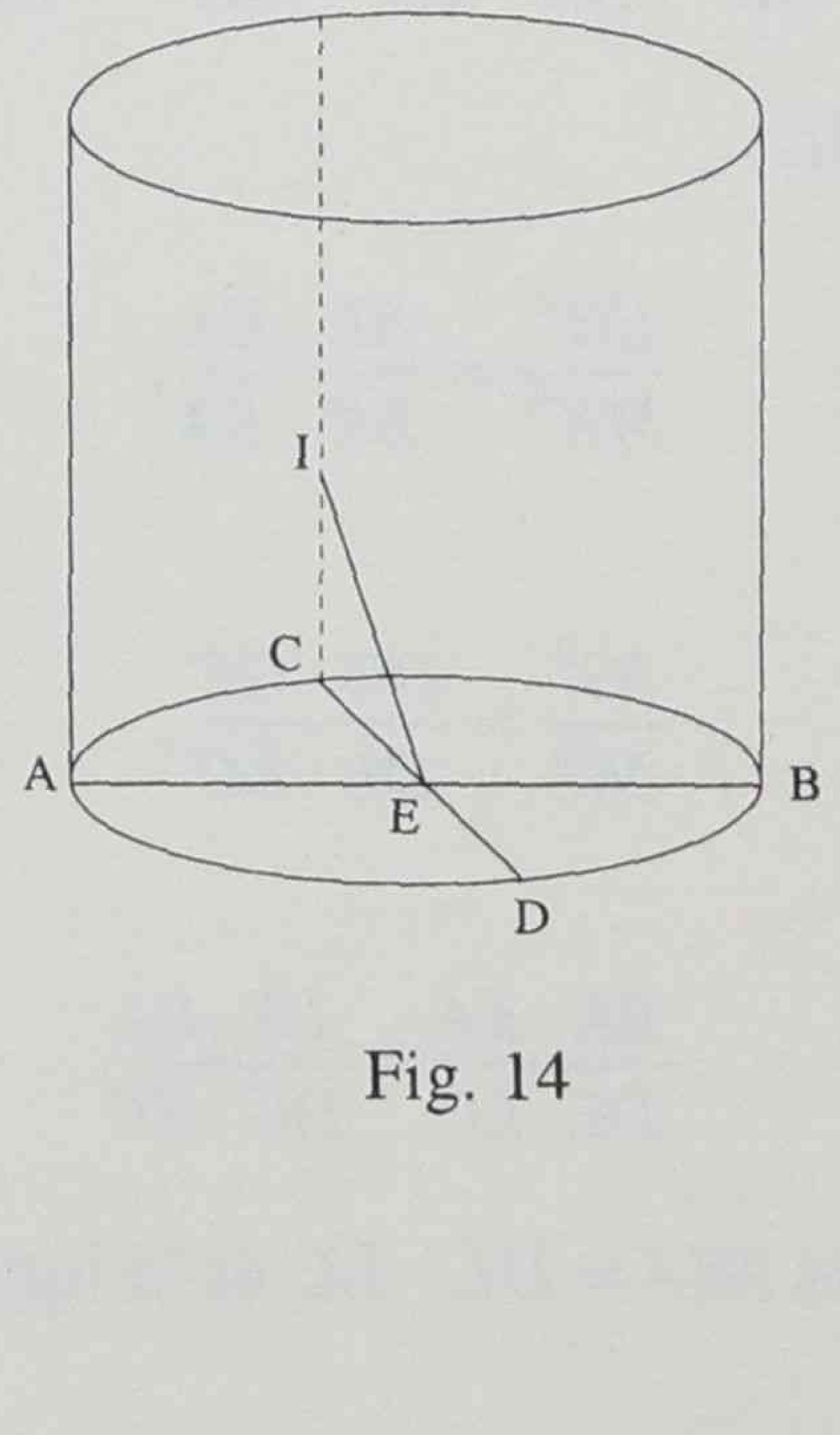


Fig. 14

Tout plan parallèle à AB qui forme avec le plan (ABC) un dièdre dont le rectiligne est α vérifiant $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ donnera pour section plane un cercle. On peut prendre ce dièdre du côté de C ou du côté de D ; on obtient deux sections circulaires antiparallèles.

Soit le solide elliptique oblique de base $ACBD$ d'axe EG. Supposons que sa hauteur GI tombe sur la droite AB, grand axe de l'ellipse, et considérons un plan perpendiculaire à l'axe GE et perpendiculaire au plan GEI. Il coupe le plan GEI suivant $A'B'$.

Soit CD le petit axe de la base ; $CE \perp AB$ et CE orthogonale à GI, donc CE est perpendiculaire au plan GEI et $CE \perp GE$. La parallèle à GE menée par C rencontre le second plan en C'. On a $C'E'$ perpendiculaire à GE ; donc $C'E' \parallel CE$ et $C'E' = CE = b$.

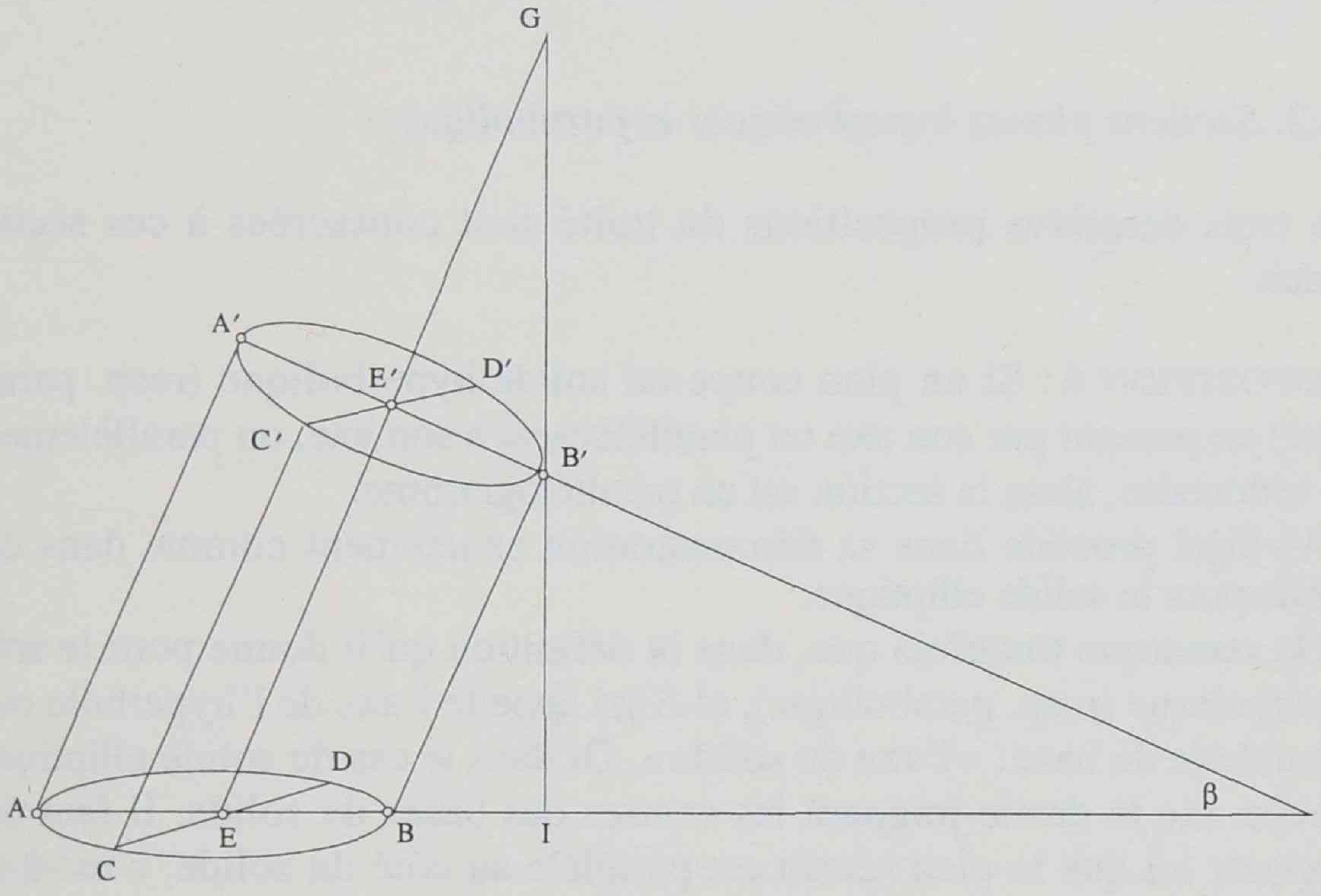


Fig. 15

Soit β l'angle des deux droites AB et $A'B'$; on a $A'B' = AB \cos\beta = 2a \cos\beta$. On connaît les longueurs des deux axes de la section orthogonale $A'C'B'$. On est ramené au cas précédent pour la recherche d'un plan qui donne une section circulaire. Il se peut enfin que la section $A'B'C'D'$ soit un cercle ; ce sera le cas si $\cos\beta = \frac{b}{a}$. Il est également clair que lorsqu'on trouve un plan $\mathscr{P}$ qui donne une section circulaire, tout plan antiparallèle à $\mathscr{P}$ donne aussi une section circulaire, d'après la proposition 3.

Avec cette cinquième proposition, al-Sijzī achève son étude du solide elliptique, qui n'est autre qu'un cylindre à base elliptique. Il a trouvé comme sections planes de ce solide :

• le parallélogramme, avec le cas particulier du rectangle

• l'ellipse — et il a montré que les ellipses engendrées par les plans parallèles sont égales.

• le cercle comme cas particulier de l'ellipse, comme il l'affirme formellement ;

et il a montré qu'à partir de ce solide elliptique on peut construire des sections planes circulaires, et que ses propositions sont comparables à celles relatives au cylindre à base circulaire, droit ou oblique.

Al-Sijzī ne parle pas dans ce traité des sections planes illimitées, ce qu'il ne manque pas de faire dans son traité sur les coupoles.

1.3.2. *Sections planes hyperboliques et paraboliques*

Les trois dernières propositions du traité sont consacrées à ces sections planes.

PROPOSITION 6 : Si un plan coupe un solide hyperbolique (resp. parabolique) en passant par son axe ou parallèlement à son axe, ou parallèlement à ses ordonnées, alors la section est un parallélogramme.

Al-Sijzī procède dans sa démonstration exactement comme dans celle établie pour le solide elliptique.

On remarque toutefois que, dans la définition qu'il donne pour le solide hyperbolique (resp. parabolique), al-Sijzī appelle l'axe de l'hyperbole ou de la parabole de base : « l'axe du solide ». Or dans le cas du solide elliptique il appelle axe la droite joignant les centres des bases du solide. Il faut donc supposer ici que le plan sécant est parallèle au côté du solide, c'est-à-dire parallèle à la droite joignant les sommets des deux bases hyperboliques ou paraboliques. Notons que la parabole n'a pas de centre et que le centre de l'hyperbole (dont on considère seulement une branche) est en dehors de la figure. L'énoncé de la proposition 6 devrait donc être de la forme suivante :

Pour tout plan sécant parallèle au côté du solide hyperbolique (resp. parabolique) la section est un parallélogramme.

Soit un solide de bases BAC et DEF, figures égales dans deux plans parallèles. Soit A et E leurs sommets, AX l'axe de la base, AE est le côté du solide.

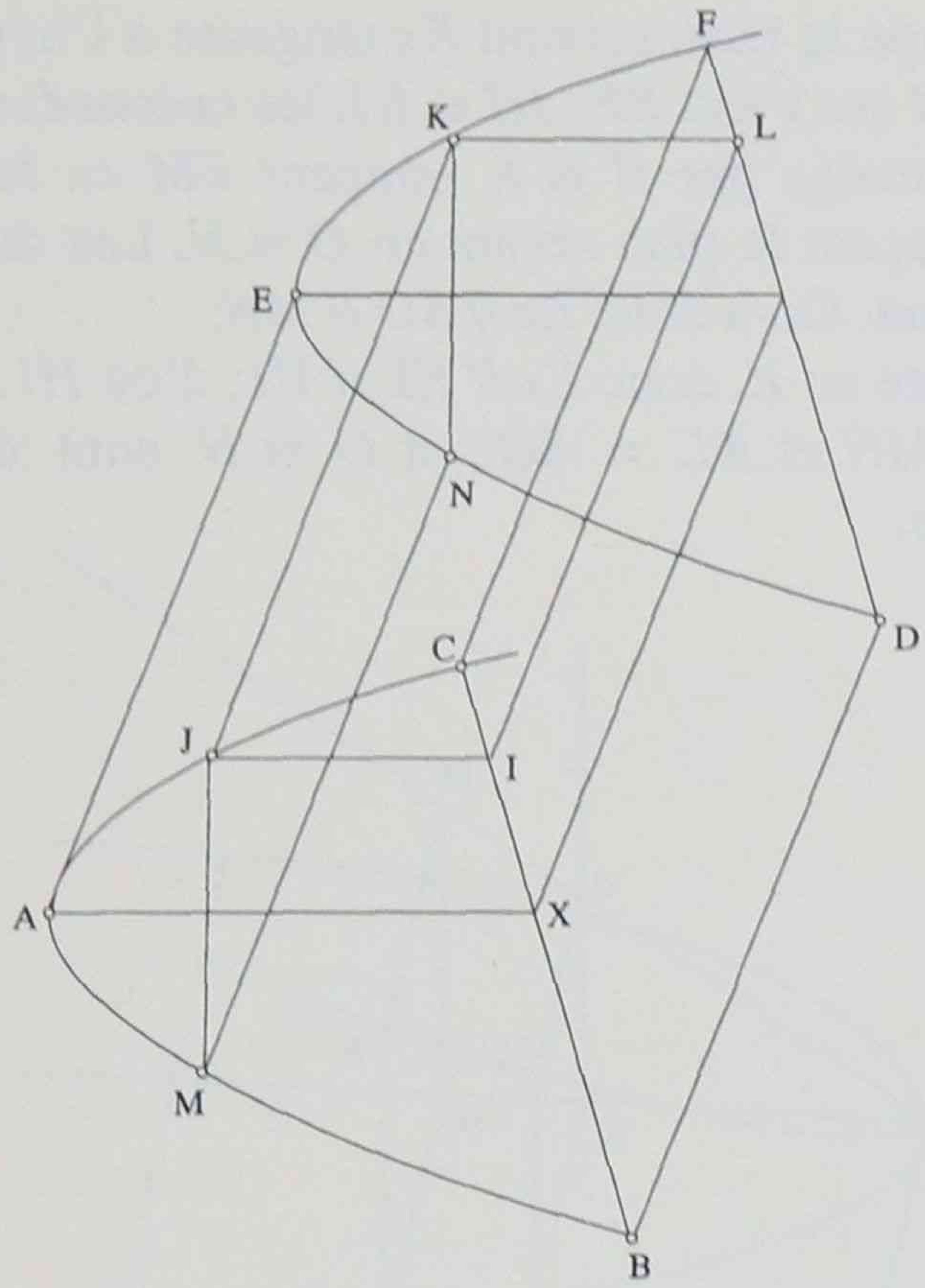


Fig. 16

Tout plan sécant parallèle au côté du solide coupe les plans parallèles des deux bases suivant deux droites parallèles et coupe la surface latérale (partie courbe ou partie plane) suivant deux droites parallèles au côté. La section est donc un parallélogramme.

Si le plan est parallèle à l'axe *AX*, on a un parallélogramme tel que *IJKL*. Que le plan soit parallèle ou non à la droite ordonnée relative à l'axe *AX*, on a un parallélogramme tel que *MJKN*. Si le solide est droit, c'est-à-dire si *AE* est perpendiculaire au plan de base, ces sections sont des rectangles.

PROPOSITION 7 : Si un plan coupe un solide hyperbolique (resp. parabolique) sans être parallèle au côté du solide, alors la section est une hyperbole (resp. parabole)[1].

Dans cette proposition, il faut que le plan soit parallèle aux ordonnées pour que l'énoncé corresponde à la démonstration.

Soit *EF* l'axe de l'hyperbole (ou de la parabole) de base. Le plan défini par l'axe *EF* et le côté du solide qui passe par *E* est pris comme plan de référence. Le plan sécant le coupe suivant *EM* et coupe la base suivant une droite qui est parallèle aux ordonnées.

[1] L'énoncé, tel qu'il se présente dans le texte, n'est pas exact. En effet, il précise que le plan ne passe pas par l'axe et n'est parallèle ni à l'axe ni aux ordonnées.

Le plan sécant coupe la base suivant Ex tangente à l'hyperbole (ou à la parabole). Soit H et K sur l'axe EF ; HI et KL les ordonnées. Les parallèles au côté du solide menées par H et K coupent EM en M et S, et celles menées par L et I coupent le plan sécant en O et N. Les droites SO et MN sont dans le plan sécant. On a donc $Ex // SO // MN$.

Mais Ex est tangente en E, donc $Ex // KL // HI$; d'où $HI // MN$, $KL // SO$ et par suite $HI = MN$ et $KL = SO$; et O et N sont deux points de l'intersection cherchée.

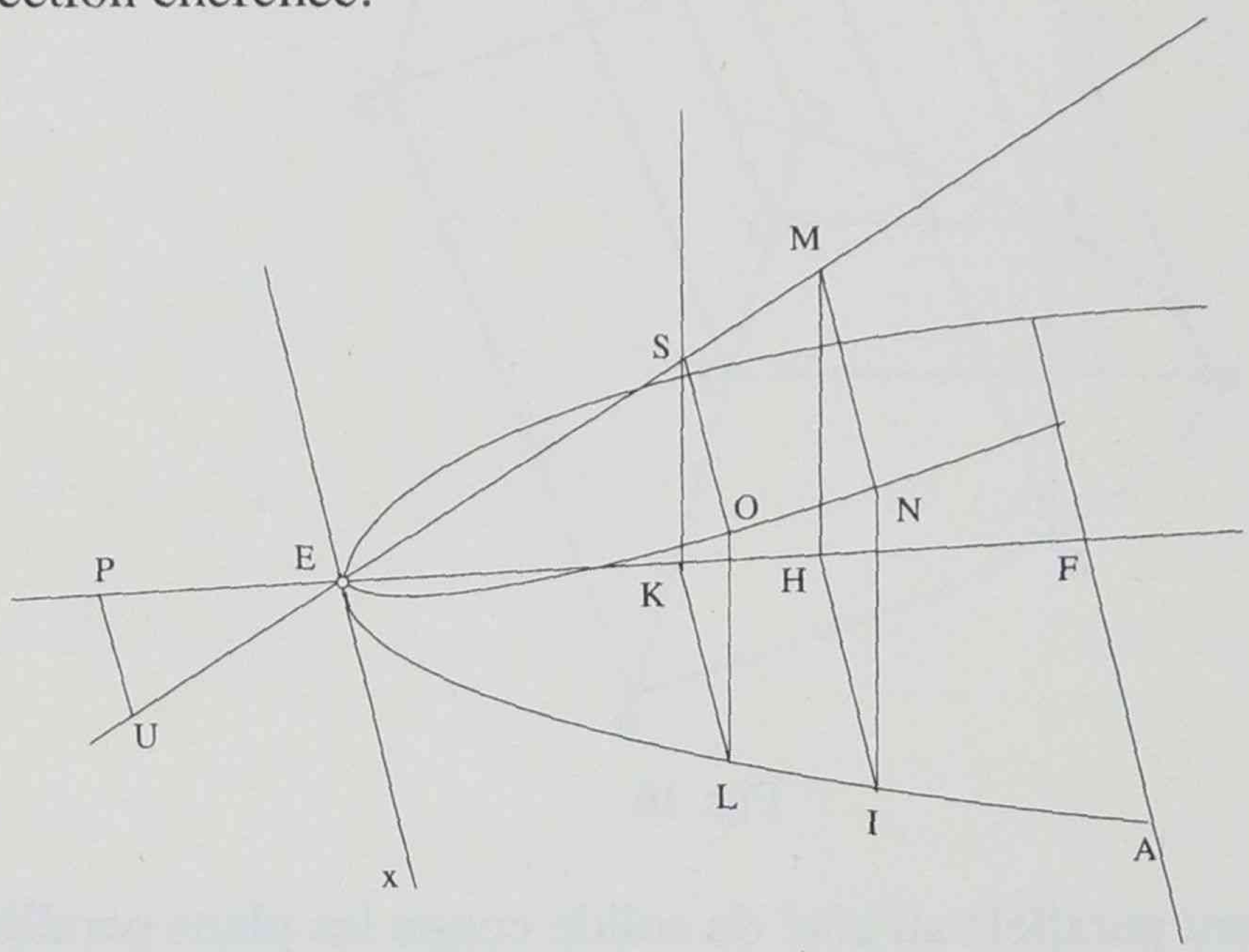


Fig. 17

Soit EP l'axe transverse de l'hyperbole et U sur le prolongement de ME tel que

$$\frac{EM}{EU} = \frac{EH}{EP} ;$$

mais $PU // MH$, donc

$$\frac{UM}{PH} = \frac{ME}{HE} = \frac{SE}{KE} = \frac{US}{PK}.$$

Or pour l'hyperbole de base on a

$$\frac{IH^2}{LK^2} = \frac{EH \cdot PH}{EK \cdot PK} \qquad (\textit{Coniques}\ \text{I.21}),$$

d'où

$$\frac{IH^2}{KL^2} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US} ;$$

mais

$$\frac{IH}{KL} = \frac{MN}{SO},$$

et on a donc

$$\frac{MN^2}{SO^2} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US}.$$

L'intersection cherchée est donc l'hyperbole *EON* d'axe *EM* et de diamètre transverse *EU*.

PROPOSITION 8 : Elle est identique à la précédente, à cette différence près que le plan sécant coupe la base suivant une droite qui n'est pas parallèle aux ordonnées.

Ainsi, si l'intersection *Ex* du plan sécant et du plan de base n'est pas parallèle à l'ordonnée *HI*, on montre que *MN* et *SO* sont parallèles entre elles, mais ne sont pas parallèles à *HI* et *KL*. L'intersection du plan sécant avec la base du solide n'est donc pas parallèle aux ordonnées de l'hyperbole *AE*.

On fait les mêmes constructions que dans la proposition précédente, mais dans ce cas *HI* et *KL* ne sont pas parallèles à *MN* et *SO*.

Sur *HI* on marque P' tel que $HP' = KL$, et on mène $P'U' \parallel IN$, U' sur *MN*. On a alors

$$MU' = SO \text{ et } \frac{HI}{KL} = \frac{HI}{HP'} = \frac{MN}{MU'} = \frac{MN}{SO}.$$

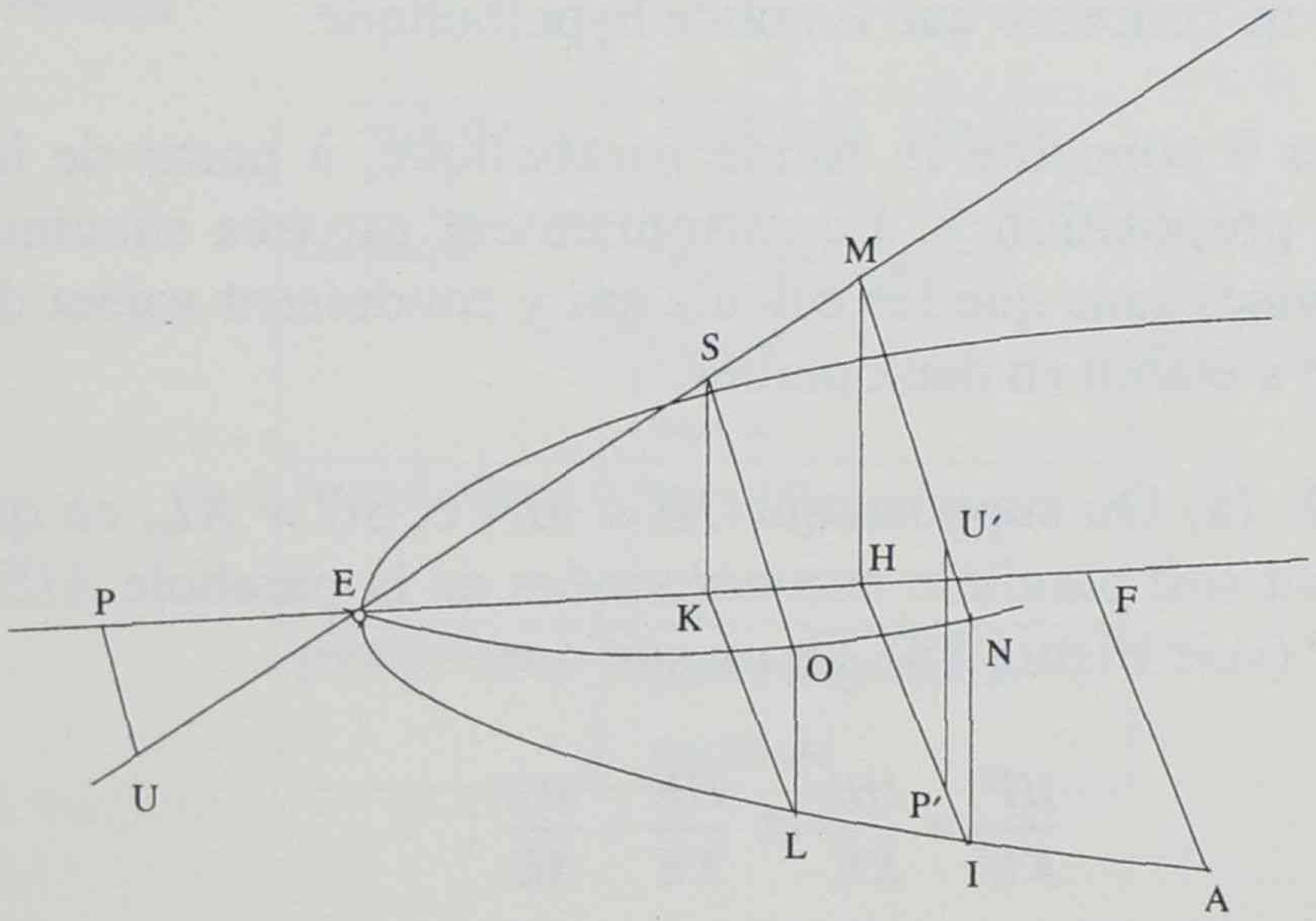


Fig. 18

Comme dans la proposition précédente on a

$$\frac{EM}{EU} = \frac{EH}{EP}$$

et on peut conclure

$$\frac{IH^2}{KL^2} = \frac{EH \cdot PH}{EK \cdot PK} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US},$$

donc

$$\frac{MN^2}{SO^2} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US};$$

et on conclut comme dans la proposition 7.

Remarquons que le texte de la proposition 7 nous est parvenu avec quelques défauts. Le premier apparaît dans les premières lignes : l'énoncé porte sur un solide hyperbolique ou parabolique. On rencontre dès le début une confusion entre axe et côté du solide. L'hypothèse « sans être parallèle aux droites ordonnées » concernera la proposition 8 seulement et la deuxième partie de 9. Mais dans la proposition 7, ainsi que dans la première partie de la proposition 9, le raisonnement s'appuie en revanche sur l'hypothèse « si *HI* et *KL* sont parallèles à *MN* et *SO*... », qui exige que le plan sécant soit parallèle aux ordonnées.

D'autre part, la première partie de la démonstration de la proposition 7 consiste en une description de la figure, avec des notations qui sont les mêmes pour le solide hyperbolique que pour le solide parabolique. La fin de la démonstration ne concerne que le solide hyperbolique.

La proposition 9 concerne le solide parabolique, à partir de la figure donnée dans la proposition 7. Le raisonnement est très succinct et les résultats sont donnés sans que les calculs qui y conduisent soient détaillés. Cette proposition s'établit en deux parties.

PROPOSITION 9 : (a) On suppose que $HI \,/\!/\, MN$ et $SO \,/\!/\, KL$, ce qui exige que le plan sécant soit parallèle aux ordonnées de la parabole *AIE* dont le côté droit est *EP* (voir Figure 18). Or on sait que

$$\frac{IH^2}{KL^2} = \frac{HE}{KE} \text{ et } \frac{HE}{KE} = \frac{ME}{SE};$$

mais $HI \,/\!/\, MN$ et $SO \,/\!/\, KL$, d'où $HI = MN$ et $SO = KL$. On a alors

$$\frac{MN^2}{SO^2} = \frac{ME}{SE},$$

la ligne *NOE* est donc une parabole d'axe *EM*. Son côté droit *EU* est défini par $MN^2 = EU \cdot EM$.

(b) Si le plan sécant n'est pas parallèle aux ordonnées, alors *HI* et *KL* ne sont pas parallèles à *MN* et *SO*. On procède comme dans la proposition 8 en introduisant les points P' et U' tels que $HP' = KL$ et $P'U' \mathbin{/\!/} IN$, ce qui donne $MU' = SO$. On a

$$\frac{IH^2}{KL^2} = \frac{EH}{EK} = \frac{ME}{SE} \text{ et } \frac{HI}{KL} = \frac{HI}{HP'} = \frac{MN}{MU'} = \frac{MN}{SO}\,;$$

on en déduit

$$\frac{MN^2}{SO^2} = \frac{ME}{SE},$$

et la conclusion est la même que dans la première partie, (a).

Dans ce traité, al-Sijzī, dans la tradition d'al-Ḥasan ibn Mūsā et de Thābit ibn Qurra, traite des solides cylindriques autres que le cylindre à base circulaire étudié par ses prédécesseurs. Il s'agit du solide cylindrique à base elliptique, du solide cylindrique à base hyperbolique et du solide cylindrique à base parabolique. Il étudie les sections planes de ces solides. La nature des sections planes des trois solides étudiés peut se trouver résumée dans le tableau suivant :

solide	**sections planes**
elliptique	parallélogramme ellipse cercle
hyperbolique	parallélogramme hyperbole
parabolique	parallélogramme parabole

1.4. *Interprétation projective de la recherche des sections planes d'un cylindre*

Avec les notations du paragraphe 1.2, la quadrique Q est maintenant un cylindre. Sa trace C sur le plan Π à l'infini a un point singulier ω, direction des génératrices du cylindre ; cette trace est constituée de deux droites réelles distinctes dans le cas du cylindre hyperbolique, d'une droite double dans le cas du cylindre parabolique et de deux droites imaginaires conjuguées dans le cas du cylindre elliptique.

Le plan de section P coupe Π suivant une droite d et la nature de la section est déterminée par la position de d par rapport à C. Si d passe par ω, la section de Q par P est dégénérée en deux droites parallèles de direction ω. Dans les autres cas, la section n'est pas dégénérée et ses points à l'infini sont ceux de l'intersection de C et de d :

1) deux points réels distincts dans le cas du cylindre hyperbolique ; la section est alors une hyperbole.

2) un point double dans le cas du cylindre parabolique ; la section est alors une parabole.

3) deux points imaginaires conjugués dans le cas du cylindre elliptique ; la section est alors une ellipse.

Les sections circulaires n'existent que dans ce troisième cas. On les trouve en considérant l'intersection de d avec la conique imaginaire Ω, trace commune de toutes les sphères sur le plan Π; cette intersection est constituée de deux points imaginaires conjugués, qui doivent se confondre avec ceux de $C \cap d$ pour que la section soit un cercle. On détermine donc les directions de sections circulaires en considérant les points d'intersection de C et de Ω et en les joignant deux à deux de manière à obtenir des droites réelles.

Choisissons les coordonnées homogènes (ξ, η, ζ, τ) de l'espace de manière que l'équation de Π soit $\tau = 0$ et que celles de Ω et de C soient respectivement $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ et $a\xi^2 + \eta^2 = 0$ (avec $\tau = 0$), où $a > 0$. Ce choix signifie que les axes des coordonnées non homogènes $x = \dfrac{\xi}{\tau}$, $y = \dfrac{\eta}{\tau}$, $z = \dfrac{\zeta}{\tau}$ sont orthonormaux, l'axe des z étant parallèle aux génératrices du cylindre, et que les axes des x et des y sont parallèles aux axes principaux de la section du cylindre par le plan des xy ; il est clair qu'un tel choix est toujours possible.

Les points d'intersection de Ω et de C sont les quatre points $(1, \pm\sqrt{-a}, \pm\sqrt{a-1})$ $(\tau = 0)$. Lorsque $a = 1$, ils sont confondus deux à deux en $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$; ce cas se produit lorsque le plan des xy (perpendiculaire aux génératrices du cylindre) coupe le cylindre suivant un cercle, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'un cylindre circulaire droit. Dans ce cas il y a une seule direction de plan de section circulaire, obtenue en joignant $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$: c'est la direction de la base circulaire $z = 0$.

Lorsque $a < 1$, les paires conjuguées parmi les points de $\Omega \cap C$ sont

d'une part $\quad (1, \sqrt{-a}, \sqrt{a-1}), (1, -\sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}),$

d'autre part $(1, \sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}), (1, -\sqrt{-a}, \sqrt{a-1})$.

Lorsque $a > 1$, les paires conjuguées sont
d'une part $(1, \sqrt{-a}, \sqrt{a-1}), (1, -\sqrt{-a}, \sqrt{a-1})$
d'autre part $(1, \sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}), (1, -\sqrt{-a}, \sqrt{a-1})$.

On voit donc que, pour $a \neq 1$, il y a toujours deux directions distinctes de sections circulaires.

On peut reprendre le raisonnement par voie purement analytique.

Considérons une quadrique d'équation $f(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ en coordonnées homogènes ξ, η, ζ, τ; f est une forme quadratique. La section de cette surface par un plan d'équation $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$, φ de degré 1 s'obtient en éliminant une des coordonnées, par exemple ζ entre les équations $f = 0$, $\varphi = 0$; on obtient une équation de degré 2 en ξ, η, τ, donc la section est une conique. Si $\tau = 0$ est l'équation du plan à l'infini, la position de la section par rapport à la droite de l'infini du plan $\varphi = 0$ s'obtient en éliminant ζ entre les équations $f(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0$ et $\varphi(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0$. On trouve une équation de degré 2 en (ξ, η) ; si le discriminant est > 0, la section est une ellipse ; s'il est < 0, c'est une hyperbole et s'il est nul, la section est une parabole.

Considérons le cas examiné par al-Sijzī où la quadrique $f = 0$ est un cylindre ; cela signifie que la forme f est de rang 3, et que le point singulier est à l'infini ($\tau = 0$). Il nous suffira en fait de supposer que la conique à l'infini $f(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0$ est dégénérée, ce qui se produit, non seulement pour les cylindres, mais aussi pour les paraboloïdes. Cherchons les directions de plans qui donnent des sections circulaires. On rappelle que la structure métrique de l'espace est déterminée par une conique imaginaire Ω dans le plan à l'infini $\tau = 0$; c'est la conique à l'infini commune à toutes les sphères et l'orthogonalité de deux directions se traduit par la conjugaison par rapport à Ω.

On choisit des coordonnées homogènes dans lesquelles l'équation de Ω s'écrit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, $\tau = 0$ (axes orthogonaux). On impose de plus que la conique à l'infini C du cylindre ait pour équation $\xi^2 + 2a\xi\eta + b\eta^2 = 0$, $\tau = 0$ (la direction des génératrices est donc $\xi = \eta = \tau = 0$). Cette conique C rencontre Ω en quatre points imaginaires et une direction de plan de section circulaire s'obtient en joignant deux de ces quatre points ; il s'agit de déterminer celles de ces directions de plans qui sont réelles.

Considérons le faisceau engendré par Ω et C dans le plan de l'infini :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \lambda(\xi^2 + 2a\xi\eta + b\eta^2) = 0 ;$$

le discriminant de cette forme quadratique est :

$$(1) \qquad 1 + (b + 1)\,\lambda + (b - a^2)\,\lambda^2.$$

Il s'annule pour

$$\lambda = \frac{-b - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{b - a^2},$$

où $\Delta = (b - 1)^2 + 4a^2 \geq 0$ qui donne donc deux coniques dégénérées en deux droites d'équation :

$$(2) \qquad (1 + \lambda)\left(\xi + \frac{a\lambda}{\lambda + 1}\eta\right)^2 + \zeta^2 = 0.$$

Si $b = a^2$, l'équation de C est $(\xi + a\eta)^2 = 0$ (rang 1) et on est dans le cas du cylindre parabolique ; dans ce cas le discriminant (1) se réduit à $1 + (b + 1)\lambda = 1 + (a^2 + 1)\,\lambda$ et il ne s'annule que pour $\lambda = -\frac{1}{a^2 + 1}$. Si $b > a^2$, $\xi^2 + 2a\xi\eta + b\eta^2$ est positive non dégénérée et on est dans le cas du cylindre elliptique. Si $b < a^2$, on est dans le cas du cylindre hyperbolique.

La conique dégénérée (2) est réelle si $\lambda + 1 < 0$, imaginaire si $\lambda + 1 > 0$; on teste ces inégalités en calculant la valeur de (1) pour $\lambda = -1$, soit $-a^2 \leq 0$. Ainsi

1) dans le cas hyperbolique, $b < a^2$, les deux racines de (1) sont de signes contraires et -1 est extérieur à l'intervalle de ces racines, donc inférieur à ces racines ; les droites données par l'équation (2) sont toujours imaginaires et il n'y a pas de direction de plan de section circulaire.

2) dans le cas parabolique $b = a^2$, $\lambda = -\frac{1}{a^2 + 1} > -1$ et les directions de plans correspondants sont encore imaginaires : pas de section circulaire.

3) dans le cas elliptique, $b > a^2$, les deux racines de (1) sont négatives et -1 est compris entre elles. Ainsi l'une de ces racines est < -1 et elle donne deux directions de plans de sections circulaires.

Notons $\lambda = -1$ est solution du problème dans le cas où $a = 0$; ceci signifie que les axes de coordonnées sont les axes principaux du cylindre. Les racines sont alors -1 et $-\frac{1}{b}$ et la conique (2) devient $(1 - b)\eta^2 + \zeta^2 = 0$ pour $\lambda = -1$ et $\frac{b-1}{b}\xi^2 + \zeta^2 = 0$ pour $\lambda = -\frac{1}{b}$. La première est réelle si $b > 1$; dans ce cas la seconde est imaginaire. Au contraire la première est imaginaire si $b < 1$ et alors la seconde est réelle, dans les deux cas il y a deux directions de plans de section circulaire.

Si $b = 1$, on a affaire à un cylindre droit à base circulaire et les deux équations précédentes se réduisent à $\zeta^2 = 0$; il n'y a qu'une direction de section circulaire.

Si $a = b = 0$, on a affaire à un cylindre parabolique (droit) ; (1) a seulement la racine -1 et (2) devient $\eta^2 + \zeta^2 = 0$ donnant des directions imaginaires.

Le même type de discussion peut être fait pour chercher les directions de sections circulaires de toutes les quadriques.

Dans ce cas, le discriminant (1) est du troisième degré en λ ; il peut y avoir 1 ou 3 racines réelles.

La comparaison de cette interprétation, bien étrangère aux mathématiques du Xᵉ siècle, avec le texte d'al-Sijzī montre que celui-ci a fait la discussion complète dans le cas des cylindres.

II. TRACÉ PAR POINTS ET TRACÉ CONTINU DES SECTIONS CONIQUES

2.1. *Sur le tracé des sections coniques*

2.1.1. *Introduction*

Le précédent titre donné par al-Sijzī dissimule, sous son apparence de brièveté et de simplicité, deux intentions intimement liées qui ont présidé à la rédaction de son écrit. Il est destiné à désigner un nouveau terrain de la recherche géométrique conduite au cours du Xe siècle, et même un peu avant, tout en exprimant également une intention unificatrice. Expliquons-nous rapidement sur ces deux visées. Le titre lui-même n'est pas nouveau. Ibn Sinān[1] y avait déjà recouru, pour la première fois à notre connaissance, pour intituler son livre, certes d'une importance considérable, consacré entièrement au tracé par points des sections coniques[2]. Deux traits distinguent cet écrit d'Ibn Sinān. Si en effet on avait tracé par points, bien longtemps avant lui — Dioclès par exemple — l'une ou l'autre courbe conique, personne, que je sache, n'avait jusque-là pensé à soulever la question du tracé de toutes les coniques ni à coucher la réponse par écrit dans un traité indépendant. C'est donc là la première fois qu'est posé pour lui-même et en général le problème du tracé par points des coniques. Or la nouveauté de la question et la priorité d'Ibn Sinān n'ont, nous l'avons montré[3], rien de contingent ni de circonstanciel. Il fallait en effet pour parvenir à la formulation de la question que l'on s'intéressât bien plus qu'auparavant à l'étude des transformations géométriques. Or c'est précisément grâce à celles-ci qu'Ibn Sinān a pu construire les trois sections coniques à partir du cercle. Mais, s'il s'est posé la question du tracé de toutes les coniques et a pu accomplir cette tâche, c'est aussi grâce aux travaux engagés depuis les Banū Mūsā, ceux d'al-Farghānī et de son propre aïeul Thābit ibn Qurra, entre bien d'autres. Le travail d'Ibn Sinān a ensuite été poursuivi par d'autres mathématiciens, tels al-Khāzin et al-Sijzī lui-même. Ce dernier a repris dans son traité intitulé *Toutes les figures sont à partir du cercle*[4] le tracé par points des trois sections coniques ; et dans un autre mémoire le tracé de l'hyperbole.

[1] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, Leiden, 2000.

[2] *Tracé des trois sections*, dans R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 245-298.

[3] *Ibid.*, chap. III.

[4] Ce traité est le n° 19 de la collection 3652 de la bibliothèque Chester Beatty. Il se trouvait donc au second volume de cette collection qui a été perdue. Il est aussi sur la liste reproduite dans le manuscrit de Lahore.

Certains de leurs successeurs, insatisfaits du seul tracé par points aussi bien pour des raisons théoriques — il faut s'assurer de la continuité des courbes pour pouvoir discuter de l'existence des points d'intersection — que techniques — la fabrication des astrolabes et des cadrans solaires…, ont alors soulevé la question du tracé continu. Deux contemporains, Ibn Sahl et al-Qūhī, rédigent les premiers travaux en ce domaine. Le premier, s'appuyant sur la propriété bifocale des coniques à centre et, pour la parabole, sur la propriété foyer-directrice, invente un système mécanique qui lui permet d'effectuer le tracé ; quant au second, on lui doit le livre fondateur sur le compas parfait. Plus jeune, al-Sijzī poursuit également la recherche et écrit un mémoire sur le compas des sections, dans l'intention d'améliorer le mécanisme et de réussir à tracer les sections semblables.

Telles sont donc les deux traditions de recherche, qu'al-Sijzī non seulement a reçues en héritage, mais auxquelles il a apporté sa propre contribution. Il disposait donc bien de tous les éléments depuis longtemps en gestation d'un nouveau chapitre de la géométrie des coniques. Restait à les réunir et à les unifier. C'est là précisément l'intention qui préside à cet écrit tardif[1] *Sur la description des sections coniques*, où il regroupe les méthodes du tracé par points et celles du tracé continu par le compas parfait ou par des patrons obtenus par projection. Tout au long de la rédaction de ce livre, al-Sijzī, par ses allusions archéologiques, c'est-à-dire aux Banū Mūsā, à Ḥabash, avant de passer aux travaux des fondateurs tels Ibn Sinān et al-Qūhī, exprime bien le choix qui est le sien : restituer l'unité de ce chapitre dans l'histoire[2].

L'organisation du traité d'al-Sijzī s'éclaire alors parfaitement. On commence comme il se doit par expliquer comment on engendre les trois sections. On examine ensuite les différentes espèces du tracé avant de conclure sur l'étude d'un exemple : le tracé des courbes décrites sur un cadran solaire horizontal par l'extrémité de l'ombre du stylet d'un gnomon (il s'agit uniquement d'hyperboles).

Pour comprendre le style de la rédaction de ce livre, il faut garder présent à l'esprit le but que poursuit al-Sijzī, notamment dans toute la première partie. Celui-ci avait certes déjà rédigé des mémoires portant sur le tracé par points, le tracé continu, ainsi que sur les sections coniques[3]. Son intention ici est de rappeler les éléments qui structurent ce domaine de recherche, sans

[1] Voir l'introduction de ce traité.

[2] À cette visée théorique s'en ajoute une autre, didactique : opter pour « les méthodes faciles et proches » sans oublier cependant d'inclure dans le livre « des choses subtiles et utiles ». Le projet d'al-Sijzī est donc limpide : rédiger un premier traité qui doit être à la fois accessible aux étudiants et attrayant pour les chercheurs avancés.

[3] Voir les traités sur le compas parfait et sur l'asymptote.

s'attarder à les établir. Aussi la rédaction est-elle brève et concise, voire simplement indicative, comme dans les paragraphes consacrés à l'étude du diamètre, du centre et des axes des sections. Al-Sijzī ne s'arrêtera longuement que sur l'exemple d'application — les cadrans solaires — à la fin de son livre (il s'agit là en effet d'une étude nouvelle en quelque sorte). C'est dire que la brièveté et la rapidité de l'exposé, loin d'être ici révélatrices d'un défaut ou du peu de soin de l'auteur, semblent être délibérément destinées à refléter les éléments constituants de ce nouveau chapitre. Le seul inconvénient est qu'un tel style prête le flanc aux fautes de transcription des copistes insuffisamment avertis.

2.1.2. *Génération et classement des sections coniques*

Dans cette section introductive, al-Sijzī donne quelques définitions : cône droit, cône oblique et sections du cône droit. Sans tarder, il classe ces sections d'après l'angle que fait l'axe du cône avec le plan sécant et l'angle au sommet du cône. Il est clair que cette classification est visée pour elle-même sans doute, mais surtout pour expliquer plus tard l'utilisation du compas parfait. Voici comment il procède.

Soit un cône de sommet C, dont la base circulaire a D pour centre, et un plan (ACB) contenant la droite CD.

Al-Sijzī rappelle d'abord que la nature d'une section par un plan perpendiculaire au plan (ABC) dépend de la position de la droite d'intersection de ces deux plans. Ainsi,

- si on joint un point G quelconque sur le segment AC à un point quelconque de la demi-droite CB, le segment obtenu, soit GL, sera l'axe d'une ellipse ou le diamètre d'un cercle si $GL \parallel BA$;
- si on mène de G la demi-droite GI parallèle à CB, le segment obtenu, soit GI, sera l'axe d'une parabole ;
- si enfin on joint G à un point sur le prolongement de BC, alors à la droite obtenue est associée une hyperbole.

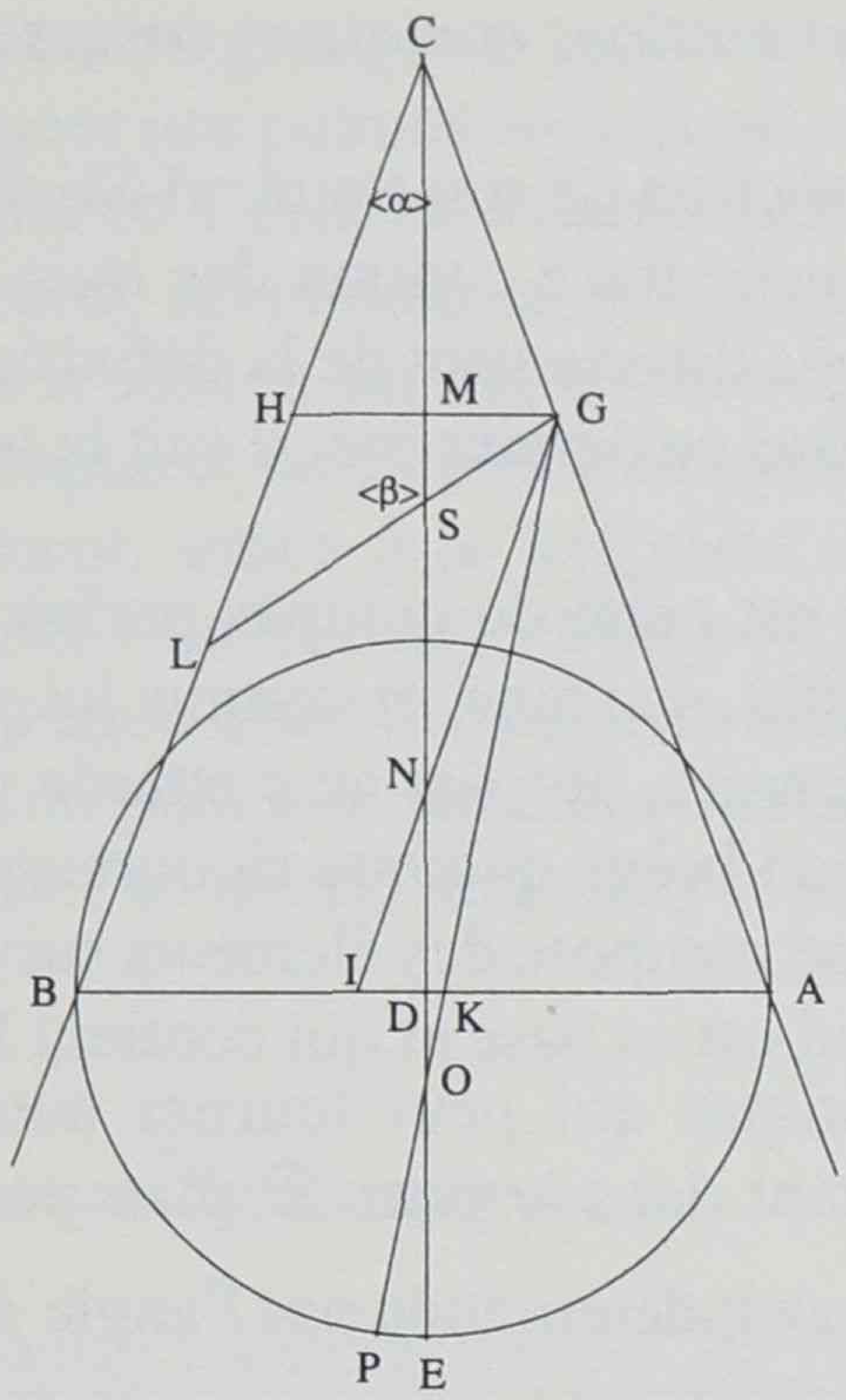


Fig. 19

Ces différents cas ne font que rappeler ce que l'on trouve au début du premier livre des *Coniques* d'Apollonius. Or, bien qu'al-Sijzī eût commencé par distinguer les deux cas — cône droit et cône oblique —, il semble ne plus considérer que le premier ce qui s'explique puisqu'il avait en vue le compas parfait. Ainsi, il ne fait aucune allusion au cercle obtenu dans un plan antiparallèle (cf. *Coniques*, I.9). D'ailleurs, plus loin, al-Sijzī prend CD comme axe et pose $C\hat{M}H$ = 1 droit.

Dans ce cas du cône droit, si nous désignons par α le demi-angle au sommet du cône et par β l'angle que fait l'axe du cône avec le plan sécant ($\beta \geq 90°$), nous avons la classification suivante, reproduite par al-Sijzī et que l'on trouve déjà chez al-Qūhī :

β = 1 droit,	la section est un cercle ;
$\alpha + \beta$ < 2 droits,	la section est une ellipse ;
$\alpha + \beta$ = 2 droits,	la section est une parabole ;
$\alpha + \beta$ > 2 droits,	la section est une hyperbole.

Avec cette classification à partir de α et de β, al-Sijzī peut aborder le tracé continu.

2.1.3. *Tracé continu des sections coniques : compas parfait et patrons*

Dans cette seconde section de son traité, al-Sijzī examine rapidement les différents procédés pour le tracé continu des trois sections coniques. Tous ces procédés sont déduits directement de la définition des sections planes du cône ou du cylindre. Dans ce dernier cas, il suit la tradition qui remonte à al-Ḥasan ibn Mūsā[1].

Le premier procédé est celui du compas parfait. Comme celui-ci venait d'être inventé par al-Qūhī, son aîné, et comme lui-même avait déjà traité ce sujet dans un autre mémoire, al-Sijzī ne s'attarde pas sur cet instrument. Il en donne une description brève quoique rigoureuse et explique rapidement son usage. Ce compas se compose des éléments suivants :

• Une partie plane qui est sa base et qui contient la droite *BD*.

• L'axe *CD* du compas qui peut tourner autour du point *D* appelé « centre », tout en restant dans le plan $\mathscr{Q}$, plan perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ suivant *BD* ; sa position est déterminée par l'angle $\beta \leq \frac{\pi}{2}$.

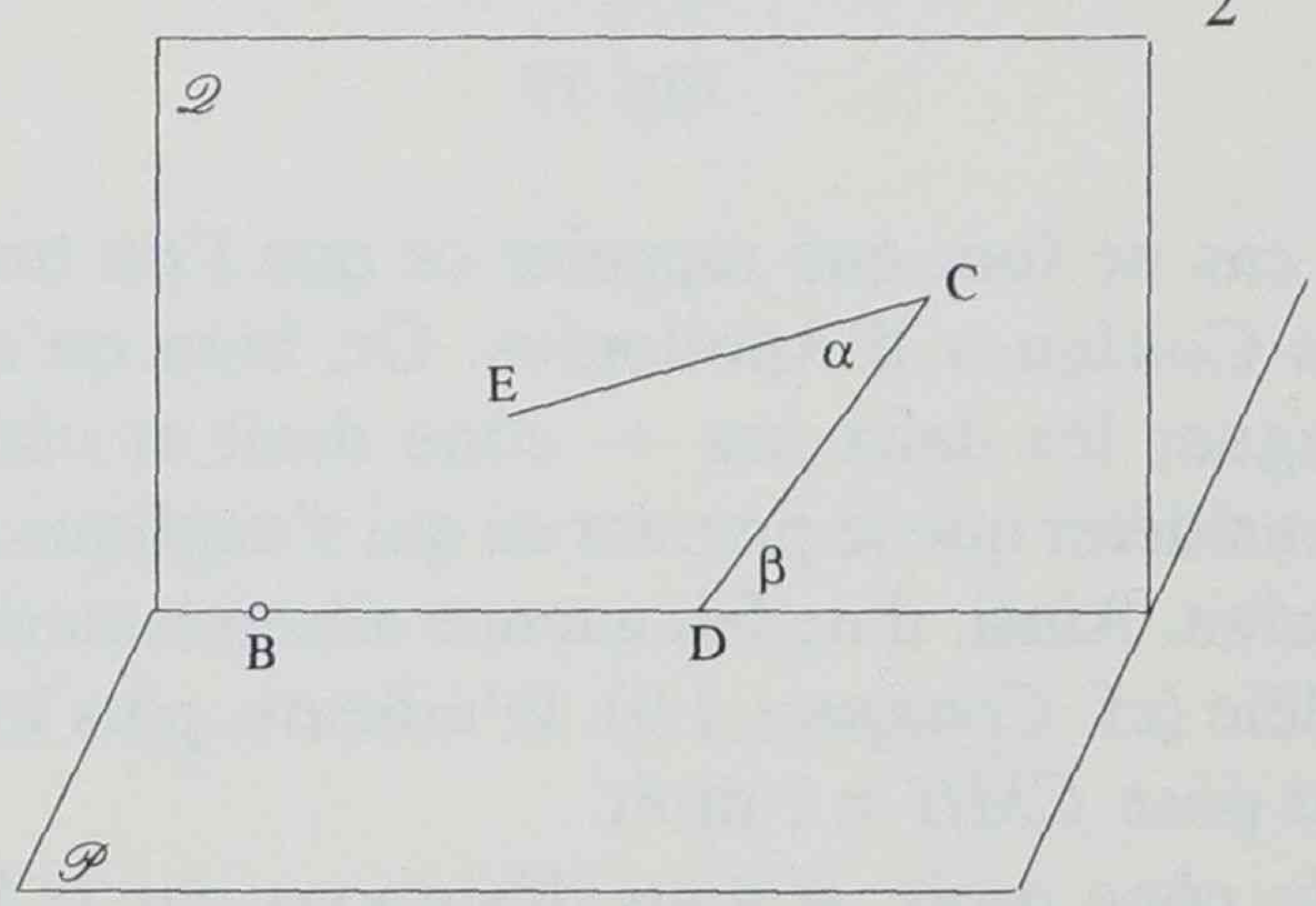


Fig. 20

• La droite *CE* qui peut tourner autour du point *C*. On considère d'abord sa position initiale dans le plan $\mathscr{Q}$ lors du choix de l'angle $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Cette droite est le support d'un tire-ligne qui peut glisser sur cette même droite pour que son extrémité vienne dans le plan $\mathscr{P}$ pour tracer la figure cherchée.

• On peut encore façonner un tube où glisse la branche *CE* et ainsi on peut allonger ou raccourcir le tire-ligne. Al-Sijzī se réfère ici à son traité sur *Le compas conique*. Il se satisfait ici d'expliquer l'usage de ce compas, indique sur une figure les différentes positions du compas pour obtenir le cercle et chacune des trois sections et renvoie au traité précédent pour le reste.

[1] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du* IX^e^ *au* XI^e^ *siècle,* vol. I.

Il passe ensuite à un second groupe de procédés pour effectuer le tracé continu. Il s'agit de fabriquer des patrons en bois ou en métal, c'est-à-dire de reproduire sur une plaque en l'une ou l'autre matière une section plane obtenue en sciant un cône de révolution en bois. Il faut que le tournage de celui-ci soit parfait et que la section soit rigoureusement plane. Pour l'ellipse en particulier, on peut remplacer ce cône par un cylindre en bois à base circulaire. On peut également, grâce à la propriété bifocale, recourir à la méthode dite « du jardinier » qu'al-Sijzī attribue aux Banū Mūsā. On peut aussi procéder par la projection d'un faisceau de rayons parallèles traversant un anneau circulaire sur un plan non parallèle à celui de l'anneau. Remarquons que l'on peut utiliser ce même procédé par projection pour les trois coniques.

2.1.4. *Tracé par points des sections coniques*

Ici, comme dans son autre traité sur *Toutes les figures sont à partir du cercle*, al-Sijzī reprend à quelques légères variantes près les méthodes d'Ibn Sinān. Ainsi il procède à quatre constructions : l'hyperbole à l'aide d'une propriété relative aux asymptotes, la parabole, connaissant son axe et son côté droit, l'hyperbole, connaissant l'axe transverse et le côté droit et enfin l'ellipse, connaissant le grand axe et les foyers. Dans chacune des trois premières constructions, il part de la propriété de la puissance d'un point par rapport à un cercle et aboutit à une propriété caractéristique des points de la section. Reprenons dans cet ordre ces différentes constructions.

2.1.4.1. *Tracé par points d'une hyperbole au moyen d'une propriété relative aux asymptotes*

Soient AB et AC les deux asymptotes, l'axe AD, D le sommet de la section. La tangente en D rencontre les asymptotes en E et G. On a $DE = DG$ et $AE = AG$. La méthode appliquée par al-Sijzī se déduit de la proposition II.10 des *Coniques* d'Apollonius. D'après cette proposition, on sait que si une droite parallèle à EG coupe les asymptotes en I et H et l'hyperbole en K et L, on a

$$KH \cdot KI = IL \cdot LH = DE \cdot DG = DE^2.$$

Al-Sijzī considère un cercle de diamètre XT. Il pose XT égal à BC la base du triangle isocèle ABC dans lequel se trouve l'arc de l'hyperbole à tracer. Soit VZ une corde de ce cercle, W son milieu et telle que $VZ \perp XT$ et $WV = DE$. Soient ensuite des cordes passant par W et P_W la puissance du point W par rapport au cercle, on a alors

$$P_W = VW \cdot WZ = DE^2,$$

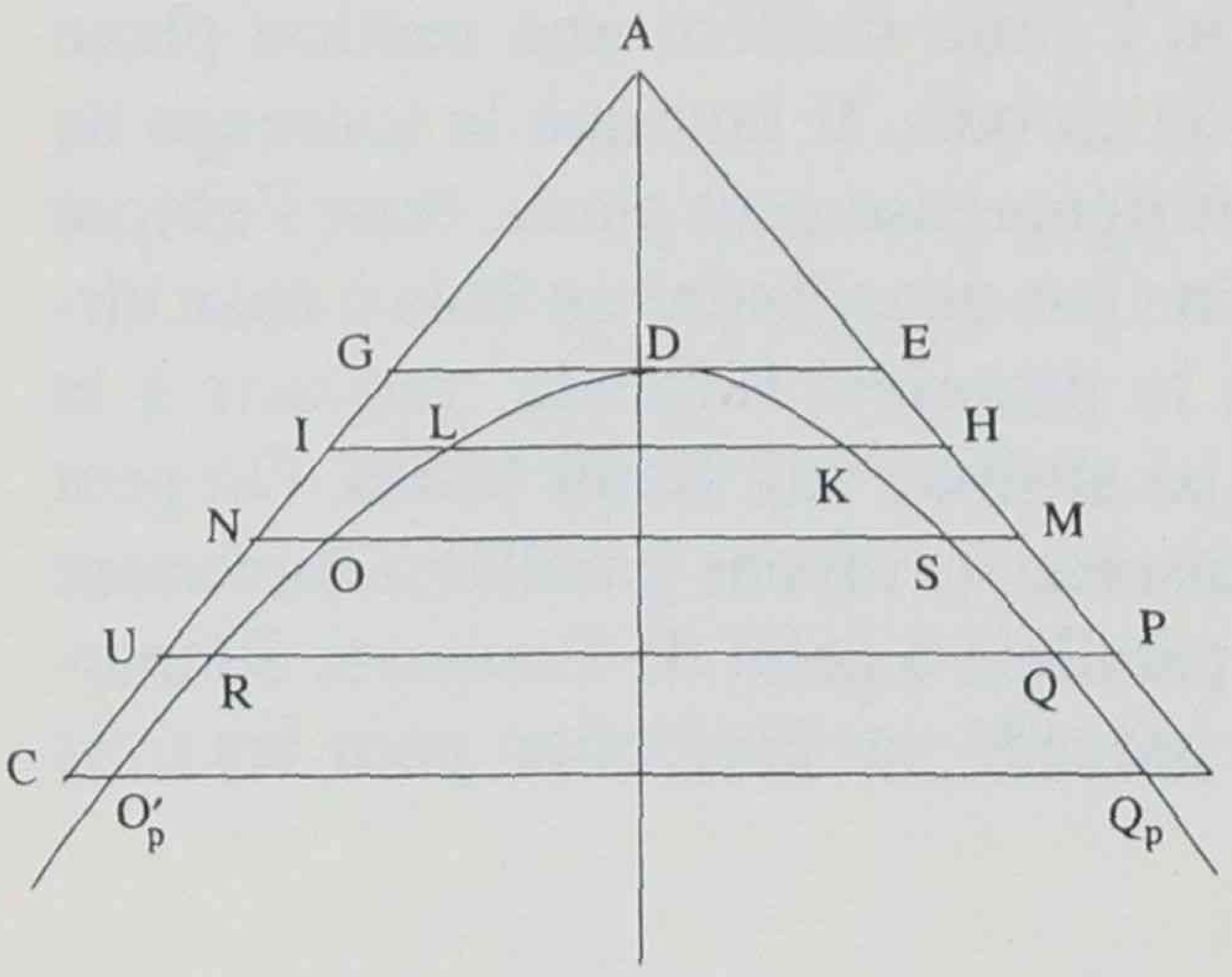


Fig. 21.1

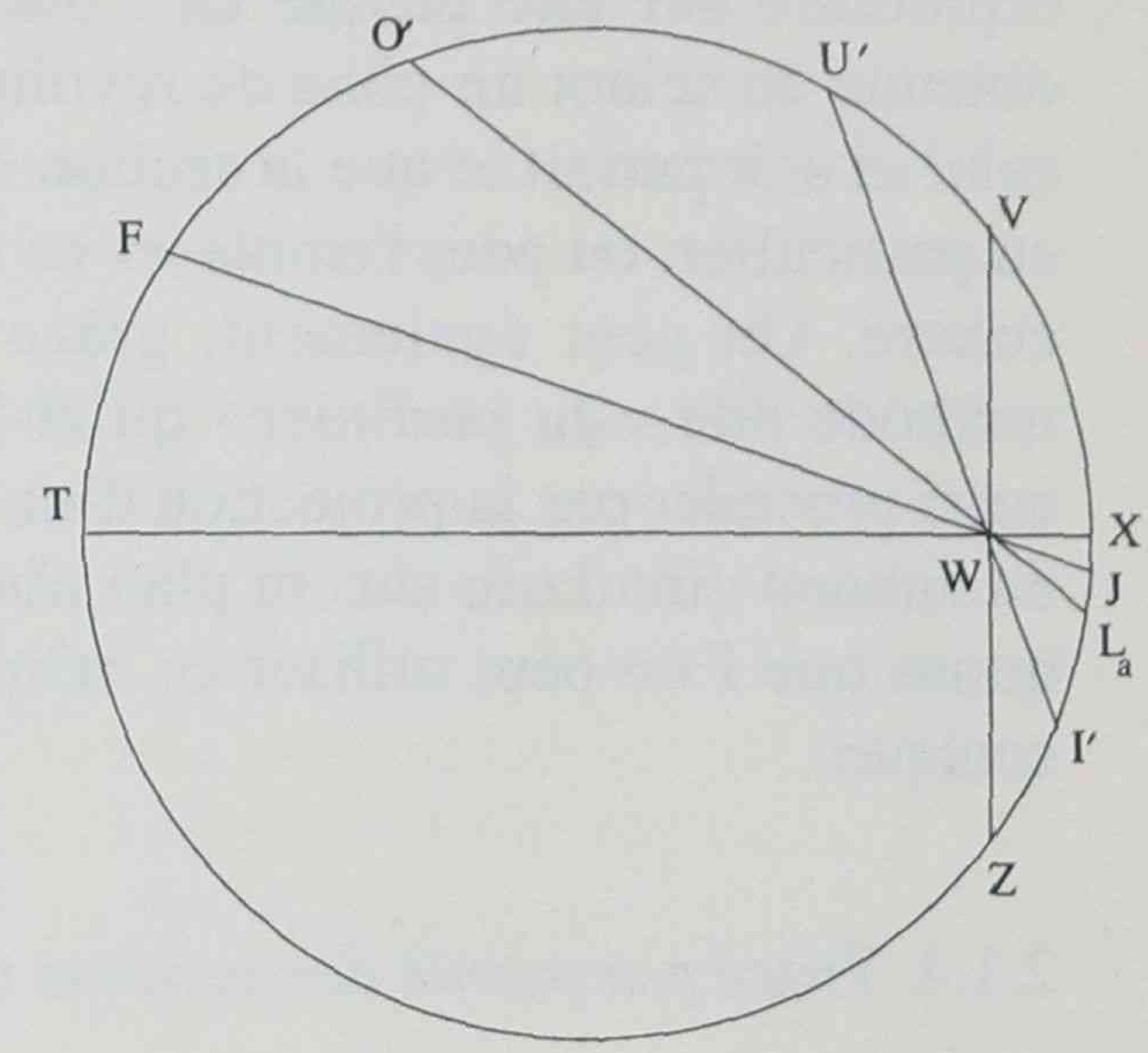


Fig. 21.2

et par conséquent

$$WU' \cdot WI' = WO' \cdot WL_a = WF \cdot WJ = WT \cdot WX = P_W.$$

Dans l'angle BAC, on mène des droites parallèles à EG et égales aux cordes précédentes, soit

$$HI = U'I',\ MN = O'L_a,\ PU = FJ \text{ et } BC = TX.$$

Sur chacune de ces droites on place deux points qui correspondent à la position de W sur la corde correspondante, on a ainsi

$$KH = IL = WI',\ MS = ON = WL_a\ ;\ QP = RU = WJ \text{ et } BQ_p = CO'_p = WX.$$

Les points Q_p, Q, S, K, D vérifient alors

$$DE \cdot DG = KH \cdot KI = SM \cdot SN = QP \cdot QU = Q_pB \cdot Q_pC.$$

Il en résulte, en utilisant la réciproque de II.10 des *Coniques* (qu'al-Sijzī peut démontrer en raisonnant par l'absurde), que ces points appartiennent à l'hyperbole d'asymptotes AB et AC, d'axe AD. Il en est de même pour les points L, O, R, O'_p.

Remarques:

1) Dans son *Traité sur le tracé des trois sections*[1], Ibn Sinān traite ce même problème. Il ne fait cependant pas intervenir le cercle. Nous avons noté qu'il ne donne pas la construction géométrique des points dont il a établi l'existence. Cette construction peut être faite à la règle et au compas. Il reste que la méthode d'al-Sijzī est pour l'essentiel la même que celle d'Ibn Sinān.

2) Dans la construction d'al-Sijzī, le point D est pris sur l'axe. Ce choix ne diminue cependant pas la généralité de la méthode, car en tout point de l'hyperbole la tangente coupe les asymptotes en deux points dont le point de contact est le milieu.

3) Al-Sijzī n'indique pas comment construire les segments HI, MN, PU, BC dont on connaît la longueur, peut-être en raison de la simplicité de la méthode. On peut proposer celle-ci :

Soit $HI = U'I' = l$ par exemple. On mène par A le segment AX tel que $AX \perp AD$ et $AX = l$. Par X on mène la parallèle à AC ; elle coupe AB au point H ; on mène $HI \parallel DG$, on a $HI = l$.

4) On voit que la méthode appliquée par al-Sijzī s'appuie ici sur l'utilisation d'un cercle et sur la relation $a \cdot b = c \cdot d$ de la puissance du point par rapport au cercle. De toute évidence, il s'agit d'un emprunt au traité d'Ibn Sinān sur le tracé des trois sections. Mais alors qu'Ibn Sinān, après avoir introduit la propriété établie dans II.10 des *Coniques*, n'en déduit pas une construction à la règle et au compas des points dont il n'oublie pas de discuter l'existence, al-Sijzī en revanche donne la construction mais néglige la discussion de l'existence de ces points.

2.1.4.2. *Tracé par points d'une parabole dont on connaît le sommet, l'axe et le côté droit*

Soient le point C le sommet de la parabole à tracer, CA son axe et $CB = c$ son côté droit ; une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point S d'abscisse CK, $SK \perp CA$, appartienne à la parabole à tracer est que

$$SK^2 = c \cdot CK \Leftrightarrow SK^2 = CB \cdot CK.$$

La proposition I.11 des *Coniques* est directe et la réciproque se démontre par réduction à l'absurde.

Le cercle de diamètre BK coupe la perpendiculaire CY à l'axe CA au point G qui vérifie

[1] Voir R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*, p. 282-283 et 257-258.

$$CG^2 = CB \cdot CK, \qquad \text{puissance du point } C,$$

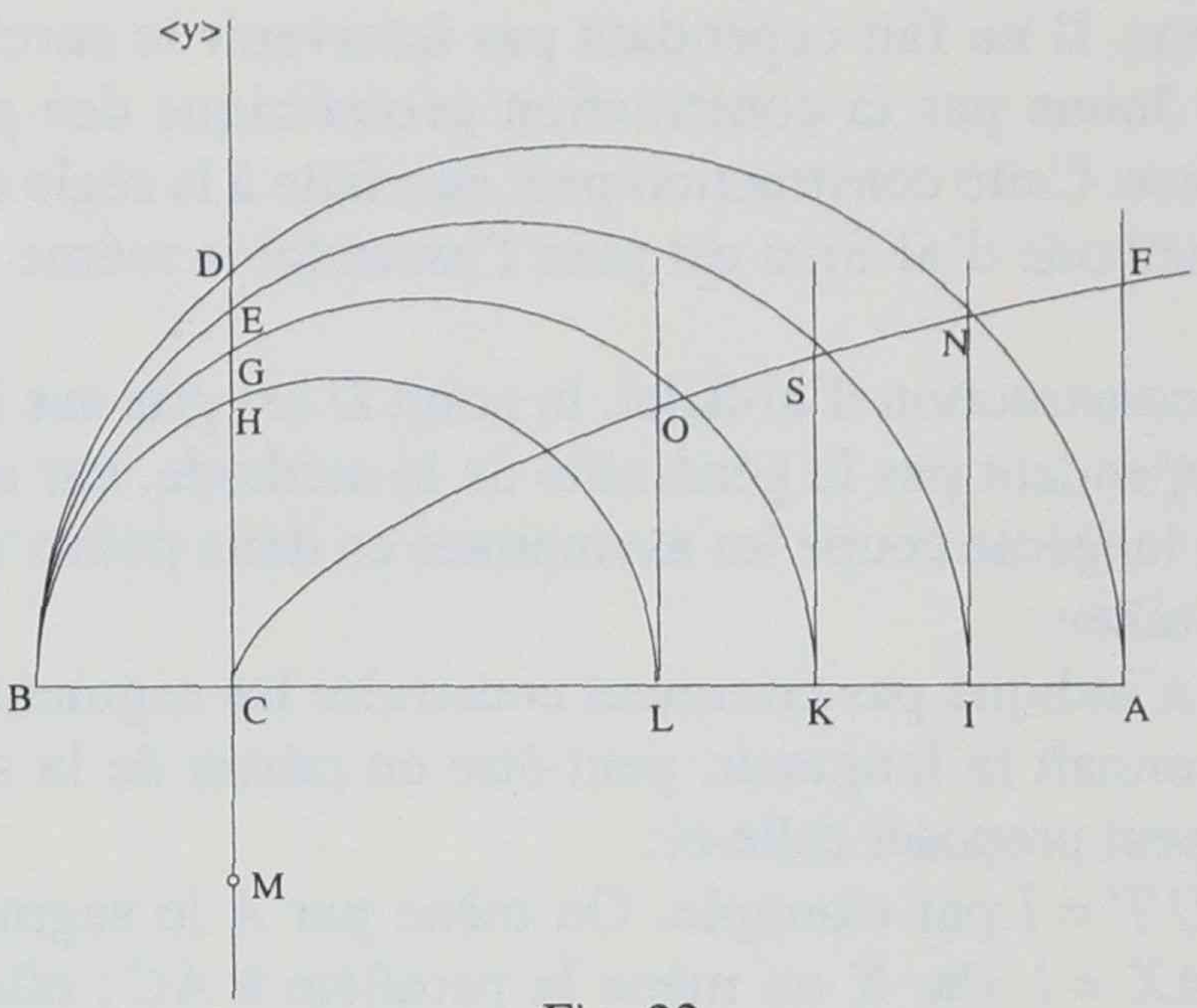


Fig. 22

on a donc

$$SK = CG.$$

Par ce procédé on associe à tout point pris sur la demi-droite $[CA)$ un cercle et on en déduit un point sur la parabole cherchée.

Al-Sijzī prend les points L, K, I, A auxquels correspondent les cercles de diamètres BL, BK, BI, BA qui coupent la perpendiculaire CY respectivement aux points H, G, E, D ; on a alors

$$CH^2 = CB \cdot CL, \;\; CG^2 = CB \cdot CK, \;\; CE^2 = CB \cdot CI \text{ et } CD^2 = CB \cdot CA.$$

Les points O, S, N, F d'ordonnées respectives $OL = CH$, $SK = CG$, $NI = CE$ et $FA = CD$ vérifient

$$OL^2 = c \cdot CL, \;\; SK^2 = c \cdot CK, \;\; NI^2 = c \cdot CI \text{ et } FA^2 = c \cdot CA,$$

ils appartiennent donc à la parabole cherchée.

Cette méthode pour tracer la parabole est la même que celle donnée par Ibn Sinān dans son traité[1], et toujours la même que l'on retrouve dans son traité *Toutes les figures sont à partir du cercle*.

[1] *Tracé des trois sections*, dans *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au* X*e* *siècle*, p. 266 sq. et 247 sq.

2.1.4.3 *Tracé par points d'une hyperbole dont le diamètre transverse porté par l'axe et le côté droit relatif à ce diamètre sont égaux*

Soient AB l'axe transverse de l'hyperbole et L un point quelconque de celle-ci et LD son ordonnée relative à l'axe AB. On a d'après I.12 des *Coniques*

$$\frac{LD^2}{DA \cdot DB} = \frac{c}{AB},$$

c est le côté droit.

La réciproque se démontre par l'absurde. Dans le cas considéré ici, comme $c = AB$, on a

$$LD^2 = DA \cdot DB.$$

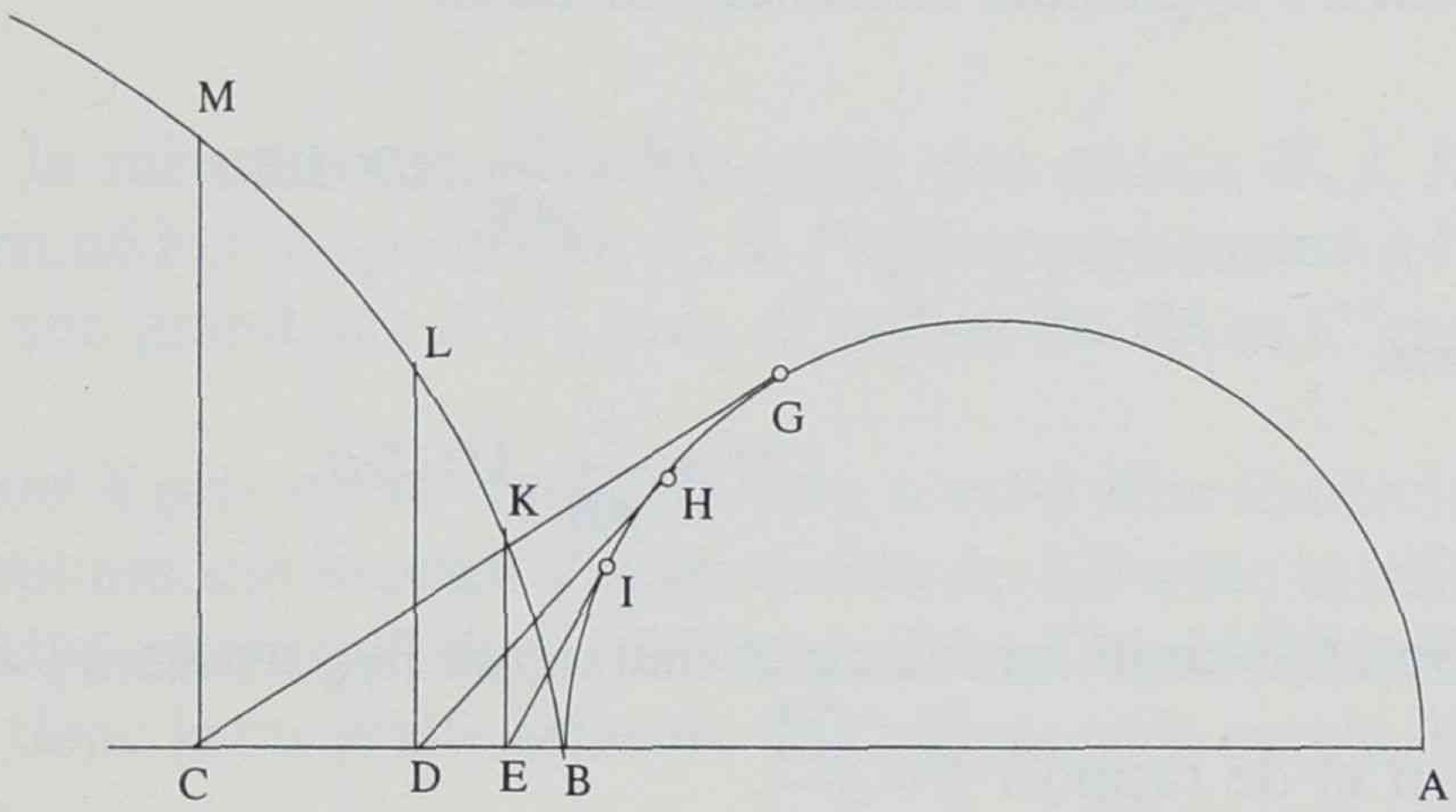


Fig. 23

Al-Sijzī considère le cercle de diamètre AB et mène par les points E, D, C pris sur l'axe au-delà de B, les tangentes EI, DH, CG au cercle et les perpendiculaires EK, DL et CM à l'axe, avec $EK = EI$, $DL = DH$ et $CM = CG$. On a alors

$$EK^2 = EI^2 = EA \cdot EB,\ DL^2 = DH^2 = DA \cdot DB,\ CM^2 = CG^2 = CA \cdot CB.$$

Les points M, L, K appartiennent donc à l'hyperbole cherchée.

Remarque : Al-Sijzī trace ici une hyperbole équilatère. La méthode est la même que celle proposée par Ibn Sinān. Seulement ce dernier traite un cas plus général. Les données pour le tracé sont le diamètre transverse AB, le côté droit c qui lui est associé et α l'angle que fait AB avec l'ordonnée. Il traite d'abord le cas avec $AB = c$ et $\alpha \neq 1$ droit. On a

$$DH^2 = DL^2 = DB \cdot DA.$$

Le point L appartient à l'hyperbole cherchée.

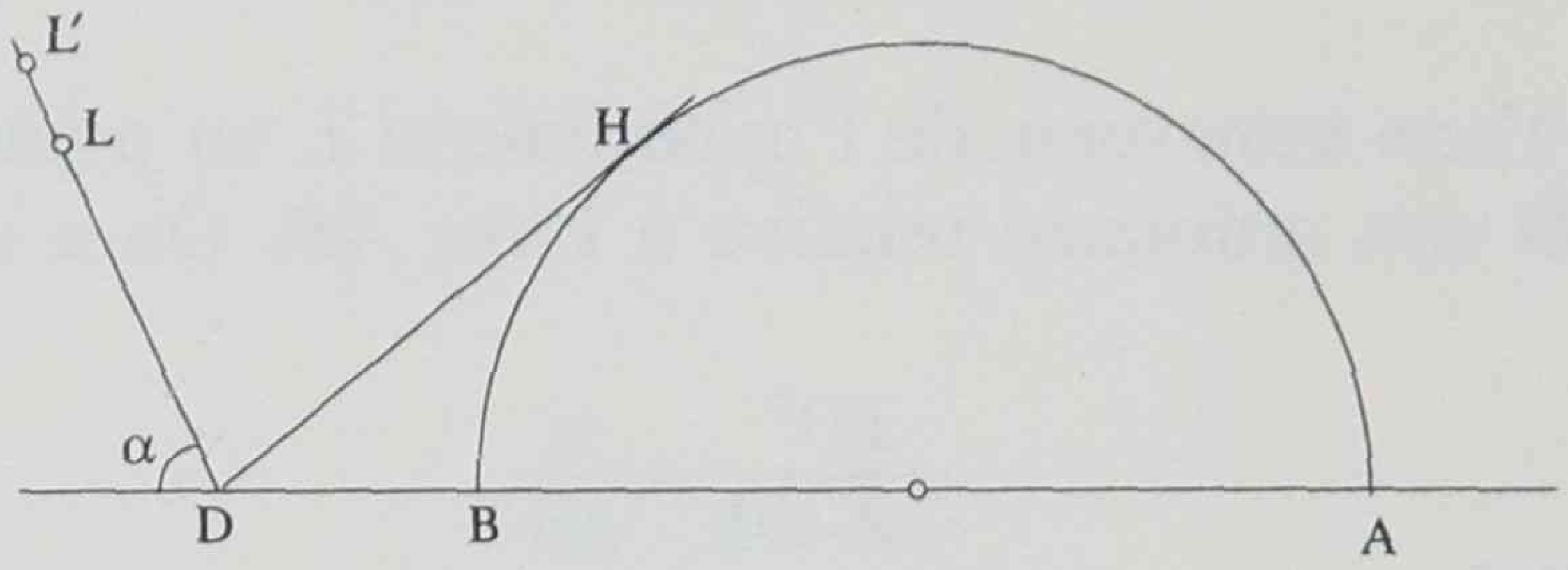


Fig. 24

Il fait remarquer que l'hyperbole est équilatère. Ibn Sinān montre ensuite que si le côté droit $c' \neq AB$, le point L' sur la droite DL tel que $\frac{L'D^2}{LD^2} = \frac{c'}{c}$ appartient à l'hyperbole cherchée, on aurait

$$LD^2 = \frac{c}{AB} \cdot AD \cdot DB \qquad \text{avec } c = AB,$$

on a donc

$$L'D^2 = \frac{c'}{AB} \cdot AD \cdot DB.$$

Ibn Sinān déduit[1] en fait cette deuxième hyperbole à l'aide d'une affinité d'axe AB et de rapport $k = \sqrt{\frac{c'}{c}}$.

Dans son traité *Toutes les figures sont à partir du cercle*, al-Sijzī indique seulement le principe de la construction sans l'expliquer ; mais le titre même du traité laisse penser qu'elle se faisait comme chez Ibn Sinān à partir du cercle. Dans ce traité, comme ici, l'angle des ordonnées est droit.

2.1.4.4. *Tracé par points d'une ellipse dont on connaît la longueur* 2a *du grand axe et la position de chacun des deux foyers*

Soient D et E les points donnés, le cercle de centre D et de rayon $2a$ coupe la droite DE en A et B, on prend C au-delà de D tel que $DC = EA$.

Soit G un point quelconque sur le cercle $(D, 2a)$, on joint GD et GE et on mène EL avec $G\hat{E}L = D\hat{G}E$, on a donc $GL = LE$ et par conséquent $LD + LE = DG = 2a$. Le point L appartient à l'ellipse de foyers D et E et de grand axe $2a$.

[1] *Tracé des trois sections*, dans *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X*e *siècle*, p. 253-256.

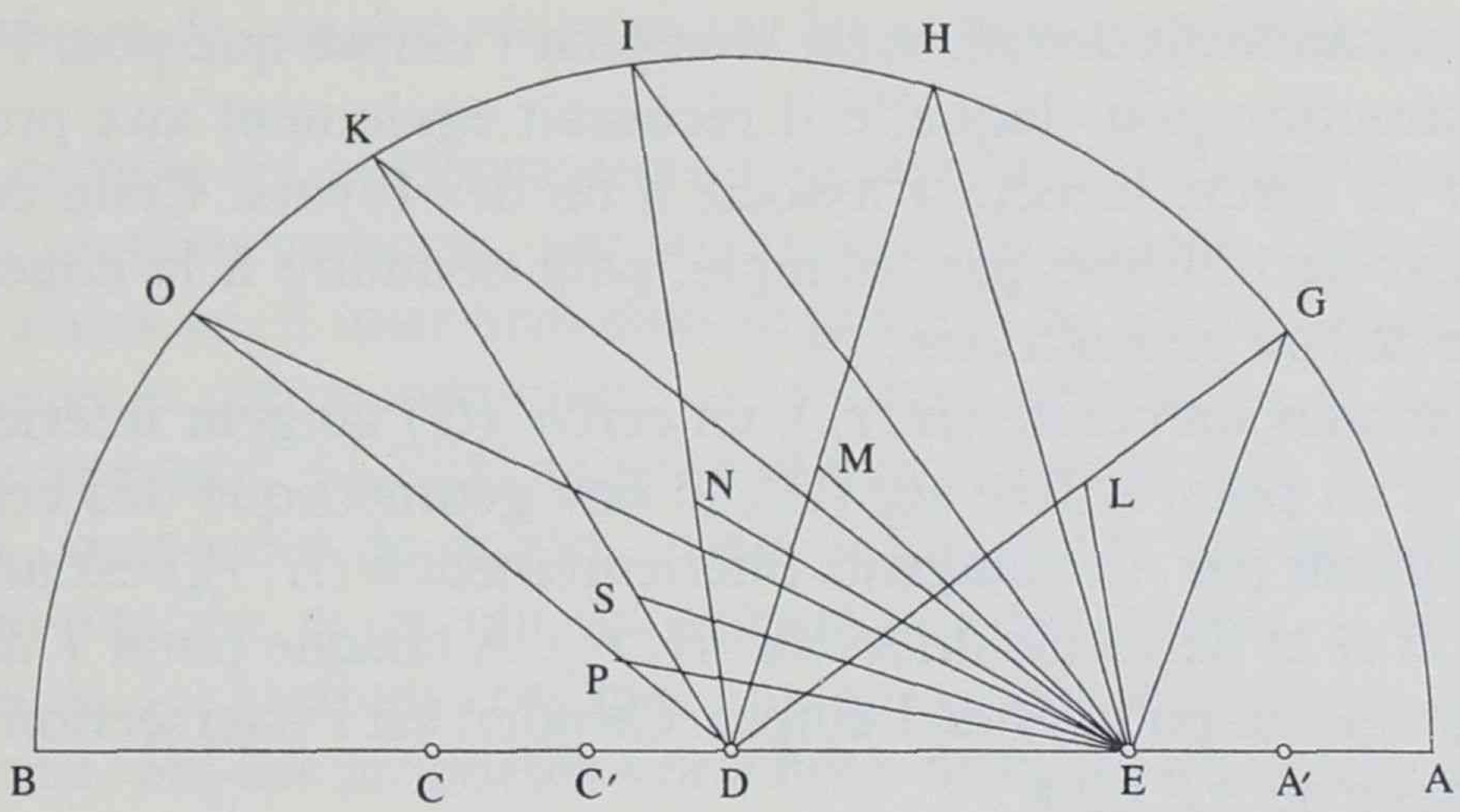


Fig. 25

Al-Sijzī refait la même construction à partir des points H, I, K, O du cercle $(D, 2a)$ et en déduit les points M, N, S, P qui appartiennent à l'ellipse de foyers D et E, son grand axe $A'C'$, avec A' milieu de EA et C' milieu de CD.

Ainsi à tout point X pris sur le cercle $(D, 2a)$, c'est-à-dire le cercle directeur de centre D, est associé le point Y intersection de XD avec la médiatrice de XE ; le point Y appartient à l'ellipse de foyers D et E avec $YD + YE = 2a$.

Le tracé utilise donc la propriété bifocale de l'ellipse et le cercle directeur associé à un foyer.

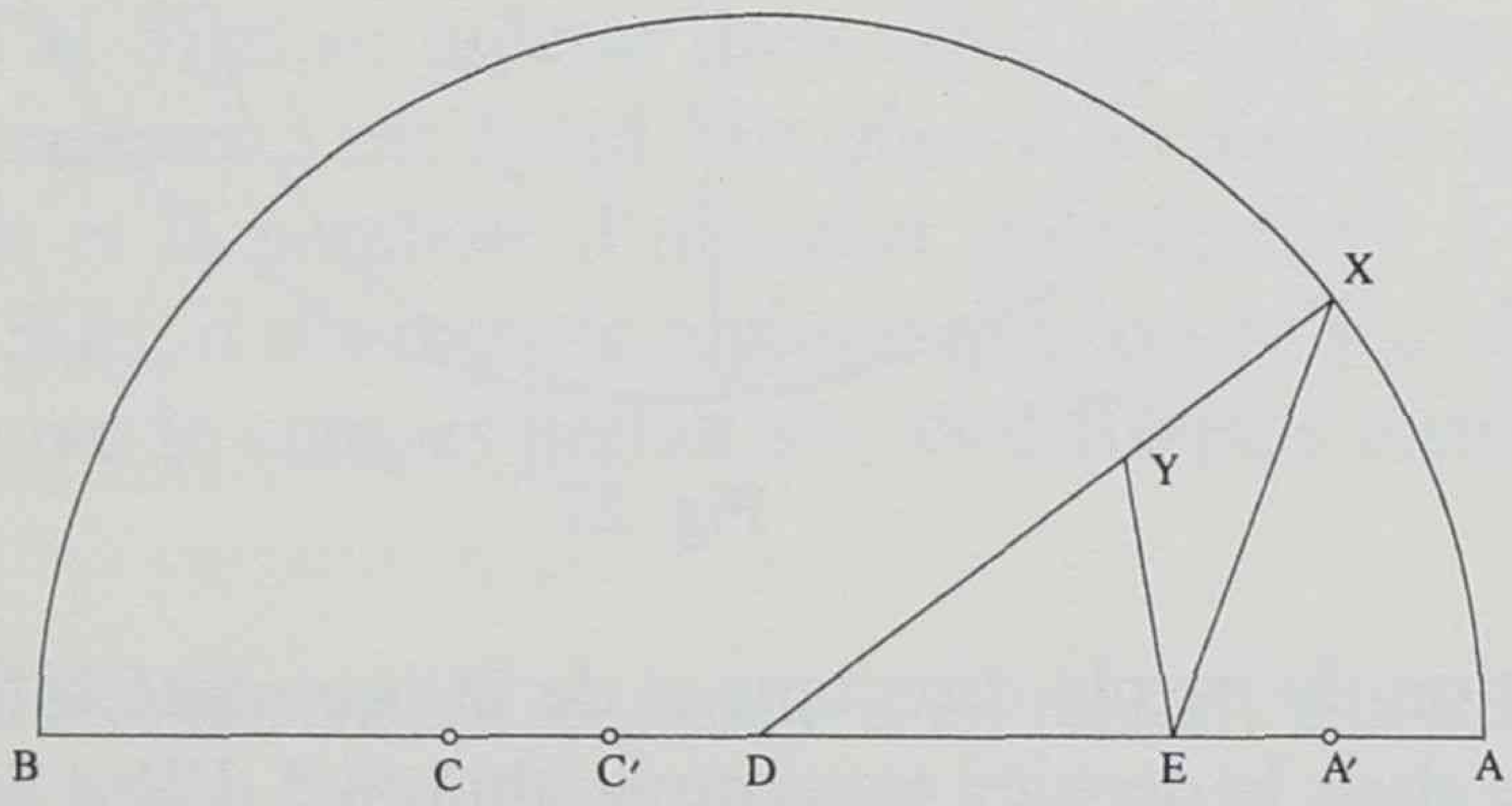


Fig. 26

Remarques :

1) Dans le traité *Toutes les figures sont à partir du cercle*, al-Sijzī construit l'ellipse par affinité à partir du cercle et ne mentionne pas la méthode qu'il applique ici.

2) Ibn Sinān avait donné, aussi bien pour l'ellipse que pour l'hyperbole[1], une construction pour laquelle il recourait également aux propriétés des foyers et du cercle directeur associé à un des foyers. Cette construction, dans le cas de l'ellipse par exemple, peut conduire à la conclusion d'un problème de lieu géométrique :

Étant donnés un cercle (H, r_H), un cercle (G) tangent intérieurement au premier et un point A fixe sur (G), le lieu géométrique des centres M des cercles passant par A et tangents intérieurement à (H, r_H) est une ellipse de foyers A et H et de cercle directeur (H, r_H). À chaque point T du cercle (H, r_H) est associé un point M de l'ellipse. Ce point est l'intersection de HT et de la médiatrice de AT, on a

$$MA + MH = r_H.$$

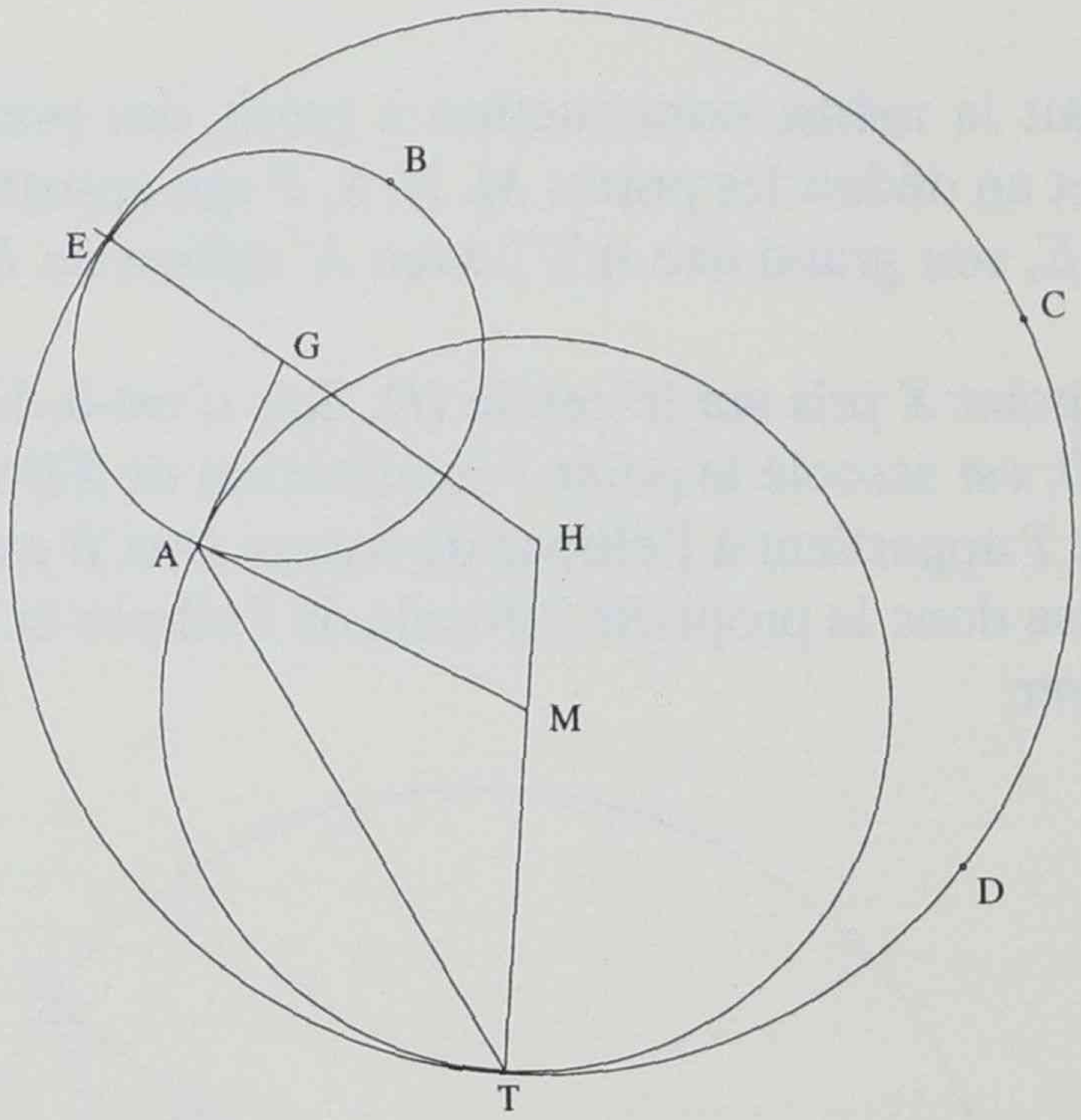


Fig. 27

3) L'utilisation du cercle directeur et de la propriété bifocale de l'ellipse est mentionnée dans le dernier paragraphe du traité d'Ibn Sinān[2], mais celui-ci ne procède pas à la construction par points.

Sans exagérer donc, on peut affirmer que pour le tracé par points des sections coniques, al-Sijzī dépend fortement des idées d'Ibn Sinān et en tire les conséquences pour la construction par points.

[1] Notons qu'al-Sijzī ne traite pas la construction d'une hyperbole à partir de la propriété bifocale et d'un cercle directeur ayant pour centre un des foyers.

[2] *Tracé des trois sections*, dans *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 259 et 286.

2.1.5. *Une classe de courbes : le cercle et les sections coniques*

Al-Sijzī, comme ses prédécesseurs, n'a cessé de rencontrer le cercle lors du tracé des sections coniques, par points ou continûment. Dans le premier cas, nous l'avons vu, il intervient dans le procédé du tracé ; dans le second, on le trace avec le même instrument — le même compas — et surtout avec le même mouvement. Al-Sijzī ne pouvait que constater que, contrairement aux figures composées de droites, c'est-à-dire celles qui ne subissent ni révolution ni rotation, et qui ont des propriétés « éloignées » — dit-il[1] — de celles du cercle, les sections coniques qui, elles, sont engendrées grâce à un tel mouvement, ont des propriétés « proches » de celles du cercle. C'est dire que les figures rectilignes, c'est-à-dire polygonales, forment une classe à laquelle n'appartient pas le cercle. Mais d'autre part al-Sijzī, comme al-Qūhī, a conçu le compas parfait pour tracer aussi la droite par le cercle et les sections coniques. La question est donc de savoir si le cercle et les sections coniques appartiennent ou non à la même classe de courbes.

Or al-Sijzī savait déjà, à partir du livre d'al-Ḥasan ibn Mūsā[2] qu'il cite, qu'entre le cercle et l'ellipse il y a à la fois un rapport et une similarité. Al-Ḥasan en effet n'a pas seulement montré comment obtenir l'ellipse à partir du cercle par affinité orthogonale, mais il a aussi établi que le rapport de l'aire S d'une ellipse d'axes $2a$ et $2b$ à l'aire S_1 du cercle inscrit de diamètre $2b$ est : $\frac{S}{S_1} = \frac{a}{b}$ (proposition 13). Il a également démontré (proposition 17) que toute ellipse a pour aire celle d'un cercle dont le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse.

La question d'al-Sijzī se précise donc : que peut-on dire pour les deux autres sections coniques à cet égard ? Existe-t-il un rapport et une similarité entre l'hyperbole et la parabole d'une part et le cercle ? À cette question même, avoue al-Sijzī, il n'a reçu de réponse que lorsqu'il a réalisé comment tracer les figures par le compas parfait sur les différents plans ; ou comme il l'écrit lui-même :

> J'avais toujours réfléchi à l'existence d'un rapport entre ces deux figures et le cercle et à leur similitude et cherché à le saisir ; or la connaissance de ceci ne m'en a été possible qu'une fois appris comment faire tourner le compas conique suivant les positions des plans[3].

[1] Voir *infra*, p. 254.

[2] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du* IX*e au* XI*e siècle*, vol. I, p. 885 sq.

[3] Voir *infra*, p. 254 ; ar. 255, 9-11.

C'est ce mouvement de rotation régulière qui permet de tracer le cercle ainsi que les trois sections coniques sur l'un ou l'autre plan. La seule différence entre ces courbes revient à celle de la position du plan sur lequel chacune est tracée par rapport à l'axe du compas. Il s'agit donc d'une seconde classe de courbes, et on comprend pourquoi leurs propriétés sont « proches » de celles du cercle[1].

Al-Sijzī ne s'arrête cependant pas à cette réponse générale, mais il examine les propriétés relatives au diamètre, au centre et aux axes, pour cette classe de courbes.

Pour le cercle, les choses sont plus simples, puisque le plan sur lequel on le trace est perpendiculaire à l'axe du compas. Si l'on ne trouve pas son centre, on applique la proposition III.1 des *Éléments*. Pour l'ellipse, on trace deux cordes parallèles, CD et EG de milieux respectifs H et I, la droite HI coupe l'ellipse en A et B, la droite AB est un diamètre, son milieu K est le centre de l'ellipse, la droite LM parallèle à CD est le diamètre conjugué de AB.

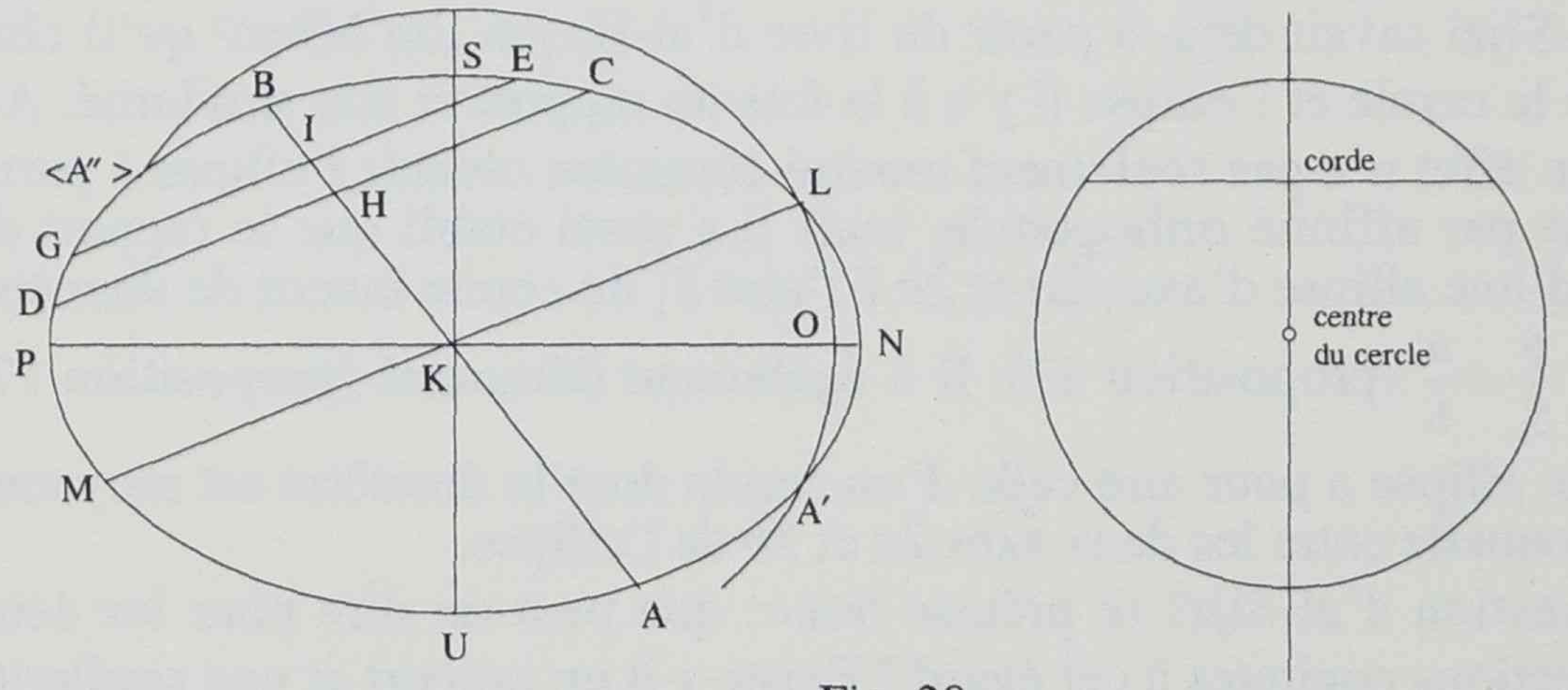


Fig. 28

Traçons le cercle (K, KL) ; il coupe l'ellipse en L et M et en deux autres points, soit A' l'un d'eux et O le milieu de l'arc de cercle LA' ; la droite KO coupe l'ellipse en P et en N. La droite PN est donc un des axes de l'ellipse — le grand ou le petit suivant le point A' choisi. Au second point A'' on fera correspondre l'axe SU avec S milieu de l'arc LA''.

Notons qu'al-Sijzī, à côté de l'ellipse, trace le cercle pour indiquer le cas particulier où le diamètre est perpendiculaire à la corde. La démarche est de

[1] Autrement dit, toutes les sections coniques sont obtenues à partir du cercle par projection conique ; il faudra cependant attendre Desargues pour voir cette idée complètement développée comme base de la théorie des coniques. On voit cependant apparaître avec ces mathématiciens du X^e siècle une nouvelle manière de penser les objets géométriques. La classification de ceux-ci ne se fait plus à l'aide de traits communs immédiatement perçus, mais à partir de moyens théoriques qui permettent d'établir les transformations des uns dans les autres.

toute manière voulue rapide. En effet, al-Sijzī renvoie à Apollonius pour l'ellipse et se satisfait de cette figure pour le cercle.

Al-Sijzī reprend ensuite généralement le problème. Ainsi, il considère une section quelconque où il trace deux couples de cordes parallèles deux à deux ; on détermine alors deux diamètres, soit les diamètres *KL* et *NS*. On a les cas suivants selon le lieu du point *M*, intersection des deux diamètres :

- *M* extérieur à la section, celle-ci est une hyperbole ;
- *M* intérieur à la section, celle-ci est une ellipse ;
- les deux diamètres sont parallèles, la section est une parabole. Le point *M* est rejeté à l'infini. Pour établir ce qui précède, al-Sijzī s'appuie sur les propositions 44 à 47 du second livre des *Coniques* d'Apollonius, sans toutefois les évoquer.

Al-Sijzī passe enfin et aussi rapidement à la détermination de l'axe. Pour l'hyperbole (ou l'ellipse), il considère un point *V* de la courbe ; il trace ensuite le cercle (*M*, *MV*), il recoupe la courbe en *R* ; si *I′* est le milieu de l'arc de cercle *VR*, alors *MI′* est l'axe de l'hyperbole.

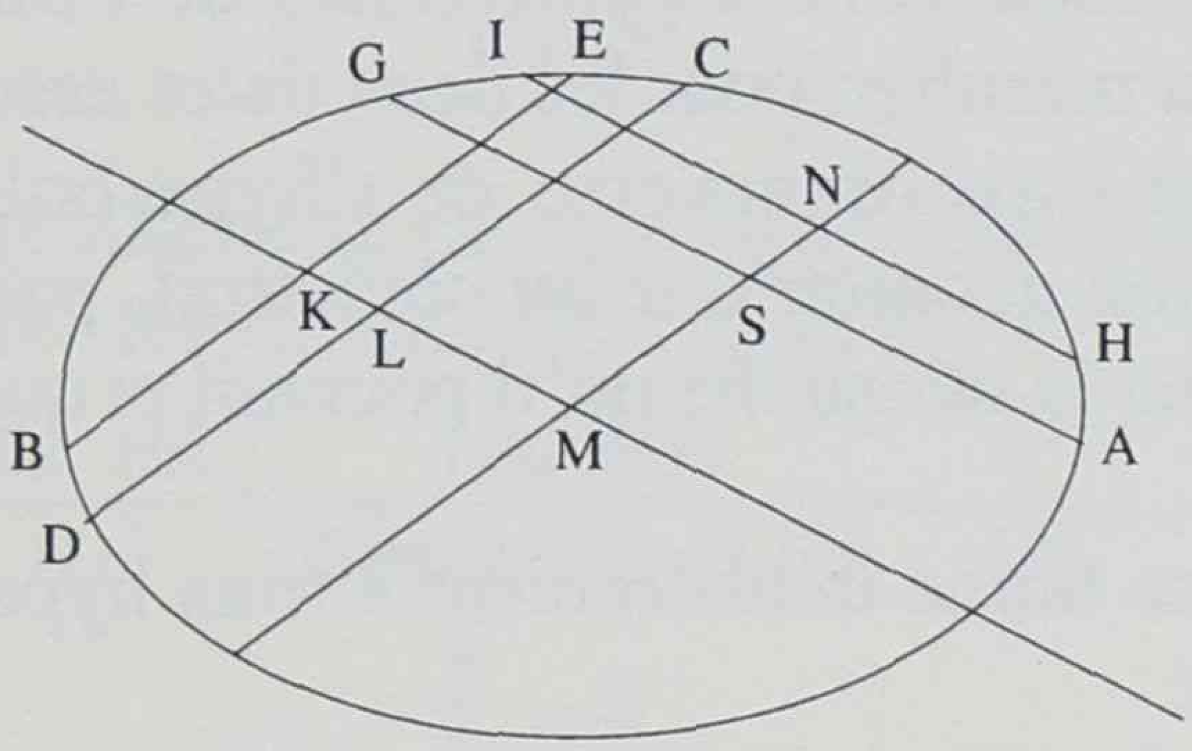


Fig. 29.1

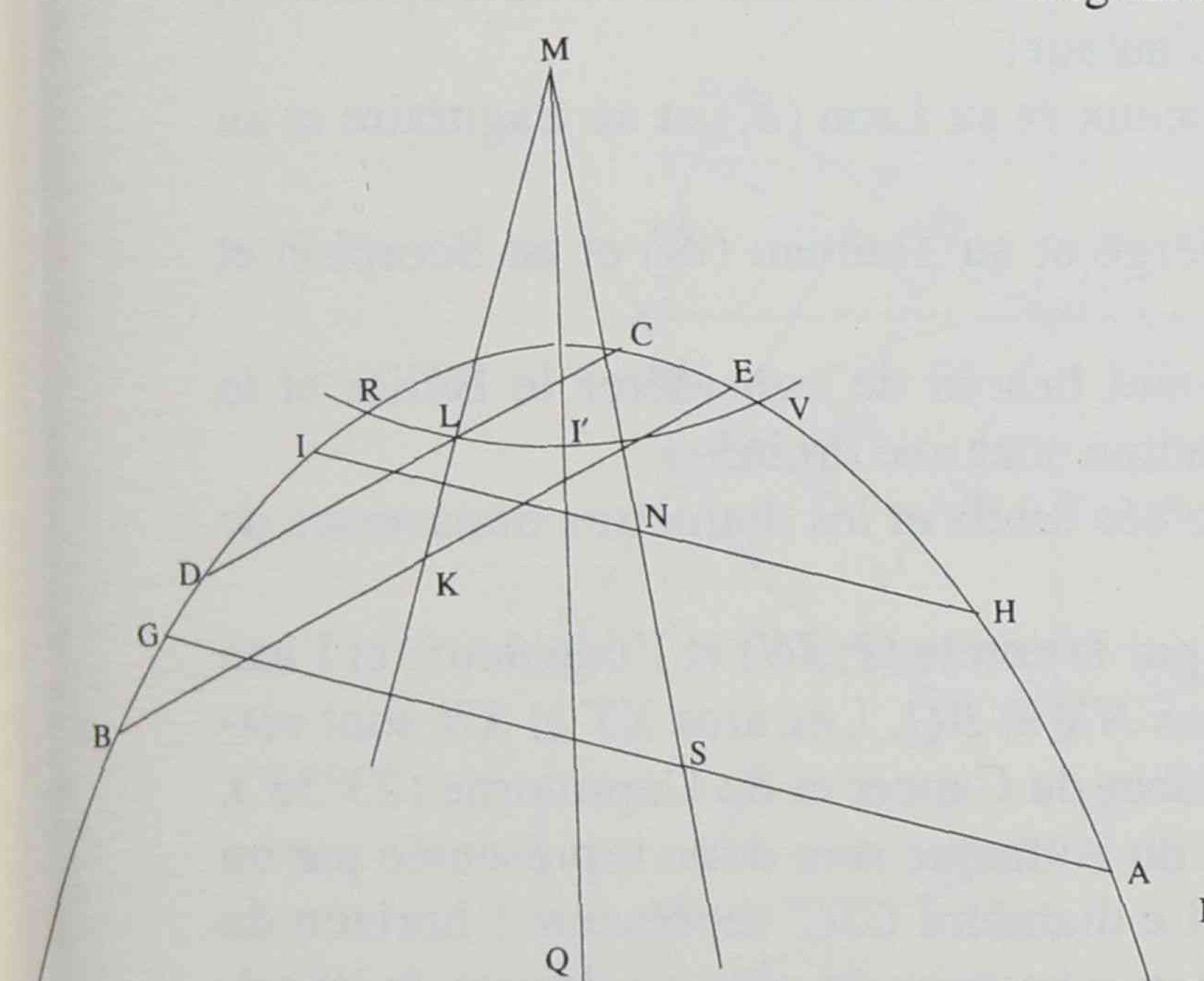


Fig. 29.2

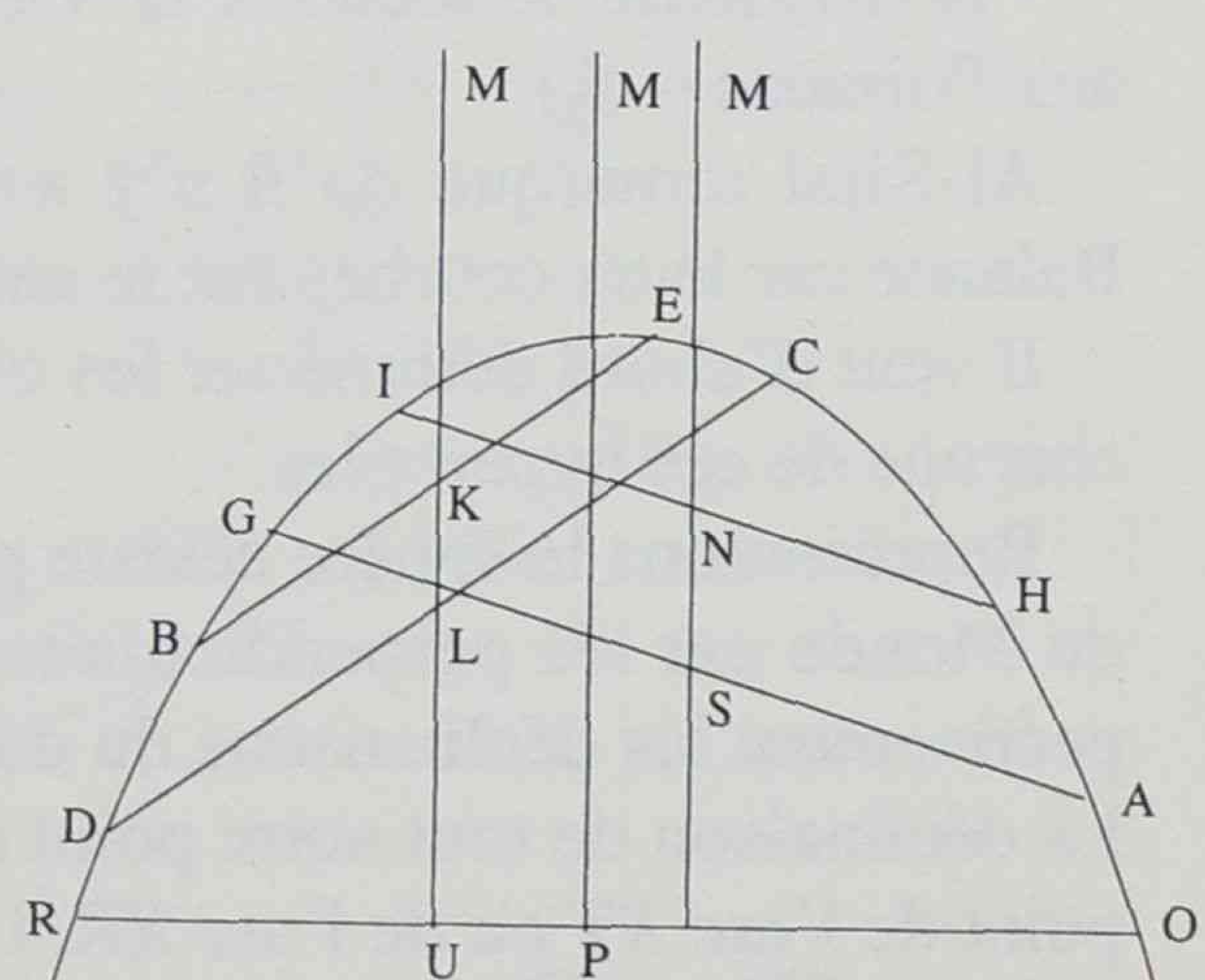


Fig. 29.3

Dans le cas de la parabole, l'axe est parallèle au diamètre *ML* et passe par le milieu *P* d'une corde *RO* perpendiculaire à *ML*.

C'est avec ces déterminations du diamètre, du centre et des axes des sections, c'est-à-dire des propriétés qui caractérisent les coniques et le cercle comme cas particulier, que s'achève la première partie du livre, avant que l'auteur passe à l'étude d'un exemple d'application.

2.1.6. *Les hyperboles tracées sur un cadran solaire horizontal par l'extrémité de l'ombre du stylet d'un gnomon*

Dans toute cette partie, al-Sijzī considère des cadrans solaires horizontaux dans des lieux de l'hémisphère Nord de latitude λ telle que $0 < \lambda < 90°$ — $23°33'$. Les lignes des heures sont des hyperboles quelle que soit la latitude choisie et quelle que soit la hauteur du gnomon.

D'autre part, à chaque valeur δ de la déclinaison du soleil, on associe une branche d'une hyperbole ; et à la valeur $-\delta$ la deuxième branche de la même hyperbole. Les sommets sont les extrémités de l'ombre correspondant au passage du soleil au méridien pour les deux dates associées aux déclinaisons δ et $-\delta$. On a ainsi l'axe transverse de l'hyperbole étudiée. Al-Sijzī en déduit la construction géométrique du côté droit, puis celle des asymptotes de l'hyperbole. Voici la démarche qu'il poursuit et que nous allons examiner en détail.

En fait, al-Sijzī se borne délibérément à trois hyperboles associées à des signes du zodiaque :

• l'une, associée au début des constellations du Cancer et du Capricorne, $|\delta| = 23°33'$, la valeur utilisée par l'auteur ;

• la seconde, associée aux Gémeaux et au Lion (δ_1) et au Sagittaire et au Verseau ($-\delta_1$) ;

• la troisième, associée à la Vierge et au Taureau (δ_2) et au Scorpion et aux Poissons ($-\delta_2$).

Al-Sijzī remarque qu'il n'y a nul besoin de considérer le Bélier et la Balance car leurs courbes sur le cadran sont une droite.

Il veut d'abord déterminer les côtés droits et les diamètres transverses de chacune de ces hyperboles.

Représentons la sphère céleste par le cercle (J, JN) et l'équateur ; et l'axe du Monde par les perpendiculaires NX et BQ. Les arcs XT et XR sont respectivement les déclinaisons du début du Cancer et du Capricorne ($23°33'$). La déclinaison de tout autre point du zodiaque sera donc représentée par un point de l'arc XT ou de l'arc XR. Le diamètre CJC' représente l'horizon du lieu JC ($\widehat{BC} = \widehat{QC'}$ = latitude du lieu = hauteur du pôle au-dessus de l'horizon). On représente par JM la hauteur du gnomon de sommet J, ($JM \perp CJ$), et par WMZ le plan du cadran solaire. Ce plan coupe les deux nappes coniques engendrées par les triangles *TJS* et *RJE* suivant les deux branches d'une hyperbole dont l'axe transverse est *LK*.

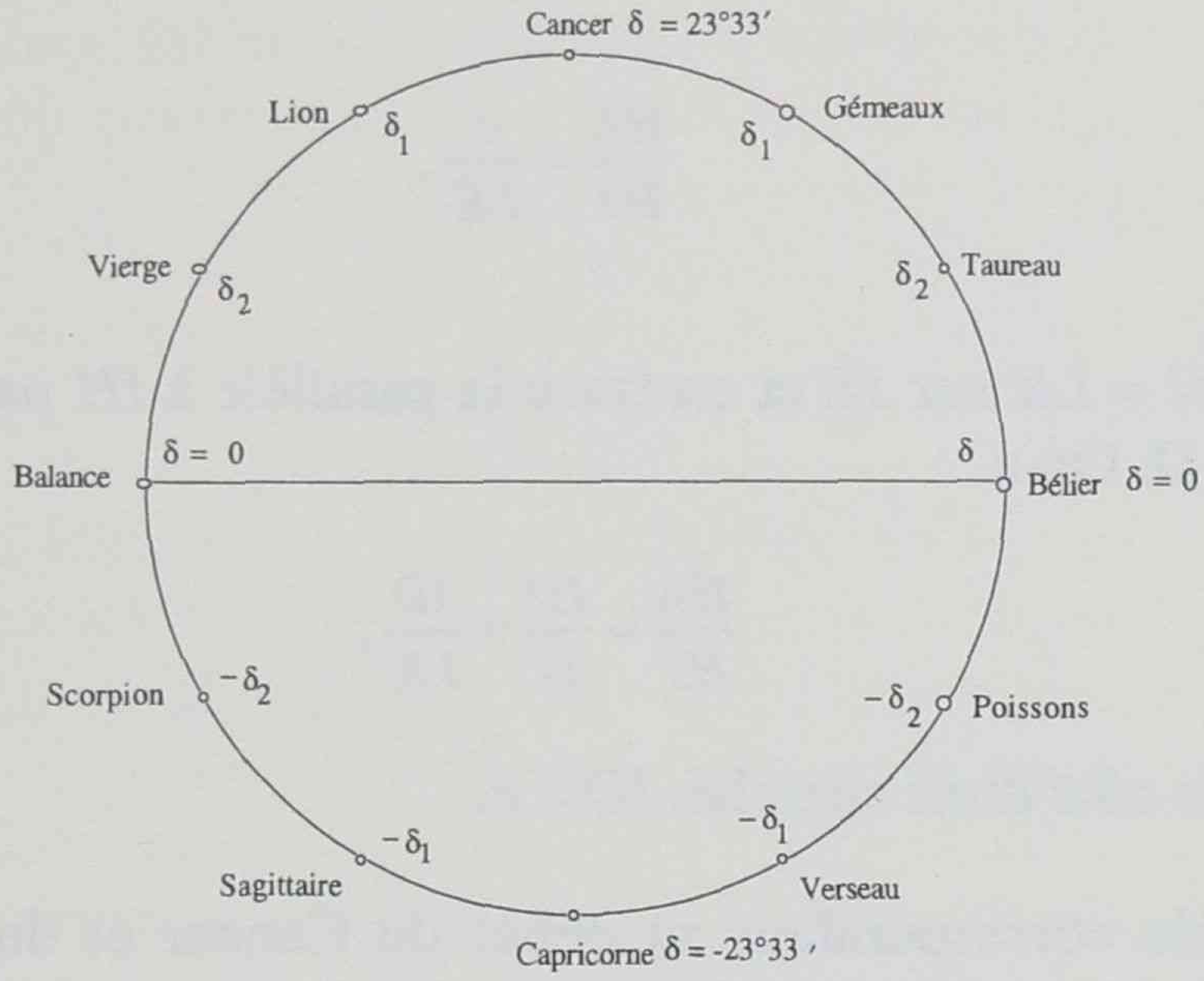


Fig. 30

On trace le cercle circonscrit au triangle *EJR* ; la droite *JC* coupe ce cercle en *A* et *ER* en *H*. D'après les *Coniques* I.12, on a

$$\frac{EH \cdot HR}{HJ^2} = \frac{\text{côté droit}}{\text{diamètre transverse}} = \frac{c}{LK} ;$$

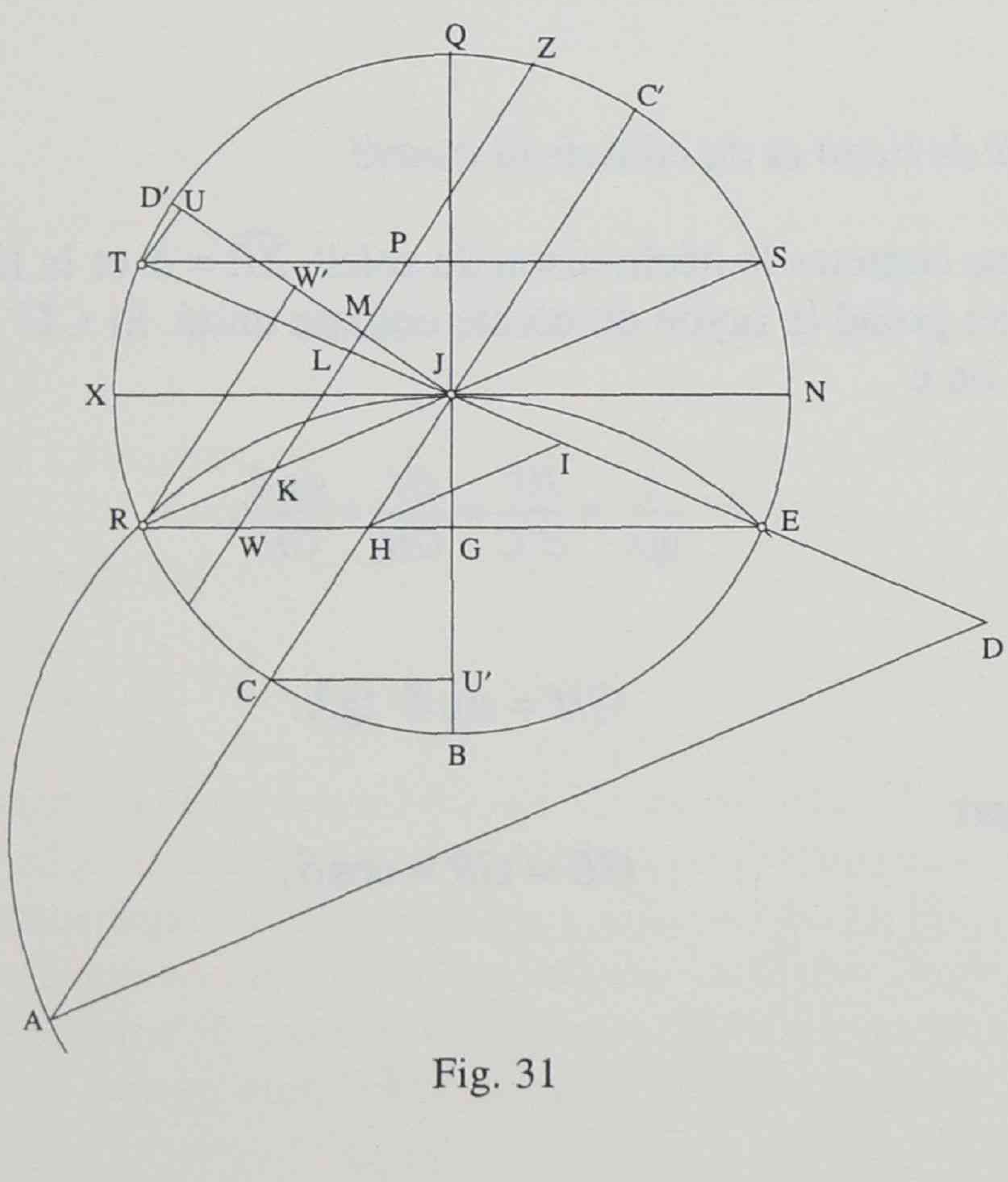


Fig. 31

mais la propriété de la puissance du point H par rapport au cercle donne

$$EH \cdot HR = HJ \cdot HA,$$

on a donc

$$\frac{HA}{HJ} = \frac{c}{LK}.$$

On porte $JI = LK$ sur JE et on trace la parallèle à IH passant par A, elle coupe JE en D. On a

$$\frac{HA}{HJ} = \frac{ID}{IJ} = \frac{ID}{LK},$$

donc ID est le côté droit cherché, $ID = c$.

L'hyperbole correspondant au début du Cancer et du Capricorne est donc déterminée par son axe LK et le côté droit ID associé à cet axe.

La même méthode s'applique pour toute déclinaison $\widehat{XR} = \delta \neq 0$ et pour toute latitude λ. Pour un lieu de latitude $\lambda = 0$, l'horizon correspond à la droite JB, le gnomon sera porté par JX et le plan du cadran solaire sera parallèle à la droite JB. Al-Sijzī a donc donné une construction géométrique du diamètre transverse LK et du côté droit ID. Il poursuivra leur étude par le calcul.

2.1.7. *Calcul de l'axe et du côté droit trouvé*

On suppose connues la déclinaison du soleil $\widehat{XR} = \delta$ et la latitude du lieu $\widehat{BC} = \lambda$, et on prend le rayon du cercle comme unité. Si $CU' \perp JB$ (cf. Fig. précédente), on a

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\lambda} = \frac{JU'}{U'C} = \frac{GJ}{GH} = \frac{\sin\delta}{GH},$$

d'où

$$GH = \sin\delta \cdot \mathrm{tg}\lambda.$$

D'autre part

$$GE = GR = \cos\delta,$$

d'où

$$EH = GE + GH = \cos\delta + \sin\delta \cdot \mathrm{tg}\lambda$$

et

$$HR = GR - GH = \cos\delta - \sin\delta \cdot \mathrm{tg}\lambda,$$

d'où

$$HE \cdot HR = \cos^2\delta - \sin^2\delta \cdot \mathrm{tg}^2\lambda = HJ \cdot HA.$$

Mais on a

$$HJ^2 = HG^2 + GJ^2 = \sin^2\delta \cdot \mathrm{tg}^2\lambda + \sin^2\delta = \sin^2\delta\left(1 + \mathrm{tg}^2\lambda\right),$$

d'où

$$\frac{HA}{HJ} = \frac{HJ \cdot HA}{HJ^2} = \frac{\cos^2\delta - \sin^2\delta \cdot \mathrm{tg}^2\lambda}{\sin^2\delta\left(1 + \mathrm{tg}^2\lambda\right)} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\delta \cdot \mathrm{tg}^2\lambda}{\mathrm{tg}^2\delta\left(1 + \mathrm{tg}^2\lambda\right)}.$$

Or la droite JM ($JM \perp JC$) coupe le cercle en D', on a $\widehat{XD'} = \widehat{BC} = \lambda$ et $\widehat{XT} = \widehat{XR} = \delta$, d'où $\widehat{TD'} = \lambda - \delta$ (dans la figure, al-Sijzī considère $\lambda > \delta$) et $\widehat{RD'} = \lambda + \delta$. On a donc, en notant U et W' les projections de T et de R sur JD',

$$TU = \sin(\lambda - \delta) \text{ et } RW' = \sin(\lambda + \delta)$$
$$JU = \cos(\lambda - \delta) \text{ et } JW' = \cos(\lambda + \delta).$$

Soit $JM = h$ la hauteur du stylet du gnomon, on a

$$\frac{JM}{ML} = \frac{JU}{UT},$$

d'où

$$ML = h \cdot \mathrm{tg}(\lambda - \delta)$$

et

$$\frac{JM}{MK} = \frac{JW'}{W'R},$$

d'où

$$MK = h \cdot \mathrm{tg}(\lambda + \delta),$$

on en déduit la longueur LK de l'axe transverse de l'hyperbole :

$$LK = h\left[\mathrm{tg}(\lambda + \delta) - \mathrm{tg}(\lambda - \delta)\right] = 2h \cdot \mathrm{tg}\delta \frac{1 + \mathrm{tg}^2\lambda}{1 - \mathrm{tg}^2\lambda \cdot \mathrm{tg}^2\delta}.$$

Le côté droit c associé à LK est

$$c = LK \cdot \frac{HA}{HJ};$$

on en déduit

$$c = \frac{2h}{\operatorname{tg}\delta}.$$

Notons qu'en un lieu de latitude 45°, on a tg $\lambda = 1$ et on obtient

$$LK = 2\,h \cdot \sin 2\delta \text{ et } c = \frac{2h}{\operatorname{tg}\delta}.$$

Al-Sijzī rappelle que cette démonstration par « le calcul » (*ḥisāb* ; ici trigonométrique) est un « témoin » (*shāhid*) de la démonstration géométrique[1].

Si on fait le calcul numérique en prenant pour le début du Cancer $\delta = 23°33' = 23°{,}55$ avec $\lambda = 39°30' = 39°{,}5$ et $h = 12$, on a l'hyperbole du Cancer et du Capricorne

$$c = 55{,}065 \cong 55°4',\ LK = 20{,}1726 \cong 20°10';$$

l'hyperbole pour le début des Gémeaux et du Lion :

$$\delta = 20°{,}23,\ c = 65{,}096 \cong 65°5',\ LK = 16{,}36 \cong 16°22';$$

l'hyperbole pour le début du Taureau et de la Vierge

$$\delta = 11°{,}55,\ c = 117{,}43 \cong 117°26' \text{ et } LK = 8{,}48 \cong 8°29'.$$

On peut comparer ces valeurs avec celles calculées par Ibn Sinān[2]. En tout cas, les valeurs calculées ici sont très proches de celles trouvées par al-Sijzī.

Al-Sijzī procède ensuite à quelques constructions à partir des côtés et des diamètres transverses trouvés.

La première construction est celle des asymptotes connaissant l'axe transverse $AB = 2a$ et le côté droit c qui lui est associé. À cette fin, il utilise

[1] Voir *infra*, p. 266 ; ar. p. 267, 12.

[2] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 307.

la proposition II.1 des *Coniques*: la longueur CD déterminée par les asymptotes sur la tangente au sommet B vérifie

$$CD^2 = 2a \cdot c,$$

d'où

$$BC = \frac{1}{2}\sqrt{2a \cdot c}.$$

Ici le procédé par la géométrie est le même que celui par le calcul.

Al-Sijzī procède en fait par construction de BG, moyenne géométrique entre le diamètre AB et le côté droit associé BC.

Le cercle de diamètre AC (= $AB + BC$) coupe la perpendiculaire en B à AC, aux points G et H, et on a

$$BG^2 = BH^2 = BA \cdot BC.$$

Soit les points E, G' et H' les milieux respectifs de AB, BG et BH, on a $G'H' = BG$, donc $G'H'^2 = AB \cdot BC$; les asymptotes de l'hyperbole d'axe transverse AB et de côté droit BC sont alors les droites EG' et EH' (et non EG et EH, comme on l'écrit dans le texte), d'après la proposition II.1 des *Coniques*.

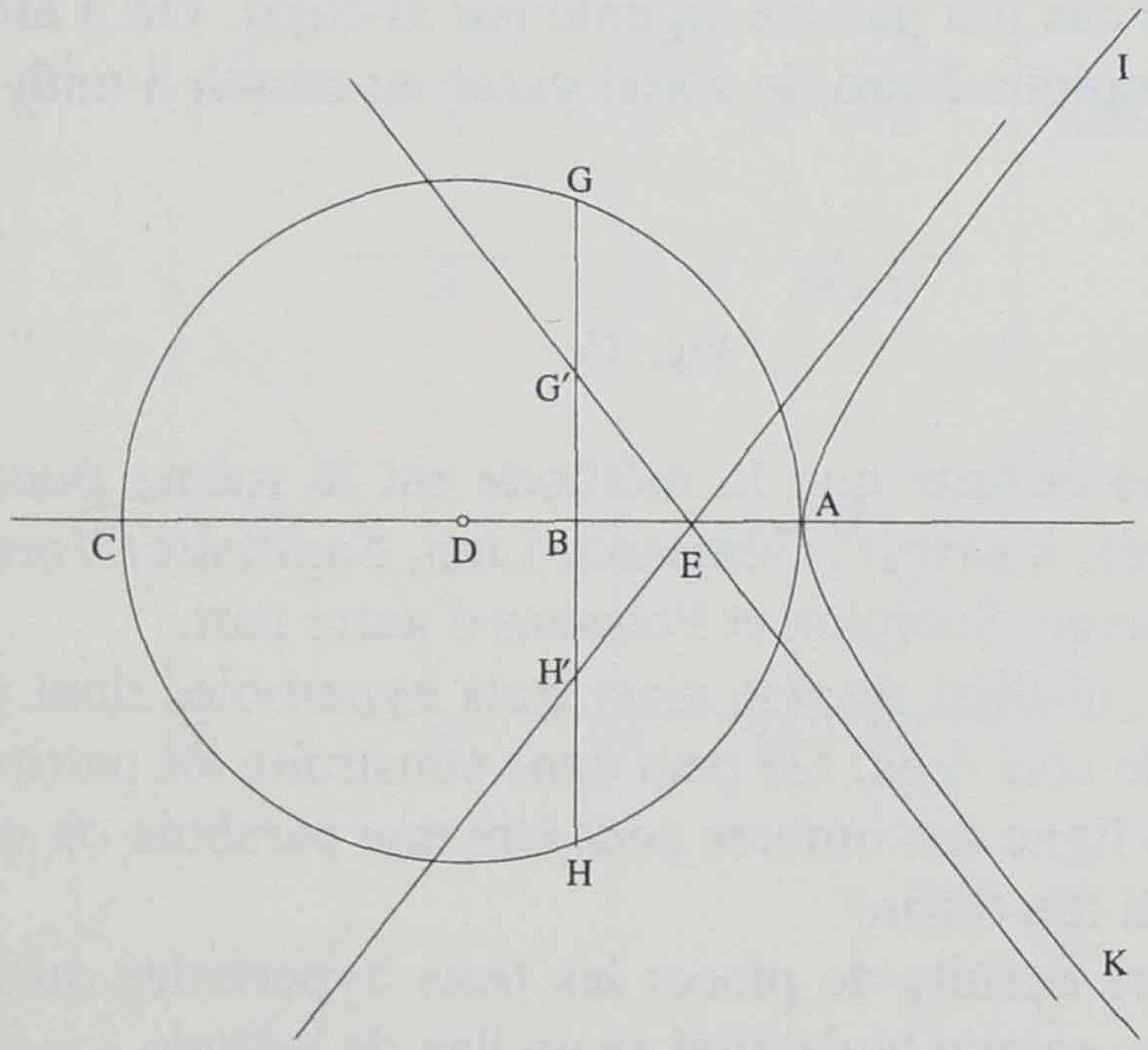


Fig. 32

Al-Sijzī procède ensuite à la construction de l'axe transverse de l'hyperbole.

Il considère l'hyperbole associée aux débuts du Cancer et du Capricorne. Soit M le pied du gnomon, L et K les extrémités de l'ombre du sommet du gnomon à midi pour les deux dates considérées. La disposition des points M, L, K dépend de la latitude λ du lieu. Le segment LK est l'axe transverse.

Supposons que $\lambda > 0$, on distingue plusieurs cas :

- $\lambda > 23°33'$ (cf. Fig. 31, p. 63) ; on a alors $LK = MK - ML$.

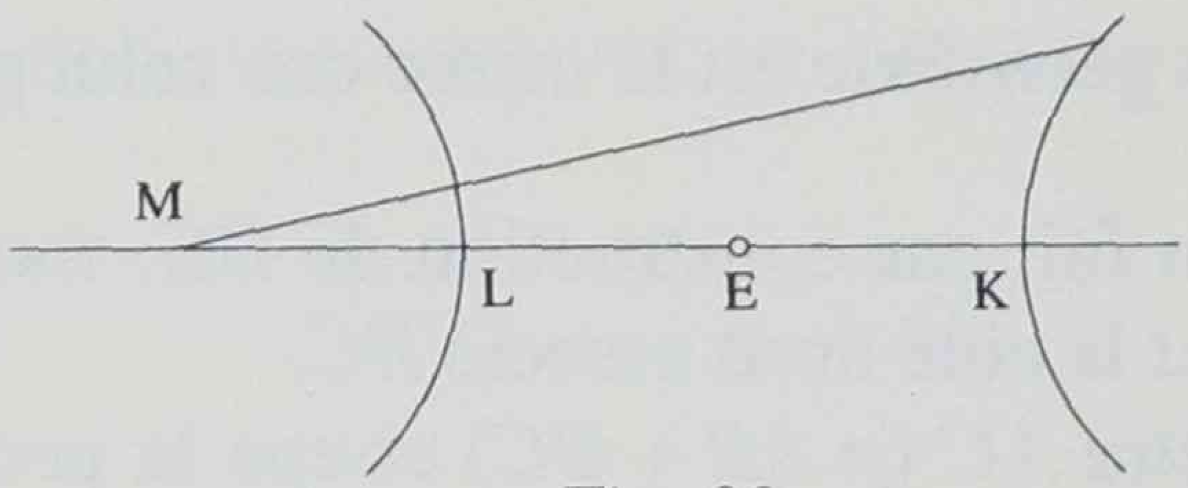


Fig. 33

- $\lambda < 23°33'$; on a $LK = ML + LK$.

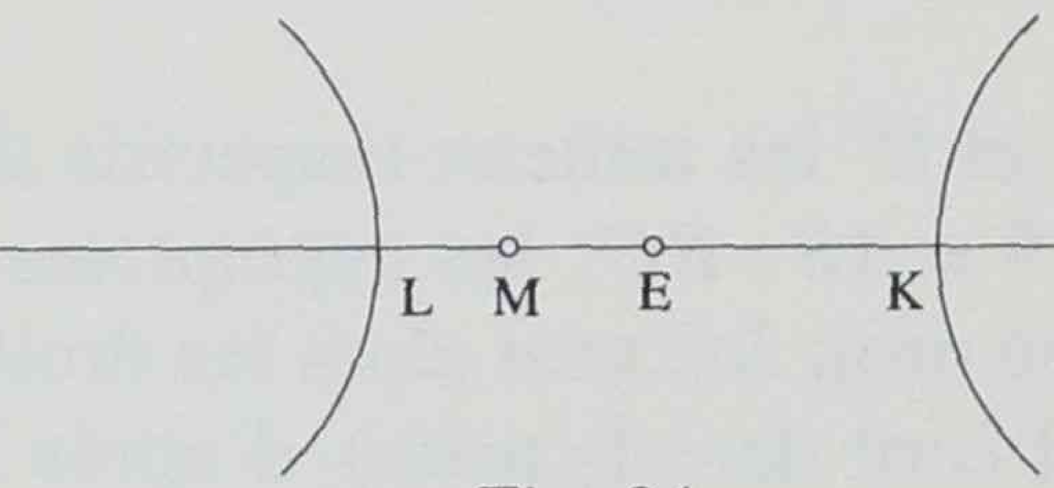


Fig. 34

- $\lambda = 23°33'$; ce cas n'a pas été signalé par al-Sijzī. On a alors $L = M$. En tout point du tropique Nord, le soleil passe au zénith à midi le jour du solstice d'été.

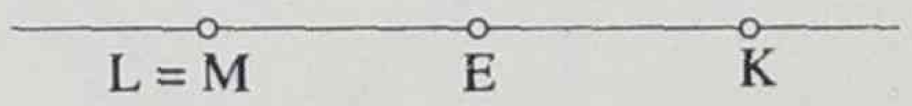


Fig. 35

Al-Sijzī explique ensuite que la méthode est la même pour les deux autres cas considérés, à savoir : Gémeaux, Lion, Sagittaire, Verseau d'une part, et Taureau, Vierge, Scorpion et Poissons d'autre part.

À une latitude λ, al-Sijzī associe ainsi trois hyperboles dont on connaît l'axe transverse et le côté droit. On peut donc construire les patrons.

Si $\lambda > 66°33'$, la ligne des ombres peut être une parabole ou une ellipse, comme l'avait établi Ibn Sinān[1].

Al-Sijzī s'efforce ensuite de placer les trois hyperboles qu'il vient de définir sur un cadran solaire horizontal en un lieu de latitude $\lambda = 39°30'$.

[1] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X[e] siècle*, p. 296 sqq.

2.1.8. *Construction d'un cadran à l'aide d'une hyperbole pour la latitude 39°30′*

On commence par déterminer la ligne méridienne AB du lieu considéré avec A vers le Nord. On place ensuite sur AB arbitrairement le point D, sommet de la branche d'hyperbole du Cancer ; on en déduit le point W sommet de la branche d'hyperbole du Capricorne, DW étant l'axe transverse dont la longueur a été déterminée comme on l'avait expliqué précédemment (différence entre les deux longueurs d'ombre à midi les jours des solstices). On place alors les deux branches EDG et I_1WX_1 de la première hyperbole.

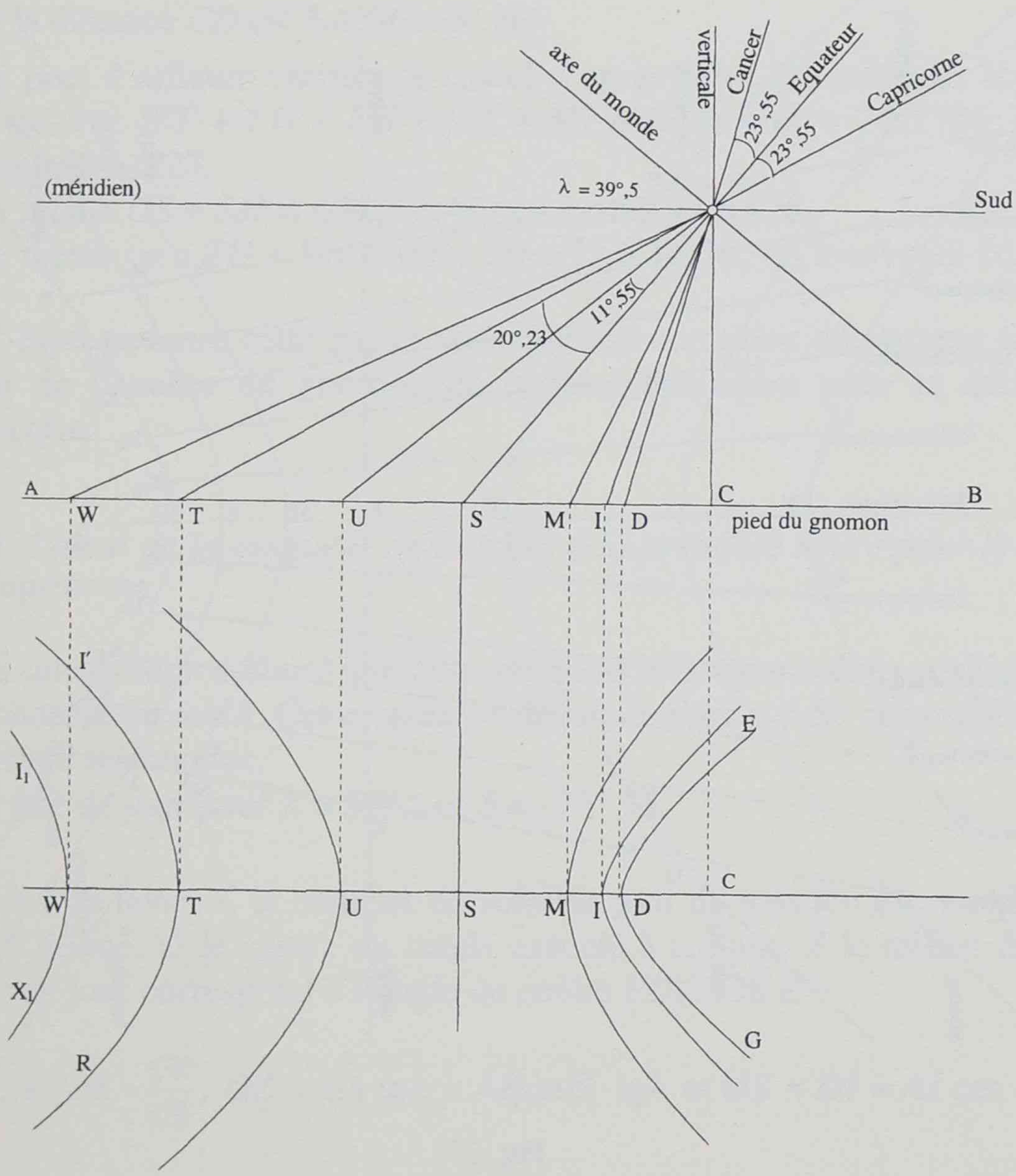


Fig. 36

Pour placer l'hyperbole associée aux débuts des Gémeaux, du Lion, du Sagittaire et du Verseau, il faut déterminer la position des sommets. On détermine alors la différence entre les longueurs des ombres du stylet du gnomon à midi pour le début du Capricorne d'une part et le début du Verseau ou du Sagittaire d'autre part; cette différence donne la longueur WT. On procède de même pour le début du Cancer d'une part et des Gémeaux ou du Lion d'autre part, on obtient la longueur DI. Les points T et I placés sur le segment DW sont les sommets de la deuxième hyperbole.

On opérera de la même manière pour la troisième hyperbole.

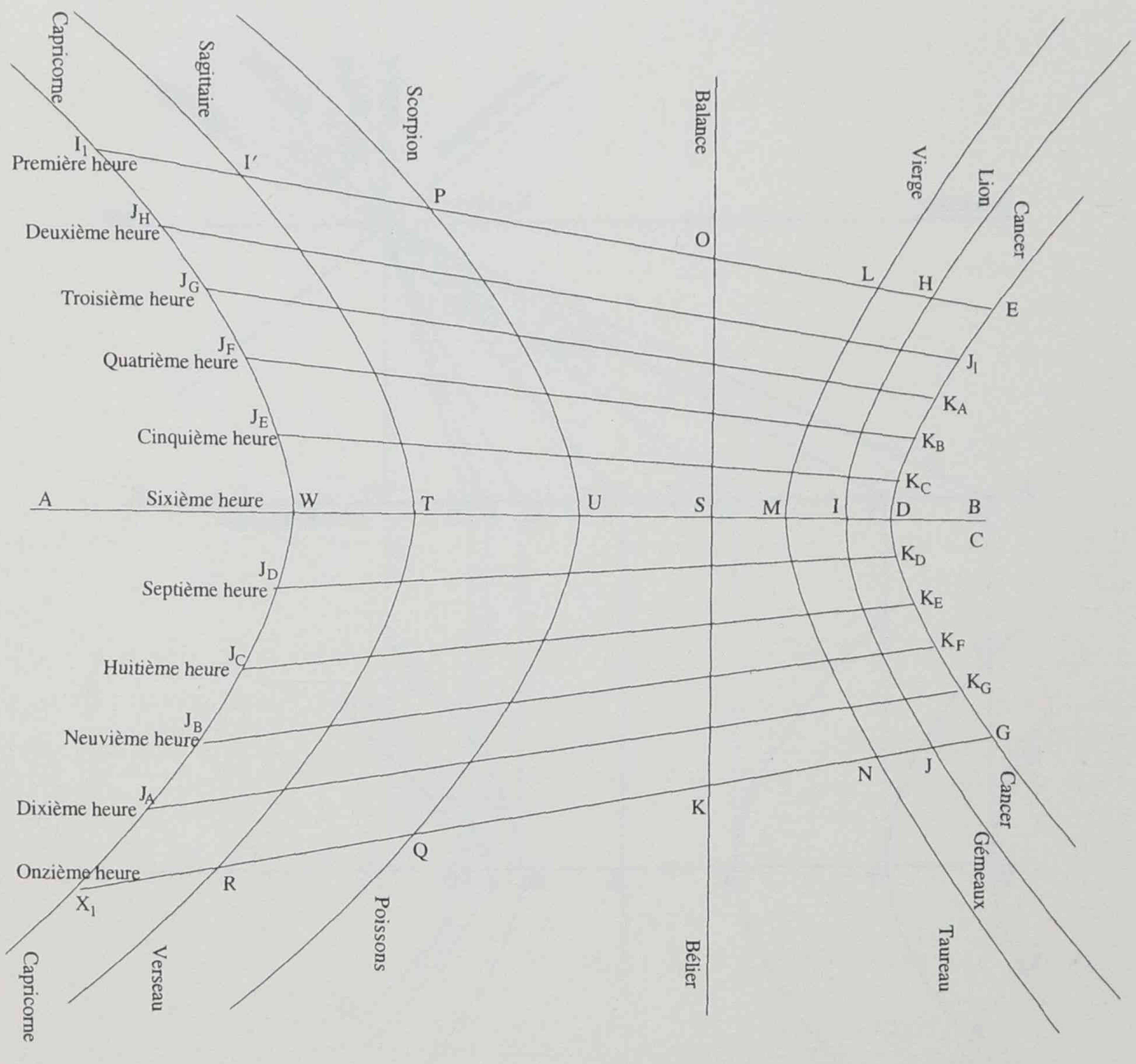


Fig. 37

Nous avons vu[1] que le calcul de LK qui correspond ici à WD donne $20°10' = 20,1726$. Calculons maintenant WT. Soit C le pied du gnomon, on a

$$\begin{aligned} WT = CW - CT &= 12 \text{ tg } (39,5 + 23,55) - 12 \text{ tg } (39,5 + 20,23) \\ &= 23,6022 - 20,5602 = 3,042 \cong 3°2'. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on calcule

$$DI = 0,7657 \cong 0°46'4'',\ TU = 5,715 \cong 5°43',$$
$$IM = 2,172 \cong 2°10',\ MS = 3,525 \cong 3°.31',\ US = 4,953 = 4°47',$$

enfin la distance CD est $3,4296 \cong 3°.26'$.

On peut d'ailleurs vérifier ce calcul d'après celui qui précède ; ainsi on doit trouver $WT + TU + US + SM + MI + ID = WD = 20,1726$; or on trouve ici 20,1727.

De même $US + SM = UM = 8,48$; on trouve ici 8,478.

De même on a $TU + US + SM + MI = TI = 16,36$; on trouve ici 16,365.

Al-Sijzī termine cette partie en indiquant comment déterminer la longueur de l'ombre du gnomon de la première heure pour le début du Capricorne.

2.1.9. *Calcul de la longueur de l'ombre à la première heure pour le début du Capricorne*

Ce calcul exige d'abord que l'on connaisse la hauteur x de la position correspondante du soleil. Cette valeur se déduit de l'arc $y = ES$ correspondant à une heure saisonnière.

1) Arc de jour pour $\lambda = 39°,5$ et $\delta = -23°,55$.

Soit E le lever, C le coucher du soleil le jour du solstice d'hiver pour le lieu A donné, O le centre du cercle associé à ce jour, Z le milieu de EC. L'arc de jour correspond à l'angle au centre EOC. On a

$$\cos E\hat{O}Z = \frac{OZ}{OE},\ OZ = OA \text{ tg}\lambda = AI|\sin\delta| \cdot \text{tg}\lambda \text{ et } OE = OI = AI \cos \delta,$$

d'où

[1] Voir *supra*, p. 66.

$$\cos E\hat{O}Z = |\mathrm{tg}\delta| \cdot \mathrm{tg}\lambda .$$

On a donc

$$\cos E\hat{O}Z = \mathrm{tg}\ 23°,55 \cdot \mathrm{tg}\ 39°,5 = 0,359 ,$$

d'où

$$E\hat{O}Z = 68°,94;\ E\hat{O}C = 2 \cdot E\hat{O}Z = 137°,88 \cong 138° .$$

Pour une heure saisonnière, on a donc

$$y = \widehat{ES} = \frac{138°}{12} = 11°,5 ;$$

2) Hauteur $x = \widehat{SS'}$.

Posons $\widehat{ES'} = a$. L'angle E des arcs ES et ES' est égal à l'angle de l'équateur et de l'horizon, $\hat{E} = 50°,5$. L'angle S' des arcs $S'S$ et $S'E$ est droit. On a donc

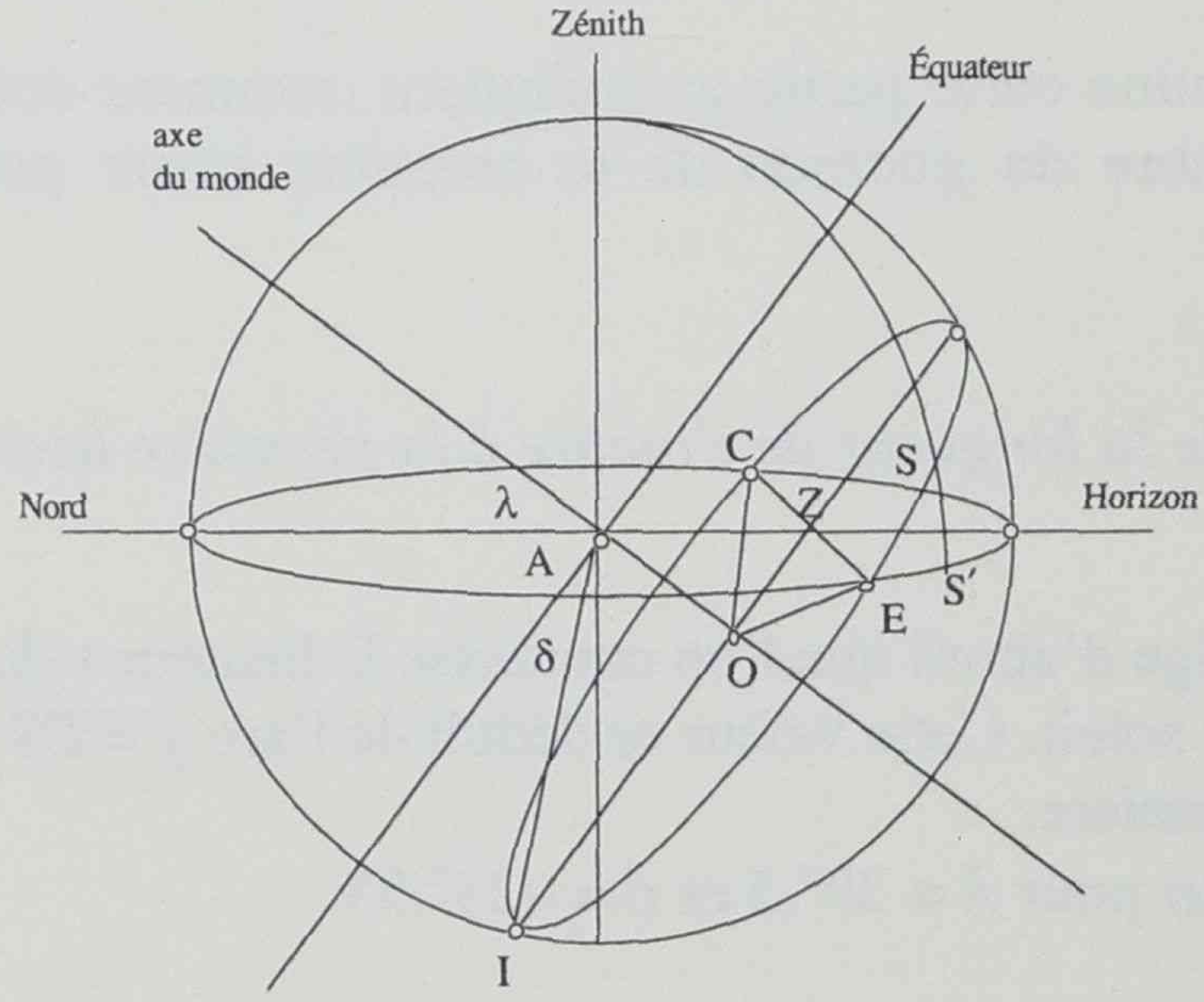


Fig. 38

$$\cos x = \cos y \cdot \cos a + \sin y \cdot \sin a \cdot \cos \hat{E}$$

et

$$\cos y = \cos a \cdot \cos x,$$

on en déduit

$$\cos y\left(\frac{1}{\cos a} - \cos a\right) = \sin y \cdot \sin a \cdot \cos \hat{E} ,$$

d'où

$$\cos y \cdot \mathrm{tg}\, a = \sin y \cos \hat{E} \text{ et } \mathrm{tg}\, a = \mathrm{tg}\, y \cdot \cos \hat{E},$$

d'où

$$\mathrm{tg}\, a = \mathrm{tg}\ 11{,}5\ \cdot \cos 50{,}5 = 0{,}12941$$

et

$$a = \widehat{ES'} = 7°{,}3737\ ;$$

on a donc cos a = 0,9917 et on en déduit

$$\cos x = \frac{\cos 11{,}5}{\cos a} \cong 0{,}988 \text{ et } x = 8°{,}84.$$

Si donc la hauteur du stylet du gnomon est 12, on a la longueur cherchée égale à

$$\frac{12}{\mathrm{tg}\ 8°{,}84} = 77{,}159 \cong 77°{,}9'.$$

Cet exemple d'application montre qu'al-Sijzī, bien qu'il fût dans la tradition d'Ibn Sinān, traite cependant d'un problème différent. Il se place en effet à une latitude où toutes les lignes horaires sont des hyperboles et il s'intéresse fondamentalement à déterminer ces lignes explicitement par leur axe transverse et leur côté droit, avant de les calculer par la trigonométrie et de les tracer par l'un des procédés exposés auparavant. C'est dire que le problème d'al-Sijzī reste la construction et le tracé de ces courbes, ainsi que leur utilité dans la fabrication du cadran solaire.

2.2. *Le compas conique*

2.2.1. *Formes du compas parfait et tracé continu*

Parmi les travaux d'al-Sijzī consacrés au tracé des sections coniques, il y a son livre récemment retrouvé[1], intitulé *Le compas conique* ou *Traité sur la construction du compas parfait qui est le compas du cône*. Dans ce traité, il ne conçoit pas cet instrument à partir de la propriété du foyer et de la directrice pour la parabole, ou la propriété bifocale pour les coniques à centres, c'est-à-dire à l'exemple d'Ibn Sahl lors de la réalisation de son système mécanique pour tracer les sections coniques. Mais al-Sijzī part, comme son prédécesseur al-Qūhī, de la définition des sections coniques

[1] R. Rashed, « Al-Qūhī et al-Sijzī : sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques », *Arabic Sciences and Philosophy*, 13.1, 2003, p. 9-44.

comme sections planes. Il part donc des *Coniques* d'Apollonius, avec l'intention de concevoir un instrument pour tracer aussi bien les courbes coniques que le cercle et la droite. Cet instrument est « le compas parfait » (*al-birkār al-tāmm*), inventé par al-Qūhī. Il est composé de trois parties : 1) un axe AB ; 2) une branche rectiligne AC qui peut pivoter autour du point A de façon à faire varier l'angle BAC et qui peut également tourner autour de l'axe AB ; 3) une base de forme plane, articulée en B à l'axe AB et que l'on pose sur le plan sur lequel on veut tracer la courbe. Tout dépend donc de l'angle $BAC = \alpha$ formé par l'axe avec la branche AC du compas, et de l'angle β de l'axe AB avec la base du compas.

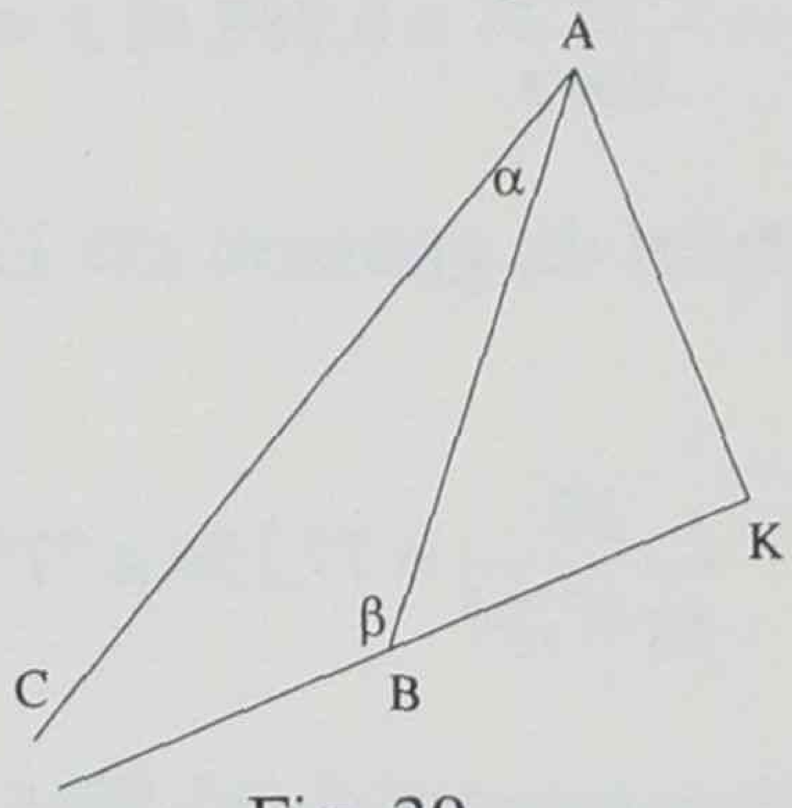


Fig. 39

Considérons β obtus. Soit AK la perpendiculaire abaissée de A sur le plan sécant ; AK est donc perpendiculaire à la base du compas. La nature de la courbe tracée dépend de l'angle $CAK = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$.

Al-Sijzī commence en effet son opuscule par rappeler, en faisant référence au traité d'Apollonius, la nature des sections planes d'une surface conique suivant la position du plan sécant par rapport à la surface conique, pour aborder ensuite la composition du compas parfait, et enfin expliquer la génération à l'aide de celui-ci des trois sections coniques et du cercle.

Ainsi, si l'axe AB est fixe, l'angle BAC invariable en grandeur, alors AC engendre par sa rotation une surface conique de révolution. Si AB est en plus perpendiculaire à BC, le triangle rectangle ABC engendre un cône de révolution dont la base est un cercle.

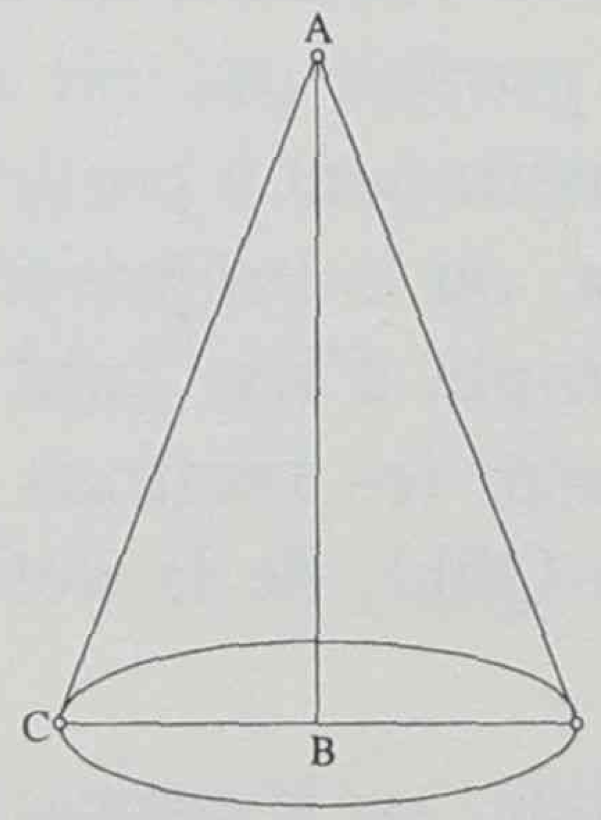


Fig. 40

On se donne un cercle DE de centre G et un plan P incliné par rapport au plan du cercle DE. Soit le point A le sommet du compas ; supposons AB fixe sur l'axe du cercle DE, la base du compas dans le plan P, et la branche AC en rotation autour de cet axe de façon que son prolongement rencontre le cercle DE. Si l'on suppose que l'on peut régler de façon certaine la longueur de AC pour que son extrémité C soit dans le plan P, alors cette extrémité trace dans le plan P une section conique.

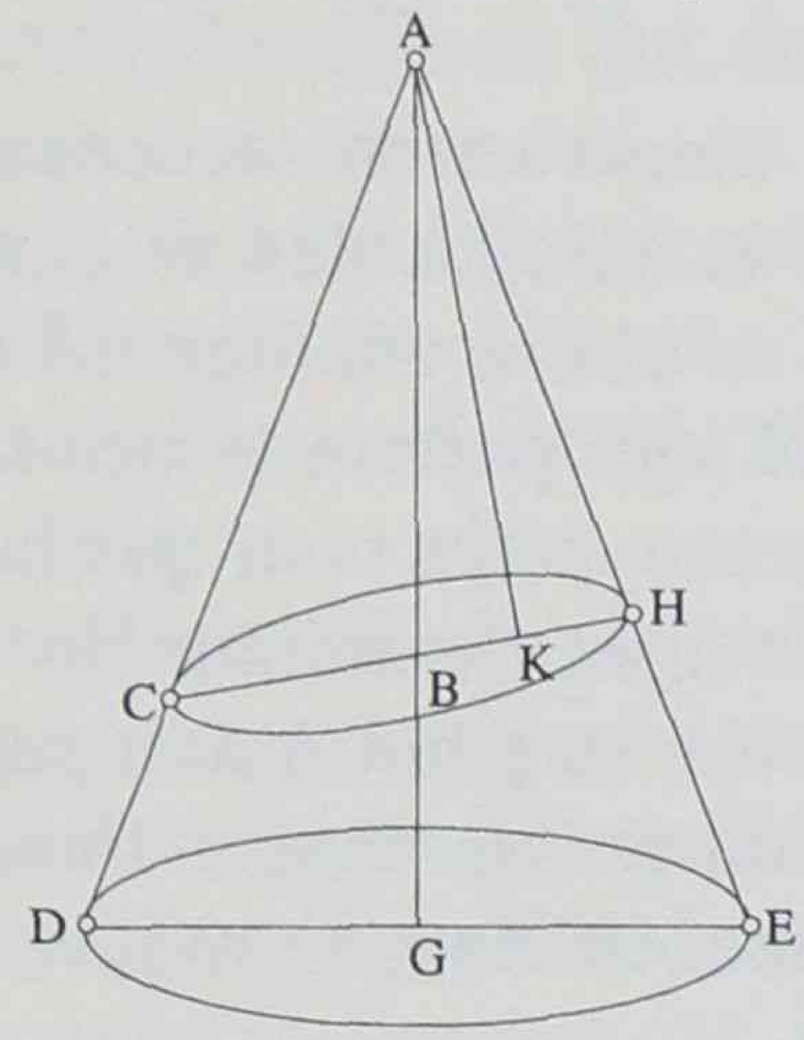


Fig. 41.1

Le plan P est supposé perpendiculaire au plan AGE et sa position est définie par son intersection avec ce plan. Si cette intersection est telle que la droite CH, alors dans la rotation de AC le point C décrira une ellipse d'axe CH (Fig. 41.1). Si l'intersection est une droite IJ parallèle à la position initiale de AC dans le plan AGE, alors le point C décrira une parabole DIM d'axe IJ (Fig. 41.2).

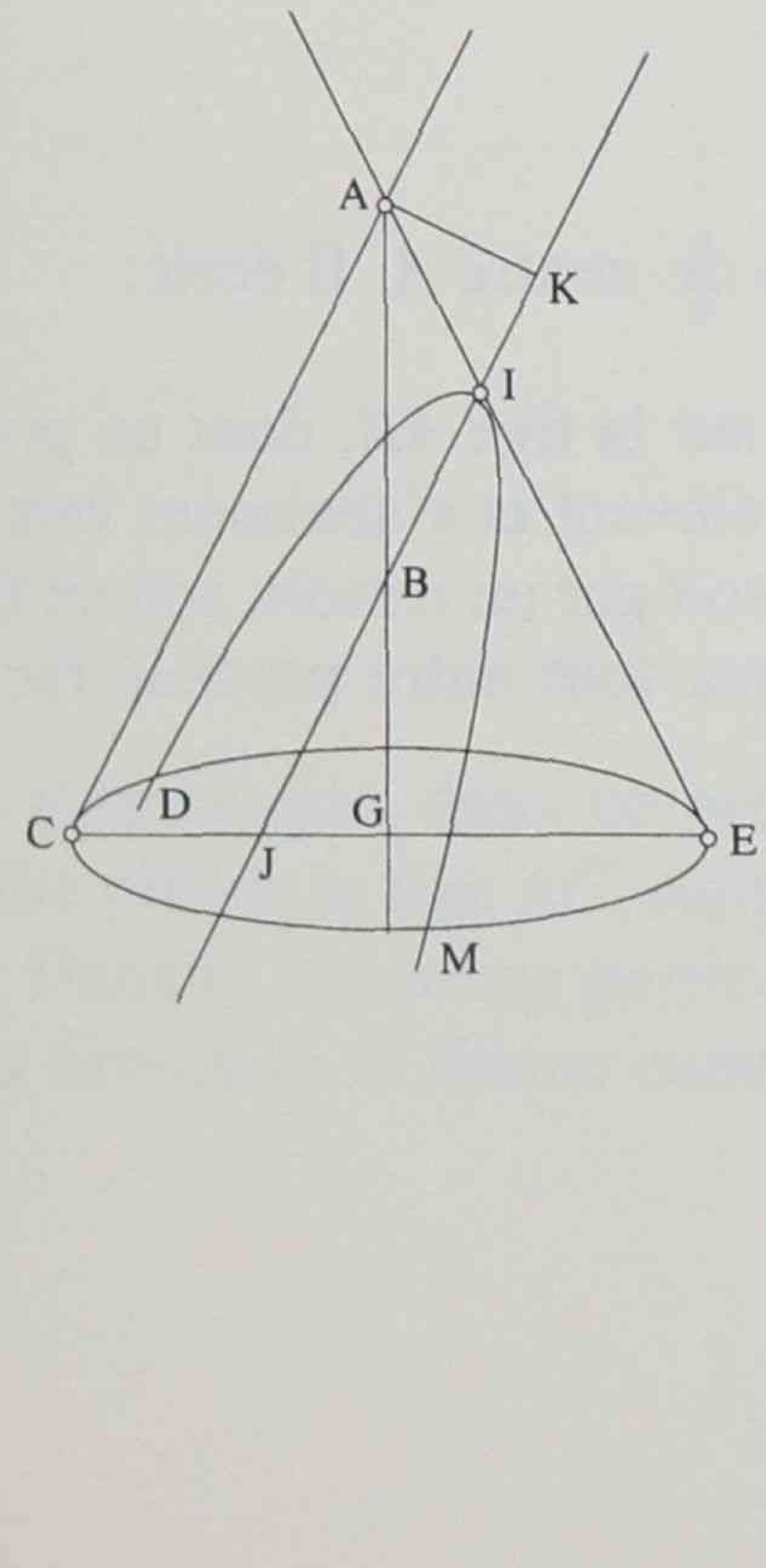


Fig. 41.2

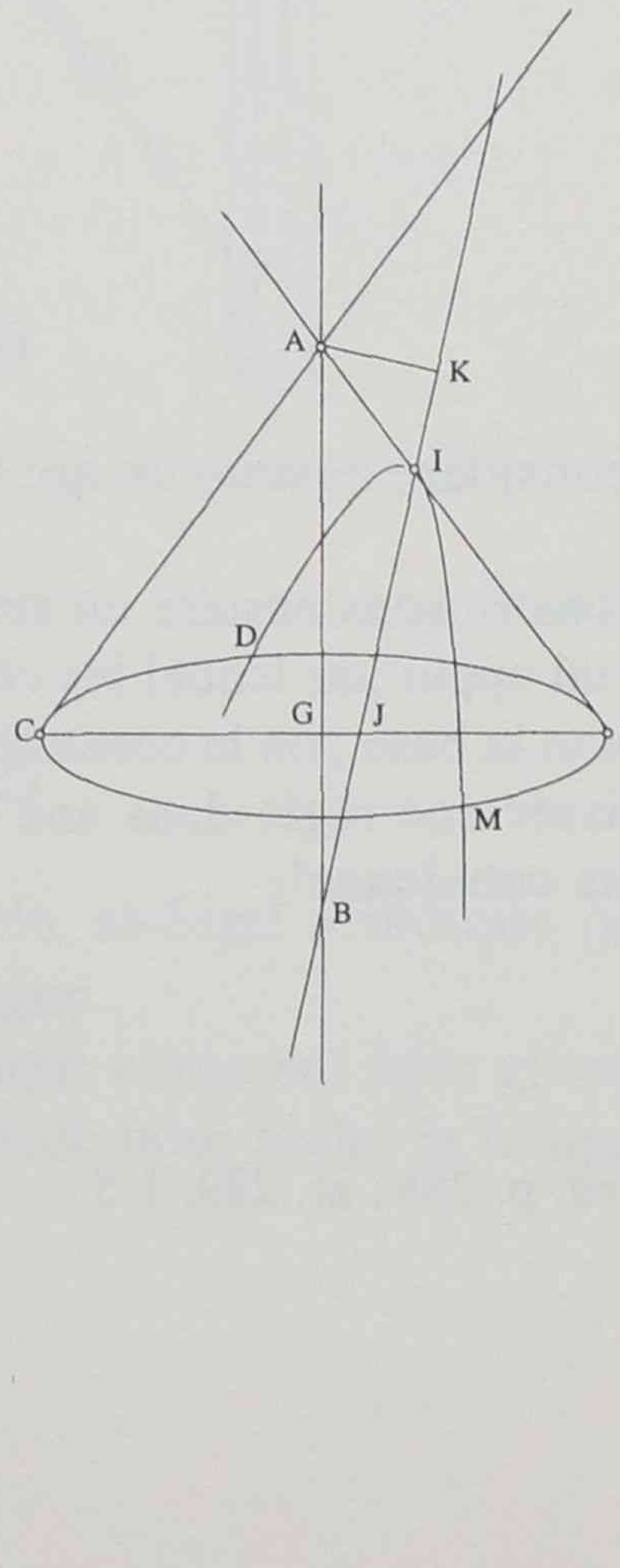


Fig. 41.3

Si enfin l'intersection IJ n'est pas parallèle à la position initiale de AC mais rencontre AC au-delà de A, le point C décrira une hyperbole d'axe IJ (Fig. 41.3).

Al-Sijzī passe ensuite à l'explication de la construction du compas. Les idées essentielles portent sur la façon d'articuler les deux tiges (l'axe et la branche du compas), sur les dispositifs permettant de régler leur angle et enfin sur les moyens d'allonger ou de raccourcir l'axe ou la branche qui porte le tire-ligne.

Al-Sijzī présente trois constructions successives. Dans la première, on considère deux tubes AN et AS articulés au point A, qui est le sommet du compas. Dans le tube AN se trouve une tige AB qui sera l'axe du compas et dans le tube AS la tige AC qui portera le tire-ligne. On doit supposer les rayons des tubes suffisamment petits pour que la même lettre A désigne à la fois l'intersection des deux tiges, l'extrémité du tube AN et celle du tube AS. L'articulation des deux tubes au point A doit permettre au tube AS de tourner autour de A pour qu'on puisse choisir l'angle BAC et permettre à AS d'être entraîné avec le tube AN dans le mouvement de rotation autour de l'axe AB.

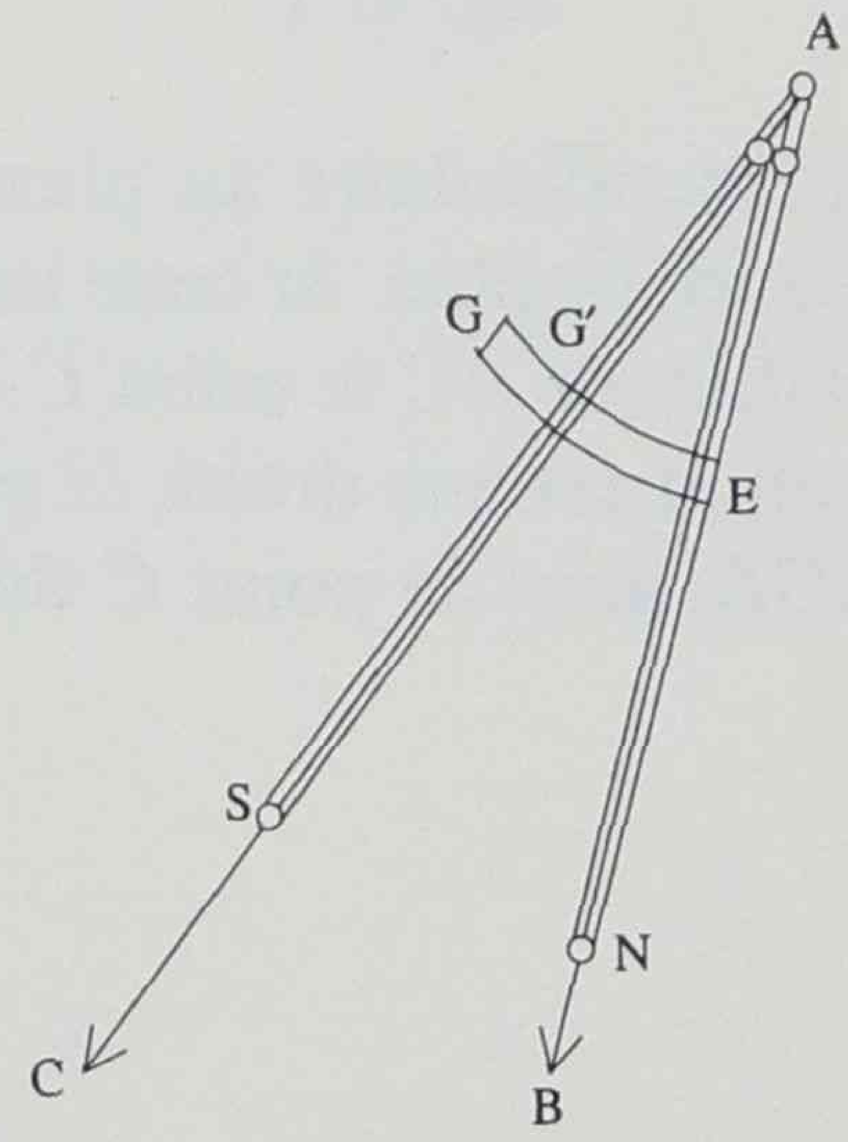


Fig. 42

Al-Sijzī considère ensuite un arc GE du cercle de centre A. Il écrit :

> Nous construisons ensuite un arc tel que GE sur la tige AB, dont un point est sur un appui par lequel les côtés G et E s'élèvent et s'abaissent vers le sommet et la base ; on le construit facilement, soit par un ressort, soit en faisant glisser une règle dans une encoche ou par tout autre procédé facile qui nous convienne[1].

[1] Voir. *infra*, p. 288 ; ar. 289, 1-5.

La description comporte à l'évidence quelque obscurité ; mais on pourrait imaginer un arc qui traverse deux encoches E et G' respectivement sur les deux parois du tube AN et du tube AS et qui glisse sur deux rainures sur ces parois. Il faut cependant qu'il y ait un dispositif qui permette de bloquer à tout moment le glissement et l'écartement choisi pour les deux tubes, avant que l'on fasse tourner le tube AS qui contient le tire-ligne avec un angle BAC de grandeur fixe. Si l'arc EG' est gradué, l'angle BAC est mesuré par le rapport de l'arc EG' à AE. Il suffit en fait de fixer l'arc EG dans une encoche E faite dans la paroi du tube AN, de le faire glisser dans une encoche G' faite dans la paroi du tube AS et de mettre un dispositif sur l'encoche G' pour bloquer l'écartement. Comme le texte est quelque peu hésitant et ne comporte aucune figure, il est très difficile de se faire une idée définitive de la position de cet arc.

Al-Sijzī indique une première méthode pour régler la longueur de la tige AB, axe du compas. On suppose que la tige AB est coupée au point P, c'est-à-dire qu'elle est séparée en deux parties, la partie AP que l'on suppose fixe et la partie PB que l'on peut faire glisser dans le tube AN à l'aide d'un piton ou d'une manette placée au point P. Dans ce cas, il est possible de passer de la position PB à la position P_1B_1. Ceci suppose qu'il existe une fente rectiligne dans la paroi du tube AN pour que le piton P glisse dans cette fente. L'axe du compas atteint alors la longueur AB_1 qui correspond à la distance voulue pour amener la pointe B_1 de l'axe sur le plan sur lequel on veut tracer la section conique.

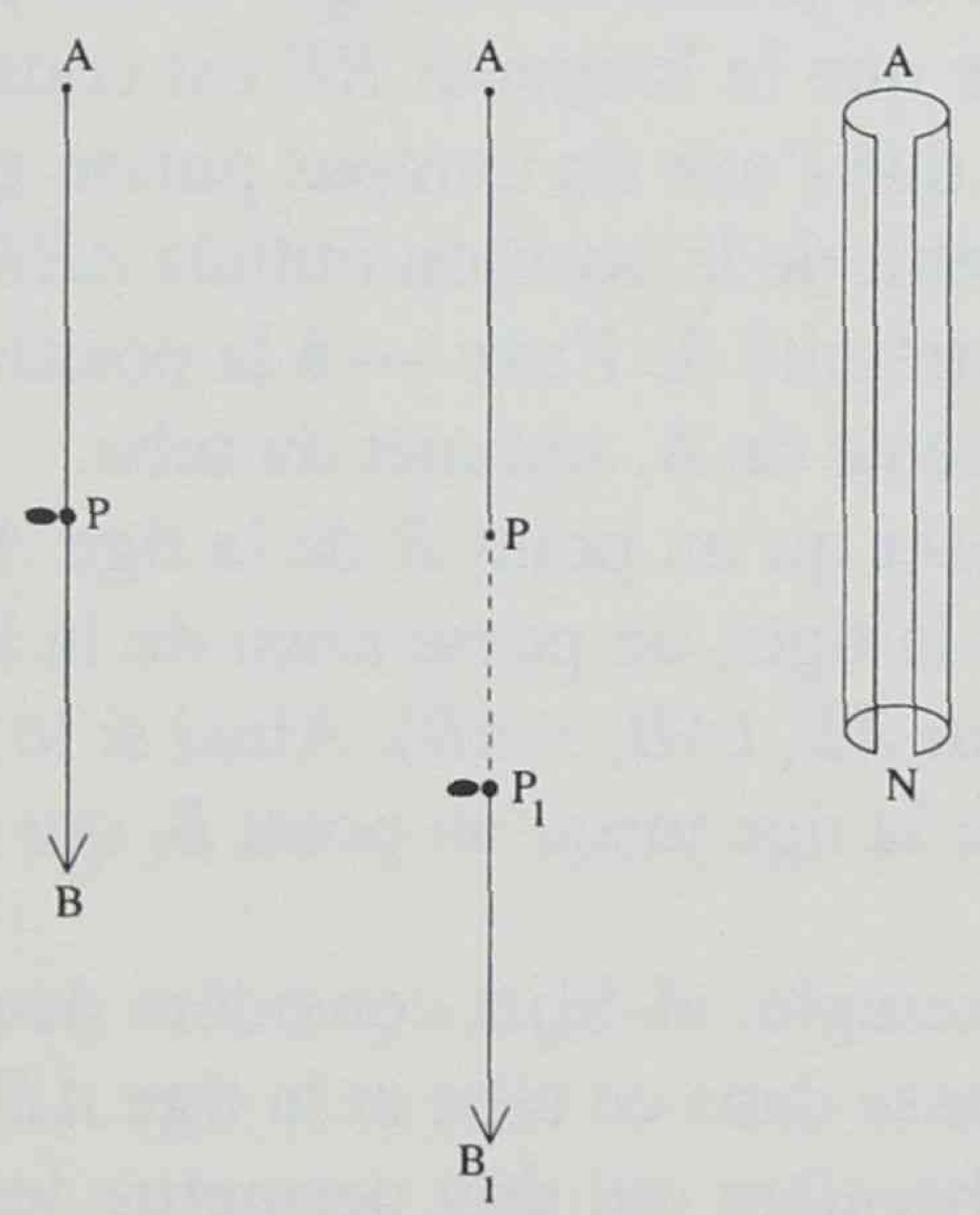


Fig. 43

Il reste que, dans ce premier exemple, al-Sijzī n'indique pas comment faire glisser la tige AC, support du tire-ligne.

Dans la deuxième partie, al-Sijzī indique comment faire glisser le support du tire-ligne. Il donne ensuite une méthode pour régler la longueur de l'axe du compas. Les notations changent dans cet exemple. Le compas comprend un tube AH dans lequel se trouve une tige AB qui sera l'axe du compas et un tube AD dans lequel glisse une tige E qui doit avoir un tire-ligne à chaque extrémité. Soit E un point de cette tige qui n'est pas une de ses extrémités, mais correspond à la position d'un piton qui permettra de faire glisser le tire-ligne dans un sens ou dans l'autre en suivant une fente rectiligne faite dans la paroi du tube. On pourra ainsi, lorsque l'on veut tracer une section plane sur un plan Π, maintenir la pointe du tire-ligne en contact avec ce plan.

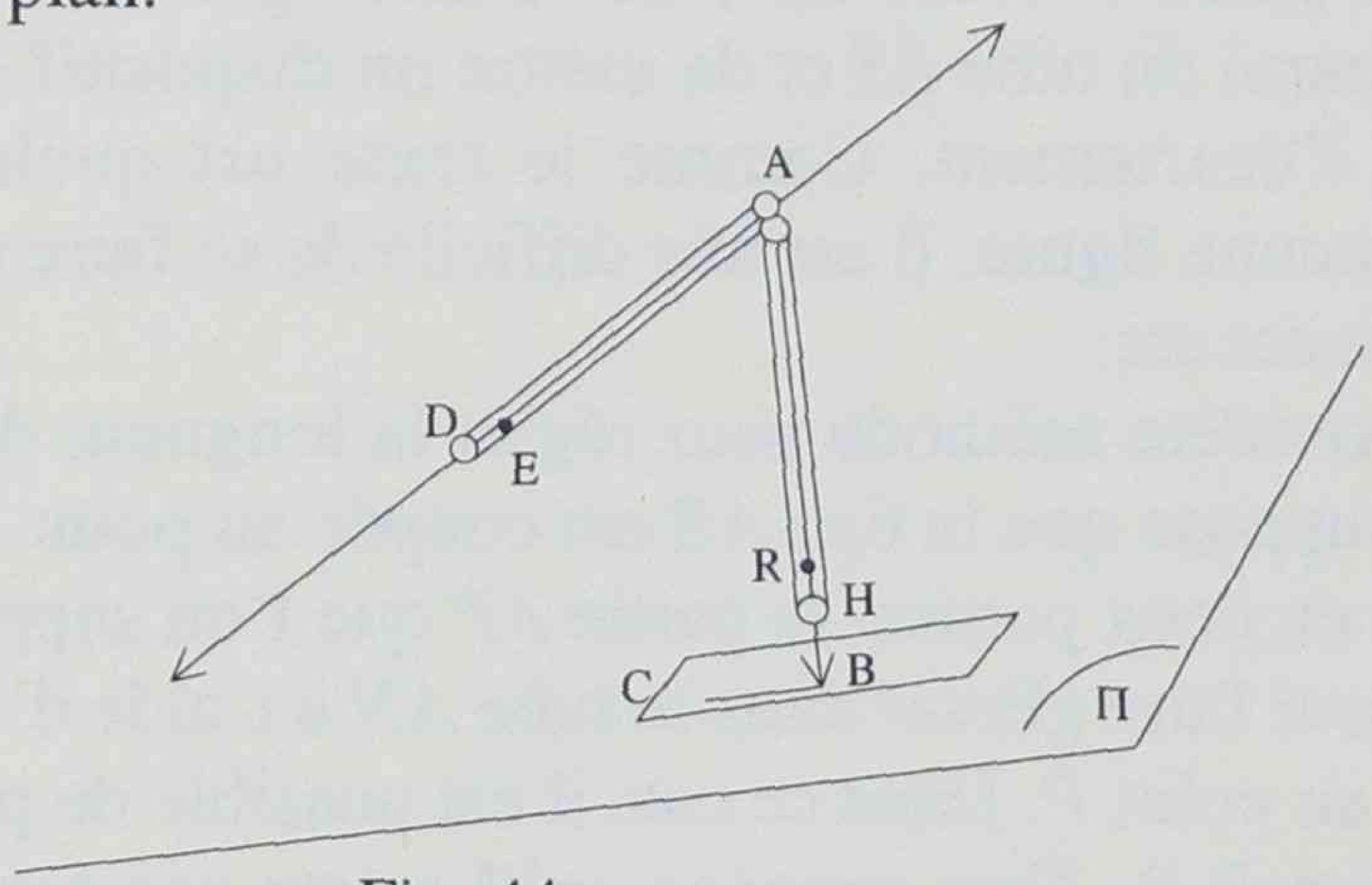


Fig. 44

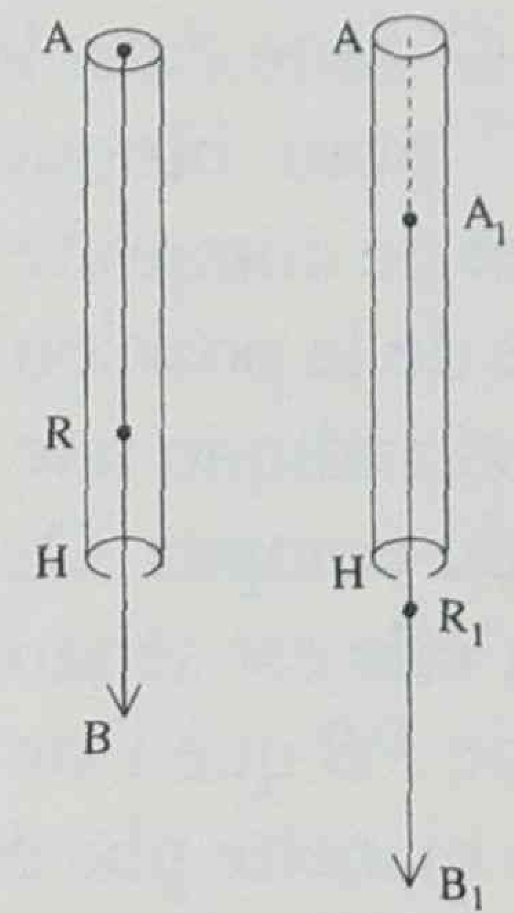


Fig. 45

Soit A le sommet du compas et B la pointe de son axe ; la longueur AB doit être choisie en fonction de la position du plan Π et de la section que l'on veut tracer sur ce plan. On prend sur la tige AB un point R lié à la base BC du compas, c'est-à-dire que la longueur RB est constante. Pour faire varier la longueur AB, il faut que l'axe du compas puisse glisser dans le tube AH. C'est ainsi qu'il peut venir de la position initiale ARB — où A est à la fois le sommet du tube et l'extrémité de l'axe — à la position $A_1R_1B_1$ pour laquelle l'extrémité A_1 est différente de A, sommet du tube.

On peut donc supposer qu'au point R de la tige AB est fixé un piton qui permet de faire glisser la tige ; on passe ainsi de la longueur AB pour l'axe du compas à la longueur AB_1 ($AB_1 > AB$). Ainsi si le point B n'est pas sur le plan Π, on peut pousser la tige jusqu'au point B_1 qui sera dans le plan Π.

Dans le troisième exemple, al-Sijzī considère deux tiges AB et AD et un tube AH. La tige AB passe dans ce tube et la tige AD est reliée en A au tube AH par une sorte de charnière qui doit permettre les deux mouvements de cette tige : une rotation autour du point A pour le choix de l'angle BAD et une rotation autour de l'axe AB, rotation que l'on obtient en faisant tourner le tube AH autour de l'axe.

À ce tube est fixé au point H un arc de cercle HJ de centre A que la tige AD rencontre au point J' dont la position dépend du choix de l'angle BAD.

Quand on fait tourner le tube *AH* autour de l'axe *AB*, il entraîne l'arc *HJ* et la tige *AD* ; les points *A*, *H*, *B*, *J* forment une figure invariable au cours de ce mouvement. Mais pour que le point *D*, dont la position initiale est supposée être dans le plan *Π* dans lequel on veut tracer la section, reste dans ce plan au cours de la rotation, il faut que la longueur *AD* varie, comme cela a été exposé dans le second exemple. La longueur de l'axe *AB* peut toujours être supposée fixe, ce qu'al-Sijzī suppose quand il écrit : « compas dont la tige n'est pas divisée en deux parties » (*infra*, p. 290 ; ar. 291, 12-13).

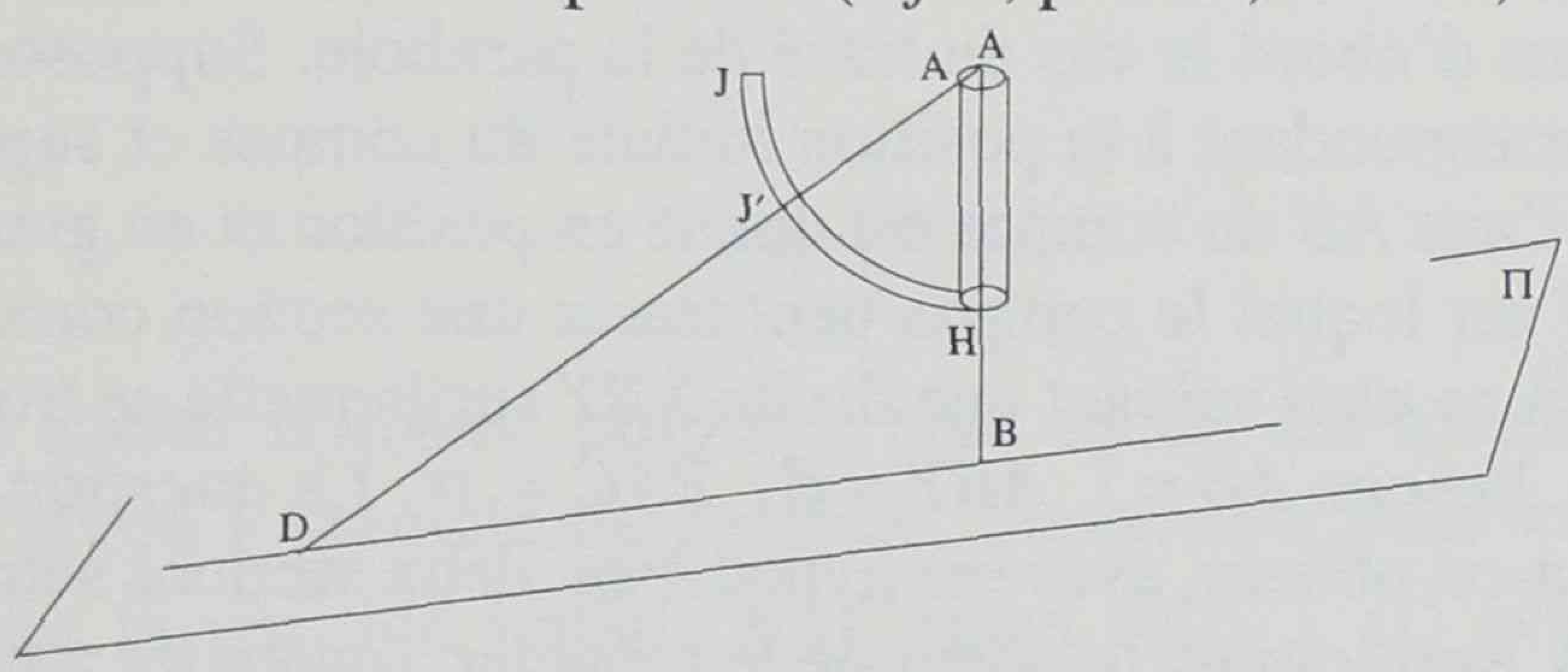


Fig. 46[1]

Al-Sijzī n'a pas parlé jusqu'ici de l'angle que forme l'axe *AB* du compas avec la droite *BD* qui est l'intersection du plan *Π* avec le plan *ABD* — qui correspond à la position initiale du compas — angle dont dépend la nature de la section, comme il l'a expliqué au début de ce traité. Al-Sijzī le mentionne ici en deux lignes lorsqu'il écrit : « et sur ce plan <*ABD*> nous élevons le plan sur lequel nous avons besoin de tracer la section selon l'angle d'une quelconque section parmi les sections » (*infra*, p. 290 ; ar. 291, 11-12).

Il s'agit donc de l'angle *ABD*. Mais al-Sijzī ne donne pas de méthode pour déterminer cet angle ni pour le faire varier suivant le choix de la section.

2.2.2. *Tracé continu des sections semblables à l'aide du compas parfait*

À la fin de ce court traité, al-Sijzī soulève en quelques mots le problème du tracé continu des sections coniques semblables. Il écrit : « notre but et notre examen ne portent pas sur les sections semblables à une certaine section, à l'exception de ce qu'exigent les sections paraboliques… » (*infra*, p. 290 ; ar. 291, 14-15) ; et il indique alors comment tracer une parabole à l'aide du dernier compas *BAD* en rappelant que si l'on désigne par *BX* l'intersection du plan *Π* avec le plan *DAB* qui est celui de la position initiale du compas, on doit avoir *BX* // *AD*.

[1] Notons que, dans cette figure, la lettre *A* désigne à la fois l'intersection des deux tiges et le point d'appui de *AD* sur le tube.

Pour comprendre cette brève discussion d'al-Sijzī, revenons d'abord aux *Coniques* d'Apollonius. Dans la proposition VI.11, Apollonius montre que toutes les paraboles sont semblables : pour deux paraboles de côtés droits c et c', le rapport de similitude est c'/c. Dans la proposition VI.12, il montre que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses (ou deux hyperboles) de diamètres d et d' et de côtés droits c et c' soient semblables est que $(d/d') = (c/c')$, que l'on peut écrire $(c/d = c'/d')$.

Considérons d'abord le cas du tracé de la parabole. Supposons donné le plan ABC correspondant à la position initiale du compas et supposons que dans ce plan l'axe AB du compas est donné en position et en grandeur.

Le plan Π sur lequel le compas peut tracer une section conique est perpendiculaire à ce plan suivant une droite XBY sur laquelle se trouvera l'axe de la section. Posons $AB = l$, $A\hat{B}Y = \beta$, $B\hat{A}C = \alpha$. La question est donc la suivante : peut-on obtenir, avec ces hypothèses, deux sections semblables ?

Or d'après Apollonius, on vient de le rappeler, toutes les paraboles sont semblables. Venons-en maintenant au plan Π donné et au compas. En effet, si Π est donné, β est connu et α l'est également car $\alpha + \beta = \pi$. Déterminons le côté droit c de cette parabole de sommet I. Soit M le point de la courbe tel que $MB \perp IY$; on a alors $MB \perp AB$ (car $\Pi \perp ABC$) et $B\hat{A}M = B\hat{A}C = \alpha$; d'où

$$MB^2 = c \,.\, BI \text{ et } MB^2 = l^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\, \alpha;$$

or $BI = \dfrac{l}{2\cos\alpha}$ (triangle isocèle IAB). On en tire

$$(*) \qquad c = 2l\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

En prenant pour l'axe AB du compas une longueur l' ($l' \neq l$ ou $l' = l$), on tracera dans Π' défini par $A\hat{B}Y' = \beta'$ avec $\alpha' = \pi - \beta'$ une parabole de côté droit $c' = 2l'\dfrac{\sin^2\alpha'}{\cos\alpha'}$, d'où le rapport de similitude c'/c. Ainsi on peut tracer par le compas deux sections paraboliques semblables dans un rapport donné dans un même plan Π, que la longueur de l'axe du compas reste la même ou varie.

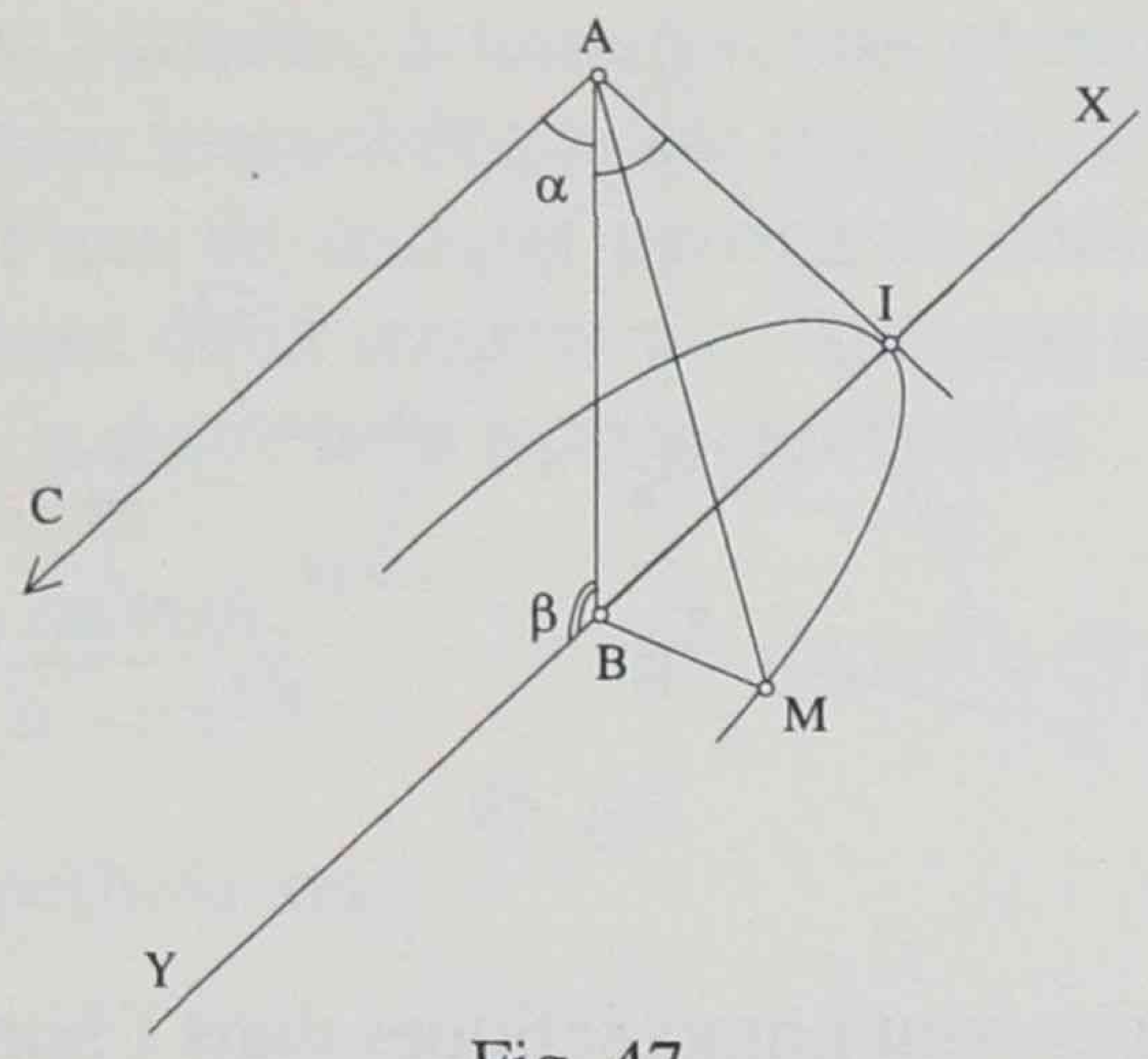


Fig. 47

On peut établir la même propriété pour toutes les sections coniques. Prenons d'abord l'exemple de l'ellipse. Supposons pour commencer le compas dans la position initiale BAC (plan $BAC \perp \Pi$) avec $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \beta$, $\alpha + \beta < \pi$ et $AB = l$. On trace l'ellipse $\mathscr{E}$ d'axe HC. Allongeons maintenant l'axe du compas pour avoir le sommet au point A' avec $A'B = l'$. Si on conserve l'angle α de deux branches $B\hat{A}'C' = B\hat{A}C = \alpha$, on obtient l'ellipse $\mathscr{E}'$ d'axe $H'C'$. Dans l'homothétie de centre B et de rapport $k = (l'/l)$, le plan Π est conservé et la surface conique de sommet A a pour image la surface conique de sommet A', donc les deux ellipses obtenues sont homothétiques dans l'homothétie $\left(B, \dfrac{l'}{l}\right)$.

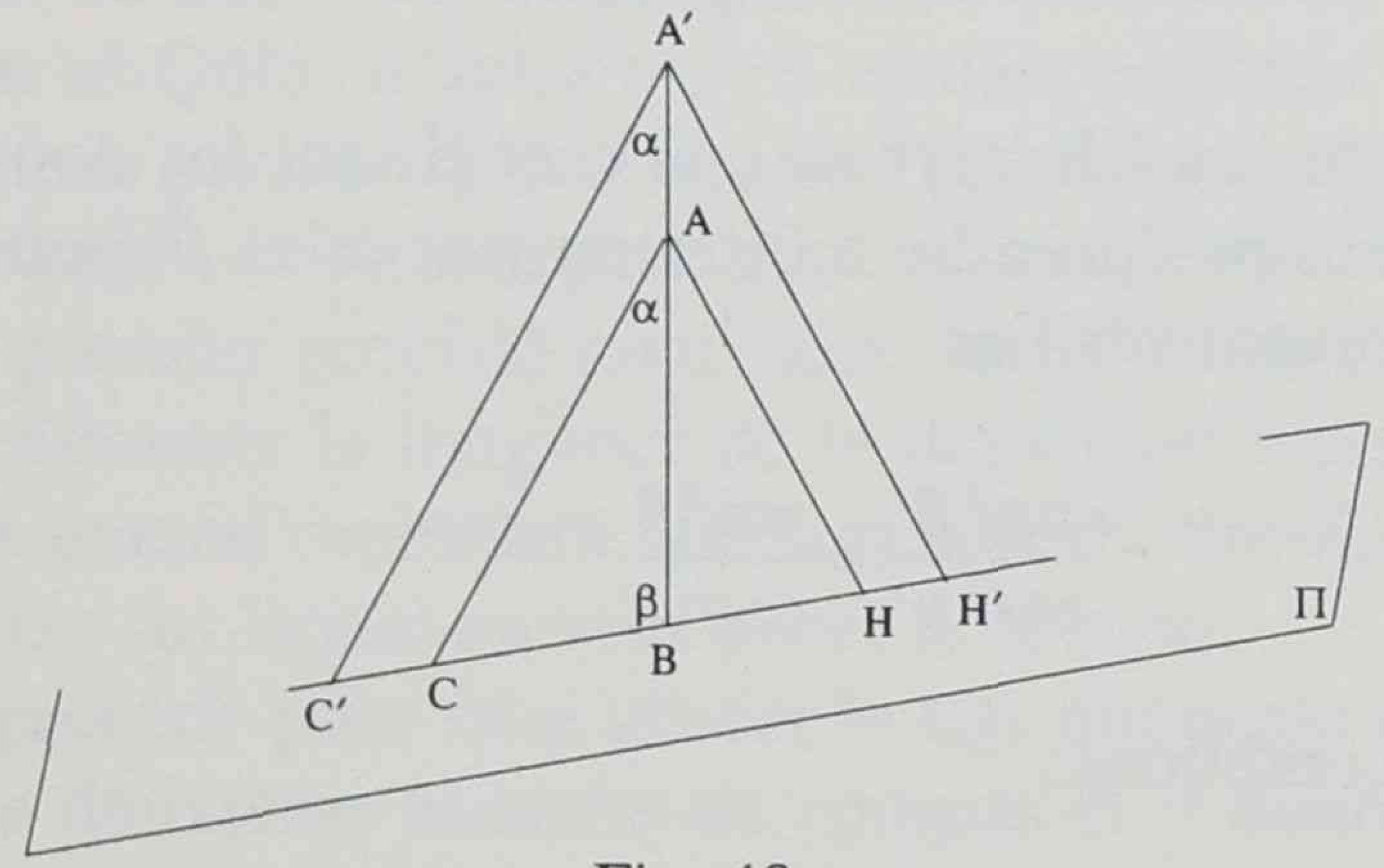


Fig. 48

Ce raisonnement s'applique aux trois sections coniques.

Pour obtenir maintenant deux sections coniques semblables dans deux plans parallèles Π et Π', on garde pour le compas le même sommet A et le même angle α et on allonge l'axe AB jusqu'au point B' sur le plan Π'.

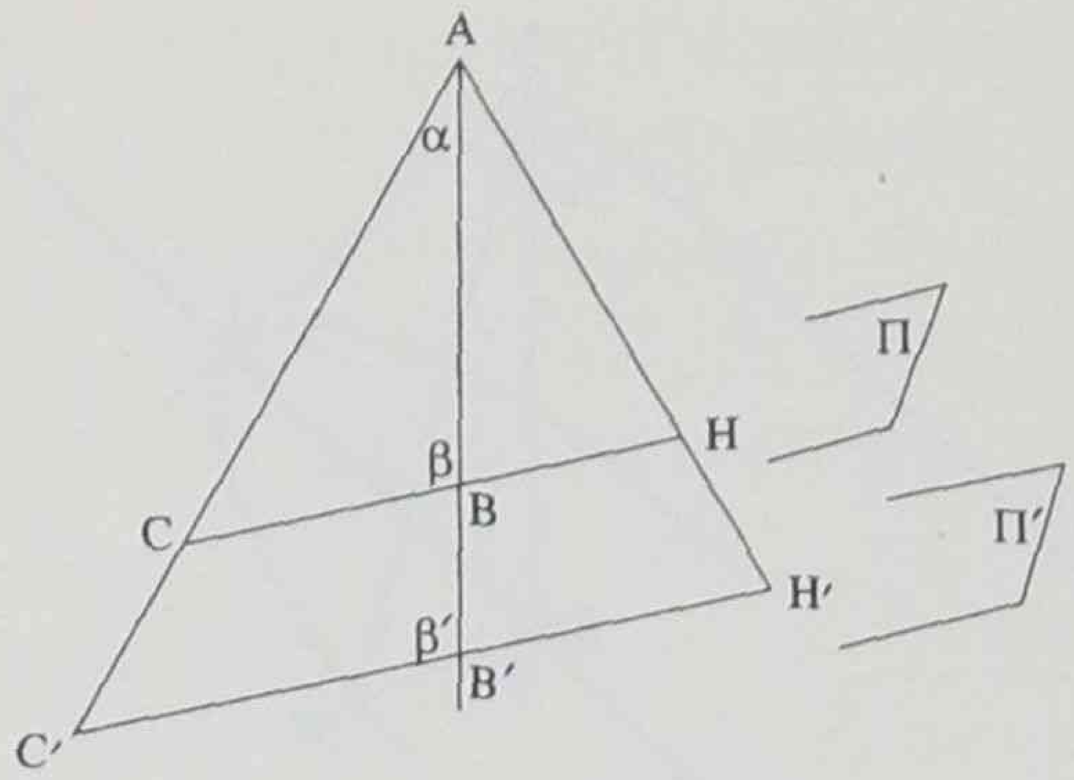


Fig. 49

Les sections obtenues sont homothétiques dans l'homothétie $\left(A, \frac{l'}{l}\right)$.

On peut montrer par ailleurs pour les sections semblables que si la longueur l de l'axe AB du compas est fixe, il est possible de tracer deux sections semblables sur deux plans distincts Π et Π' passant par le pied B du compas :

1) pour la parabole, cela est immédiat. Pour deux plans Π et Π' définis respectivement par β et β', on aura $\alpha = \pi - \beta$ et $\alpha' = \pi - \beta'$; le calcul de leurs côtés droits a donné (*) ;

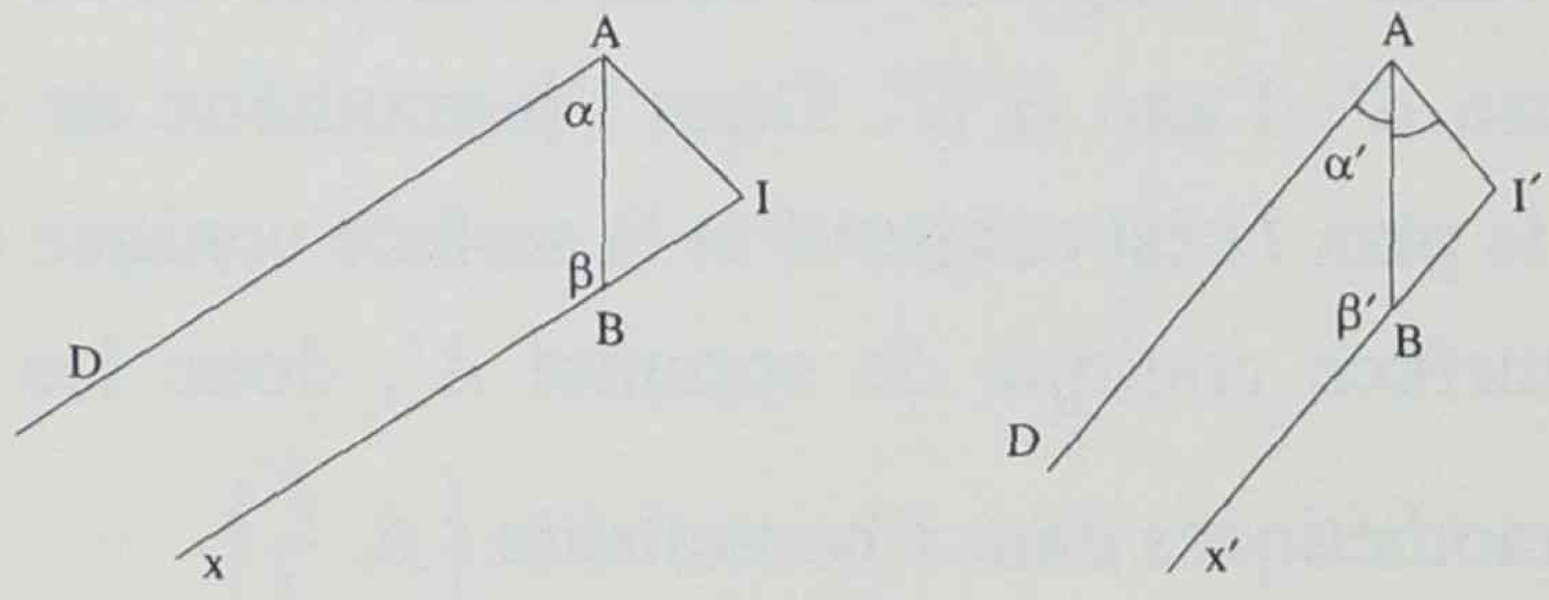


Fig. 50

2) pour l'ellipse (ou l'hyperbole), si α et β sont les données relatives au plan Π, on ne peut pas prendre arbitrairement α' et β' pour le plan Π'. Les angles α' et β' doivent vérifier

$$(**) \qquad \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \alpha'} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}$$

avec en plus les conditions :

$$\cos^2 \beta < \cos^2 \alpha < 1 \,;\, \cos^2 \beta' < \cos^2 \alpha' < 1 \qquad \text{pour l'ellipse}$$

et

$$\cos^2 \alpha < \cos^2 \beta < 1 \,;\, \cos^2 \alpha' < \cos^2 \beta' < 1 \qquad \text{pour l'hyperbole.}$$

Rappelons d'ailleurs que la relation (**) n'est autre que l'égalité des excentricités (encore non nommées) des deux coniques.

Si la longueur l est variable, à toute section obtenue sur un plan Π on peut associer une section homothétique sur tout plan $\Pi' \,//\, \Pi$. Ainsi une longueur variable pour l'axe du compas permet de choisir cette longueur en fonction des dimensions de la section que l'on veut tracer. Dans le cas de l'ellipse par exemple, le diamètre d a pour expression

$$d = l\frac{\sin 2\alpha . \sin\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} \qquad\qquad (\alpha + \beta < \pi)\,;$$

et dans le cas de l'hyperbole, on a

$$d = l\frac{\sin 2\alpha . \sin\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}.$$

En conclusion, à la suite d'al-Qūhī, al-Sijzī établit d'une manière générale que la nature de la section conique que l'on veut tracer sur un plan Π dépend de la position initiale du compas par rapport à ce plan. On a vu que cette position initiale dans un plan perpendiculaire au plan Π est caractérisée par la longueur l de l'axe du compas, l'angle α que fait cet axe avec la branche mobile du compas et l'angle β que fait l'axe avec la base du compas qui se place dans le plan Π donné. Mais al-Qūhī avait aussi étudié la correspondance entre les éléments l, α, β d'une part et les éléments qui caractérisent la section conique : diamètre et côté droit pour l'ellipse et l'hyperbole ; côté droit pour la parabole. Il semble que si al-Sijzī n'avait pas refait cette étude dans ce court traité, c'est peut-être parce qu'al-Qūhī l'avait déjà achevée. En revanche, de son côté al-Sijzī soulève, brièvement certes, la question du tracé continu des sections semblables, question qui n'a pas été traitée par al-Qūhī ; d'autre part il voulait exploiter toutes les possibilités de ce compas parfait inventé par son prédécesseur. C'est ainsi qu'il expose trois procédés — non indépendants — pour le tracé continu :

• Il donne un premier procédé pour faire varier la longueur de l'axe du compas sans mentionner la longueur de la deuxième branche qui porte le tire-ligne. Il sous-entend cependant que la pointe du tire-ligne doit rester en contact avec le plan sur lequel on veut tracer la section.

• Il donne un procédé pour faire glisser la tige qui porte le tire-ligne dans le tube qui est la deuxième branche du compas et il donne une deuxième méthode pour faire varier la longueur de l'axe.

• Dans un troisième procédé, la longueur de l'axe reste constante, la tige du tire-ligne est toujours supposée mobile.

Dans le premier et le troisième cas, il montre comment utiliser un arc de cercle adapté au tube que porte l'axe du compas pour mesurer l'angle formé par les deux branches. Mais il ne semble pas avoir donné de procédé permettant de déterminer l'angle du compas avec le plan sur lequel on trace la section.

L'idée d'al-Sijzī dans cet écrit est donc la suivante : quel que soit le modèle choisi, le compas parfait permet le tracé continu des trois sections coniques, les sections semblables en plus du cercle et de la droite.

2.2.3. *Tracé continu et classification des courbes*

La recherche sur le tracé continu, nous l'avons observé, répondait, entre autres raisons, à la nécessité pour les mathématiciens de l'époque de s'assurer de la continuité des courbes. Le seul moyen dont ils disposaient pour y parvenir était alors d'introduire le mouvement en géométrie. Or ces nouvelles préoccupations n'ont pas tardé à diriger cette même recherche vers le problème majeur de la classification des courbes en fonction du type et du nombre des mouvements qui interviennent dans leur tracé. C'est là une recherche séminale, dont l'importance considérable qu'elle prendra ensuite mérite d'être soulignée.

Al-Qūhī distingue les courbes tracées par le compas parfait — droite, cercle, sections coniques — d'un nom générique : « les lignes *qiyāsiyya* » que nous rendons par « les lignes mesurables ». Voici ce qu'il écrit au début de son livre :

> Il s'agit d'un traité sur l'instrument qu'on appelle compas parfait, qui comprend deux livres. Le premier porte sur la démonstration qu'il est possible de tracer par ce compas les lignes mesurables (*qiyāsiyya*), c'est-à-dire les droites, les contours des cercles, les contours des sections de cône — à savoir les paraboles, les hyperboles, les ellipses et les sections opposées[1].

Or ce terme « lignes mesurables » sera utilisé dans toute la tradition : on le retrouve chez al-Sijzī, al-Bīrūnī, Hibat Allāh al-Baghdādī, Ibn al-Ḥusayn[2]… Mais, dans sa traduction française, F. Woepcke a rendu ce même terme par « lignes régulières », jetant ainsi un voile sur cette question importante[3].

[1] *Fī al-birkār al-tāmm*, dans R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, 2004, chap. V, trad. angl. p. 726 ; ar. p. 727, 3-6.

[2] Ibn al-Ḥusayn, *Risālat al-birkār al-tāmm wa-kayfiyyat al-takhṭīṭ bihi*, ms. Alger 1446, fol. 95ʳ-106ᵛ et Hibat Allāh al-Baghdādī, *Maqālat al-birkār al-kāmil al-tāmm*, ms. Istanbul, Université A 314, fol. 119ᵛ-122ᵛ.

[3] F. Woepcke, « Trois traités arabes sur le compas parfait », *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques*, 22, 1874, p. 1-175, à la p. 68.

L'adjectif pluriel *qiyāsiyya* est dérivé du verbe *qāsa, yaqīsu*, ou de *qāsa, yaqūsu*, qui tous deux expriment l'idée de mesure — d'où la traduction littérale : « les lignes mesurables ».

Ce même terme *qiyāsī* (au singulier) a aussi un sens figuré : il se dit d'une dame qui marche de façon régulière. Or c'est précisément ce sens figuré que F. Woepcke a retenu lorsqu'il parle des « lignes régulières ». Cette traduction n'est guère satisfaisante, non seulement parce qu'elle privilégie le sens figuré sans nécessité, mais en raison de son ambiguïté et de son imprécision.

Que veut alors dire al-Qūhī par « lignes mesurables » ? Selon la terminologie de la géométrie de l'époque, ce sont des lignes, c'est-à-dire des grandeurs, soumises à la théorie des proportions. Tel est précisément le sens entendu par al-Qūhī : il s'agit donc de lignes engendrées par un seul mouvement continu — celui de la branche du compas parfait — et auxquelles la théorie des proportions peut s'appliquer. C'est le cas de la droite et du cercle, mais aussi des trois sections coniques caractérisées par les *symptomata* ou par les propriétés du foyer et de la directrice.

Al-Qūhī vient ainsi d'établir une classification des courbes : celles qui sont mesurables, et les autres. Mais il vient aussi de dépasser une distinction ancrée dans la tradition, entre la droite d'une part et les courbes (dont le cercle) d'autre part.

Non seulement al-Sijzī a-t-il saisi ces acquis d'al-Qūhī, mais il va encore les confirmer. Ainsi, dans un livre intitulé *L'Introduction à la géométrie* (*al-Madkhal ilā 'ilm al-handasa*), il procède à différentes classifications. Lorsqu'il en arrive aux lignes, il distingue trois espèces : les lignes mesurables (la droite, le cercle et les sections coniques) ; les lignes non mesurables mais qui ont un ordre (*niẓām*) et une régularité (*tartīb*) ; enfin les lignes non mesurables, qui n'ont ni ordre ni régularité. Selon al-Sijzī, les premières sont engendrées par un seul mouvement continu et sont « géométriques », c'est-à-dire qu'on les utilise en géométrie. Les secondes sont engendrées par deux mouvements continus, elles ne sont plus « géométriques », mais elles sont « mécaniques ». Les troisièmes, elles aussi engendrées par deux mouvements continus, ne sont même pas mécaniques. L'exemple qu'il donne des courbes mécaniques est l'hélice cylindrique. Il s'agit en effet d'une courbe gauche engendrée par un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe et par une translation uniforme parallèle à l'axe. Voici ce qu'il écrit :

> Quant à la courbe, l'hélice cylindrique (*al-khaṭṭ al-lawlabī*), qui est utilisée dans la mécanique (*al-ḥiyal*) et non pas dans la géométrie, car elle est non mesurable (*ghayr qiyāsī*), mais a un ordre et une régularité, elle est engen-

> drée par le mouvement du point suivant une droite et suivant un cercle, communément avec le cylindre[1].

Il poursuit

> Voici sa figure : soit le cylindre *ABCD* dont les deux bases sont *AB* et *CD*. Si nous imaginons que le point *A* se meut par des mouvements uniformes suivant la droite *AC* et que le cylindre tourne autour des deux centres de ses bases avec des mouvements uniformes, il s'engendre la ligne *AEGHID* qui est une hélice cylindrique. Quant à la ligne qui n'a pas d'ordre, elle n'a donc ni limite[2], ni extrémité, et elle n'est utilisée dans aucun des arts ; c'est pourquoi elle n'est ni décrite ni définie.

Al-Sijzī trace l'hélice cylindrique, mais ne donne aucun exemple pour les courbes non mesurables sans ordre ni régularité. Peut-être avait-il à l'esprit des courbes comme la quadratrice ou la spirale. En effet, l'hélice cylindrique est la seule courbe « mécanique » qui est homogène, c'est-à-dire que tout arc de cette hélice est superposable à un autre arc d'origine arbitrairement choisi sur elle ou, en langage moderne, il existe un groupe de déplacements transitif sur la courbe.

Il n'y a donc pas l'ombre d'un doute sur le sens de la distinction entre courbes mesurables et courbes non mesurables. Si besoin est, on trouve une preuve supplémentaire de la signification de ces termes dans l'usage qu'en fait al-Sijzī lorsqu'il définit les angles : les angles non mesurables sont précisément les angles curvilignes et l'angle de contingence, alors que les angles mesurables sont ceux que nous pouvons étudier à l'aide de la théorie des proportions[3].

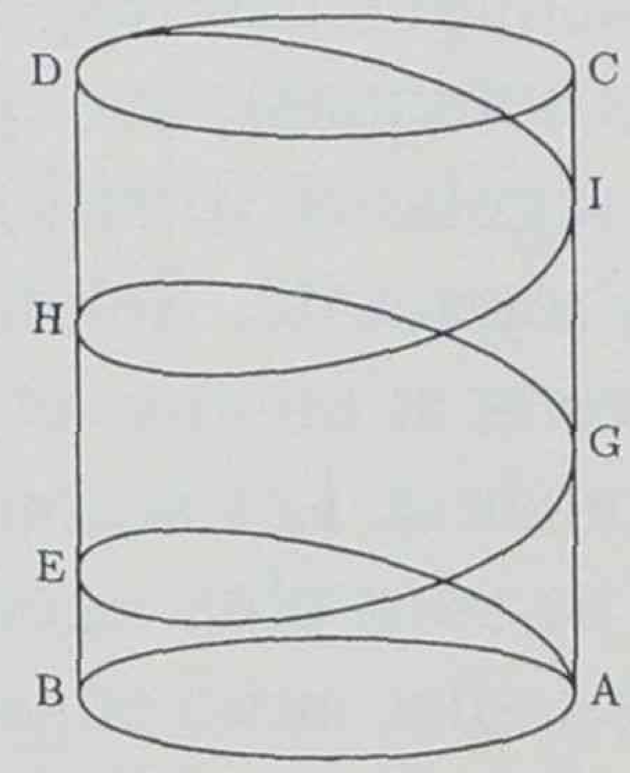


Fig. 51

[1] Al-Sijzī, *Kitāb al-Madkhal ilā ʿilm al-handasa*, ms. Chester Beatty 3652, fols. 2^{v}-8^{r}, fol. 4^{r}. Voir l'édition de ce texte dans le volume II.

وأما الخط اللولبي، وهو المستعمل في الحيل لا في الهندسة، لأنه غير قياسي، لكن له نظام وترتيب، فهو يحدُث من حركة النقطة على الخط المستقيم وعلى الدائرة باشتراك الأسطوانة.

[2] *ḥadd*, qui se traduit également par « définition ».

[3] Al-Sijzī, *Kitāb al-Madkhal ilā ʿilm al-handasa*, ms. Chester Beatty 3652, fol. 8^{r}.

Cette recherche séminale sur la classification des courbes à l'aide de la notion de mouvement et du nombre des mouvements, ainsi que la séparation entre courbes géométriques et courbes mécaniques selon qu'il est ou non possible de leur appliquer la théorie des proportions, est d'une importance majeure pour l'histoire de la géométrie, et notamment de la géométrie algébrique beaucoup plus tard. Toute la question est de savoir ce que fut la destinée de ce chapitre dans les mathématiques postérieures aux Xe-XIe siècles, chapitre des débuts duquel nous venons ici d'ébaucher l'histoire.

2.3. *L'allure générale de l'hyperbole et son tracé par points*

Dans un traité qu'il a rédigé en 980-981 et entièrement consacré à l'hyperbole, al-Sijzī se pose, dans le langage du temps, la question de l'allure générale de cette courbe : si elle a une branche infinie, son existence et sa direction. C'est donc tout naturellement qu'il revient à la proposition II.14 des *Coniques* : « Les asymptotes et la section, prolongées à l'infini, se rapprochent toujours davantage les unes des autres, et elles en arrivent à un intervalle moindre que tout intervalle donné »[1]. Mais, dans ce retour aux *Coniques*, al-Sijzī poursuivait plus d'un but. Le titre même du traité suggère ses préoccupations avant que lui-même les explicite dans le corps du texte. Al-Sijzī en effet intitule son traité : *Comment concevoir* (*taṣawwur*) *les deux lignes qui se rapprochent indéfiniment et ne se rencontrent pas*. Le terme « conception (*taṣawwur*) » n'est nullement neutre, mais recèle toute une signification philosophique et logique familière non seulement des philosophes mais de tous les hommes cultivés du temps. Sa présence dans le titre atteste d'entrée de jeu que, dans ce traité, al-Sijzī ne s'intéresse pas aux seuls résultats mathématiques, mais s'attache à la conception même du comportement asymptotique et aux difficultés qu'elle risque de soulever — aisément imaginables, en l'absence de l'analyse infinitésimale.

Questions mathématiques et questions philosophiques, encore mêlées dans l'attente de la constitution de cette analyse infinitésimale, donnent à ce texte toute son importance. Mais à cette richesse l'historien risque de demeurer aveugle, qui, par choix ou par nécessité, ne s'intéresse qu'aux seuls résultats mathématiques. Celui, en revanche, qui sait que cette même interrogation poursuit celle d'un Geminus et se prolonge jusqu'au XVIIIe siècle, sera frappé par son éclat. Pour al-Sijzī, le thème s'enracine dans deux ordres de sa propre recherche, la géométrie des coniques, d'une part, et l'*ars inveniendi*, d'autre part. En effet, ce traité succède au livre magistral qu'il a

[1] *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, trad. Paul Ver Eecke, Paris, 1959, p. 130.

consacré à cet art, c'est-à-dire à l'examen des méthodes et des procédés d'invention en mathématiques. Il s'agit de son livre intitulé *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*[1].

Dans son examen de la conception du comportement asymptotique de la courbe, al-Sijzī rencontre tout naturellement le problème du tracé par points de cette courbe, et propose deux méthodes pour effectuer ce tracé. Or ce problème l'a accompagné tout au long de sa carrière. Il traite en effet de ce tracé — continu ou par points — à plusieurs reprises dans son traité *Sur le compas conique* ; dans celui *Sur la description des sections coniques* et dans *Toutes les figures sont à partir du cercle*. Mais, dans ce traité qu'il consacre à l'hyperbole, et à la différence de tous les autres, al-Sijzī se préoccupe plutôt des fondements de ce tracé, c'est-à-dire de ses liens avec la propriété asymptotique. Il conclut sur une discussion de la notion de deux courbes asymptotiques.

Ce qui toutefois fait l'originalité de ce traité d'al-Sijzī, c'est la volonté d'aller au-delà des techniques mathématiques pour redescendre aux fondements logiques. C'est ainsi qu'il propose une classification des propositions mathématiques qu'il entend utiliser, pour élucider la conception même de comportement asymptotique.

Nous allons reprendre l'exposé d'al-Sijzī, dans l'ordre inverse si l'on peut dire, en commençant par les deux tracés de la courbe, avant de revenir au problème fondamental de la conception de la propriété asymptotique.

2.3.1. *Le tracé par points de l'hyperbole à l'aide d'une propriété de l'asymptote*

Rappelons encore la proposition II.14 des *Coniques* d'Apollonius : « Les asymptotes et la section, prolongées à l'infini, se rapprochent toujours davantage les unes des autres, et elles en arrivent à un intervalle moindre que tout intervalle donné ».

Le problème est donc de concevoir le fait que, lorsqu'un point s'éloigne indéfiniment sur une hyperbole, il se rapproche indéfiniment de l'asymptote, sans l'atteindre. La réflexion d'al-Sijzī l'amène à donner deux constructions par points de l'hyperbole. Nous allons commencer par transcrire sa démarche, avant d'analyser sa réflexion et ce qu'elle engage. Al-Sijzī commence par établir le lemme suivant :

[1] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, London, 2002, Appendice I.

LEMME : Si deux parallélogrammes ont un angle commun et des aires égales, alors leurs côtés sont inversement proportionnels.

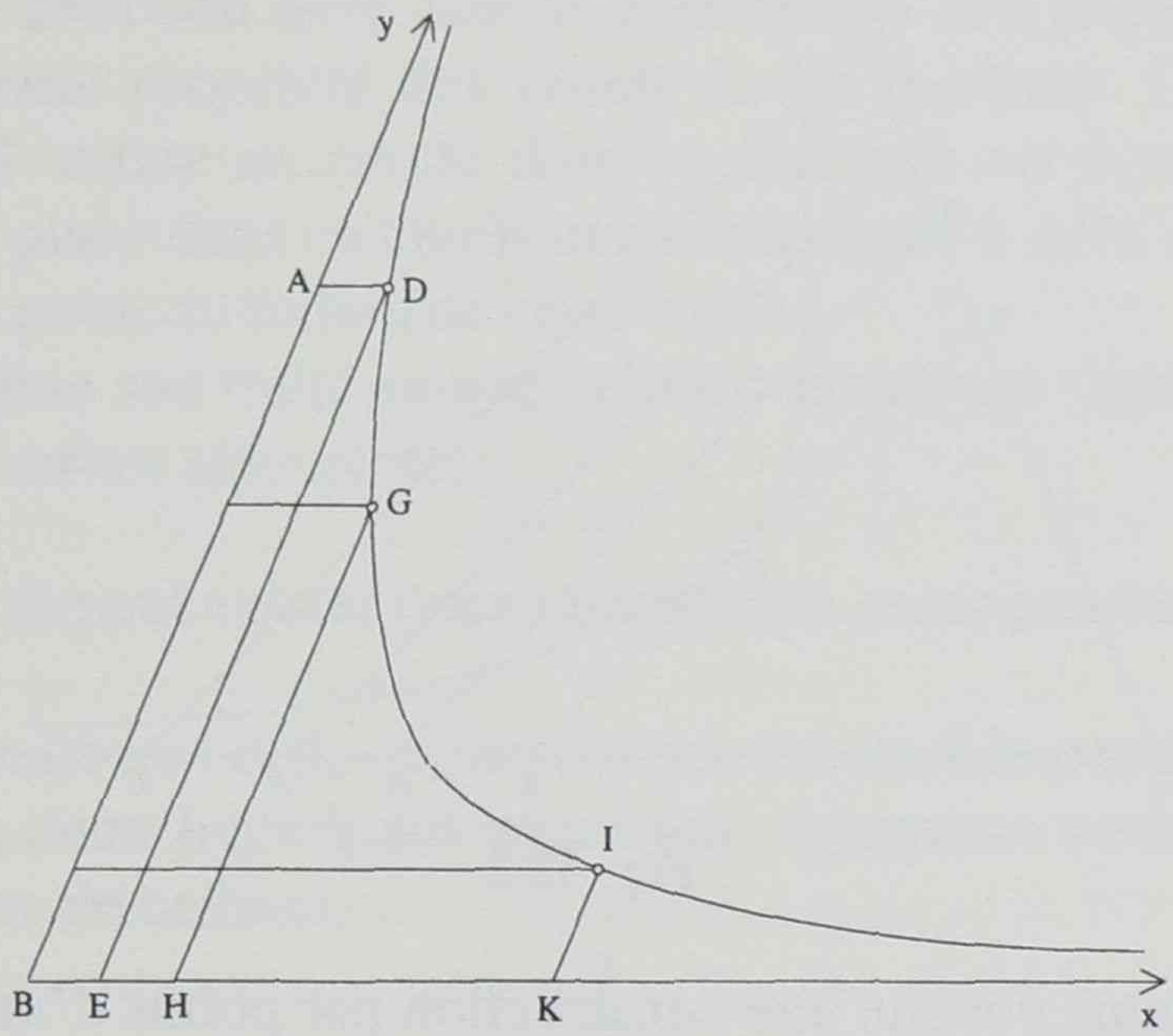


Fig. 52.1

Soit des parallélogrammes ayant en commun l'angle B ; si aire BD = aire BG = aire BI, alors $BE \cdot ED = BH \cdot HG = BK \cdot KI = k^2$, k constant ; on a $BE < BH < BK$, donc $DE > GH > IK$.

a) Les points D, G, I appartiennent à l'hyperbole équilatère définie par les asymptotes et le point D. Le raisonnement conduit à une construction par points de l'hyperbole.

b) Si le point K s'éloigne sur Bx, BK croît ; IK décroît donc et peut être rendu aussi petit qu'on veut. Mais IK ne se réduit pas à zéro, car $BK \cdot IK = k^2 \neq 0$. L'hyperbole se rapproche de plus en plus de la droite Bx mais ne la rencontre pas.

PROPOSITION : Soit BA et BC les asymptotes d'une hyperbole et un point D de celle-ci, avec par hypothèse $DA = DE$ et $BE = BA$ (D est donc le sommet de l'hyperbole d'axe BD).

Sur les droites HN, KM, CL parallèles à EA, prenons les points G, I, S tels que $GH \cdot GN = IK \cdot IM = CS \cdot SL = DA \cdot DE$. Les points S , I, G, D appartiennent à l'hyperbole, d'après la réciproque de la proposition II.10 des *Coniques*. Si on suppose $GH < GN$, $IK < IM$, $SC < SL$, alors on peut montrer que $CS < KI < HG < DE$.

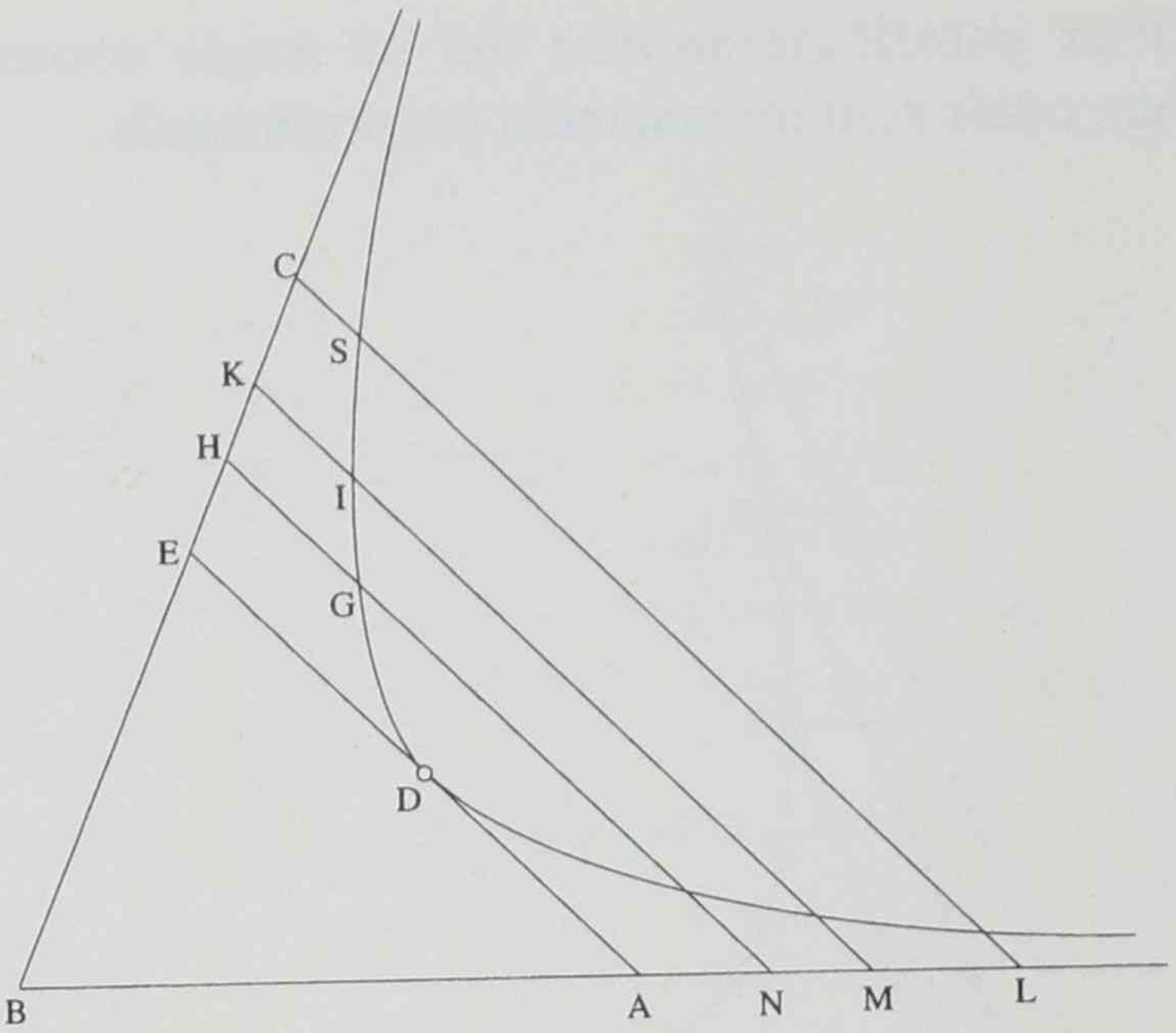


Fig. 52.2

c) Al-Sijzī donne ensuite une construction par points d'une hyperbole en partant de cette propriété.

Sur KM parallèle à EA, on veut trouver I tel que $KI \cdot IM = DA^2$.

On trace un demi-cercle de diamètre KM et on mène une parallèle à KM à la distance DA ($DA < \frac{KM}{2}$). Cette parallèle coupe le demi-cercle en deux points P et P'. On mène $PI \perp KM$ et $P'I' \perp KM$; les points I et I' vérifient $IK \cdot IM = I'K. I'M = DA^2$; ce sont les points cherchés.

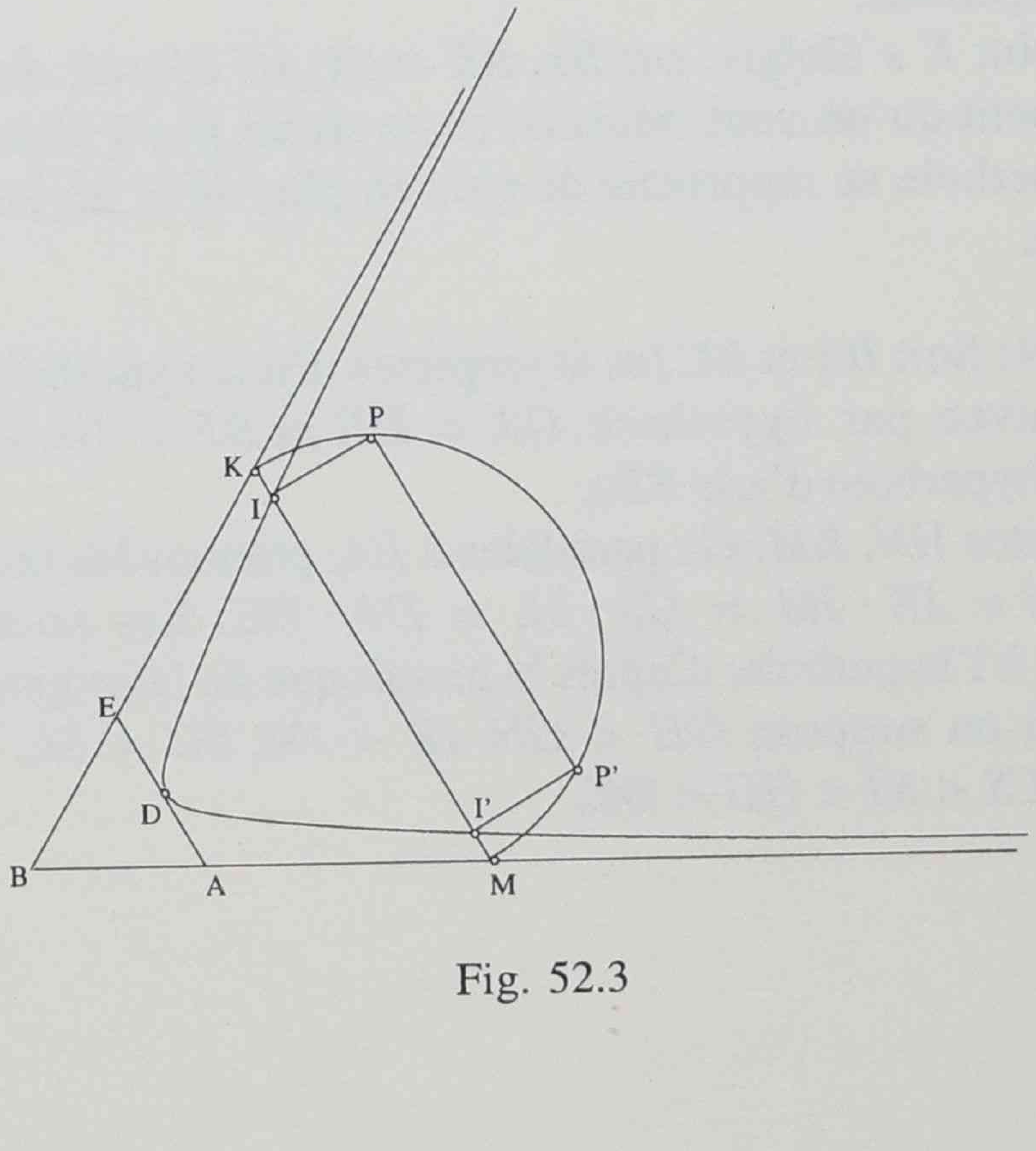


Fig. 52.3

On peut effectuer une construction analogue sur toute parallèle à EA.

Remarque: Cette construction par points de l'hyperbole diffère de celle que donne al-Sijzī dans son livre *Sur la description des sections coniques*, à partir de la même propriété des points de l'hyperbole. Dans cette autre construction, il utilise un cercle dont le diamètre est égal au plus grand segment CL. Il place dans ce cercle une corde égale à ADE et utilise ensuite la puissance du point du milieu de cette corde.

Al-Sijzī termine son traité en généralisant davantage l'idée d'asymptote à celle de deux courbes asymptotes.

PROPOSITION: Il peut exister deux courbes qui se rapprochent toujours sans se rencontrer.

Al-Sijzī rappelle que cette notion n'a pas été étudiée par Apollonius.

Considérons deux hyperboles ayant une asymptote commune et situées de part et d'autre de celle-ci.

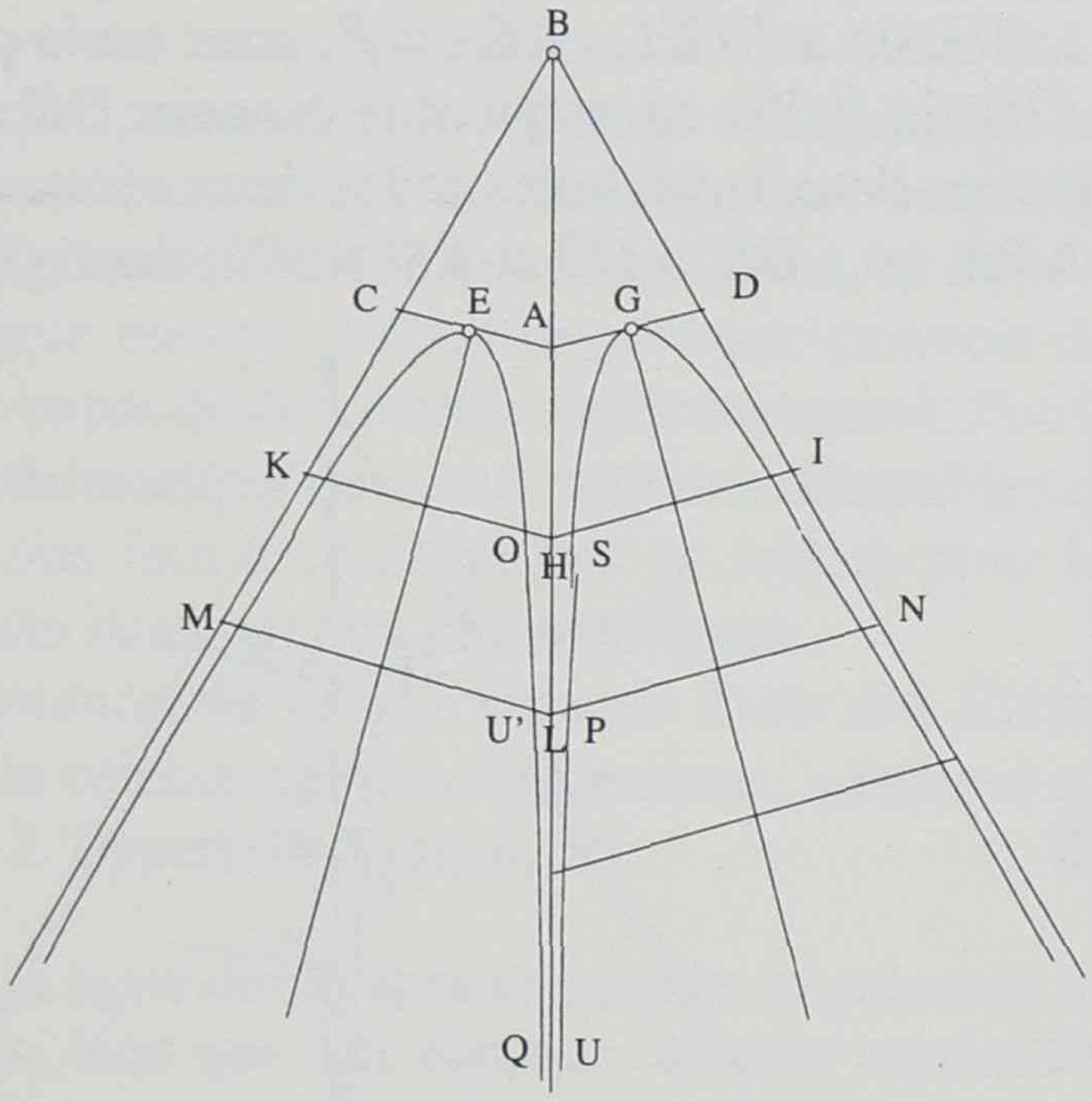


Fig. 53.1

Soit BA et BC les asymptotes de la première hyperbole, E son sommet et CA la tangente au sommet. Soit ensuite BA et BD les asymptotes de la seconde hyperbole, G son sommet et AD la tangente au sommet. On a $BA = BC = BD$. On raisonne comme dans la proposition précédente à l'aide des sécantes parallèles. On a $U'L < HO$ et $LP < HS$. Al-Sijzī en déduit: «la droite SO sera plus longue que la droite PU'»[1]. Cette conclusion est

[1] Voir *infra*, p. 304; ar. 305, 8-9.

évidente dans les cas où les angles égaux *OHS* et *U′LP* sont droits ou obtus. En effet, posons $O\hat{H}S = U'\hat{L}P = \alpha$, on a

$$OS^2 = OH^2 + HS^2 - 2\ OH \cdot HS \cos \alpha$$

et

$$U'P^2 = U'L^2 + LP^2 - 2U'L \cdot LP \cos \alpha.$$

Si $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha \leq 0$ et on a bien $OS^2 > U'P^2$; mais si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha > 0$ et on ne peut pas conclure à partir de cette formule.

Il suffit de prendre $\alpha = \frac{\pi}{3}$ pour avoir $OS < U'P$. Sans doute est-ce pour cette raison qu'al-Sijzī écrit : « il peut exister… » (*infra*, p. 302 ; ar. 303, 13).

Remarque : On sait que, avec les mêmes hypothèses, si on mène dans la première hyperbole des sécantes telles que *OH* parallèles à la tangente *AEC*, alors *OH* décroît lorsque le point *O* s'éloigne sur l'hyperbole. Si on mène $EX \perp BA$ et $OK \perp BH$, on a $K\hat{O}H = K\hat{E}A = \beta$, pour toute position du point *O* ; et on a $OK = OH \sin \beta$. Par conséquent la distance *OK* décroît. Si maintenant on considère les deux hyperboles et les deux sécantes *OKS′* et *U′IP′* perpendiculaires à *BA*, on a $OK > U'I$ et $KS' > IP'$; donc $OS' > U'P'$.

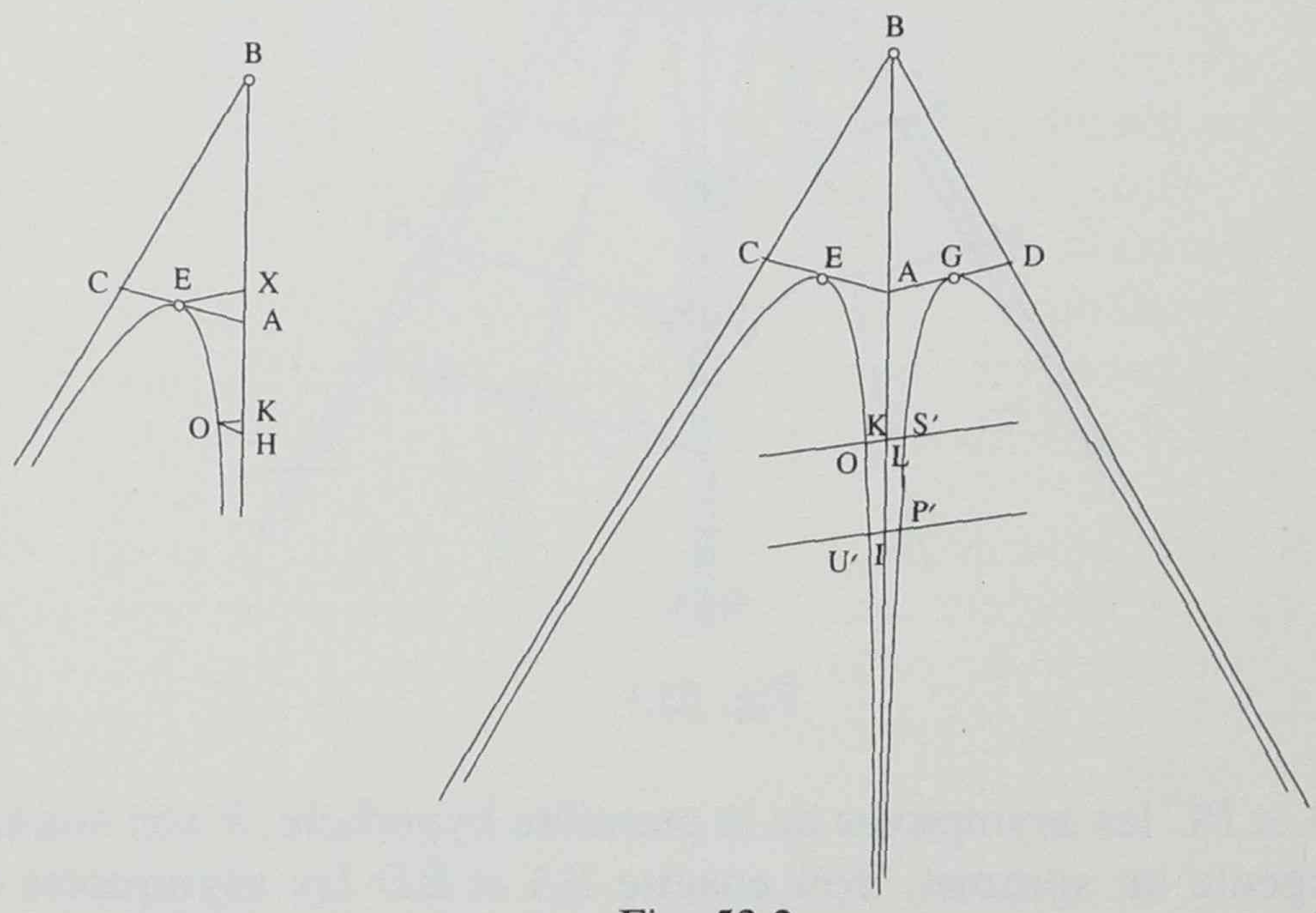


Fig. 53.2

Cette conclusion est à rapprocher du passage où al-Sijzī écrit : « Et de même, pour toutes les droites menées du pourtour des sections et parallèles à la droite *SO* : celle qui s'éloigne de *SO* est plus petite que celle qui s'en rapproche » (*infra*, p. 304 ; ar. 305, 9-10).

2.3.2. *La propriété asymptotique de l'hyperbole et la classification des propositions mathématiques*

Dans la proposition 14 du second livre des *Coniques*, Apollonius se propose de démontrer que les asymptotes et l'hyperbole se rapprochent indéfiniment sans se rencontrer. Cette proposition fait évidemment appel à la notion, redoutable, de l'infini. Tout d'abord, l'infini se présente comme objet de connaissance, dans la mesure où il s'agit d'êtres mathématiques dont l'existence implique des processus infinis : c'est en effet le propre de tout comportement asymptotique. Mais l'idée d'infini est également à l'œuvre comme moyen de la connaissance, appelée par les constructions mathématiques infinies, telles que la construction infinie de la suite des distances entre la courbe et son asymptote : il faut s'assurer que l'on peut toujours réitérer la même construction.

Mais on comprendra sans peine que, ainsi entendue par Apollonius, cette notion de l'infini devait heurter mathématiciens et philosophes. Si en effet les premiers ne pouvaient rester indifférents à une difficulté apparente de la démonstration, principalement liée à l'usage d'une notion jamais clairement dégagée, les seconds, quant à eux, devaient être sensibles à un nouveau problème, qui surgit précisément à cette occasion, et dont les traces persistent au XVIII[e] siècle encore : l'écart entre notre pouvoir de concevoir une propriété et notre capacité de l'établir rigoureusement. Pouvons-nous établir une propriété mathématique que nous sommes incapables de concevoir distinctement ? Il nous faut revenir un peu en arrière pour localiser le commencement de cette interrogation philosophique.

Dans les *Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide*, Proclus rapporte la célèbre opinion de Geminus, relative à quelques courbes, dont l'hyperbole. L'hyperbole, écrit-il, est

> à l'égard de la ligne droite et la conchoïde en présence de la ligne droite ; car ces lignes, bien que leur distance diminue continuellement, sont toujours asymptotes, se rapprochent les unes des autres, mais jamais entièrement : fait constituant le théorème le plus paradoxal en géométrie (ὃ καὶ παραδοξότατόν ἐστιν ἐν γεωμετρίᾳ)[1].

Proclus ne commente pas ces propos de Geminus, ni n'élucide ce « caractère paradoxal » ; il semble néanmoins, d'après le contexte, que celui-ci renvoie au statut même de l'infini mathématique.

[1] Procli Diadochi, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii,* éd G. Friedlein, Leipzig, 1873 ; reprod. Olms, 1967, p. 177; et la traduction de Ver Eecke : Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide,* Paris, 1948, p. 144-145.

Pour Proclus, en effet,

> l'infini ne s'établit que dans l'imagination, sans que celle-ci le conçoive ; car l'imagination conçoit et applique en même temps une forme et une limite à ce qui est conçu ; elle arrête l'évolution du phénomène[1].

Comment, dans ces conditions, l'entendement peut-il s'appliquer à l'infini comme objet d'une connaissance démontrable ? Or, selon Proclus, ceci est possible si l'infini est considéré comme hypothèse et s'il est utilisé en tant que fini dans les démonstrations mathématiques ; ou, pour reprendre ses propres termes :

> d'autre part, la connaissance raisonnée (διάνοια) d'où proviennent les raisonnements et les démonstrations, ne fait pas usage de l'infini en vue de le connaître car l'infini n'est généralement pas un comportement de la science — mais, adoptant l'infini par hypothèse, elle n'utilise que le fini dans la démonstration[2].

Comme on ne peut cependant éviter le recours à l'infini dans la démonstration de cette proposition d'Apollonius, non plus que dans les propositions analogues, il en résulte le « caractère paradoxal » de ce théorème, si l'on opte pour l'analyse de Proclus.

Mais cette difficulté rencontrée par Geminus, puis par Proclus, leur a survécu pour renaître plus tard ; cinq siècles après Proclus, en effet, mathématiciens et philosophes considèrent à nouveau la même proposition, pour en reprendre la rédaction et le commentaire.

Lecteur de Proclus, al-Sijzī recopie des fragments de la traduction arabe des *Éléments de Physique*, inventoriée par les bibliographes anciens, et dont nous avons pu, grâce à lui, confirmer l'existence[3].

[1] *Ibid.*, trad. Ver Eecke, p. 245-246.

[2] *Ibid.*

[3] En effet, notre connaissance de l'existence d'une version arabe des *Éléments de Physique* de Proclus reposait jusqu'ici sur le seul rappel du titre du livre par le bibliographe du Xᵉ siècle al-Nadīm (*al-Fihrist*, éd. R. Tajaddud, Téhéran, 1971, p. 312). On sait depuis peu que certains théorèmes figurent « dans la *Stoicheiōsis Physikē* qui se reflète — ou dont une partie se reflète — dans les textes du ms. Haci Mahmud », c'est-à-dire le manuscrit 5683 de cette collection d'Istanbul (voir S. Pines, *Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Medieval Science*, Leiden, 1986, p. 287 sqq.). Il s'agit, selon S. Pines, des théorèmes 10, 15, 17, 18, 19 et 21 de la seconde partie du livre de Proclus. Comme on peut le lire dans son *Opuscule*, le témoignage d'al-Sijzī est venu corroborer l'indication du bibliographe et expliquer la présence des précédents théorèmes : il rappelle en effet le titre mentionné par celui-ci — *Kitāb Ḥudūd awā'il al-ṭabī'iyyāt* — c'est-à-dire les *Éléments de Physique*, et laisse de plus entendre la destination de ce livre : démontrer par *la voie philosophique* que toute grandeur est

divisible à l'infini. Or, grâce à un texte anonyme (selon G. Endress ce texte serait de Yaḥyā ibn 'Adī *ca* 363/974 ; « Yaḥyā ibn 'Adī's Critique of Atomism », *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 1, 1974, p. 155-179) qui fait partie de l'un des plus anciens manuscrits de la Bibliothèque Nationale de Paris — un bon nombre de pages sont en effet du Xᵉ siècle — de la main d'al-Sijzī selon toute vraisemblance et fréquemment consulté depuis le milieu du siècle dernier, il est possible de montrer que le livre de Proclus a été traduit, en partie tout au moins, en arabe. Dans le manuscrit 2457 du fonds arabe se trouve un texte anonyme intitulé *Tout continu est divisible en des choses qui se divisent toujours à l'infini*. Ce texte reproduit la traduction de plusieurs propositions du texte grec de Proclus, tel qu'il nous est parvenu dans la tradition manuscrite grecque (laquelle n'est pas nécessairement la même que celle dont partait la traduction arabe). Ici, nous donnons à titre d'épreuve la traduction française des fragments grecs traduits en arabe, pour établir définitivement l'existence de cette version arabe du livre de Proclus. Nous mettons entre parenthèses les phrases dont le traducteur a rendu le sens sans les traduire rigoureusement. Quant à ce qui n'a pas été traduit en arabe, nous l'indiquons entre *.

Proclus, *Éléments de Physique*.

Déf. I : Sont continues les choses dont les extrémités sont une.

Déf. II : Sont contiguës les choses dont les extrémités sont ensemble.

Déf. III : Sont successives les choses entre lesquelles il n'y a rien de même genre.

§ 1 : Deux choses indivisibles ne se toucheront pas. Si en effet c'était possible, que les deux indivisibles *AB* se touchent. Mais les choses qui se touchent sont celles dont les extrémités sont ensemble. *De deux choses indivisibles il y aura donc des extrémités, donc *A* et *B* n'étaient pas indivisibles.*

§ 2 : Deux choses indivisibles ne formeront rien de continu. Si en effet c'était possible (soit *A* et *B* deux choses indivisibles, et soit à partir des deux une chose continue). Or toutes les choses continues sont d'abord contiguës, ainsi *A* et *B* sont contiguës, tout en étant indivisibles ; ce qui est impossible.

Autrement : …

§ 3 : (Ce qui est au milieu de deux choses indivisibles, dans un continu, est continu.) Soit en effet *AB* deux choses indivisibles. Je dis que l'intermédiaire entre *A* et *B* est continu. *Si en effet il n'en est pas ainsi*, l'indivisible *A* est contigu à l'indivisible *B*, *ce qui est impossible* ; donc l'intermédiaire entre eux est continu.

§ 4 : Deux choses indivisibles ne sont pas successives l'une à l'autre. Soit en effet *AB* deux choses indivisibles, je dis que *A* ne sera pas successif à *B*. Puisqu'en effet il a été montré que l'intermédiaire entre deux choses indivisibles est continu, soit maintenant leur intermédiaire *CD* et qu'il soit divisé selon *E* ; alors *E* est indivisible, *étant intermédiaire entre *A* et *B**. Or sont successives des choses entre lesquelles il n'y a rien du même genre ; donc *A* et *B* ne sont pas successifs.

§ 5 : Tout continu est divisible en parties toujours divisibles. Soit en effet *AB* continu, je dis que *AB* se divise en parties toujours divisibles. En effet, qu'on le divise en *AE* et *EB*. Celles-ci sont maintenant ou bien indivisibles, ou bien toujours divisibles. Si donc d'une part elles sont indivisibles, alors il y aura un continu à partir de choses indivisibles, *ce qui est impossible* ; si d'autre part elles sont divisibles, *qu'on les divise de nouveau en parties, et celles-ci à leur tour. Si d'une part elles sont indivisibles, les parties indivisibles seront continues les unes aux autres ; si d'autre part elles sont divisibles, qu'on les

Un tel intérêt pour les questions philosophiques n'est cependant pas l'apanage d'al-Sijzī ; il est commun aux grands mathématiciens du temps, les prédécesseurs — Ibrāhīm ibn Sinān — aussi bien que les successeurs — Ibn al-Haytham. Aussi ne suffit-il pas à expliquer qu'al-Sijzī ait voulu reprendre la célèbre proposition d'Apollonius. Deux autres raisons se dégagent et s'imposent au cours de l'examen du texte de l'auteur. Aux yeux d'al-Sijzī, cette proposition recouvre une problématique, qu'il évoque dans le langage quelque peu infléchi de la philosophie aristotélicienne arabe. Al-Sijzī semble en effet admettre, à la suite des aristotéliciens arabes[1], que le savoir mathématique, comme tout savoir, peut être caractérisé par le couple «conception-*taṣawwur*/jugement-*taṣdīq*» ; en mathématiques, ce couple est restreint au couple «conception/démonstration», le jugement n'étant qu'un syllogisme démonstratif. À la suite des aristotéliciens encore, al-Sijzī ne reconnaît pour «conception» que celle de l'essence, révélée dans une intuition rationnelle, ou exprimée dans une définition[2]. On peut à son propos, comme pour tous, paraphraser le fameux texte des *Analytiques Seconds*: la conception «montre ce qu'une chose est et la démonstration montre qu'une chose est ou n'est pas attribuée à telle autre»[3]. Suivant cette terminologie, la proposition d'Apollonius soulève le problème des affirmations qui sont démontrables tout en étant inconcevables, ou, tout au moins, difficilement concevables.

D'autre part, nous le savons, pour établir rigoureusement la proposition d'Apollonius, il faut disposer de concepts et de techniques qu'al-Sijzī mathématicien ne possédait pas encore: il s'agit des concepts et des moyens d'analyse. Mais, dans ce cas, l'élucidation philosophique permet au mathématicien de se frayer un sentier en attendant le tracé des chemins mathématiques futurs. Si donc la difficulté mathématique suscite une thématique philosophique, l'explication philosophique s'offre à son tour comme un

divise elles aussi, et ceci à l'infini. Donc tout continu est divisible en choses toujours divisibles*.

[1] On peut citer notamment le célèbre philosophe al-Fārābī, prédécesseur d'al-Sijzī. Dans son livre *De la démonstration* (*Kitāb al-Burhān*), il développe cette doctrine de la science selon laquelle celle-ci se dit de deux notions: le jugement et la conception. Voir *al-Manṭiqiyyāt li-al-Fārābī*, éd. M. Danesh-Pajouh, Qum, 1408 H., vol. I, p. 266 sqq. On peut également évoquer les philosophes plus tardifs, comme Avicenne ; cf. *al-Shifā'*, *La Logique*, vol. V, éd. A. E. Affifi, Le Caire, 1952, p. 51 sqq. Dans sa *Réponse aux logiciens*, Ibn Taymiyya résume d'une manière pertinente cette doctrine des philosophes ; voir *Kitāb al-Radd ʿalā al-manṭiqiyyīn*, Bombay, 1949, p. 4 sqq.

[2] Cf. par exemple al-Fārābī, *De la démonstration.*

[3] *Analytiques Seconds*, II, 3, 91 a.

moyen à la réflexion du mathématicien. Telles sont les deux tâches, mêlées, qui caractérisent complètement la démarche d'al-Sijzī.

En premier lieu, il est conduit à une comparaison entre conception et démonstration, destinée à l'établissement d'une typologie des propositions mathématiques, qui lui permettra de cerner ainsi le type exact de la proposition d'Apollonius. Il commence par reconnaître, à la suite des aristotéliciens arabes, deux types extrêmes, dont la confrontation manifeste qu'il ne peut y avoir une conception de tout ce dont il y a démonstration : c'est le cas, précisément, de la proposition d'Apollonius. On peut, d'autre part, saisir l'essence de l'objet d'une proposition, le concevoir, sans recourir à une démonstration : les affirmations vraies et premières en sont autant d'exemples. Entre ces deux types extrêmes se trouvent les autres, intermédiaires ; al-Sijzī dégage alors cette classification des propositions mathématiques :

1. Les propositions concevables directement à partir des principes philosophiques.
2. Les propositions concevables avant qu'il soit procédé à leur démonstration.
3. Les propositions concevables lorsque l'on forme l'idée de leur démonstration.
4. Les propositions concevables seulement une fois démontrées.
5. Les propositions difficilement concevables, même une fois démontrées.

Pour mieux discerner l'ordre sous-jacent selon lequel se succèdent ces cinq types, et ainsi mieux comprendre le principe qui régit la classification d'al-Sijzī, il nous faut examiner les exemples qu'il expose comme illustration de chacun des cas.

Ainsi, la proposition : « les choses continues se divisent en des choses, toujours à l'infini » représente le premier type[1]. C'est à l'évidence un emprunt direct, ou par l'intermédiaire de Proclus, à la *Physique* III, 207 b 16, lorsqu'Aristote écrit : « διαιρεῖται μὲν γὰρ εἰς ἄπειρα τὸ συνεχές », « car le continu est divisé à l'infini ». Al-Sijzī conseille à qui veut saisir ce concept de divisibilité à l'infini de tout continu d'emprunter la voie philosophique, laquelle peut ainsi s'esquisser : à partir de la définition de la contiguïté et de la continuité, on commence par montrer que deux choses indivisibles ne sont pas contiguës, pour ensuite montrer que deux indivisibles ne peuvent former une chose continue, et en déduire enfin la proposition évoquée. C'est à l'argumentation de Proclus que se réfère al-Sijzī[2].

Dans la première proposition du livre X des *Éléments*, Euclide redonne la propriété archimédienne pour assurer la continuité. Il reste encore à garantir

[1] Voir *infra*, p. 296 ; ar. 297, 1-2.
[2] Proclus, *Éléments de Physique*.

la convexité, que « la voie philosophique » de Proclus semble donner intuitivement.

On peut donc se demander pourquoi al-Sijzī, qui connaissait mieux que quiconque les *Éléments* d'Euclide, et par conséquent la première proposition du dixième livre, préfère, au lieu de s'y référer, opter pour la voie philosophique, alors que pourtant par « chose » il ne désigne rien d'autre que la notion euclidienne de grandeur. Son choix, pourtant, est délibéré, dicté par le but qu'il poursuit : il s'agit en effet de saisir, à l'aide d'une élucidation philosophique, le concept de divisibilité à l'infini de toute grandeur, et de justifier sa vérité. Cette tâche une fois achevée, l'affirmation devient désormais une vérité première en mathématique, susceptible par conséquent d'engager un raisonnement déductif. Ainsi al-Sijzī déduit-il lui-même immédiatement la divisibilité à l'infini de la ligne, qui est une chose continue. Sa démarche semble donc guidée par l'idée que seule une étude philosophique préalable permet de concevoir et de justifier les affirmations vraies et premières en mathématiques.

Le second type de propositions comprend les propositions mathématiques immédiatement concevables, et ceci avant toute démonstration. Il ne s'agit pourtant plus cette fois des axiomes, mais des affirmations qui en dépendent directement. Cette consécution est d'ailleurs si immédiate qu'elle permet de les considérer comme des axiomes, tout au moins à nous qui les reprenons dans une nouvelle rédaction. Al-Sijzī en donne trois exemples ; le premier n'est autre que la proposition III.10 des *Éléments* — deux cercles se coupent en deux points seulement — dont l'affirmation d'évidence est héritée de la tradition. L'intersection de deux cercles est en effet déjà considérée dans I.1 des *Éléments*, où Euclide admet comme évidente l'existence des points d'intersection. Mais les commentateurs n'ont pas manqué de dénoncer la faiblesse de cette perspective, et déjà à la fin du X^e^ siècle Ibn al-Haytham écrivait que « Euclide a dit que deux cercles se coupent en un point, mais il n'a pas montré qu'ils se coupent ; il a admis cette propriété sans la démontrer »[1]. Plus récemment, Thomas Heath fait une observation analogue, lorsqu'il écrit à propos de l'existence de cette intersection que « Euclid seems to assume it as obvious, although it is not so [...] »[2], alors qu'elle exige en fait l'introduction d'un axiome de continuité[3].

[1] Ibn al-Haytham, *Fī ḥall shukūk Kitāb Uqlīdis fī al-Uṣūl wa-sharḥ maʿānīhi* (*De la solution des doutes <à propos> du livre d'Euclide sur les* Éléments *et l'explication de ses notions*), ms. Istanbul, Université 800, fol. 20v.

[2] *Euclid's Elements*, translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, vol. I, New York, Dover, 1956, p. 235.

[3] *Ibid.*, p. 235-236.

Tout indique donc qu'al-Sijzī a supposé, à la suite d'Euclide, que l'existence des points d'intersection était évidente, et a alors considéré cette proposition comme quasi-primitive. Et de fait si l'on admettait l'existence des points d'intersection, il ne resterait plus qu'à démontrer, par un raisonnement par l'absurde — à l'exemple d'Euclide — que ces points ne peuvent être plus de deux.

Le second exemple d'al-Sijzī est encore plus criant : il s'agit d'une inégalité triangulaire, énoncée et démontrée par Euclide dans I.20 des *Éléments* : deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient considérés, sont plus grands que le côté restant. Il faut dire qu'il s'agit là du théorème que les Épicuriens ont ridiculisé « en disant qu'il est évident même pour un âne, et qu'il n'exige aucune démonstration »[1]. Et les Épicuriens, comme le rappelle Proclus, « prouvent d'ailleurs que ce théorème est tout aussi bien connu par l'âne, parce que, si l'on dispose du fourrage à l'autre extrémité des côtés, l'âne avide de nourriture parcourt un seul côté du triangle, mais non les deux »[2].

Proclus lui-même, dans sa défense d'Euclide, n'a pas nié ce caractère d'évidence ; il a simplement tenté d'en spécifier la nature, lorsqu'il écrit : « il y a lieu de riposter à cela que ce théorème est évident pour les sens, mais ne l'est pas encore d'après le raisonnement scientifique »[3].

Le dernier exemple du second type est le suivant : si on augmente la base d'un triangle isocèle, on augmente l'angle sous-tendu par la base. Cette proposition peut être considérée comme un corollaire de I.25 des *Éléments*, laquelle est déduite « d'une manière purement logique »[4] de la proposition I.4. Et c'est précisément à propos de cette dernière que B. Russell écrit « indeed Euclid's proof is so bad that he would have done better to assume this proposition as an axiom »[5] ; ce que Hilbert n'a pas manqué de faire[6].

Le troisième type de propositions comprend celles qui sont concevables seulement quand on entreprend de les démontrer, c'est-à-dire lorsqu'on en forme l'idée pour engager la réalisation de leur démonstration. Notre connaissance du concept semble donc, d'après al-Sijzī, prendre naissance dans celle de la démonstration. Mais les propositions de ce type, même les plus simples, sont toutefois déjà moins primitives que les précédentes, n'étant pas directement déductibles à partir des axiomes : des constructions géométriques intermédiaires et plusieurs lemmes les en séparent. Comme

[1] Proclus, *Les Commentaires*, p. 275.
[2] *Ibid.*
[3] *Ibid.*
[4] *Euclid's Elements*, p. 300.
[5] B. Russell, *Principles of Mathematics*, 2e éd., London, 1937, p. 405.
[6] *Euclid's Elements*, p. 249.

premier exemple, al-Sijzī prend deux parallélogrammes de même aire, et affirme que si la longueur de l'un excède la longueur de l'autre, alors sa largeur sera plus petite que celle de l'autre ; il est clair que cette proposition fait appel au concept d'égalité des figures, de même aire sans être de même forme. Or ce concept ne se trouve pas défini dans les *Éléments* — qui sont la référence d'al-Sijzī — mais devait être déduit. Si d'autre part nous considérons, comme, semble-t-il, al-Sijzī, deux parallélogrammes de même aire et également équiangles, alors sa proposition peut être déduite de la proposition VI.14 des *Éléments*, où Euclide montre que pour deux parallélogrammes ainsi conçus, les côtés qui entourent deux angles égaux sont réciproquement proportionnels. Mais quatre lemmes étaient déjà nécessaires à Euclide pour démontrer la proposition VI.14 elle-même.

Le second exemple n'est qu'une généralisation du précédent, pour deux parallélépipèdes de même volume. Al-Sijzī suggère que ces deux solides soient représentés à l'aide de deux morceaux de cire de même quantité. Mais, même si ce modèle suggère une représentation de la propriété énoncée, il n'en donne pas une vraie conception : il faut au préalable définir le concept de volumes égaux, et entreprendre la démonstration à l'aide de XI.34 des *Éléments*, laquelle exige plusieurs lemmes.

Le quatrième type comprend les propositions concevables une fois démontrées seulement. À la différence des propositions du précédent type, celles-ci ne sont pas directement déductibles des axiomes, mais ne doivent plus rien à notre intuition des propriétés représentées par les figures. La figure tracée, non plus que le modèle construit — les deux solides en cire, par exemple — ne font plus office de support à notre conception de la propriété énoncée. Bien plus, cette dernière est l'effet d'une autre, plus profonde, et requiert par conséquent que soit achevée l'« analyse » avant que puisse être saisi le concept de son objet. Al-Sijzī prend pour exemple la proposition I.32 des *Éléments* : dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux droits. On sait d'une part que cette propriété d'avoir les angles égaux à deux droits participe du concept même du triangle ; ou, selon ce qu'on peut lire dans les *Analytiques Seconds* :

> ce qui donc […] est démontré avoir ses angles égaux à deux droits […] c'est ce à quoi, pris comme sujet premier, l'attribut appartient universellement, et la démonstration au sens propre consiste à prouver qu'il appartient universellement à ce sujet[1].

Commentant ce passage, Proclus note que ce fait « appartient au triangle en particulier et de soi, et c'est pourquoi Aristote se rapporte à cet exemple

[1] *Analytiques Seconds*, I, 4, 74 a.

vulgaire lorsqu'il considère ce qui est de soi dans ses traités démonstratifs »[1]. Mais ce même fait trouve une raison plus profonde dans le célèbre cinquième postulat.

Pour les quatre premiers types, les exemples d'al-Sijzī s'ordonnent donc selon le caractère de moins en moins primitif des propositions ; et ce caractère ne traduit pas seulement le degré de dépendance logique à l'égard des axiomes ; il exprime également un élément apriorique de l'évidence des notions correspondant à notre pouvoir d'intuition des propriétés à partir des figures. Aussi le mathématicien croit-il en la possibilité d'améliorer notre conception, par la déduction d'une propriété difficile à concevoir à partir d'une autre qui l'est moins. Telle sera précisément la démarche d'al-Sijzī à propos du cinquième type.

Comme exemple de ces propositions, celles que l'on peut difficilement concevoir même lorsqu'on les a démontrées, al-Sijzī retrouve naturellement la proposition II.14 des *Coniques*, celle-là même qui a suscité sa propre interrogation et à laquelle le mémoire est en fait consacré. Mais, cette fois, à la différence des cas précédents, le mathématicien ne se satisfait plus d'une simple illustration par un exemple du type considéré ; il entend bien élucider le concept opaque d'asymptote, afin de mieux concevoir la propriété énoncée et démontrée par Apollonius ; un tel projet revient en fait à rechercher des moyens plus appropriés pour pouvoir parler de l'infini. Mais, plus précisément encore, le mathématicien découvre au cours de son travail qu'il lui faudra étudier les « limites » finies de suites infinies, ainsi que recourir à des suites qui tendent vers l'infini. C'est en effet inévitable s'il veut décrire le comportement asymptotique ici considéré : ce comportement est conçu depuis l'antiquité d'une manière un peu différente de la nôtre, dans la mesure où l'asymptote est représentée comme limite qu'on ne peut franchir, mais que la courbe approche aussi près que l'on veut. Qu'al-Sijzī ne parle pas ce langage de limites et de convergence, concepts du reste étrangers à cette mathématique, est un fait connu de tous ; mais que ces idées soient enfouies dans le langage géométrique, le texte que nous traduisons ici-même en est plus que le témoin ; c'en est la preuve. Dans notre analyse, nous utiliserons donc délibérément ce langage inconnu d'al-Sijzī et ces moyens conceptuels qui ne sont pas les siens, pour mieux dévoiler ses intentions et localiser les difficultés auxquelles il a pu se heurter. Contrairement à ses devanciers et à ses contemporains, al-Sijzī commence par justifier la propriété énoncée dans II.14, en la fondant sur une propriété plus primitive qu'elle. La traduction mathématique d'un tel projet le conduit d'abord à tenter de construire par points l'hyperbole, ou une branche de celle-ci. Mais

[1] Proclus, *Les Commentaires*, Ver Eecke, p. 329 ; Friedlein, p. 384.

il ne tarde alors pas à être confronté au problème du passage du discret au continu. Reprenons donc le noyau du mémoire, le lemme et le théorème.

Soient OX et OY deux droites données, H un point — qui varie — du plan, tel que l'aire du parallélogramme $OMHN$ soit égale à une constante a'.

Posons $x = ON$, $y = OM$, alors on peut écrire

(1) $$xy = \frac{a'}{\sin \alpha} = a.$$

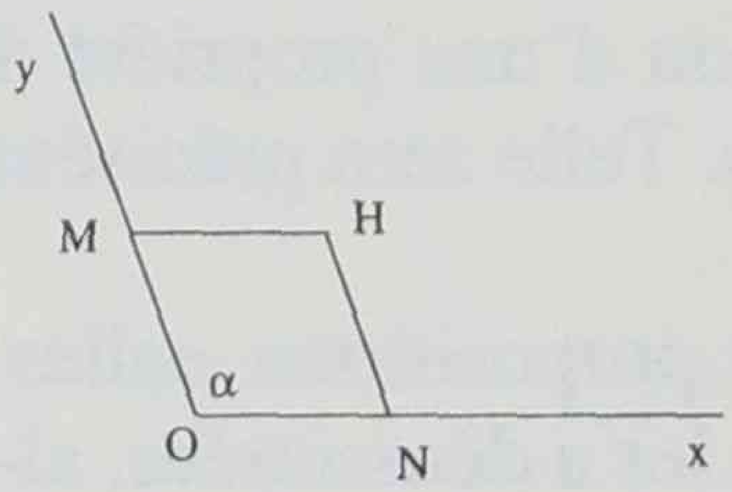


Fig. 54.1

LEMME : Si y [resp. x] tend vers l'infini, alors x [resp. y] tend vers 0.

Si H varie dans le plan de telle manière que la condition (1) reste vérifiée, alors H décrit une branche de l'hyperbole dont les asymptotes sont les droites OX et OY. Al-Sijzī applique ce lemme à la démonstration du théorème.

THÉORÈME : Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur OY, alors MH tend vers 0 sans que le point H atteigne l'asymptote OY.

L'examen des énoncés précédents, ainsi que des démonstrations d'al-Sijzī, permet de dégager les points suivants :

1. Pour établir le passage du discret au continu, al-Sijzī considère une suite quelconque (H_n) des points H, telle que la suite (y_n) qui lui correspond tende vers l'infini. Ainsi, si on pose $x = \frac{a}{y} = f(y)$, la démarche d'al-Sijzī revient à démontrer que $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 0$.

Tout se passe comme si le mathématicien connaissait intuitivement la propriété exprimée par le théorème :

soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors f tend vers l quand y tend vers l'infini, si et seulement si, pour toute suite (y_n) tendant vers l'infini, la suite $f(y_n)$ tend vers l.

2. Cette traduction du problème met en relief les obstacles rencontrés, qui rendent difficilement concevable une propriété cependant bien démontrée. Al-Sijzī sait maintenant que la « limite » d'une suite, lorsqu'elle existe, n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, lorsqu'il démontre que $\overline{M_n H_n} = x_n$ tend

vers 0, il démontre également que H_n n'atteint jamais l'asymptote OY ; c'est-à-dire qu'aucun terme x_n de la suite n'est égal à zéro, et donc à la limite de la suite. Or c'est là précisément que réside la première raison qui rend le résultat difficile à concevoir au mathématicien du Xe siècle.

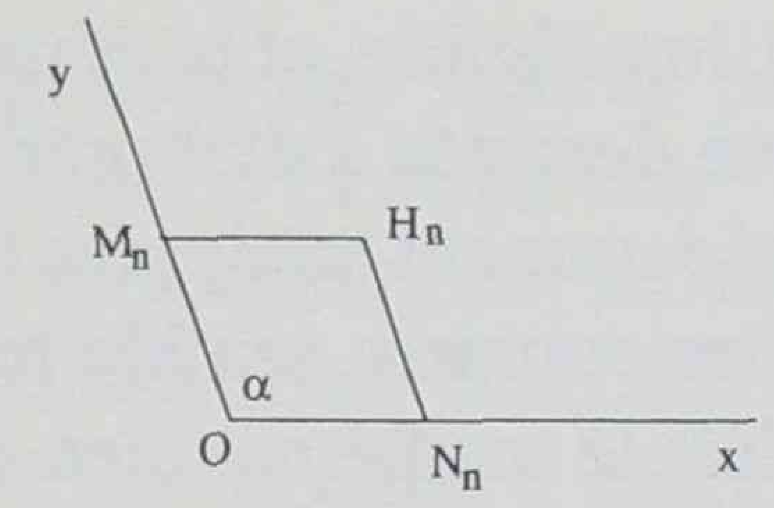


Fig. 54.2

Mais une seconde difficulté, plus redoutable, est liée à ce que nous pouvons appeler la « discontinuité de l'aire ». Soit en effet l'aire $(OM_nH_nN_n) = \mathscr{A}_n$. Il est évident que $\mathscr{A}_n = a'$. Or $\overline{x_n = M_nH_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; ce qui implique que le parallélogramme en tant que surface tend — en un certain sens — vers l'asymptote OY. Or, d'après al-Sijzī, l'aire d'une droite est nulle. Il affirme également au cours de sa démonstration que l'on ne peut former une surface — d'aire non nulle nécessairement — en utilisant des segments. Rappelons qu'il s'agit pour lui d'un ensemble fini, ou au plus dénombrable, de segments. Il s'ensuit également que

$$\lim_{n\to\infty} \text{aire}\,(OM_nH_nN_n) = a' \neq 0 = \text{aire}\,(\lim_{n\to\infty} OM_nH_nN_n)\,;$$

d'où résulte une difficulté qui, pour al-Sijzī, ne saurait être qu'intrinsèque et essentielle : comment concevoir une propriété pourtant correctement démontrée ?

Il est clair que les raisons d'une telle difficulté ne tiennent pas, pour al-Sijzī, à la capacité subjective de représenter l'objet mathématique, mais bien à la méthode de sa construction. Le mathématicien doit commencer par mettre en lumière cette méthode cachée, pour pouvoir parler de l'infini, dans les deux sens précédents au moins, ainsi que pour décrire cette catégorie de comportement asymptotique ; et la fonction du lemme est précisément de mettre à nu cette méthode de construction. On comprend dès lors pourquoi al-Sijzī, contre toute évidence textuelle ou historique, a jugé qu'Apollonius devait connaître ce lemme avant d'énoncer ce théorème.

Mais al-Sijzī ne s'arrête ni au lemme, ni au théorème ; il poursuit sa tâche de mathématicien en considérant un cas plus général : deux courbes asymptotiques. Quelle que soit l'importance des résultats mathématiques, et surtout de la voie qui a mené à leur découverte, ils ne doivent pas nous dissimuler la modification du statut philosophique du théorème d'Apollonius, et de la problématique qu'il a pu susciter. Et de fait à aucun moment al-Sijzī ne reconnaît à ce théorème ce «caractère paradoxal» que soulignait Geminus, et, après lui, Proclus. Il n'est plus question de scandale ou d'émerveillement, mais d'une simple illustration d'un type de rapport entre le concevable, au sens de l'intelligible, et le démontrable. Al-Sijzī entreprend donc une recherche logique destinée à élaborer la typologie et la classification des propositions précédemment analysées ; entre celles-ci, il est vrai, il voit un clivage qui, pour être compris, semble renvoyer à la distinction entre deux facultés de l'âme. Mais le mathématicien est si bref que son exposé ne nous permet pas de décrire en détail la nature de ce rapport ; nous devons cependant l'identifier.

Rappelons encore que, pour al-Sijzī, «concevoir» est un acte discursif qui nous permet d'appréhender le concept : c'est donc un acte de l'entendement. Mais d'autre part, nous l'avons noté, le premier type de propositions ne comprend en fait que les axiomes sur lesquels va s'édifier la connaissance mathématique. Leur conception se fait alors, dit al-Sijzī, «à partir des principes philosophiques», donc à partir des principes eux-mêmes saisis par l'intuition intellectuelle ; les principes philosophiques se comportent à l'égard des axiomes mathématiques comme l'intuition intellectuelle à l'égard des principes. En revanche, pour les quatre autres types, la conception est un acte de l'entendement et semble croître en difficulté à mesure que diminue le pouvoir qu'a ce dernier de percevoir intuitivement les propriétés représentées par les figures. Ainsi lorsque nous percevons intuitivement que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, c'est beaucoup moins à partir de la représentation d'un triangle, que quand nous voyons la somme des longueurs de deux côtés quelconques plus grande que la longueur du troisième. Si la conception, pour le premier type, dépend d'une intuition intellectuelle pure, il apparaît donc que, pour les quatre autres, elle s'opère au moyen d'une intuition intellectuelle, mais à partir des représentations des figures géométriques.

Il eût été surprenant qu'une telle problématique échappât aux contemporains d'al-Sijzī, et à ses successeurs. Nous avons déjà observé que les mathématiciens, quant à eux, n'ont pas relâché leur intérêt pour le théorème d'Apollonius. Nous connaissons moins sûrement l'apport des philosophes, et il nous faut attendre les résultats de recherches futures. Il n'en demeure pas moins que la présence de ce problème, ainsi que du théorème d'Apollonius, sous la plume du philosophe du XII^e siècle Maïmonide, suggère qu'ils faisaient partie du bagage commun des philosophes, ou tout au moins du savoir de ceux qui étaient informés des travaux mathématiques[1].

2.4. *Le rôle du cercle dans l'étude et le tracé des figures géométriques*

Peut-on déduire des propriétés des figures polygonales, circulaires et coniques à partir de celles du cercle ? Lesquelles ? Peut-on tracer les sections coniques à l'aide du cercle ? Ces questions, intimement liées, à l'évidence, expriment l'une des préoccupations d'al-Sijzī géomètre. Nous avons observé que, dans certains de ses travaux, il cherche à ramener une propriété à une autre plus primitive, suivant une démarche résolument unificatrice. Mais là n'est pas la seule origine de ces questions ; il y en a d'autres. Al-Sijzī savait que le cercle est une conique et que l'ellipse n'est qu'un « cercle allongé », comme il le disait. C'est à ce cercle particulier qu'il avait consacré plusieurs études dont le substantiel traité *Sur l'ellipse*. Dans ses recherches sur les lieux des surfaces, il avait établi que le cercle est partout présent dans les figures de révolution. Il est le premier, à ma connaissance, à avoir généralisé d'une manière explicite — à la suite d'Apollonius — la propriété fondamentale du cercle — la puissance d'un point par rapport au cercle — aux sections coniques. Enfin, il est l'héritier d'Ibrahīm ibn Sinān, qui a consacré tout un traité au tracé par points des sections coniques à l'aide du cercle et d'autres coniques[2].

Pour des raisons aussi bien mathématiques qu'historiques, il est clair que les précédentes questions devaient s'imposer à al-Sijzī. Et elles lui ont paru si importantes qu'il y a répondu à deux reprises. Al-Sijzī a en effet consacré deux écrits — et non pas un seul — à traiter « toutes les figures sont à partir du cercle ». Ce titre est celui d'un livre — nous dit-il — qu'il avait destiné à la Bibliothèque Royale (celle de Sharaf al-Dawla ?). On le trouve inscrit sur

[1] Cet intérêt pour les mathématiques n'était pas l'apanage des philosophes aristotéliciens d'Orient, comme al-Kindī, al-Fārābī et Avicenne ; il était également partagé par ceux d'Occident, qui ont directement influencé Maïmonide, comme Ibn Bājja ou Avempace (m. en 1138-39, trois ans après la naissance de Maïmonide). Ainsi, la lecture des travaux d'Ibn Bājja, et notamment de ses résumés des travaux du mathématicien Ibn Sayyid, prouve sa connaissance des mathématiques de son temps, aussi bien que des *Coniques* d'Apollonius (cf. *Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques*, t. I, notes, p. 129). Maïmonide était lui aussi un lecteur des *Coniques* d'Apollonius, ainsi qu'en témoignent les notes qu'il a rédigées sur certaines propositions de cet ouvrage. Voir *Ḥawāshī ba'ḍ ashkāl Kitāb al-Makhrūṭāt* (Gloses sur quelques propositions des *Coniques*), ms. Manisa, Genel 1706/6, fol. 26^v-33^v et notre article « Philosophie et mathématiques selon Maïmonide : Le modèle andalou de rencontre philosophique ».

[2] *Maqāla fī rasm al-quṭū' al-thalātha*, dans *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*, chap. III, p. 255 sqq.

deux anciennes listes des travaux d'al-Sijzī. Le second écrit qui, lui, a survécu, est une épître adressée à un contemporain. Or l'attribution de cette épître a soulevé un pseudo-problème. Le manuscrit unique qui nous est parvenu commence ainsi : *Risāla li-Naṣr ibn ʿAbd Allāh fī an al-ashkāl kullahā min al-dāʾira. Qāla qad bayyanā fī kitābinā alladhī ʿamalnāhu li-khizānat al-Malik al-Manṣūr*, qui peut être traduit de deux manières, selon le sens de la particule *li*. Ainsi, on a déjà pu traduire : « Épître de Naṣr ibn ʿAbd Allāh sur toutes les figures sont à partir du cercle. Il a dit: nous avons montré dans le livre que nous avons composé pour la bibliothèque du Roi Victorieux [...] »[1]. Mais nous pouvons traduire exactement de la même manière, à cette différence près qu'on rend *li* par « à », ce qui est parfaitement correct, ainsi qu'on peut le lire dans la phrase coranique *bi-anna rabbaka awḥā lahā*, « Dieu lui a révélé », c'est-à-dire à Marie. On a alors « Épître à Naṣr ibn ʿAbd Allāh... », qui est le seul sens possible, pour trois raisons au moins. D'abord, la phrase qui suit est sans aucun doute possible de la plume d'al-Sijzī parlant de son livre, alors que si on traduit *li* par « de », il serait de Naṣr, ce qui est faux. Seconde raison : un peu plus loin, l'auteur cite le titre d'un autre de ses livres ; or il s'agit du livre d'al-Sijzī, *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*[2]. Enfin, dans le corps du texte, l'auteur s'adresse à son lecteur, à la deuxième personne du singulier, ce qui confirme, si besoin était, qu'il s'agit bien d'une épître. À tout prendre donc, on n'a pas affaire à une erreur d'attribution : c'est simplement une épître qu'al-Sijzī adresse à son contemporain Naṣr ibn ʿAbd Allah, où il reprend, pour la rendre abordable, la recherche qu'il avait exposée dans le livre[3].

Reprenons à présent l'analyse des propositions d'al-Sijzī.

2.4.1. *Le cercle et les polygones*

Al-Sijzī commence son épître par l'examen des relations entre le cercle et les triangles inscrits et circonscrits, pour montrer que les propriétés étudiées ne sont pas propres aux triangles en tant que tels, mais qu'elles dérivent de celles du cercle. Il suggère ensuite de généraliser le résultat aux polygones. Ainsi, dans la première proposition, il montre que la propriété des médiatrices des côtés du triangle de se rencontrer en un seul point n'est

[1] Voir *infra*, p. 312 ; ar. 313, 2-5.

[2] Ce n'est pas tout. Plus loin encore, il cite deux autres titres de ses travaux : *al-Taʿlīqāt al-handasiyya* (*Les Commentaires géométriques*) et le *Traité sur les propriétés de la figure ovale et de la figure lenticulaire*.

[3] Cf. J. P. Hogendijk, « Rearranging the Arabic Mathematical and Astronomical Manuscript Bankipore 2458 », *Journal for the History of Arabic Sciences*, 6, 1982, p. 133-159.

pas propre au triangle, mais au cercle, les médiatrices se superposant aux droites qui joignent le centre du cercle circonscrit au milieu des arcs.

PROPOSITION 1 : Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle ABC de centre G. Montrons que les médiatrices se rencontrent en G et que cette propriété n'est pas propre au triangle.

Soit D le milieu de AB ; le triangle GAB est isocèle, donc $GD \perp AB$ et $A\hat{G}D = B\hat{G}D$. Supposons que GD coupe le cercle en H, on a $\widehat{HB} = \widehat{HA}$.

Réciproquement, si on joint les milieux H, I, J des arcs AB, AC et BC au centre G, les droites GH, GI, GJ se superposent aux médiatrices des côtés AB, AC, BC.

Donc, réciproquement, si on veut trouver le cercle circonscrit à un triangle, le centre de ce cercle sera le point de concours des médiatrices des deux côtés, la troisième médiatrice passant par ce point de concours.

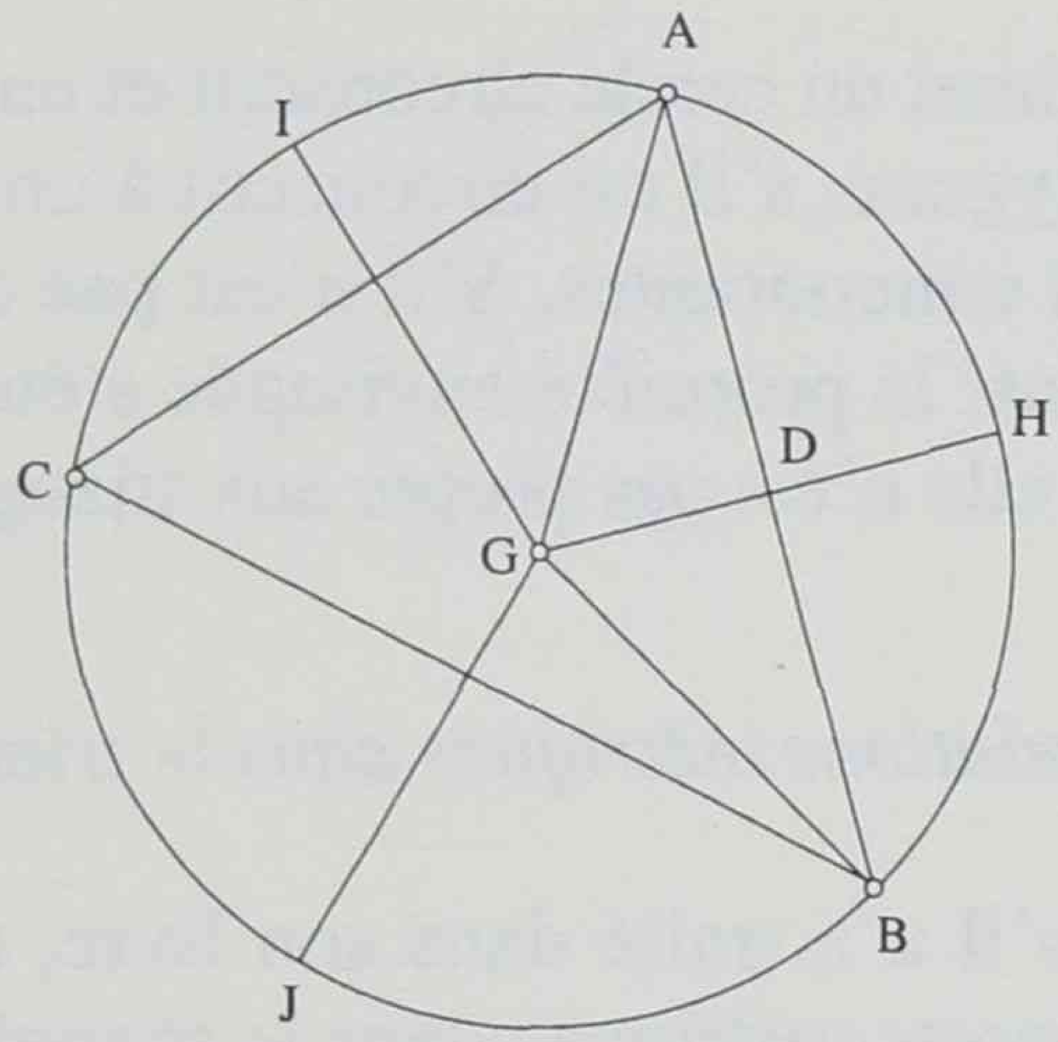


Fig. 55

PROPOSITION 2 : Les bissectrices des angles d'un triangle se rencontrent en un point qui est le centre du cercle inscrit. Cette propriété n'est pas propre au triangle, mais elle est en raison du cercle.

Soit un triangle ABC circonscrit au cercle DEF de centre G. Les droites AE et AD sont les tangentes issues du point A ; alors la droite AG est bissectrice des angles EAD et EGD ; donc elle coupe l'arc ED en son milieu H. De même CG coupe l'arc EF en son milieu I et BG coupe l'arc DF en son milieu J. Le point G est donc le point de rencontre des trois bissectrices.

Réciproquement, si on veut trouver le centre G du cercle inscrit dans un triangle ABC donné, on trace les bissectrices de deux angles ; elles se coupent, et la troisième bissectrice passe par leur point de concours, qui est le centre du cercle.

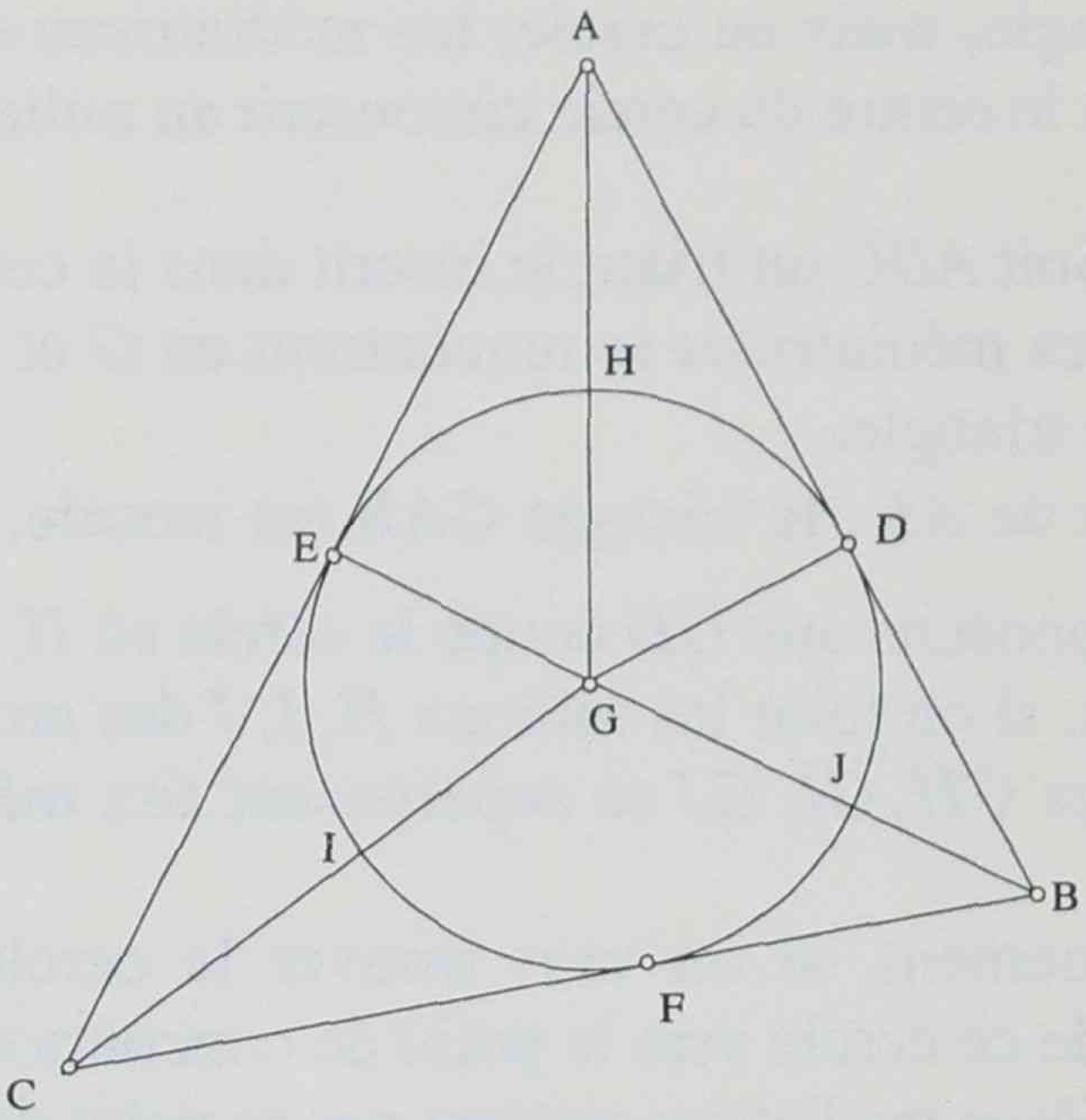


Fig. 56

Donc tout triangle admet un cercle circonscrit et un cercle inscrit.

Dans le cas d'un polygone, s'il est circonscrit à un cercle, les bissectrices de tous ses angles sont concourantes. S'il n'est pas circonscrit à un cercle, elles ne le sont pas. Ainsi la propriété envisagée s'étend aux polygones circonscrits à un cercle et elle n'est pas propre aux triangles.

2.4.2. *Le cercle et les relations métriques dans le triangle*

Al-Sijzī rappelle qu'il n'a traité dans son livre, aujourd'hui perdu, les déterminations des rapports métriques dans le triangle, que pour le triangle rectangle. Il va donc ici examiner les cas du triangle à angle aigu et à angle obtus. Il entend cette fois montrer que ces propriétés métriques peuvent être déduites à partir de deux cercles.

Ainsi, il veut démontrer :

PROPOSITION 3 : Soit un demi-cercle ABC ; traçons sur la corde AB un cercle $AEBG$ et posons $\widehat{ADB} = \widehat{AGB}$; menons BE, BD, AD, AC, AE ; on aura alors

(1) $AB^2 = AD^2 + DB^2 + AD \cdot DE$ et $AB^2 = AE^2 + BE^2 - AE \cdot ED$.

La première relation est dans un triangle à angle obtus, et la seconde dans un triangle à angle aigu.

À propos de cette proposition, al-Sijzī écrit : « Je ne crois pas que quiconque, parmi les gens de cet art, m'ait précédé dans cette voie pour trouver la propriété de l'angle aigu ou obtus »[1]. Malheureusement, le copiste n'a pas tracé la figure correspondant à cette proposition, nous privant ainsi d'une information d'autant plus précieuse que, pour retracer cette figure, il nous faudrait des précisions supplémentaires, absentes du texte. Si en effet on veut que les deux arcs ADB et AGB soient égaux, il faut qu'ils appartiennent à un même cercle ou à deux cercles égaux et symétriques par rapport à AB. Le point E sera pris sur le cercle AGB et les points D et E seront pris du même côté de AB, pour qu'on ait $\hat{D}$ obtus et $\hat{E}$ aigu, comme l'indique le texte au cours du raisonnement. Si on considère que le cercle ABC a pour diamètre AB, on retrouve les conditions d'un problème étudié par al-Sijzī, comme il l'a lui même rappelé, dans ses *Commentaires géométriques* (ms. Chester Beatty, n° 3652, fol. 38r-38v). Notons que dans ce manuscrit les lettres A et B ont été interverties ; on a alors $AC \perp BE$ au lieu de $BC \perp EA$. Si cependant on s'inspire de cette étude, on peut ainsi restituer la preuve et la figure d'al-Sijzī.

En effet, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ par le théorème de Pythagore puisque ABC est un demi-cercle. Or $AC = AD + DC = AE - CE$; ainsi

$$AC^2 = AD^2 + 2AD \cdot DC + DC^2 = AE^2 - 2AE \cdot CE + CE^2$$

et

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + 2AD \cdot DC + DC^2 + BC^2 = AD^2 + 2AD \cdot DC + BD^2 \\ &= AE^2 - 2AE \cdot CE + CE^2 + BC^2 = AE^2 - 2AE \cdot CE + BE^2. \end{aligned}$$

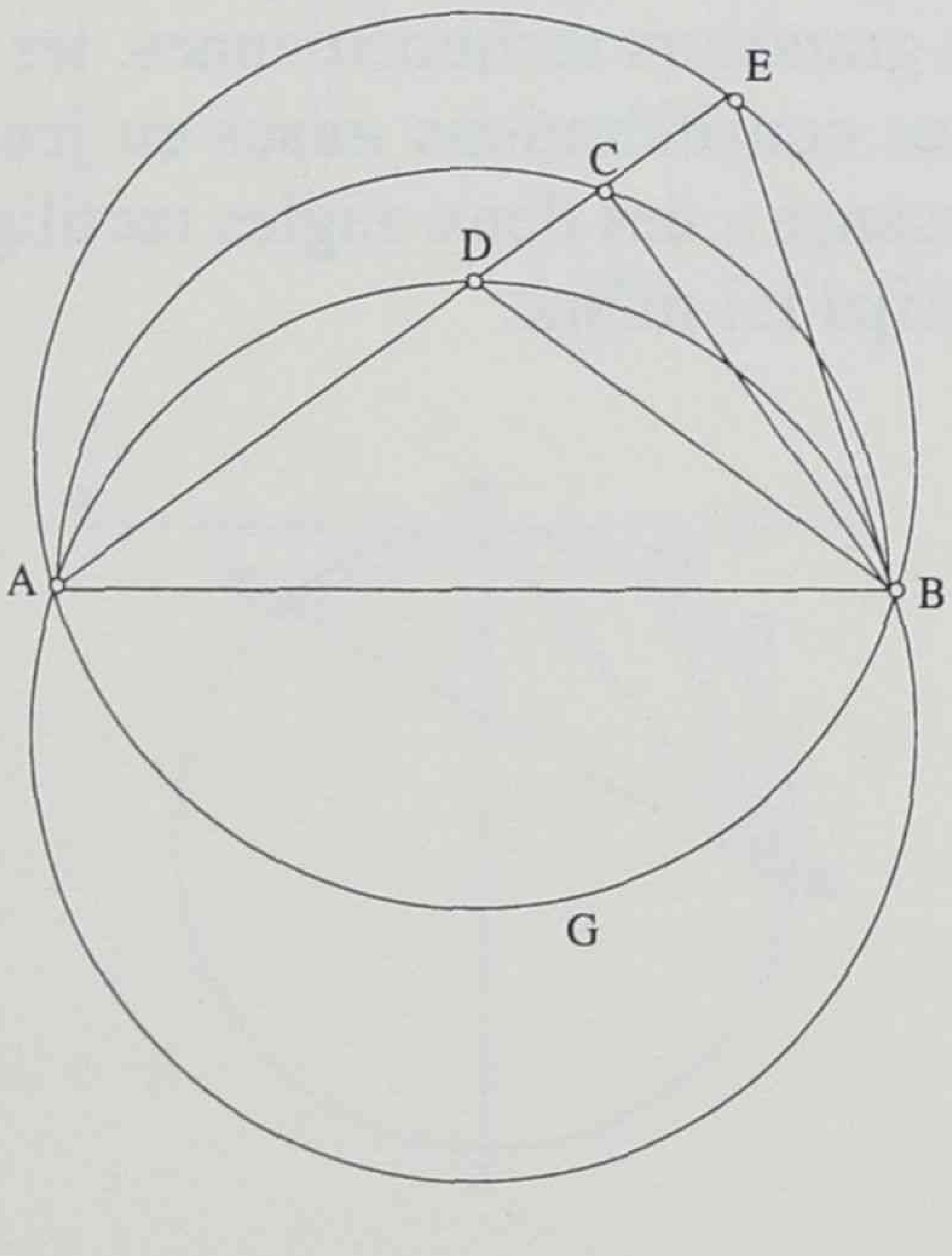


Fig. 57

[1] Voir *infra*, p. 320 ; ar. 321, 25-56.

Or, par les propriétés du cercle *AEB*, l'angle *ADB* est supplémentaire de l'angle *AEB* et il en résulte que le triangle *BDE* est isocèle et que $2DC = 2CE = DE$.

Al-Sijzī intercale ensuite un paragraphe sur la variation sur une même figure, ou la variation continue d'un élément d'une même figure, tous les autres éléments restant fixes ; problème longuement et profondément étudié dans son traité *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*, auquel d'ailleurs il se réfère. La figure considérée est un cercle, avec la tangente à l'extrémité de l'axe. Il rappelle alors que l'angle de contingence, c'est-à-dire formé par la tangente *DB* et l'arc *BC*, n'est comparable à aucun angle rectiligne. Il affirme ensuite que l'angle *DBE* compris entre la tangente *DB* et la corde *BE* est égal à tout angle inscrit qui intercepte l'arc *BE*, angle dont le sommet est sur l'arc *EAB*. De même l'angle *FBE* est égal à tout angle inscrit qui intercepte l'arc *EAB*.

Al-Sijzī utilise ici un raisonnement de type infinitésimal, en considérant un point B' sur l'arc *BAE* et un point B'' sur l'arc *BCE*. Lorsque B' et B'' s'approchent de *B*, les cordes $B'B$ et $B''B$ s'approchent des demi-tangentes *DB* et *BF* tandis que les cordes $B'E$ et $B''E$ s'approchent de *BE*. Comme les angles $BB'E$ et $BB''E$ ne dépendent pas des positions de B' et de B'' sur leurs arcs respectifs, la propriété en résulte par passage à la limite : $D\hat{B}E = B\hat{B}'E$ et $F\hat{B}E = B\hat{B}''E$.

Al-Sijzī sait que l'angle curviligne n'est pas comparable à l'angle rectiligne dans le cadre des grandeurs archimédiennes, les seules théorisées dans ces mathématiques. Les considérations mises en jeu ici vont dans le sens d'une égalité « en puissance » des deux angles rectiligne *DBE* et curviligne *CBE*, comme le dit al-Sijzī lui-même.

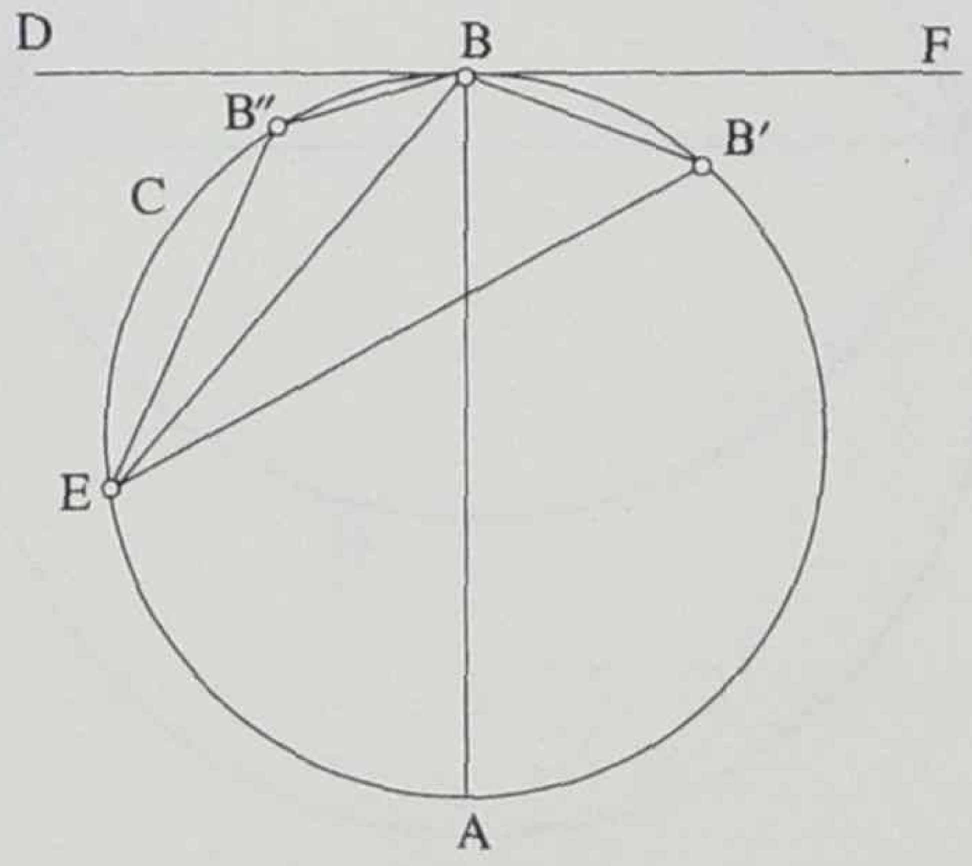


Fig. 58

Cet exemple, comme celui qu'il avait déjà étudié dans le livre rappelé ci-dessus, est destiné à illustrer comment connaître les propriétés communes aux figures en réfléchissant sur une seule.

2.4.3. *Le cercle et le tracé par points des sections coniques*

Al-Sijzī commence cette partie centrale de son *Épître* en rappelant qu'il avait étudié dans son livre comment former les figures à partir du cercle; alors qu'ici il entend examiner la réciproque, c'est-à-dire comment former le cercle à partir « des points, des angles et les extrémités des lignes par lesquelles passe l'arc de cercle »[1]. Cette démarche qu'il suit dans l'*Épître* semble répondre à deux raisons. D'abord, il veut s'assurer de la possibilité de tracer le cercle par points, et ainsi d'effectuer ce tracé pour la première section conique. Il entend également garantir ce tracé du cercle avant de l'utiliser pour le tracé des autres sections coniques.

Il se donne pour cela un segment $AB = 2a$, une subdivision de AB aussi fine que l'on veut, soit x_i, pour $i = 0, 1, \ldots, 2n$; telle que $x_0 = A$, $x_{2n} = B$, $x_n - x_0 = a$; et soit y_i tels que $y_i^2 = x_i(2a - x_i)$; on a $x_i^2 + y_i^2 = 2ax_i$ pour tout i.

Tous les points ainsi définis, c'est-à-dire qui vérifient la propriété caractéristique des points du cercle de diamètre AB, sont sur la circonférence du cercle de centre x_n, milieu de AB, et de rayon a.

Al-Sijzī peut maintenant procéder au tracé des autres sections coniques.

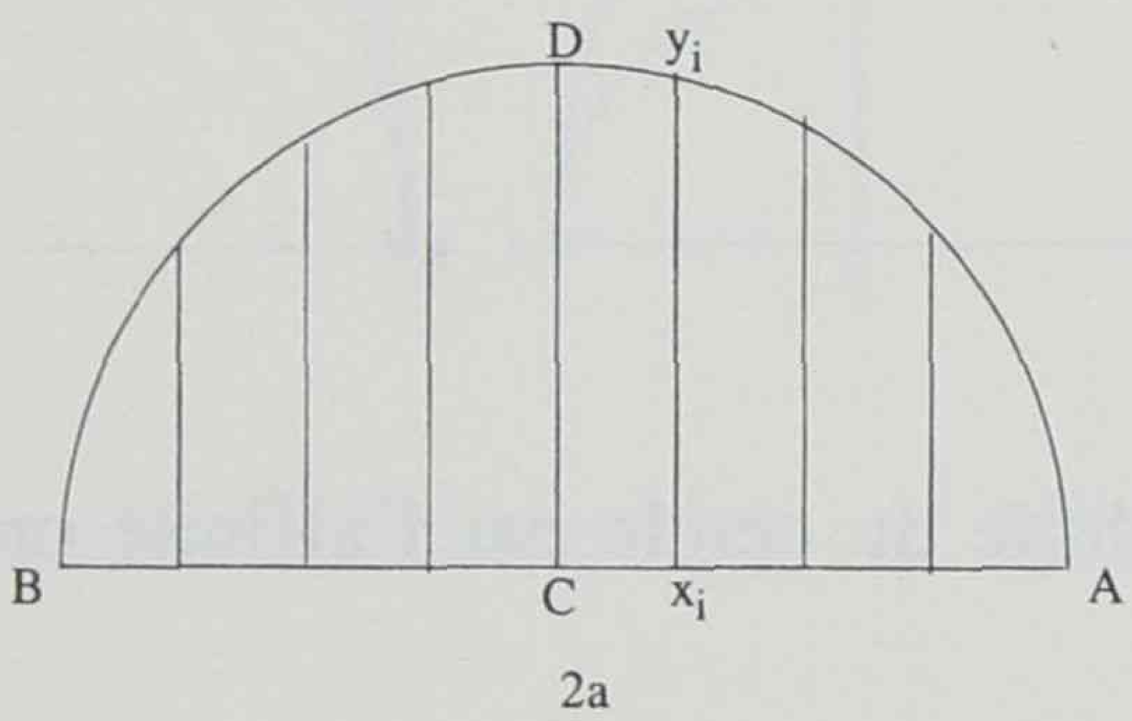


Fig. 59

a) *Tracé par points de l'ellipse*

Dans le cas de l'ellipse, al-Sijzī adopte la même méthode. On pose $AB = 2a$ et $CD = b$; et une subdivision de AB comme celle qui précède. On élève aux points de la subdivision les perpendiculaires $\overline{x_i y_i}$ telles que

$$\frac{x_i\,(2a - x_i)}{y_i^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

[1] Voir *infra*, p. 322 ; ar. 323, 19-20.

Si on considère un cercle de diamètre AB et si on prend sur sa circonférence les points M_1, alors on obtient les points correspondants M de l'ellipse de grand axe AB, de même abscisse, de la manière suivante :

Soit $x = \overline{AN}$ et posons $\overline{NM} = y$ et $\overline{NM_1} = y_1$; on a

$$\frac{y_1^2}{x(2a-x)} = 1 \text{ et } \frac{y^2}{x(2a-x)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

On a donc

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{ et } \frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}.$$

Donc, quel que soit le point N considéré, on a

$$\frac{NM}{NM_1} = \frac{CD}{CD_1} ;$$

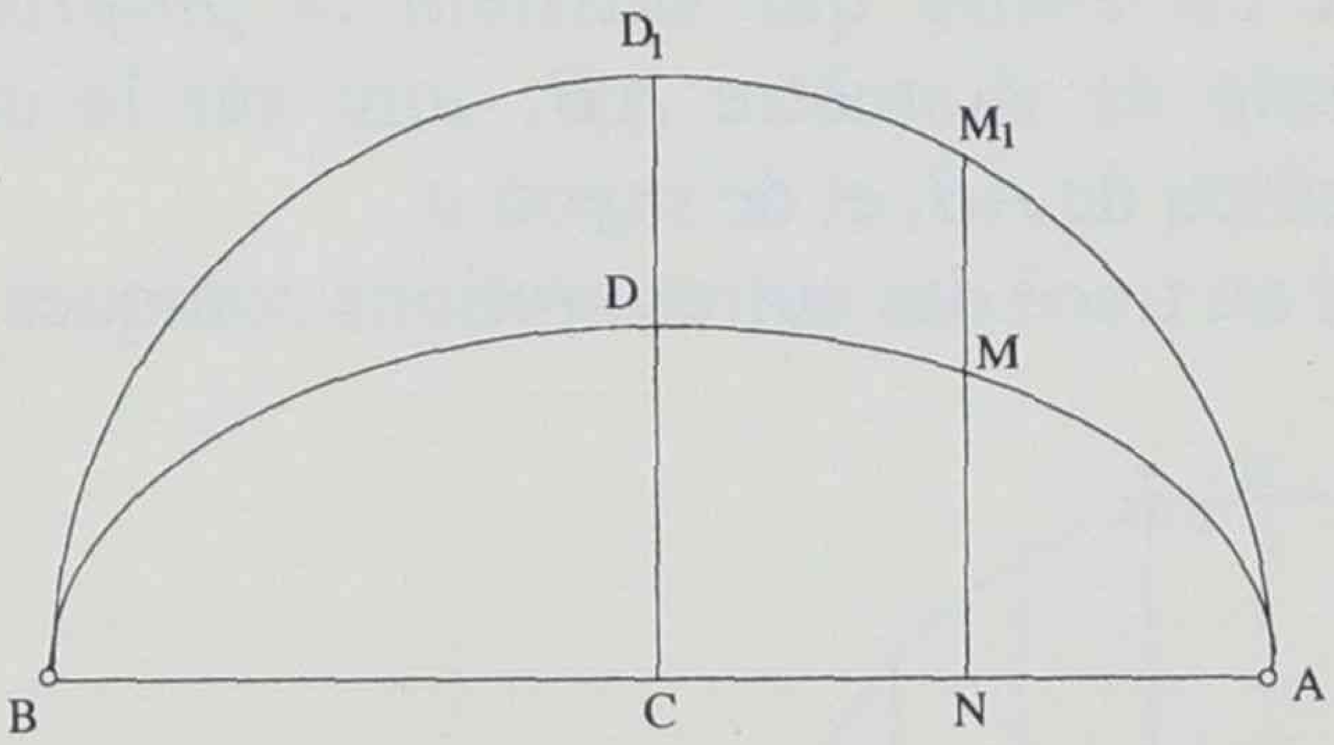


Fig. 60

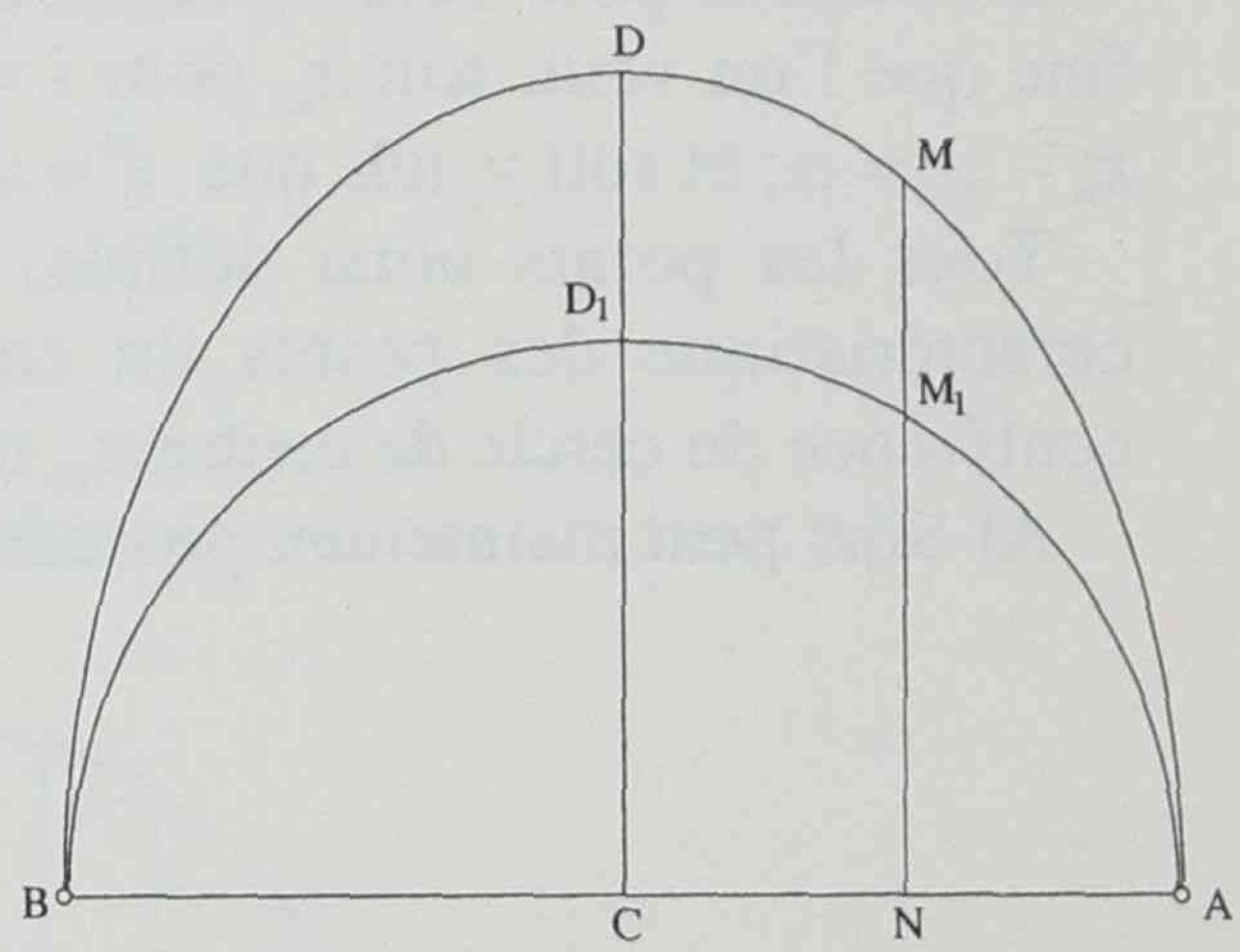


Fig. 61

l'ellipse est donc déduite du cercle par l'affinité orthogonale de rapport $\frac{b}{a} < 1$.

Si $AB = 2a$ est le petit axe et $CD = b$ le demi-grand axe, on déduira l'ellipse du cercle par une affinité de rapport $\frac{b}{a} > 1$.

Si maintenant on désigne par d et d' les longueurs des axes de l'ellipse, on a $d = 2a$, $d' = 2b$, alors

$$\frac{y^2}{x(d-x)} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{d'^2}{d^2} = \frac{dc}{d^2}, \text{ avec } c \text{ le côté droit relatif à } d;$$

donc

$$\frac{y^2}{x(d-x)} = \frac{c}{d} \qquad (\textit{Coniques}, \text{I.13}).$$

b) *Tracé par points de l'hyperbole*

Cette fois, al-Sijzī est encore plus bref que précédemment. Peut-être, ayant sous la main le traité d'Ibn Sinān, ce qui est hors de doute, traité que son correspondant devait lui aussi connaître, s'est-il contenté d'indiquer la démarche ; ou, simplement, il ne voulait pas reprendre dans l'*Épître* la méthode qu'il avait déjà exposée dans son livre.

On se donne les points alignés A, B, C. Par les points D, E, F, G, H pris sur BC, on mène les perpendiculaires CI, DJ, EK, FL, GM, HN, telles que

$$\frac{IC^2}{CA \cdot CB} = \frac{JD^2}{DA \cdot DB} = \frac{EK^2}{EA \cdot EB} \ldots$$

Les points I, J, K, L, M, N appartiennent à l'hyperbole d'axe transverse AB et de sommet B (réciproque de I.21 des *Coniques*).

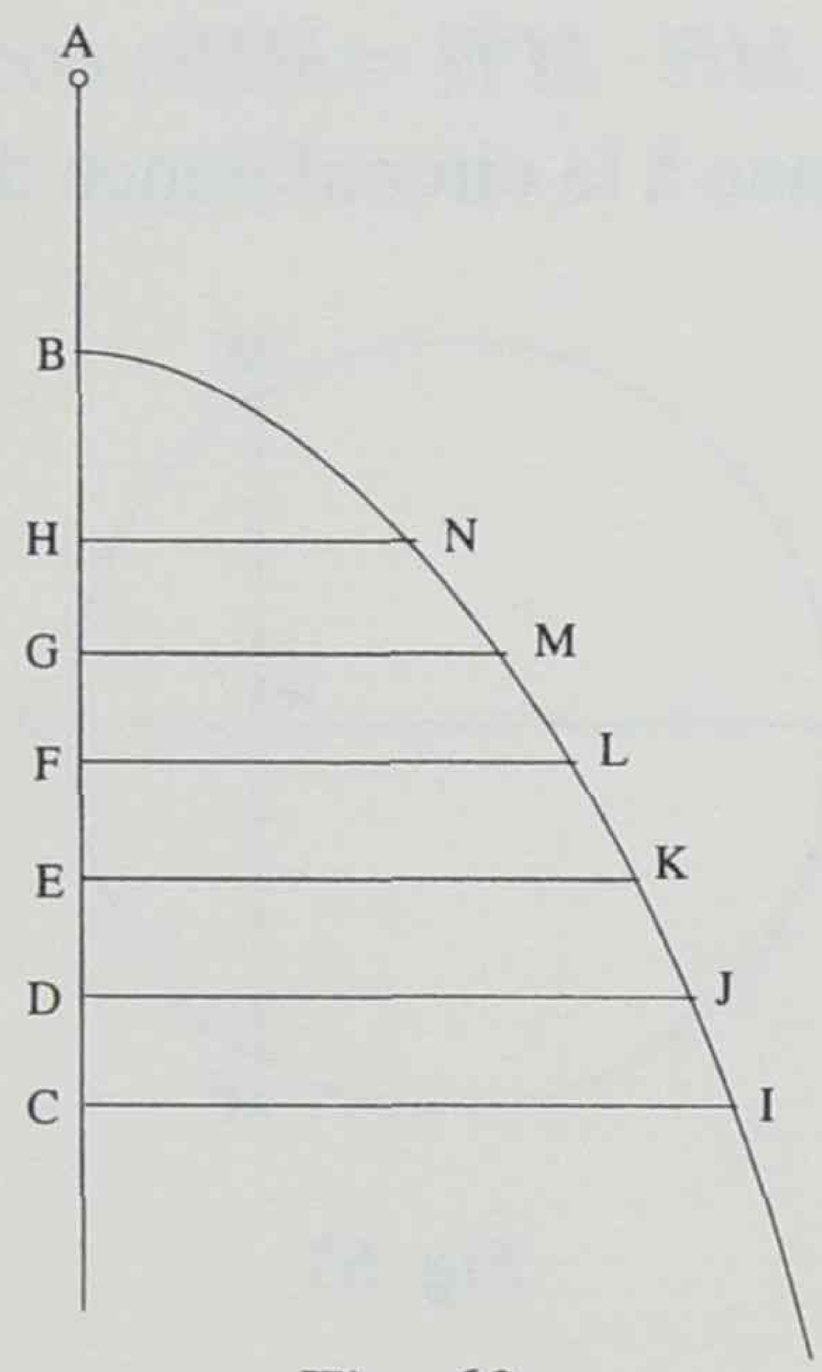


Fig. 62

En d'autres termes, si on pose $BA = d$, $BC = x$, $IC = y$, et si on définit c par $k = \frac{c}{AB}$, on a

$$\frac{y^2}{x(x+d)} = k = \frac{c}{AB},$$

équation de l'hyperbole d'axe transverse AB et de côté droit c (*Coniques* I.12).

Ibn Sinān avait montré comment tracer les points de l'hyperbole, en partant d'un cercle. Dans l'*Épître* al-Sijzī ne va pas plus loin.

c) *Tracé par points de la parabole*

Ici, al-Sijzī est encore plus bref. On suppose connus les points B, C, I et on veut tracer la parabole de sommet B, d'axe BC et qui passe par I.

Posons $\frac{IC^2}{BC} = c$, $BC = x$, $IC = y$; on a $\frac{y^2}{x} = c$ et I appartient à la parabole de côté droit c (*Coniques*, I.11).

2.4.4. *Trois autres méthodes pour tracer le cercle*

Pour tracer par points le cercle de diamètre AB donné, al-Sijzī, nous l'avons vu, utilise une propriété caractéristique du cercle qui est déduite de la puissance d'un point. Il commence par la propriété de puissance dans un cas très particulier et très simple avant d'utiliser la propriété plus générale, pour laquelle cette première propriété est un lemme.

Soit M un point quelconque, $MH \perp AB$ et $MH = M'H$; la puissance du point H donne $HA \cdot HB = MH \cdot M'H = MH^2$; condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à la circonférence du cercle de diamètre AB.

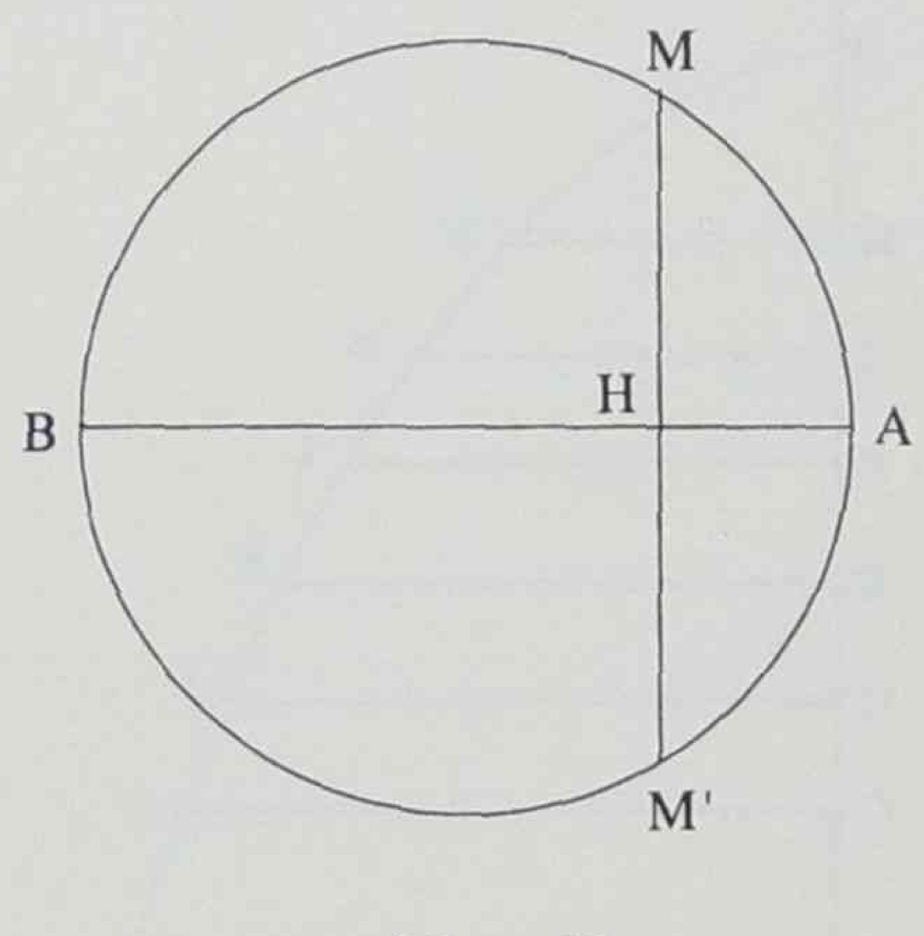


Fig. 63

À la fin de l'*Épître*, al-Sijzī revient au tracé du cercle pour proposer deux autres procédés, fondés l'un comme l'autre sur la propriété de la puissance d'un point donné ; un point intérieur la première fois, et un point extérieur la deuxième.

PROPOSITION : On considère une droite AL et un point X de cette droite tel que $AX < XL$. On mène par ce point X des droites XM, XN, XS, …, croissantes et on considère sur leurs prolongements respectifs les points C, D, E, …, tels que (1) $XM \cdot XC = XN \cdot XD = XS \cdot XE = \ldots = XA \cdot XL$. On suppose de plus que (2) les perpendiculaires issues du milieu O de AL sur les droites MC, ND, NE, …, partagent ces droites en leurs milieux. Alors les points $M, N, S, \ldots, C, D, E, \ldots$, sont sur un cercle de diamètre AL.

Démonstration : Dans la figure 64, $XM \cdot XC = \omega M^2 - \omega X^2$ si ω est le milieu de MC. Comme $O\omega$ est perpendiculaire à MC d'après (2), on a :

$$\omega M^2 = OM^2 - O\omega^2 \text{ et } \omega X^2 = OX^2 - O\omega^2,$$

donc

$$XM \cdot XC = OM^2 - OX^2.$$

Or $OM^2 = OM'^2 + MM'^2$; on a ainsi

$$MM'^2 = XM \cdot XC + OX^2 - OM'^2 = XA \cdot XL + OX^2 - OM'^2$$

d'après (1). On a $XA \cdot XL + OX^2 = OA^2$, de sorte que

$$MM'^2 = OA^2 - OM'^2 = M'A \cdot M'L$$

et on est ramené à la proposition précédente.

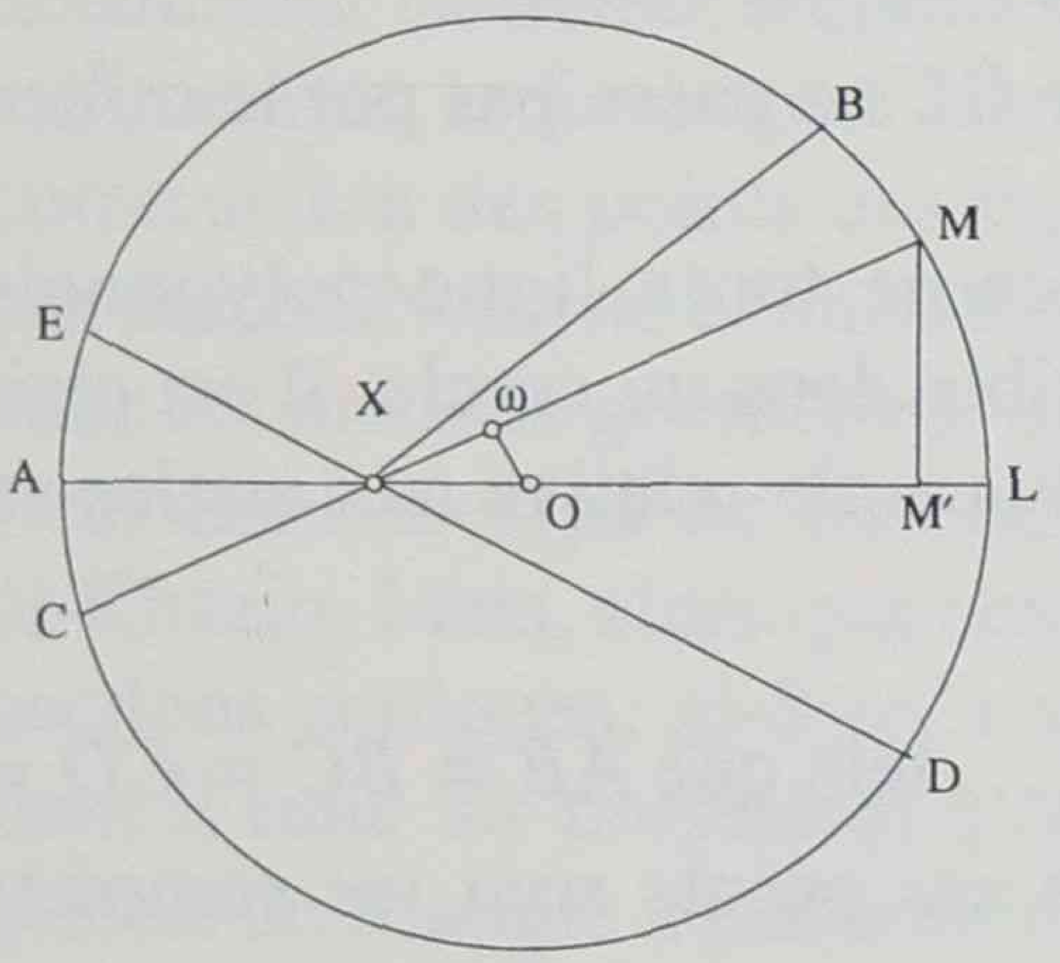


Fig. 64

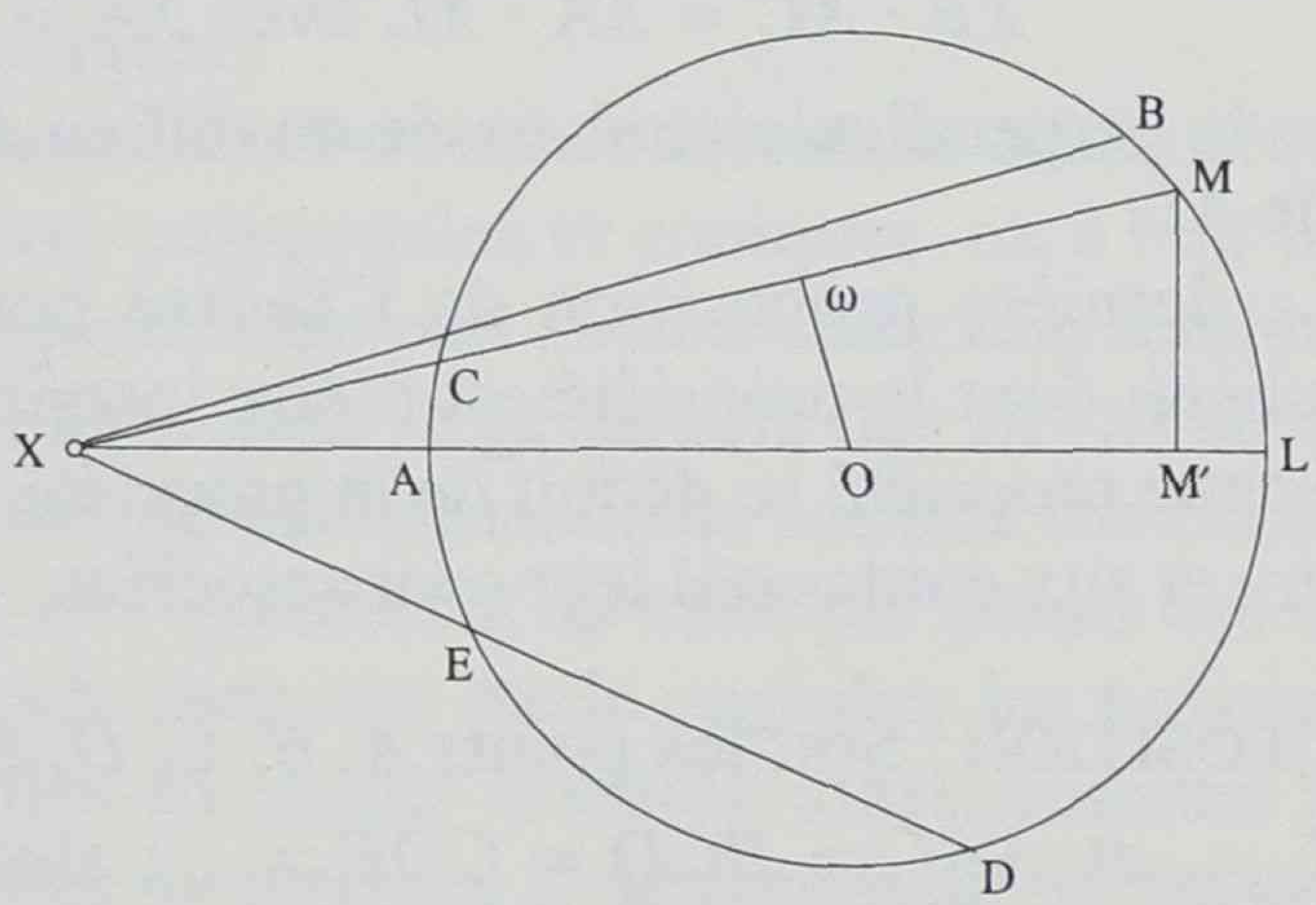


Fig. 65

Dans le cas de la figure 65, où X est à l'extérieur du segment AL, on a

$$XM \cdot XC = \omega X^2 - \omega M^2 = OX^2 - OM^2,$$

d'où

$$MM'^2 = OX^2 - XM \cdot XC - OM'^2 = OX^2 - XA \cdot XL - OM'^2$$

$$= OA^2 - OM'^2 = M'A \cdot M'L.$$

En fait, al-Sijzī veut démontrer la réciproque de la propriété de puissance d'un point X par rapport à un cercle, c'est-à-dire la proposition suivante :

PROPOSITION : Si deux droites BC et DE se coupent en un point X avec $XB \cdot XC = XD \cdot XE$ (deux cas de figure), alors les quatre points B, D, C, E sont cocycliques.

La proposition se démontre d'ailleurs aisément en considérant le cercle circonscrit au triangle BCD et le point E' où DX rencontre ce cercle. On a

$$XD \cdot XE = XB \cdot XC = XD \cdot XE',$$

donc $XE = XE'$ et $E' = E$.

Le quadrilatère $BDCE$ est convexe ou croisé. De plus AL est le diamètre qui passe par X avec $XA < XL$. La conclusion dans les deux cas est donc que les points étudiés sont sur le cercle de diamètre AL ; et par conséquent, si $BB' \perp AL$, on a $BB'^2 = B'A \cdot B'L$.

Il semble pourtant que, pour aboutir à la conclusion, à savoir que les points cherchés sont sur ce cercle, al-Sijzī fasse appel dans les deux cas à une hypothèse manquante qui peut se formuler ainsi : Si on mène du milieu de AL une perpendiculaire à la corde BC en son milieu, et si on a

$$XB \cdot XC = XA \cdot XL \text{ avec } XA > XB \text{ et } XL < XC,$$

alors la perpendiculaire abaissée au milieu de BC ne passe pas par le milieu O de AL.

La dernière proposition de l'*Épître* concerne toute ligne polygonale régulière, dont la propriété est d'être inscriptible dans un cercle. Il est clair que cette propriété se déduit de la propriété du cercle relative aux angles au centre et aux cordes qui leur sont associées.

PROPOSITION : Soit les points A, B, C, D, E … tels que $AB = BC = CD = DE$, … et $A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}E = \ldots$; alors ces points sont les sommets d'une ligne polygonale régulière.

Si on trace les bissectrices des angles B et C, elles se coupent au point O. Le triangle OBC est isocèle car $\frac{1}{2}\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{C}$; donc $OB = OC$. Joignons OA ; les triangles OBC et OBA sont égaux car OB est commun, $AB = BC$ et $O\hat{B}A = O\hat{B}C$; donc $OC = OA$. On montre de même que $OB = OD$, et, de proche en proche, que tous les points considérés sont à la même distance de O. Ils appartiennent donc au cercle (O, OA). Notons que la figure du texte est celle d'un décagone régulier.

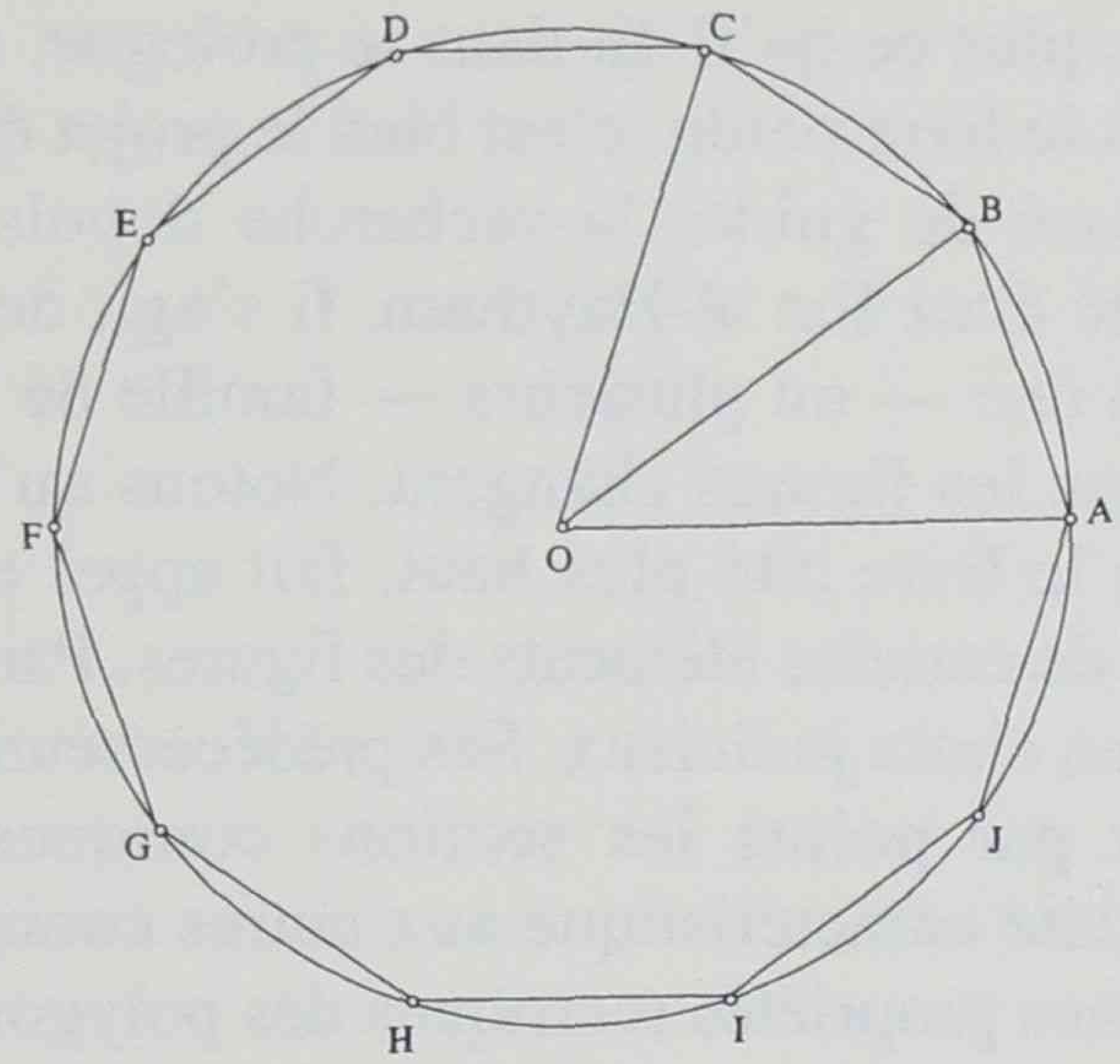


Fig. 66

Quelle était l'intention qui animait al-Sijzī dans son *Épître* et dans le livre, aujourd'hui perdu, mais qu'il évoque à plusieurs reprises dans celle-ci ? C'est la question à laquelle il nous faut à présent répondre. Selon le mathématicien lui-même, le but est double. Il nous apprend en effet dans le prologue de l'*Épître* qu'il veut construire le cercle à partir des objets géométriques les plus élémentaires — points, droites et surfaces planes — d'une part ; et d'autre part construire les points d'autres figures à l'aide du cercle, notamment les autres sections coniques.

À ce titre, le livre aussi bien que l'*Épître* sont entièrement consacrés à la construction des points des figures polygonales et coniques, ou à leur tracé par points. Nous ne connaissons pour notre part aucune rédaction semblable chez les anciens géomètres, ni même dans la géométrie des IX^e^-X^e^ siècles. Ceci étant, al-Sijzī est ici l'héritier de mathématiciens comme Ibn Sinān et al-Khāzin. Mais, alors que ceux-ci s'intéressent au tracé par points des trois sections coniques, al-Sijzī a voulu dans son étude englober les polygones dont il relie les propriétés à celles du cercle. Il établit ainsi plusieurs propriétés du triangle à partir de celles du cercle et il démontre qu'un polygone régulier est inscriptible. De plus al-Sijzī s'intéresse aussi au tracé par point du cercle lui-même.

Il paraît donc que le tracé par points n'est plus ce qu'il était dans une ancienne géométrie, une recherche occasionnelle, engagée pour l'une ou l'autre figure selon la circonstance ; il s'est dorénavant constitué un domaine propre. Inaugurée par Ibn Sinān, la tâche est complétée par al-Sijzī qui lui consacre coup sur coup deux traités.

Pourquoi al-Sijzī a-t-il franchi ce pas supplémentaire ? À cette question, lui-même a répondu pour ainsi dire par avance, dans le prologue de l'*Épître*, où il évoque son important traité *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométrique* consacré à l'élaboration d'une *ars* *inveniendi*. Ce livre, plus ce qu'il dit dans le prologue, montre bien que ce qui anime l'*Épître* et le livre perdu, c'est bien le projet épistémique et pragmatique qui n'a cessé de guider la recherche depuis Ibn Sinān, avant d'atteindre son *acmè* chez Ibn al-Haytham. Il s'agit de découvrir les propriétés communes à une — ou plusieurs — famille de figures, qui restent invariantes tandis que les figures changent. Notons qu'al-Sijzī, dans cette épître, comme dans le livre cité plus haut, fait appel explicitement à des variations continues de certains éléments des figures. Partir du cercle, c'était aux yeux d'al-Sijzī un choix judicieux. Ses prédécesseurs en avaient montré le rôle pour tracer par points les sections coniques. Lui-même a pu généraliser sa propriété caractéristique aux autres coniques, et a déduit de ses propriétés certaines propriétés métriques des polygones. Il reste à tracer le cercle par points. Mais ici aussi, il varie les méthodes pour souligner l'invariant, sans se servir du compas. Le caractère central du cercle reconnu par al-Sijzī renvoie en fait à deux ordres de raisons : 1) le fait que les sections coniques s'obtiennent à partir du cercle par des transformations homographiques, ce qu'il n'a pas vu dans le cas de la parabole seulement ; 2) les propriétés métriques évidemment liées au cercle, dont certaines se transportent aux coniques, comme la puissance d'un point.

Tels sont les conditions et le contexte historique qui peuvent éclairer l'*Épître* d'al-Sijzī, dont l'organisation pourrait paraître, à une première lecture, quelque peu inarticulée.

III. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES PROBLÈMES SOLIDES

3.1. *La trisection de l'angle*

3.1.1. *Introduction*

En entreprenant l'étude de la trisection de l'angle, al-Sijzī avait parfaitement conscience d'être l'héritier d'une tradition plus que centenaire, ainsi que des transformations subies par cette tradition. Il s'agit d'un courant de recherche inauguré par al-Kindī et les Banū Mūsā, remanié par Thābit ibn Qurra et al-Khāzin, amplifié par al-Qūhī, poursuivi par les contemporains d'al-Sijzī ainsi que par la nouvelle génération, dont faisait partie al-Bīrūnī. Il savait donc qu'à partir de Thābit ibn Qurra, à la différence des prédécesseurs grecs mais aussi des premières tentatives en arabe comme celle des Banū Mūsā, on ne s'autorise l'emploi d'aucune autre courbe que les coniques pour résoudre ce problème, et l'on n'admet pas la solution par *neusis* comme légitime tant que cette même *neusis* n'a pas été établie par les sections coniques. Avant cette période, celle de Thābit ibn Qurra et de ses successeurs, nous l'avons montré[1], s'il arrivait que l'on recoure à ces sections pour résoudre un problème solide, comme Pappus pour la trisection de l'angle dans la *Collection mathématique*, cette démarche n'avait rien de systématique et moins encore de contraignant. Al-Sijzī n'ignorait pas non plus que, contrairement à d'autres problèmes hérités des mathématiques grecques, la trisection de l'angle a connu son heure de succès assez tôt dans les mathématiques arabes, succès non seulement mathématique mais aussi social. De ce problème en effet on débattait dans les salons des Rois et des Princes. Nous avons retracé ailleurs[2] l'histoire de cette tradition jusqu'à la veille de la contribution d'al-Sijzī. Avec son œuvre, nous reprendrons cette histoire là où nous l'avons laissée, pour ainsi compléter le récit de la trisection de l'angle. Bien entendu cette histoire ne va pas s'achever avec al-Sijzī et ses contemporains ; mais elle s'appauvrira, perdant autant en vigueur qu'en originalité. Le problème s'épuisera donc plus tard dans les mathématiques pour reparaître sous forme algébrique.

Attesté depuis les premières années du Xᵉ siècle pour d'autres problèmes solides — la droite d'Archimède avec al-Māhānī et al-Khāzin — ce mouvement d'algébrisation a commencé au temps d'al-Sijzī à envahir les autres domaines, tel la trisection de l'angle, avant d'atteindre son apothéose dans les mathématiques arabes avec al-Khayyām. Sans vouloir en retracer ici l'histoire, retenons seulement qu'à l'époque d'al-Sijzī, et suivi par des mathématiciens qu'il connaissait bien, ce mouvement a gagné l'étude de la

[1] *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle,* vol. I.
[2] *Geometry and Dioptrics in Classical Islam,* chap. IV.

trisection de l'angle. Mais, fondamentalement géomètre, al-Sijzī semble être resté indifférent à cette entreprise, déjà engagée par Abū al-Jūd ibn al-Layth et al-Bīrūnī. Du premier, on sait quel fut le rôle dans la traduction algébrique des problèmes solides, rôle fortement souligné par un expert en la matière, al-Khayyām. Le fondateur de la théorie géométrique des équations cubiques n'a en effet suggéré comme prédécesseur qu'Abū al-Jūd. Or celui-ci, dans une correspondance avec al-Bīrūnī, déjà examinée au milieu du XIXe siècle par F. Woepcke[1], s'exprime à deux reprises, et sans la moindre ambiguïté, sur cette traduction. C'est en ces termes qu'il s'adresse à al-Bīrūnī :

> Il faut que tu saches que l'angle n'a pas été divisé en trois parties égales à l'aide des préliminaires du livre des *Éléments*, sinon la corde de son tiers aurait été montrée numériquement, soit un nombre rationnel ou soit par l'un des irrationnels mentionnés et indiqués dans celui-ci. Mais il a été divisé à l'aide de quelques propositions et de l'hyperbole à partir du livre : les *Coniques*. Ainsi la quantité de sa corde n'est montrée que si on fait apparaître le côté du cube seulement avec exactitude[2].

Déclaration limpide, qui laisse clairement apparaître qu'Abū al-Jūd avait procédé à la traduction algébrique. Il ne s'arrête cependant pas là. Au cours de la même correspondance, il s'explique à propos d'une affirmation qu'il avait avancée dans son livre malheureusement perdu, *Sur les géométriques* (*Fī al-handasiyyāt*), selon laquelle « il est possible par cette proposition mentionnée de construire l'ennéagone par la méthode de l'algèbre »[3]. Il s'agit donc d'un cas particulier de la trisection de l'angle. Abū al-Jūd aboutit à l'équation cubique $x^3 + 1 = 3x$, ou, dans ses propres mots :

> trois racines moins un cube égalent le carré *AC* qui est l'unité, donc le cube plus l'unité égalent trois racines. Or nous avons montré dans la proposition

[1] F. Woepcke, *L'Algèbre d'al-Khayyām*, Paris, 1851, p. 125-127.

[2] La dernière phrase de ce texte est mal transcrite et induit ceux qui l'ont lue et traduite à des contre-sens. Voici la phrase (ms. Leiden 168/4, fol. 52v) :

فلا يدل على كمية وتره (وترها lire) إلا «غايه» ضلع المكعب فقط بالحقيقة.

Le mot entre guillemets peut se lire غاية et on aura alors إلا غاية, expression qui n'a aucun sens dans ce contexte. Traduire cela par « aussi loin que », « as far as » est un contre-sens, résultat d'une confusion élémentaire entre إلا et إلى. Nous proposons de corriger et de lire عناية, qui veut dire إظهار et بيان, d'où notre traduction. Cf. J. Hogendijk, « How Trisections of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry », *Historia Mathematica*, 8, 1981, p. 417-438. Cet article reprend d'ailleurs pour l'essentiel les résultats de Woepcke, exposés dans les Appendices à l'*Algèbre* d'al-Khayyām.

[3] Ms. Leiden 168, fol. 50v.

mentionnée de notre livre *Sur les géométriques* comment trouver le côté droit du cube qui avec un nombre connu est égal au nombre connu des racines[1].

Al-Sijzī n'a pas suivi cette évolution, mais semble cependant avoir vu dans la trisection de l'angle un problème si important qu'il lui a consacré, à divers moments de sa vie, trois écrits au moins. Il l'aborde explicitement dans son traité *Sur la construction de l'heptagone dans le cercle et la trisection de l'angle*[2]. À la suite d'al-Khāzin et d'al-Qūhī qui ont signalé la parenté des deux problèmes, la trisection de l'angle et l'heptagone régulier, al-Sijzī les réunit donc dans ce mémoire qu'il rédige vers 970.

C'est dans la tradition inaugurée par Thābit ibn Qurra qu'al-Sijzī rédige un autre écrit, sur les deux moyennes et la trisection de l'angle. Bien qu'on ne puisse dater ce traité avec exactitude, on ne se trompera pas en le plaçant après celui qui vient d'être évoqué, et avant son troisième écrit. Ce dernier est un livre sur la trisection de l'angle rédigé par al-Sijzī vers la fin du Xe siècle, au plus tôt. Il y reprend en effet plusieurs propositions de son jeune contemporain al-Bīrūnī, né en 972 — alors qu'al-Sijzī était déjà un mathématicien créatif et renommé.

3.1.2. *Les deux moyennes et la trisection de l'angle*

Les auteurs de deux listes des travaux d'al-Sijzī ont chacun noté l'existence d'un mémoire intitulé *Rectification (Iṣlāḥ) de la détermination des deux moyennes et de la division de l'angle en trois parties égales*. Le traité d'al-Sijzī qui a été retrouvé porte ce même titre, mais avec une rédaction légèrement différente : *La détermination des deux moyennes et la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales par la méthode de la géométrie. Rectification de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī*. C'est encore ce titre qu'on lit dans le colophon, de la main du copiste. Il s'agit sans aucun doute du même écrit.

Quoi qu'il en soit, le texte d'al-Sijzī dont nous disposons aujourd'hui est doublement important : il nous permet d'apprécier sa propre évolution, et il éclaire certaines des affirmations qu'il avance dans son livre plus tardif, sa « somme » : *Sur la trisection de l'angle* (*Maqāla fī qismat al-zāwiya al-mustaqīma al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya*). Le titre aussi bien que le contenu du mémoire confirment qu'al-Sijzī appartient bien à la tradition inaugurée par Thābit ibn Qurra. De même que chez ce dernier et

[1] Voici le texte (fol. 51v) :
وهو ثلاثة أجذار إلا مكعب [lire مكعباً] يعدل مربع اجـ وهو واحد ، فالمكعب مع الواحد يعدل ثلاثة أجذار. وقد بينا في الشكل المذكور من كتابنا في *الهندسيات* جذر [lire كيف] يُوجد ضلع المكعب المعادل مع عدد معلوم العدد [lire العدد] <الأجذار>.

[2] Voir *infra*, texte IX.

chez ses successeurs, on y trouve en effet regroupés dans un seul traité les deux problèmes solides que les anciens avaient toujours traités séparément. La présence dans le titre même de l'expression « par la méthode de la géométrie » n'est nullement une clause de style, mais la déclaration d'un parti pris : al-Sijzī entend procéder par les moyens de la géométrie des coniques, à l'exclusion des constructions instrumentales. Or c'est précisément cette *exigence* qui caractérise cette tradition, comme d'ailleurs l'avait expliqué on ne peut plus clairement le successeur de Thābit ibn Qurra : Abū Jaʿfar al-Khāzin[1]. Et de fait c'est à l'aide d'un cercle et d'une hyperbole qu'al-Sijzī vient à bout de sa construction. Il s'agit là du procédé d'Ibn Qurra, repris par al-Khāzin puis simplifié et amélioré par al-Qūhī[2]. C'est pour cette raison qu'al-Sijzī parle de « Rectification », rectification de la solution de ses prédécesseurs.

Rien de surprenant, dans ces conditions, si, lors de la rédaction de « l'esquisse historique » de la trisection telle qu'elle se présente dans son traité *Sur la trisection de l'angle*, al-Sijzī fait commencer l'histoire par Thābit ibn Qurra et distingue al-Qūhī comme un digne successeur. On comprend aussi pourquoi il refuse de considérer une solution « par la géométrie mobile », c'est-à-dire par *neusis*, comme admissible.

Le mémoire retrouvé s'organise du reste à l'image de ceux de ses prédécesseurs : un lemme et deux propositions. Le lemme porte sur la section conique que l'on appliquera au cours de la solution. Quant aux propositions, elles traitent successivement des deux moyennes et de la trisection de l'angle. Reprenons donc l'exposé d'al-Sijzī.

LEMME : Déterminer une hyperbole qui passe par un point B et admet les droites CD et CE comme asymptotes.

On mène $BG \parallel CE$ et $BH \parallel CD$, et on construit le point A tel que le losange de diagonale CA soit équivalent au parallélogramme $BGCH$. On mène $AL \perp CA$ et on prolonge AC de $CM = CA$. Soit une longueur S telle que

$$(1) \qquad AL^2 = S \cdot AC.$$

Considérons l'hyperbole passant par A qui a pour axe transverse AM et pour côté droit $2S$. La tangente au sommet sera la droite AL. Or de (1) on tire

$$AL^2 = \frac{1}{4} AM \cdot 2S,$$

[1] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, chap. IV, section 3.
[2] *Ibid.*

donc, d'après II.1 des *Coniques* la droite CD est une asymptote à cette hyperbole, et il en est de même pour CE. De plus le point B appartient à cette hyperbole d'après II.12 des *Coniques*, car les parallélogrammes AC et BC sont équivalents.

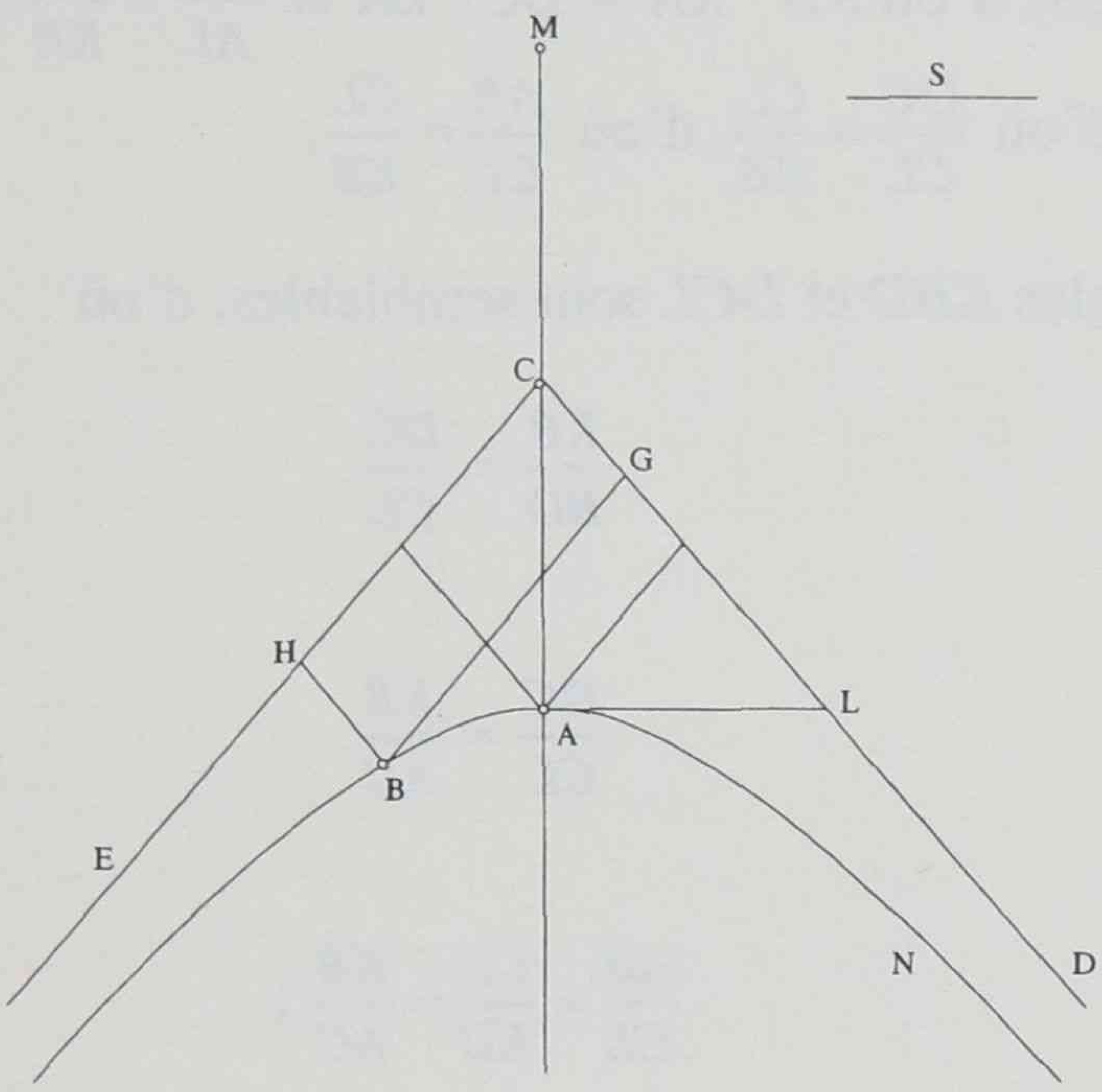


Fig. 67

PROPOSITION 1 : Détermination de deux moyennes entre les droites AB et AC données.

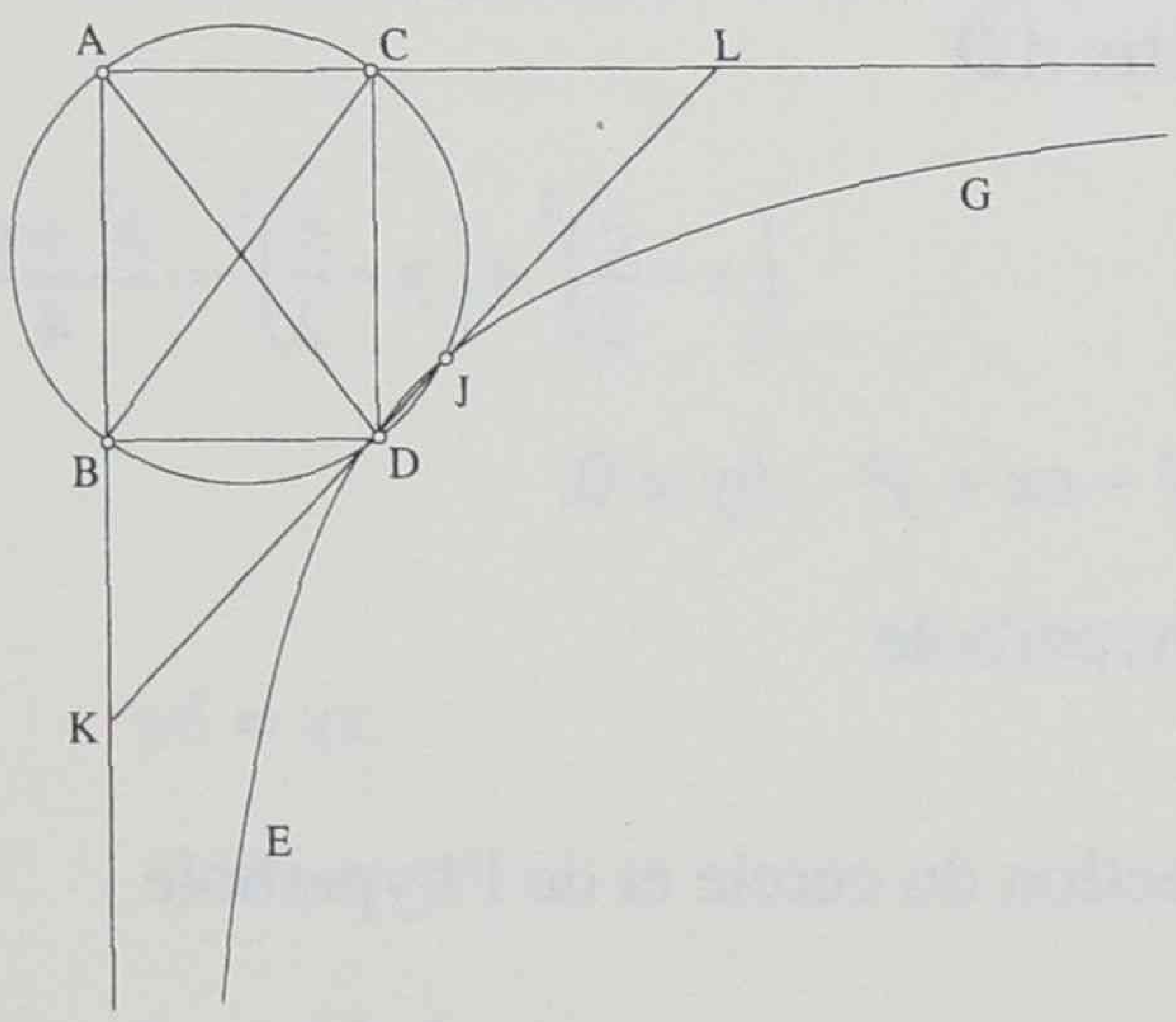


Fig. 68

Posons $AB \perp AC$ avec $AB > AC$ et complétons le rectangle $ABCD$. Traçons par le point D l'hyperbole qui admet AB et AC comme asymptotes, et un cercle circonscrit au rectangle $ABCD$. Le cercle coupe l'hyperbole au point J. On a $KD \cdot KJ = KB \cdot KA$ (puissance de K) entraîne $KD \cdot DL = KB \cdot KA$; $LD \cdot LJ = LC \cdot LA$ (puissance de L) entraîne $LD \cdot KD = LC \cdot LA$, d'où $KB \cdot KA = LC \cdot LA$ et $\frac{AK}{AL} = \frac{LC}{KB}$.

Or $\frac{AK}{AL} = \frac{DC}{CL}$, d'où $\frac{DC}{CL} = \frac{CL}{KB}$, d'où $\frac{AB}{CL} = \frac{CL}{KB}$.

Les deux triangles KBD et DCL sont semblables, d'où

$$\frac{KB}{BD} = \frac{DC}{CL},$$

d'où

$$\frac{DC}{CL} = \frac{KB}{AC}.$$

On a donc

$$\frac{AB}{CL} = \frac{CL}{KB} = \frac{KB}{AC} \; ;$$

CL et KB sont les droites cherchées.

Remarques:

1) Cette méthode est celle de Thābit ibn Qurra, reprise par Abū Bakr al-Harawī[1].

2) Dans un langage algébrique étranger à l'auteur, prenons comme repère $(Ax, Ay) = (AC, AB)$. Posons $C(c, 0)$, $B(0, b)$, on a $D(c, b)$ et on a pour le cercle de diamètre AD

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{4},$$

qui se réécrit $x^2 - cx + y^2 - by = 0$.

On a pour l'hyperbole

$$xy = bc$$

et pour l'intersection du cercle et de l'hyperbole

$$x^2 - cx + \frac{bc}{x}\left(\frac{bc}{x} - b\right) = 0 \; ;$$

[1] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, chap. IV, section 3.2.2, p. 341 sqq.

d'où

$$x^3 (x - c) + b^2c (c - x) = 0 \text{ et } (x - c) (x^3 - b^2c) = 0.$$

Le point C est l'abscisse du point D et $x_0 = \sqrt[3]{b^2c}$ celle de J. On a pour ordonnée de J :

$$y_0 = \frac{bc}{x_0} .$$

Mais on sait que $KD = JL$ et $KJ = DL$; donc, en projetant sur Ay et sur Ax, on a

$$BK = y_0 = \frac{bc}{x_0}.$$

Les rapports considérés sont

$$\frac{AB}{CL} = \frac{b}{x_0}, \quad \frac{CL}{KB} = \frac{x_0^2}{bc} \text{ et } \frac{KB}{AC} = \frac{b}{x_0} .$$

Or $x_0^3 = b^2c$, donc les trois rapports sont égaux.

PROPOSITION 2 : Diviser l'angle aigu BAC en trois parties égales.

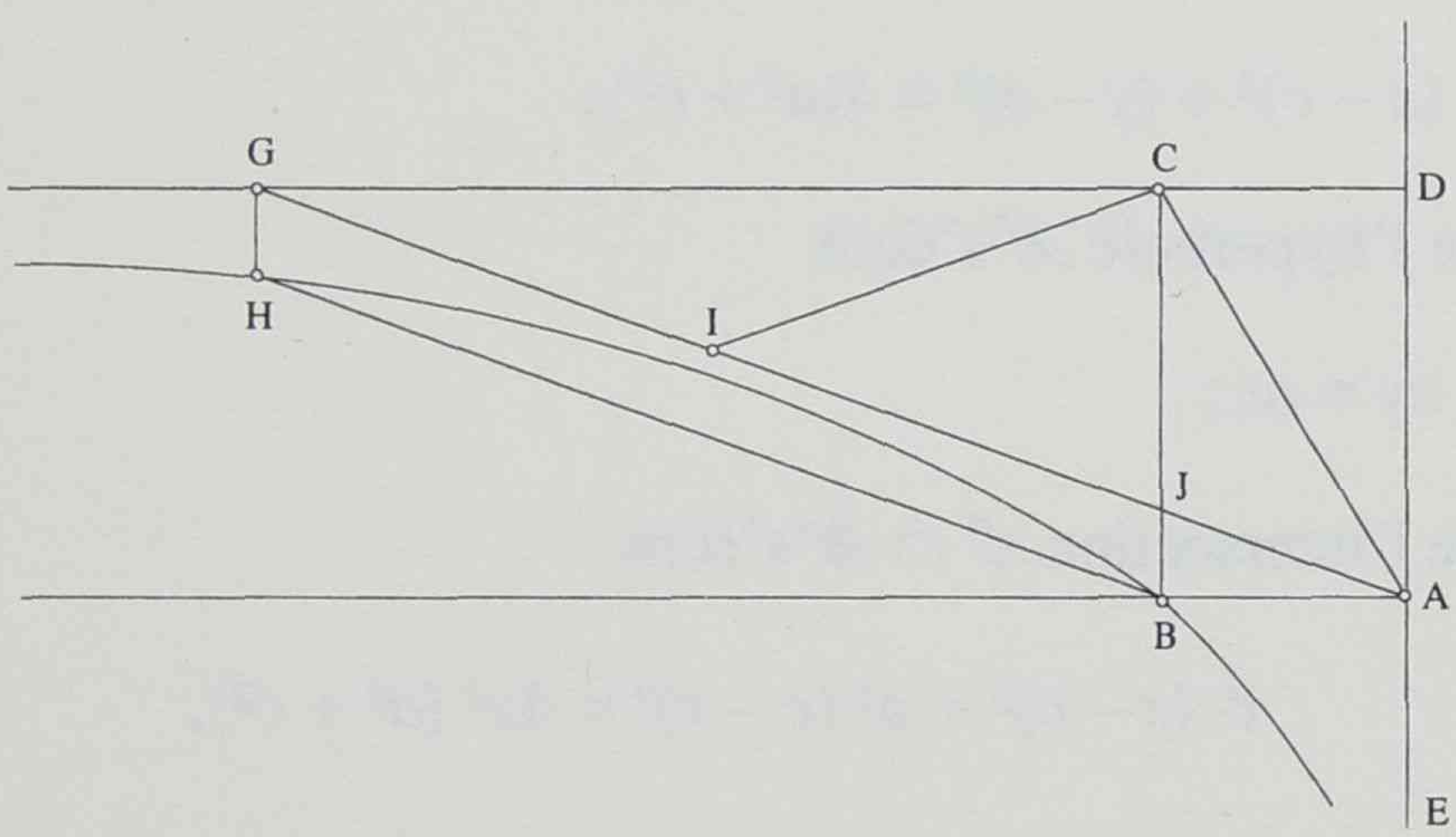


Fig. 69

On mène $BC \perp AB$ et on achève le rectangle $ABCD$. Nous traçons l'hyperbole qui passe par B et admet les droites DA et DC pour asymptotes. Prenons sur cette courbe le point H tel que $BH = 2AC$, et menons $HG \perp DC$. Joignons AG qui coupe BC en J, et prenons I milieu de JG. On a

$$HG \cdot GD = AB \cdot AD \qquad \text{(II.12 des } \textit{Coniques}\text{)},$$

d'où

$$\frac{GH}{AB} = \frac{AD}{GD} = \frac{JC}{GC} = \frac{JB}{BA} \qquad \text{(par raison de similitude)};$$

et on a

$$GH = JB \text{ et } GH \mathbin{//} JB,$$

et donc $JG = BH$, d'où

$$IJ = IG = AC.$$

Or $IG = IC$ dans le triangle rectangle GCJ, donc $AC = CI$, donc $C\hat{I}A = C\hat{A}I$. Or $C\hat{I}A = 2C\hat{G}A$ car le triangle CIG est isocèle et $C\hat{G}A = G\hat{A}B$ (alternes-internes), donc $C\hat{A}I = 2I\hat{A}B$ et $I\hat{A}B$ est donc le tiers de $C\hat{A}B$.

Remarques:

1) Le problème se ramène à la construction du point H, intersection d'une hyperbole équilatère qui passe par B et du cercle de centre B et de rayon $2\,AC$. Le cercle a son centre sur l'hyperbole, il la coupe donc en deux points.

Cette méthode est celle de Thābit ibn Qurra[1].

2) Commentons cette solution dans le langage de l'algèbre. Soit le repère $(Dx, Dy) = (DC, DA)$ et posons $A(0, a)$, $C(c, 0)$; on a $B(c, a)$; dans ce cas $AC^2 = a^2 + c^2$. L'équation du cercle $\mathscr{C}(B, 2AC)$ s'écrit

$$(1) \qquad (x - c)^2 + (y - a)^2 = 4(a^2 + c^2);$$

l'équation de l'hyperbole $\mathscr{H}$ s'écrit

$$(2) \qquad xy = ac;$$

l'équation de l'intersection $\mathscr{C} \cap \mathscr{H}$ s'écrit

$$x^2 (x - c)^2 + a^2 (c - x)^2 = 4x^2 (a^2 + c^2),$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x^4 - 2cx^3 - 3\left(a^2 + c^2\right)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0,$$

d'où

$$f(c) = -4c^4\left(a^2 + c^2\right) < 0 \quad \text{et} \quad f(-c) = 4c^2\left(c^2 + a^2\right) - 4c^2\left(a^2 + c^2\right) = 0.$$

Donc $-c$ est l'une des racines et l'équation se réécrit

[1] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, chap. IV.

$$(x+c)\left(x^3-3cx^2-3a^2x+a^2c\right)=0.$$

L'équation cubique a une racine négative et deux racines positives x_1 et x_2 telles que $0 < x_1 < c < x_2$. L'abscisse du point H cherché est $x_2 > c$.

Notons que le point B' symétrique de B par rapport à D est sur la seconde branche de l'hyperbole et que $BB' = 2BD = 2AC$. Ce point B' est donc sur le cercle et il correspond à la racine négative $-c$.

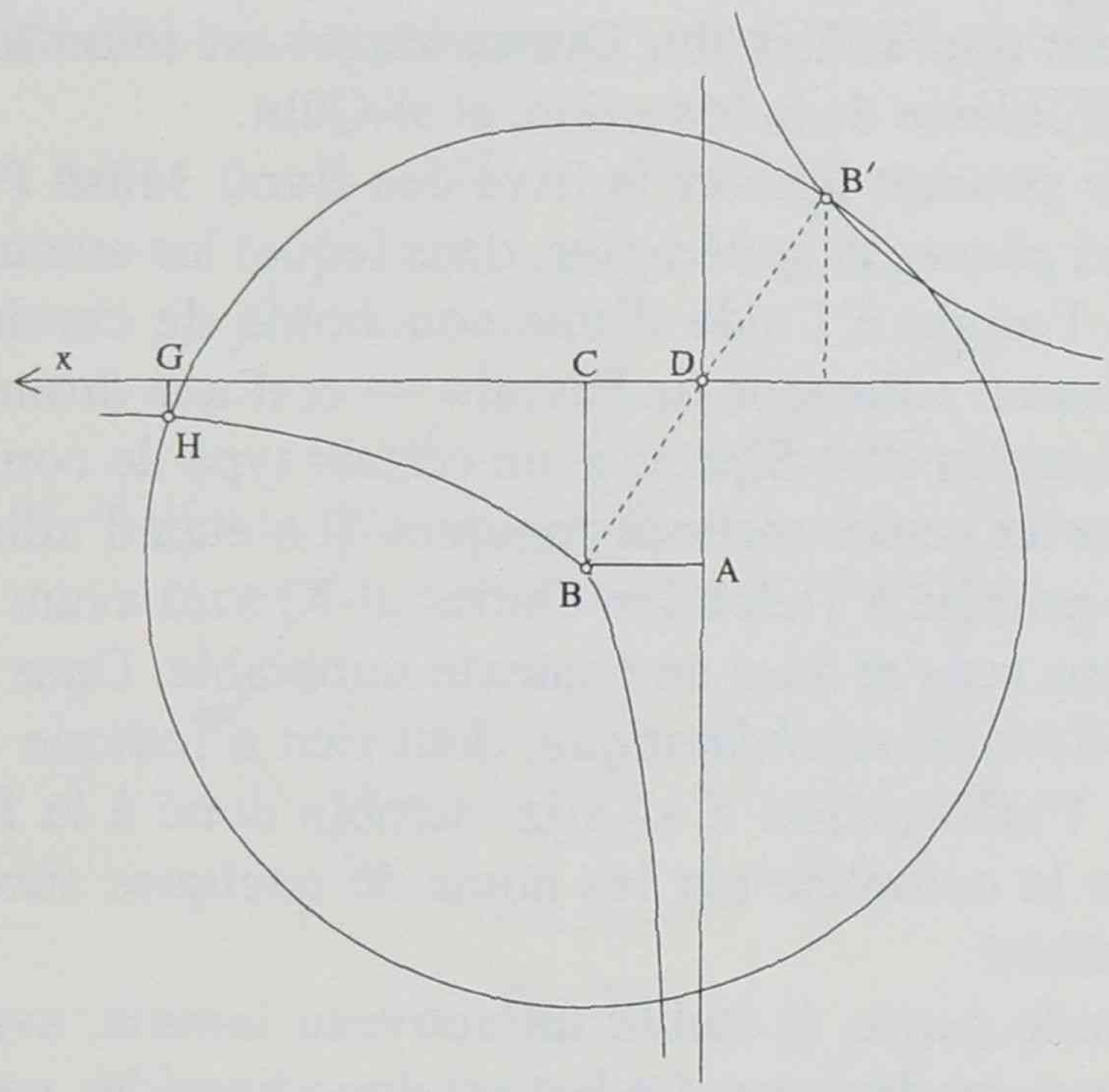


Fig. 70

3.1.3. *Traité sur la trisection de l'angle*

Entièrement consacré à la trisection de l'angle, ce dernier livre se divise principalement en trois parties. Dans la première l'auteur résume les lemmes donnés par les autres mathématiciens — prédécesseurs et contemporains — qui conduisent à la solution. Al-Sijzī ne retient dans son exposé que l'analyse, laissant la synthèse. Mais il ne faut pas s'y tromper : loin de faire dans cette partie, comme on a pu le croire, œuvre d'historien, c'est bien en mathématicien que procède al-Sijzī. Son but, dans cette « esquisse historique » qu'il retrace de la trisection de l'angle, est de mettre en relief les moments décisifs de l'étude de ce problème. C'est ainsi qu'il commence par rappeler qu'aucun ancien n'a pu venir à bout de la trisection, et qu'il fallait attendre Thābit ibn Qurra, et à sa suite al-Qūhī, pour y parvenir. Prise isolément, une telle affirmation peut surprendre sous la plume d'un savant dont l'érudition est bien connue. Mais les deux lignes suivantes ne tardent pas à dissiper ce sentiment; al-Sijzī y précise en effet sa pensée: aucun ancien n'a pu établir la trisection par «une démonstration géométrique», tel est précisément le sens qu'entend al-Sijzī. Ne produit-il pas, lui-même, la *neusis* attribuée à Nicomède ? Quatre lignes plus loin, il écrit: «Commençons donc par les lemmes que les anciens et les modernes ont introduits par la voie de l'analyse, avant de procéder à la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales» (*infra.*, p. 336 ; ar. 337, 1-2). De ses prédécesseurs, enfin, il ne retient que Thābit ibn Qurra, lequel est selon lui le premier à avoir résolu ce problème de la trisection, et al-Qūhī.

Or al-Sijzī ne pouvait ignorer le livre des Banū Mūsā *Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques*, dans lequel les auteurs construisent la trisection de l'angle à l'aide d'une conchoïde de cercle — plus tard appelée par Roberval «limaçon de Pascal» — et d'une droite. Tout indique donc que l'affirmation d'al-Sijzī vise un certain type de construction, celle qui s'effectue par les seules sections coniques. Il n'était d'ailleurs pas le seul à accorder cette priorité à Thābit ibn Qurra; al-Khāzin avant lui l'avait déjà fait, dans le même sens et dans un contexte semblable. Dans l'ignorance où il était de la *Collection mathématique*, dont rien n'indique qu'elle fut traduite en arabe, l'affirmation d'al-Sijzī semble donc à la fois correcte et cohérente, si on la complète par les noms de quelques successeurs d'Ibn Qurra, tel al-Khāzin[1].

Dans la seconde partie, il établit un nouveau lemme, avant de montrer que tous les autres en dérivent. Le but est donc limpide: unifier toutes les solutions à partir de la sienne propre. Aussi proclame-t-il qu'avec lui «la méthode est meilleure, la démonstration plus claire et la construction plus facile et plus immédiate» (*infra*, p. 334 ; ar. 335, 16). L'intention qui préside à la composition de ce livre n'est donc pas de donner une solution supplémentaire à la trisection de l'angle, mais d'aller un peu plus loin sur la voie de la généralité en montrant qu'il existe une solution apte à les remplacer toutes. Seule cette intention permet de comprendre le projet d'al-Sijzī ainsi que l'organisation de son livre.

La troisième partie est consacrée à des problèmes posés par al-Bīrūnī qui, établis, peuvent servir de lemmes pour la trisection.

Il convient donc que notre exposé commence par ce dernier livre, avant de revenir aux prédécesseurs d'al-Sijzī. Nous examinerons d'abord le lemme d'al-Sijzī pour ensuite reprendre les lemmes des autres mathématiciens qu'il a réunis pour démontrer qu'ils se ramènent au sien propre.

[1] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam.*

3.1.4. *Le lemme d'al-Sijzī*

Al-Sijzī commence par chercher les conditions pour la trisection de l'angle.

En effet, soit $AB = AC$ deux droites égales ; construire un point D sur AC tel que

(1) $$BD \cdot DA + AD^2 = AB^2 ;$$

si cette construction est possible, alors la trisection de l'angle BAE (E sur le prolongement de CA) l'est également.

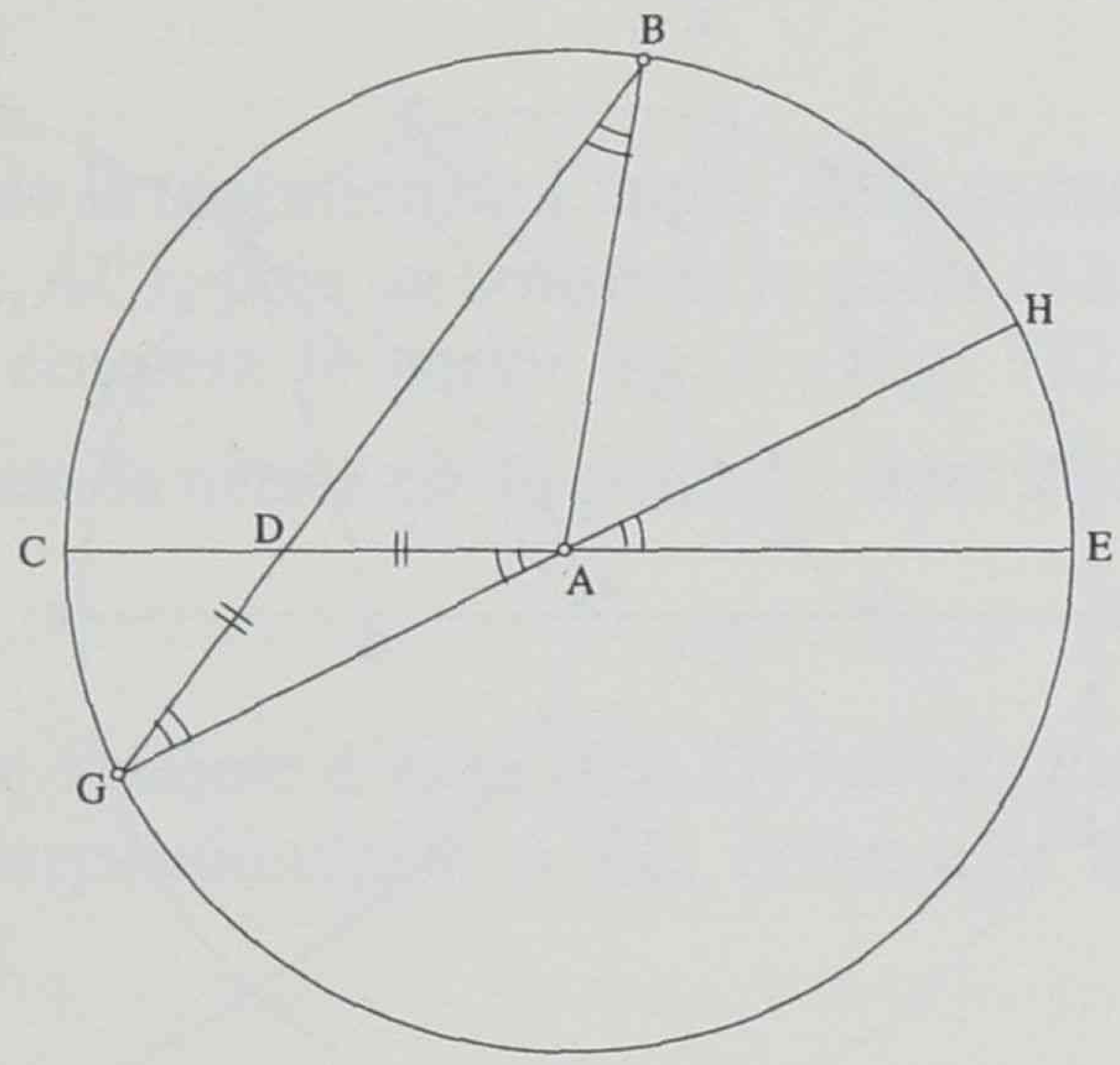


Fig. 71

Soit le cercle $\mathscr{C}(A, AB)$ et un point G sur le cercle et dans le prolongement de BD ; alors on a par hypothèse

$$BD \cdot DA + DA^2 = AB^2 ;$$

d'autre part

$$BD \cdot DG = ED \cdot DC \qquad \text{(puissance du point } D\text{)};$$

mais

$$ED \cdot DC + AD^2 = AC^2 = AB^2$$

d'où

$$BD \cdot DG + AD^2 = AB^2 \text{ et } DG = DA.$$

On a alors

$$E\hat{A}B = A\hat{B}D + B\hat{D}A = A\hat{B}D + 2D\hat{G}A = 3\ A\hat{B}D.$$

On voit que ce lemme est une sorte de *neusis* : construire une droite BG, passant par B et telle que le segment DG soit égal au segment AD.

Ainsi, pour partager l'angle *BAE* en trois parties égales, on peut réécrire le lemme d'al-Sijzī :

LEMME : Soit $\mathscr{C}(A, AC)$; construire un point *D* sur *AC* tel qu'il vérifie (1).

Soit en effet l'angle *BAE* donné, dont les côtés sont les droites $BA = AE$; et soit *C* le point du cercle diamétralement opposé à *E*. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole de sommet *A*, de diamètre transverse *AC*, de côté droit *AC* et d'ordonnées faisant avec le diamètre transverse un angle égal à $B\hat{A}E$. Alors $\mathscr{H}$ coupe $\mathscr{C}$ en un point *H*.

De *B* on mène la parallèle à *AH* ; elle coupe *AC* en *D*, le point cherché.

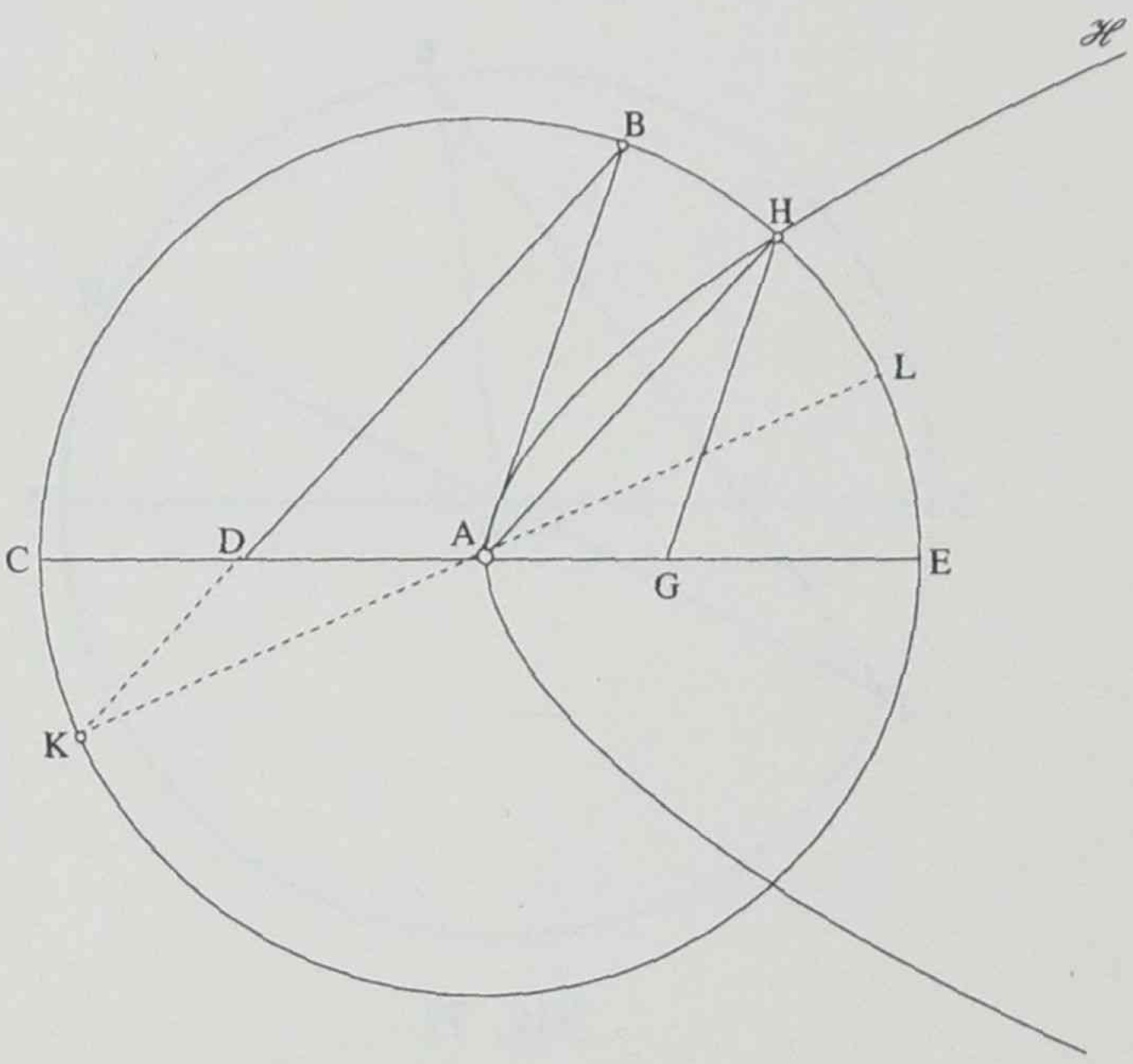


Fig. 72

En effet, soit $HG \mathbin{/\!/} AB$. On a

$$H \in \mathscr{H} \Rightarrow GH^2 = CG \cdot AG, \text{ d'après } \textit{Coniques} \text{ I.12.}$$

Mais $CG \cdot GA = CA \cdot AG + AG^2 = AH \cdot AG + AG^2$.

Or les deux triangles *HAG* et *BDA* sont semblables, d'où

$$\frac{BD \cdot DA + AD^2}{AB^2} = \frac{AH \cdot AG + AG^2}{GH^2} = 1,$$

d'où le résultat.

Al-Sijzī passe ensuite à la proposition suivante :

PROPOSITION : Diviser l'angle *BAE* en trois parties égales.

Il s'agit de montrer que la construction du point *D* effectue la trisection.

En effet, supposons *D* construit ; alors *BD* coupe le cercle $\mathscr{C}(A, AC)$ en *G* (cf. Fig. 71), donc

$$DB \cdot DG = DE \cdot DC = AB^2 - AD^2 = BD \cdot DA \text{ d'après (1)},$$

d'où

$$DG = DA,$$

donc

$$B\hat{A}E = A\hat{B}D + A\hat{D}B = 3A\hat{B}D,$$

d'où, si l'on prolonge GA jusqu'en H, on a

$$E\hat{A}H = A\hat{B}D = \frac{1}{3} B\hat{A}E.$$

Enfin, les étapes de la trisection de l'angle $B\hat{A}E$ se succèdent ainsi :

On construit $\mathscr{C}(A, AC)$; puis on construit le point D à l'aide du lemme, on prolonge BD qui coupera le cercle en K (Fig. 72) ; on joint KA ; son prolongement coupera le cercle en un point L ; alors $E\hat{A}L = \frac{1}{3} B\hat{A}E$.

Remarque :

Si on considère le système d'axes (Ox, Oy) avec O au point A, Ox superposé à AE et Oy perpendiculaire à AE, construire le point D revient à résoudre l'équation[1]

$$(*) \qquad x^3 + ax^2 = c.$$

Cette équation n'a pas toujours une solution réelle positive. Mais les données du problème posé par al-Sijzī correspondent au cas où il y a une solution positive.

En effet, soit A (0, 0) ; B (α, β) ; D $(-x, 0)$. On doit trouver à partir de la solution (1) x qui vérifie

$$\left[(\alpha - x)^2 + \beta^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot x + x^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

soit

$$\frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2}{2\alpha} = \frac{3}{2} \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}{\alpha} x^2 + x^3.$$

[1] Cf. l'équation 16 du *Traité d'algèbre* d'al-Khayyām dans R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999, p. 43 sqq.

On peut aussi écrire l'équation (*) sans introduire d'axes, en partant de la relation $BD^2 = AD^2 + AB^2 + 2AD \cdot AB \cos\theta \quad (\theta = E\hat{A}B)$. La relation (1) donne

$$BD^2 \cdot AD^2 = \left(AB^2 - AD^2\right)^2,$$

soit

$$AD^4 + AB^2 \cdot AD^2 + 2AD^3 \cdot AB \cos\theta = AB^4 - 2AB^2 \cdot AD^2 + AD^4$$

$$3AB \cdot AD^2 + 2AD^3 \cos\theta = AB^3.$$

Revenons-en maintenant aux lemmes repris par al-Sijzī à ses prédécesseurs et contemporains, et redémontrés par lui.

3.1.5. *Lemme de Thābit ibn Qurra et démonstration d'al-Sijzī*

Dans un mémoire consacré à la trisection de l'angle et aux deux moyennes, Thābit ibn Qurra commence par démontrer deux lemmes avant de prouver la proposition sur la trisection de l'angle. Le premier lemme n'est autre que la proposition II.4 des *Coniques* d'Apollonius : il s'agit de montrer que si un point est intérieur à un angle, alors on peut construire une hyperbole qui passe par ce point et qui a les deux côtés de l'angle pour asymptotes. Dans le second lemme, on se donne un parallélogramme *ABCD* et un segment *M* et on veut construire sur le prolongement de *BC* un point *G* tel que si *GA* coupe *CD* en *E*, on ait $EG = M$. Au cours de la démonstration, on applique II.12 des *Coniques*[1].

De ce texte, ses antécédents et son impact, nous avons discuté ailleurs[2]. Al-Sijzī pour sa part reprend la proposition de Thābit — sans les lemmes — pour en donner plus tard une autre démonstration. Il résume rigoureusement la proposition que voici :

Diviser un angle aigu BAD *en trois parties égales.*

Supposons $BD \perp AD$ et traçons *BC* parallèle à *AD* et *AC* telle que $EC = 2AB$.

Menons ensuite la droite *AC* ; elle coupe *BD* en *E*. On a alors $D\hat{A}C = \frac{1}{3} D\hat{A}B$.

[1] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam.*

[2] *Ibid.*

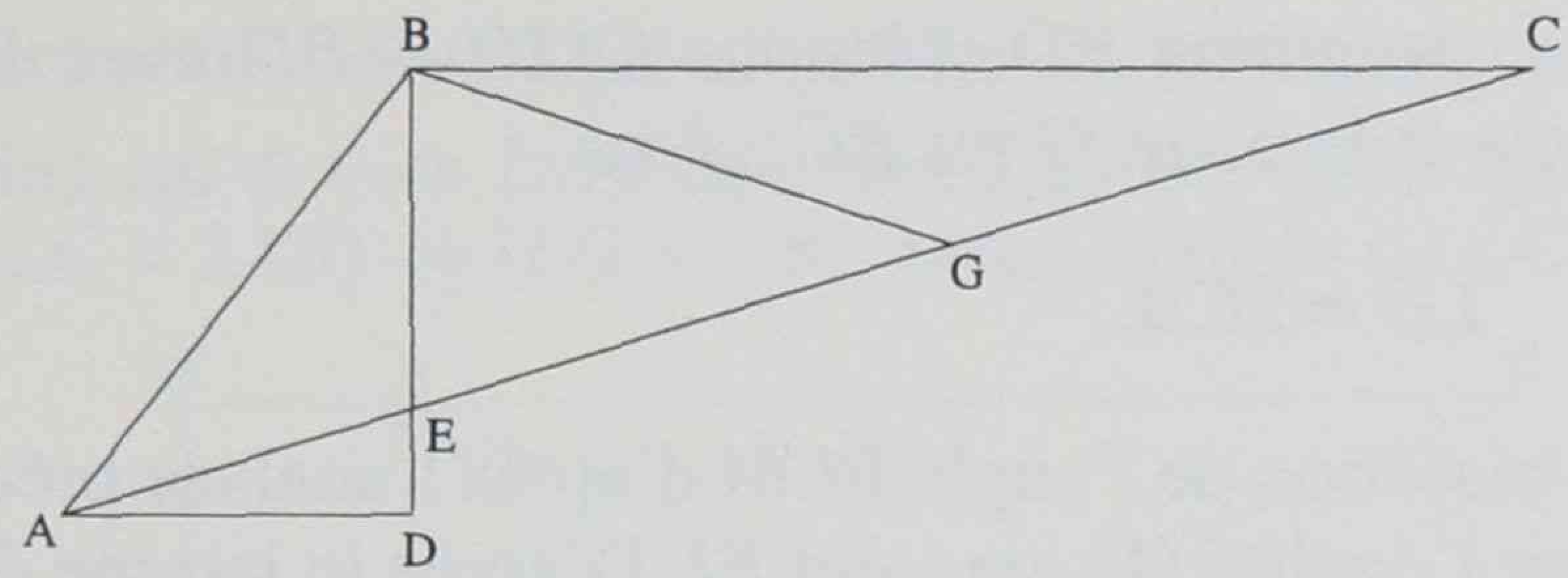


Fig. 73

En effet, soit G le milieu de CE ; menons la médiane BG. Dans le triangle rectangle EBC, la droite BG est donc égale à la moitié de EC ; on a donc

$$AB = BG = GE = GC.$$

Par suite

$$G\hat{A}B = B\hat{G}A = \hat{C} + \hat{B} = 2\hat{C}.$$

Mais $\hat{C} = D\hat{A}C$, donc $D\hat{A}C = \frac{1}{3} D\hat{A}B$, d'où le résultat.

Notons qu'il reste encore à partager $C\hat{A}B$ en deux moitiés, ce qui se fait à la règle et au compas. Peut-être est-ce pour cette raison qu'on a négligé de le faire.

Démonstration d'al-Sijzī

Diviser un angle aigu BCM en trois parties égales.

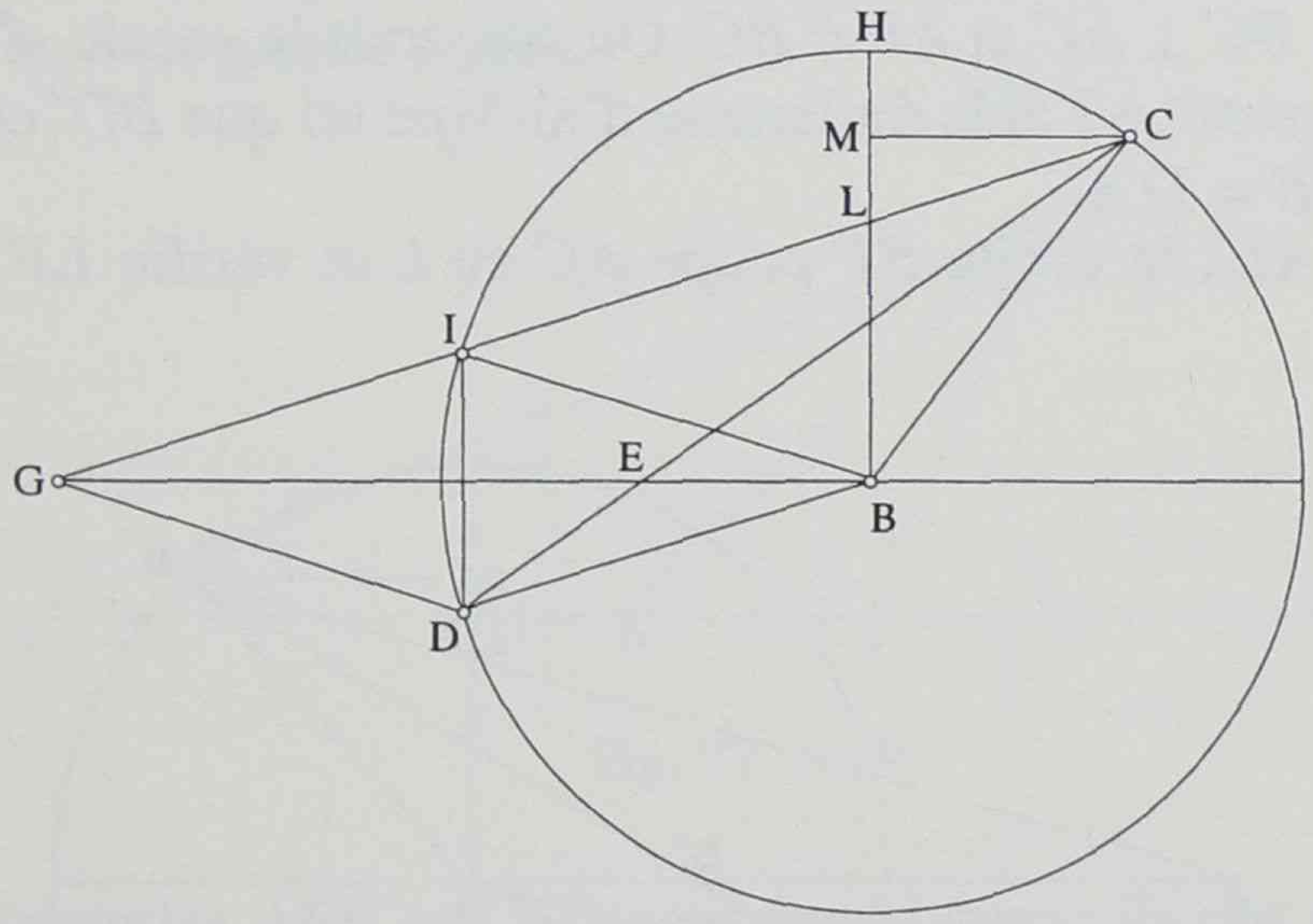


Fig. 74

Supposons $BMH \perp CM$, $BMH = BC$ et $BG \parallel CM$. Soit CHD le cercle de centre B et de rayon BC. Construisons le segment CED avec E sur BG et D sur le cercle, tel que $ED = EB$. Cette construction est possible d'après le lemme d'al-Sijzī. Joignons BD. Menons $CLIG \parallel BD$ avec L sur BH, le point I sur le cercle et le point G sur BC ; alors

$$(1) \qquad LG = 2CB,$$

ce qui permet la trisection de l'angle BCM d'après l'analyse précédente.

Pour démontrer l'égalité (1), on joint BI. D'après le lemme d'al-Sijzī, on a

$$(2) \qquad LI = BI;$$

comme l'angle LBG est droit, la droite est le diamètre du cercle circonscrit au triangle LBG ; donc $IG = IL$, d'où $LG = 2CB$.

Remarques :

1) L'égalité (2) est déduite du lemme d'al-Sijzī lors de la démonstration de la proposition d'al-Bīrūnī (voir plus loin). On peut l'établir comme suit :

On a $ED = EB$; soit G sur le prolongement de BE tel que $GD = BD$. Les deux triangles CBD et BDG sont semblables, et $CB = DB = DG$. Donc $CD = BG$. Dans $CBDG$ on a donc $CB = DG$ et $\hat{B} = \hat{D}$, donc $CBDG$ est un trapèze isocèle et CG est parallèle à BD ; d'où $BIGD$ est un losange et $BI = GI$. Mais $G\hat{B}L$ est un angle droit et les triangles DGI et BIL sont égaux ; donc $BI = LI$.

2) Résumons la démonstration d'al-Sijzī pour l'angle $A\hat{B}C$ initial, dont on cherche la trisection.

Supposons $BC \perp AC$ et $AF \parallel BC$. On construit le cercle $\mathscr{C}(A, AB)$. Soit D' sur AF construit à l'aide du lemme d'al-Sijzī tel que BD' coupe le cercle en E ; on a $D'E = D'A$.

Soit $BF \parallel AE$; la droite BF coupe AC en L et vérifie $LF = 2AB$; d'où $C\hat{B}F = \frac{1}{3} A\hat{B}C$.

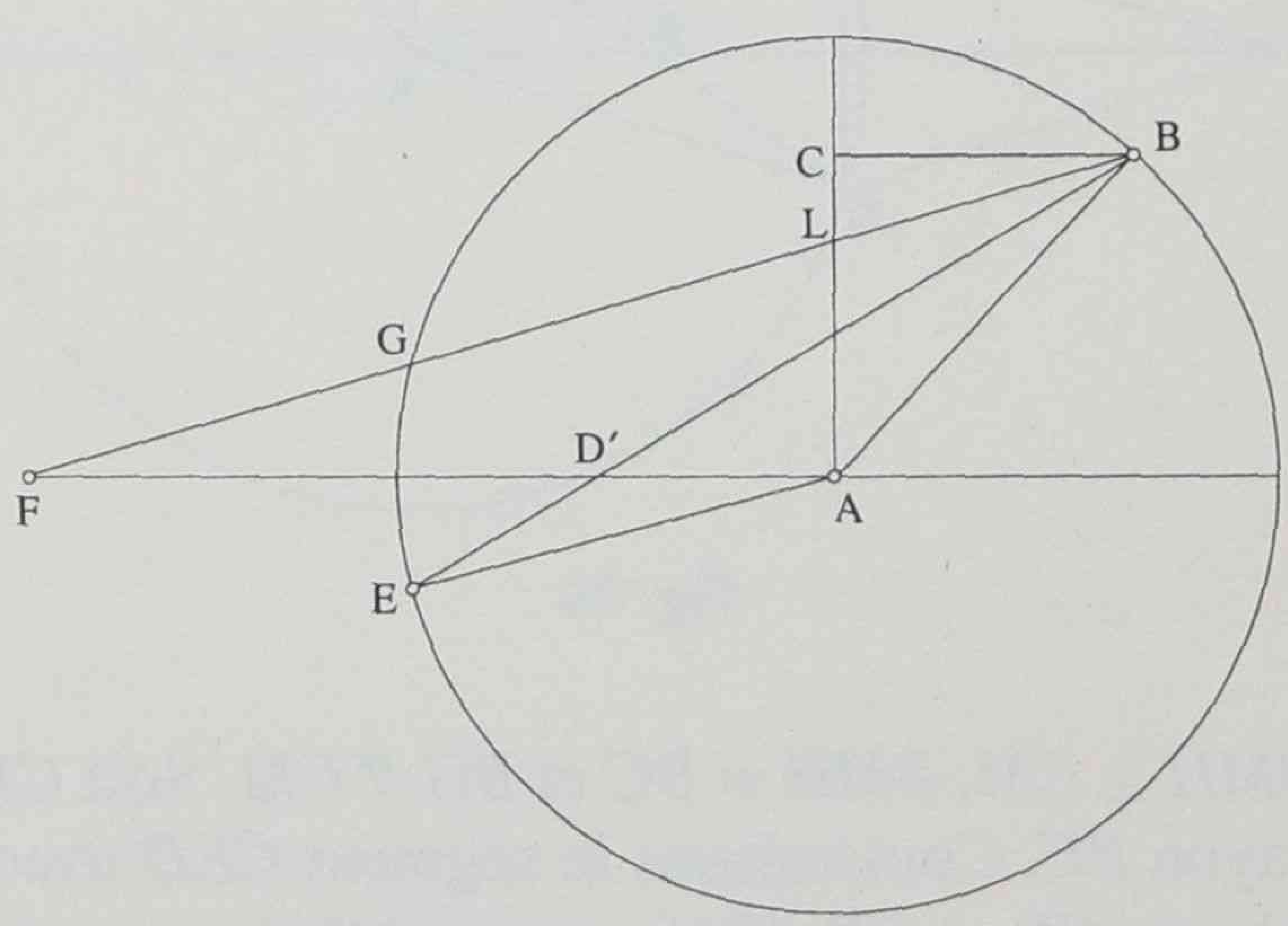


Fig. 75

3) La construction d'al-Sijzī est en fait la même que celle d'al-Bīrūnī (voir plus loin), car diviser $D\hat{A}B$ équivaut à diviser $A\hat{B}H$ qui lui est égal.
En effet ($LC = 2AB$) $\Leftrightarrow$ ($LG = AB$), avec G milieu de LC.

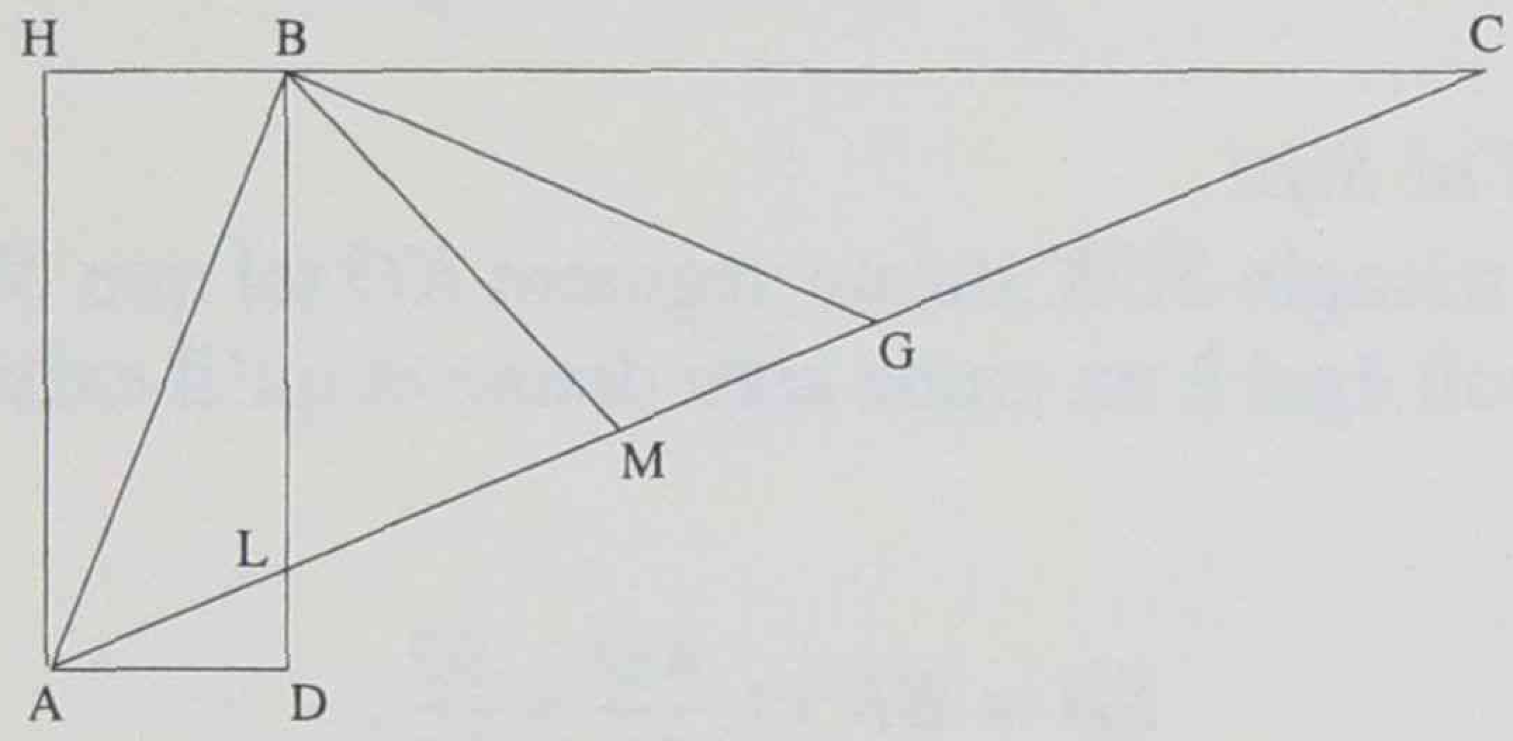


Fig. 76

3.1.6. *Le lemme d'al-Qūhī et la démonstration d'al-Sijzī*

Al-Qūhī a écrit quatre mémoires sur la trisection de l'angle et les deux moyennes. Nous avons établi, traduit et commenté ces mémoires ailleurs[1].

Supposons AB et BC les deux côtés d'un angle donné B. S'il est possible de mener deux droites AC et AD avec D sur AB telles que (1) $DC = DA$ et que (2) $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$, alors on peut trisecter l'angle.

En effet, si E est un point sur le prolongement de AB, l'angle EBC se partage alors en trois parties égales.

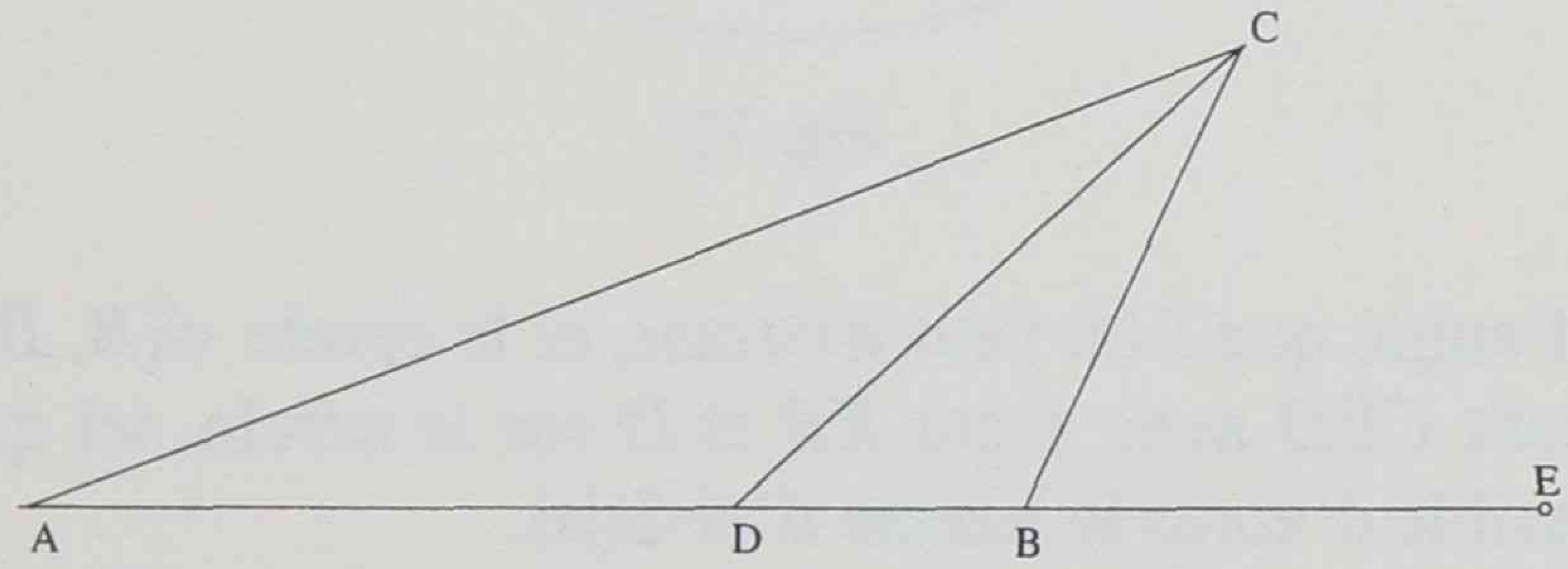


Fig. 77

Les deux triangles ABC et CBD sont semblables ; ils ont un angle commun et vérifient (2) par hypothèse ; donc

$$B\hat{C}D = C\hat{A}B \text{ et } C\hat{D}B = A\hat{C}B.$$

[1] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, chap. IV.

Mais $C\hat{D}B = 2C\hat{A}B$ d'après (1), donc $C\hat{D}B = 2B\hat{C}D$. Donc

$$C\hat{D}B = \frac{2}{3}E\hat{B}C \quad \text{et} \quad B\hat{C}D = \frac{1}{3}E\hat{B}C.$$

Démonstration d'al-Sijzī

Construire un triangle SOK sur un segment KO tel que $S\hat{O}A$ (OA prolongement de OK) soit égal à un angle aigu donné et qu'il existe un point B sur OK qui vérifie

$$SB = BK \text{ et } \frac{KO}{SO} = \frac{SO}{BO}.$$

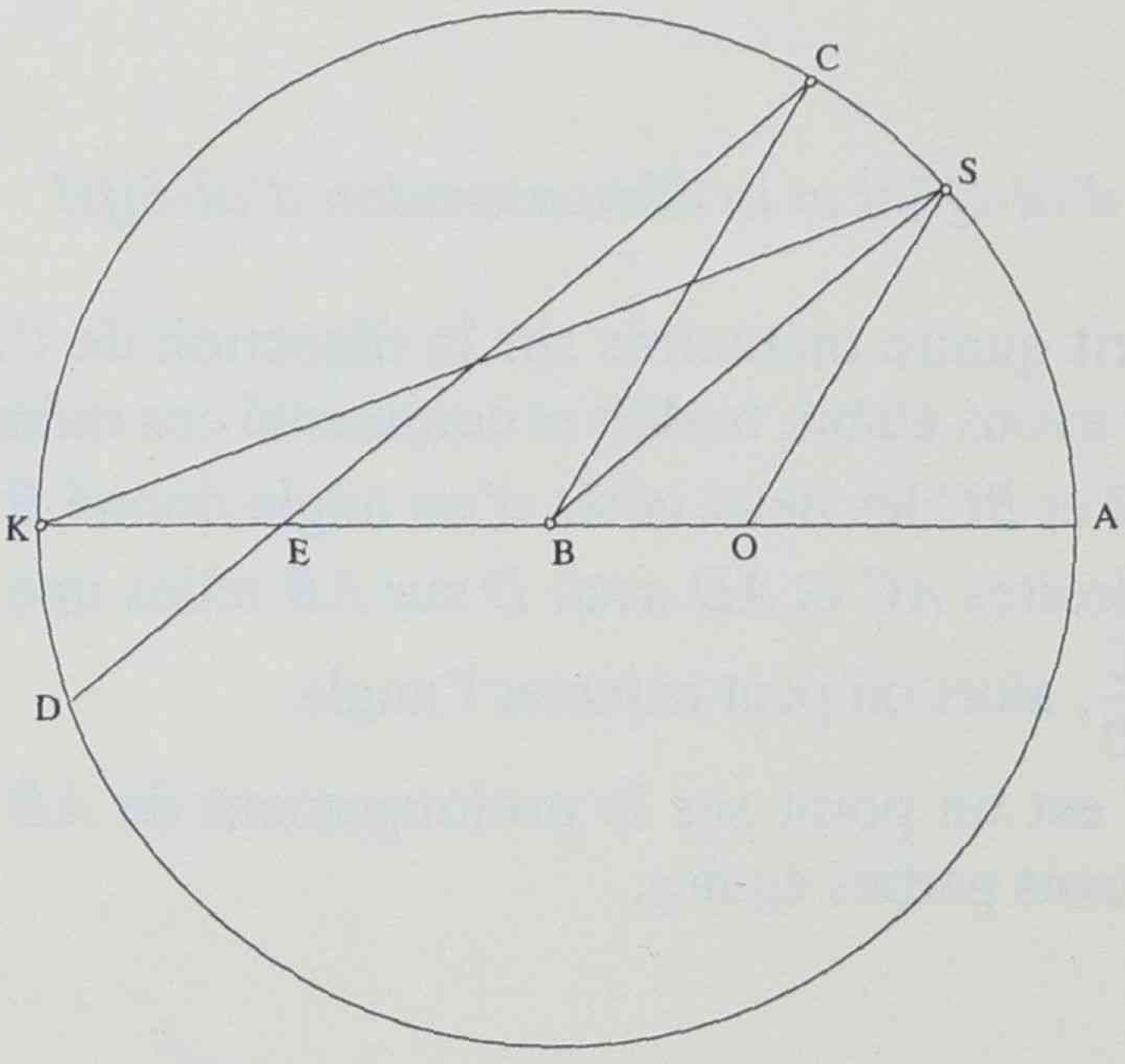


Fig. 78

Soit $C\hat{B}A$ l'angle que l'on veut trisecter, et le cercle $\mathscr{C}(B, BA)$. Construisons le segment CED avec E sur KB et D sur le cercle, tel que $ED = EB$. Ce qui est possible d'après le lemme d'al-Sijzī.

Soient $BS \parallel CD$ et $SO \parallel CB$, alors les triangles SBO et KSO sont semblables.

En effet, $CE \cdot EB + EB^2 = CB^2$, par construction et d'après la similitude des triangles CEB et SBO on a

$$\frac{CE}{SB} = \frac{EB}{BO} = \frac{CB}{SO},$$

d'où

$$SB \cdot BO + BO^2 = OS^2$$

donc

$$KB \cdot BO + OB^2 = KO \cdot OB = SO^2,$$

et les deux triangles SOK et SOB sont semblables et l'angle $A\hat{B}C$ égale l'angle $A\hat{O}S$.

3.1.7. *Lemme d'Abū al-Ḥasan al-Shamsī al-Harawī*

Soit le triangle isocèle ABC, AG sa hauteur ; comment construire un segment CED avec E sur AG et D sur AB tel que $ED = DB$. Si cette construction est possible, il en sera de même pour la trisection de l'angle ABC.

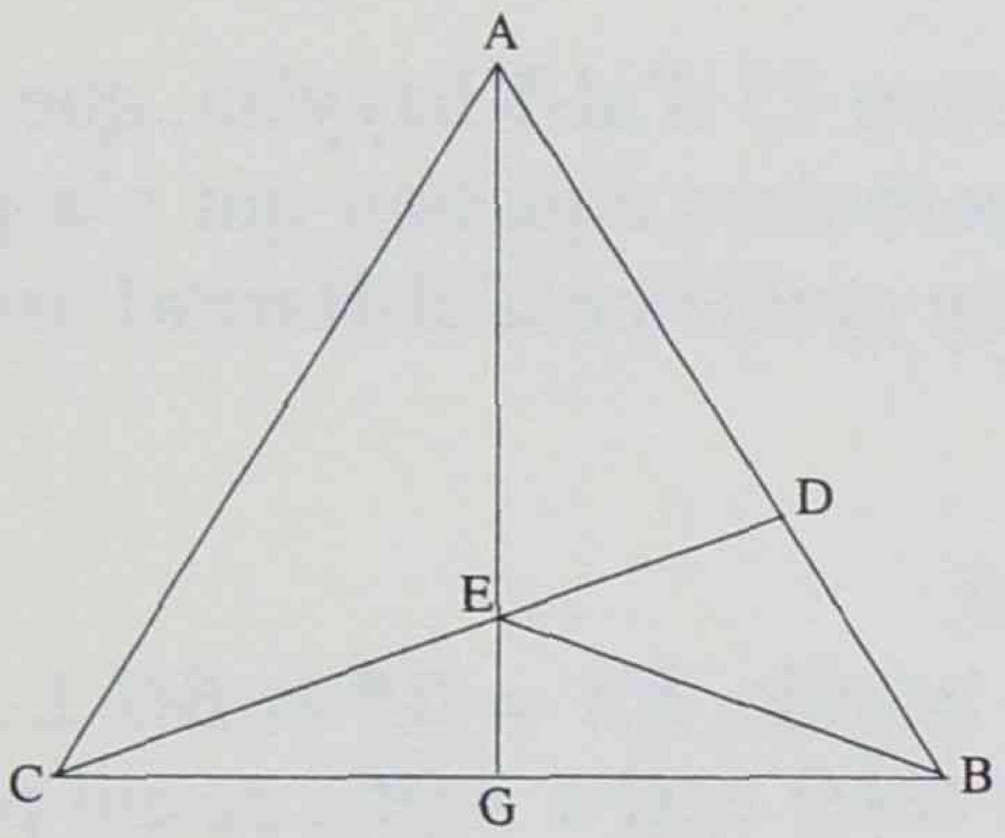


Fig. 79

Joignons BE ; on a alors $D\hat{E}B = D\hat{B}E = 2D\hat{C}B$ (l'angle DEB est externe au triangle EBC). On a donc $D\hat{E}B = 2E\hat{B}G$ car le triangle EBC est isocèle ; donc

$$D\hat{B}E = 2E\hat{B}G \text{ et } E\hat{B}G = \frac{1}{3}A\hat{B}C.$$

Remarque :

Si l'on se ramène au système d'axes $(GB, GA) = (OX, OY)$, on a $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(-b, 0)$ et $G(0, 0)$; $E(0, y)$, $D(X, Y)$.

Le problème revient donc à trouver le point E tel que $ED = DB$.

On a

$$CE = \left\{(t,z); z = \frac{y}{b}t + y\right\}$$

$$AB = \left\{(u,v); v = -\frac{a}{b}u + a\right\}.$$

Comme $D \in CE \cap AB$, on a

$$Y = \frac{y}{b} X + y \text{ et } Y = -\frac{a}{b} X + a,$$

d'où

$$X = \frac{b(a-y)}{a+y} \text{ et } Y = \frac{2ay}{a+y}$$

et finalement

$$[ED = DB] \Leftrightarrow \left[(X-b)^2 + Y^2 = X^2 + (Y-y)^2\right];$$

et par substitution, on a

$$y^3 + ab^2 = ay^2 + 3b^2 y,$$

qui correspond à l'équation 25 d'al-Khayyām, que celui-ci résout par l'intersection de deux hyperboles ; équation qui n'a pas toujours de racines réelles. Les conditions du problème d'al-Harawī assurent l'existence d'une solution réelle positive.

Démonstration d'al-Sijzī

Soit le triangle ABP isocèle, $BA = BP$ et $BU \perp AP$. Construire un segment PQG tel qu'on ait $G\hat{A}Q$ égal à $A\hat{Q}G$, ce qui permettra la trisection de $B\hat{A}P$.

Soit le cercle $\mathscr{C}(B, BA)$; prolongeons AB et PB jusqu'en K et C respectivement sur la circonférence, et construisons un segment CED, avec E sur BK, tel que $ED = EB$, selon le procédé ci-dessus.

Prolongeons DB jusqu'en M sur la circonférence et joignons $PQGM$ ainsi que AQ ; on a $AG = GQ$.

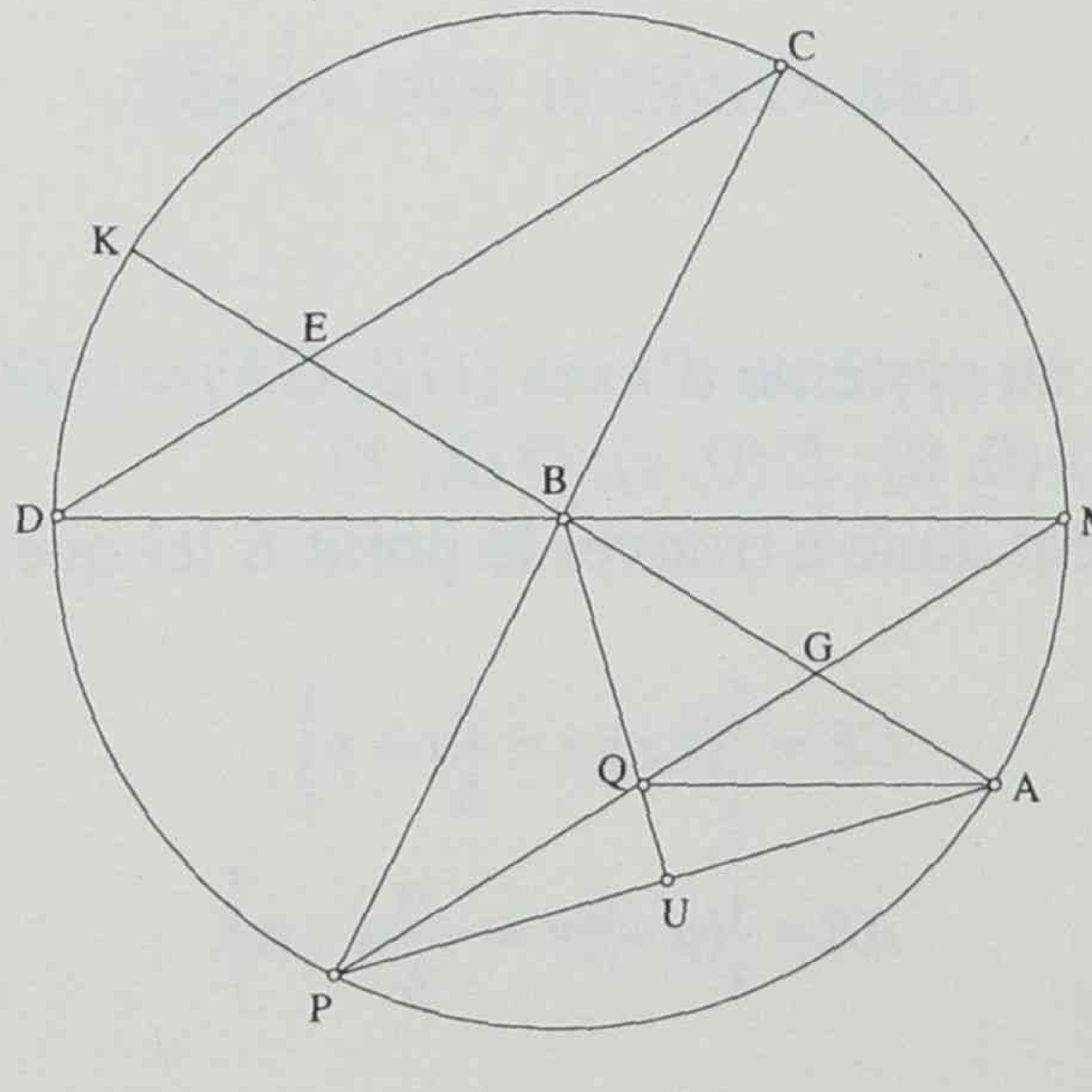


Fig. 80

En effet, $\hat{D} = \hat{B} = M\hat{B}A$ et $\hat{D} + \hat{C} = 2\hat{B} = 2M\hat{B}A$.

Mais $M\hat{B}A = 2M\hat{P}A$ (car $M\hat{B}A$ est l'angle au centre) et $C\hat{B}M = 2C\hat{P}M$, donc $B\hat{P}Q = 2Q\hat{P}A$.

Mais $G\hat{A}Q = B\hat{P}Q$, donc $G\hat{A}Q = 2P\hat{A}Q$; et $G\hat{Q}A = 2Q\hat{A}P$, donc $G\hat{Q}A = G\hat{A}Q$ et $GQ = GA$. D'où la trisection d'al-Sijzī.

Remarque:

La trisection est déjà effectuée lorsqu'on montre $B\hat{P}Q = 2Q\hat{P}A$. Que signifie alors le développement ultérieur ? Il semble qu'al-Sijzī, après avoir montré la proposition d'al-Harawī qui permet par la suite la trisection de l'angle ABC, ait voulu montrer que l'on peut s'en passer dès qu'on a démontré la sienne.

3.1.8. *Lemmes d'al-Bīrūnī*

Après avoir repris les lemmes de Thābit ibn Qurra et d'al-Qūhī, al-Sijzī examine quelques propositions de son cadet Abū al-Rayḥān al-Bīrūnī. Commençons par examiner les propositions telles que les reproduit al-Sijzī.

1° Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$; construire un segment AD tel que

$$(1) \qquad AD = AE \text{ et } \frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DE}.$$

Si cette construction est possible, il en sera alors de même pour la trisection de l'angle ABC.

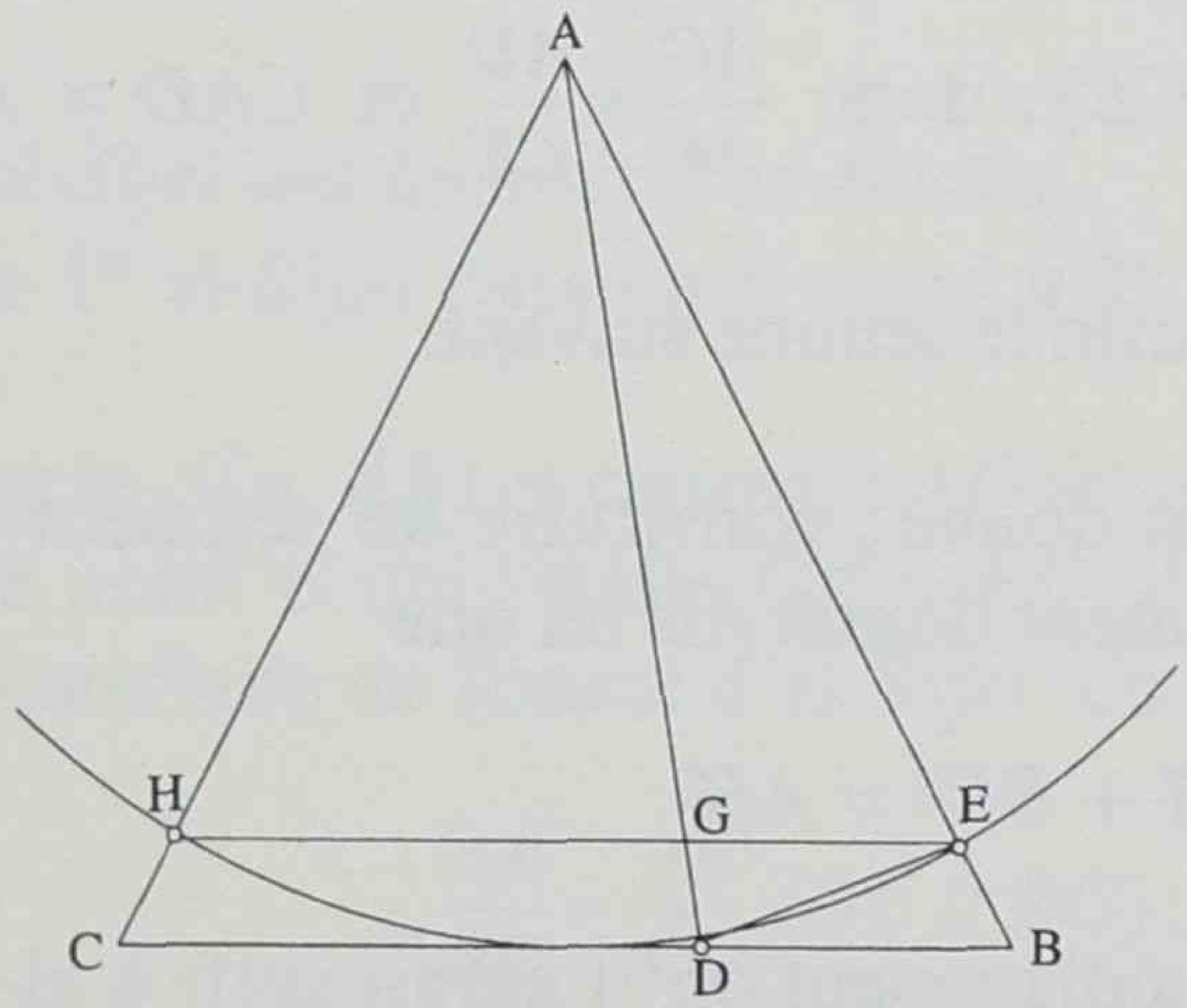


Fig. 81

Soit le cercle $\mathscr{C}(A, AE)$, le point H son intersection avec le côté AC, le point G l'intersection de HE et AD. On a EGH parallèle à BC. Mais par (1) on a $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED}$. Or $EG \,//\, BD$, donc $\frac{AE}{ED} = \frac{AE}{EG}$ et $ED = EG$. Les deux triangles AED et DEG sont donc semblables et on a $D\hat{E}H = E\hat{A}D$ et $\widehat{DH} = 2\widehat{DE}$ (angle inscrit et angle au centre). On a finalement $B\hat{A}D = \frac{1}{3} B\hat{A}C$.

Al-Bīrūnī donne en quelque sorte un corollaire du lemme précédent.

2° Construire un rayon EDC de $\mathscr{C}(E, EA)$, avec D sur la corde AB et C sur la circonférence, tel que $CA = AD$. Si cette construction est possible, la trisection de l'angle AEB le sera également.

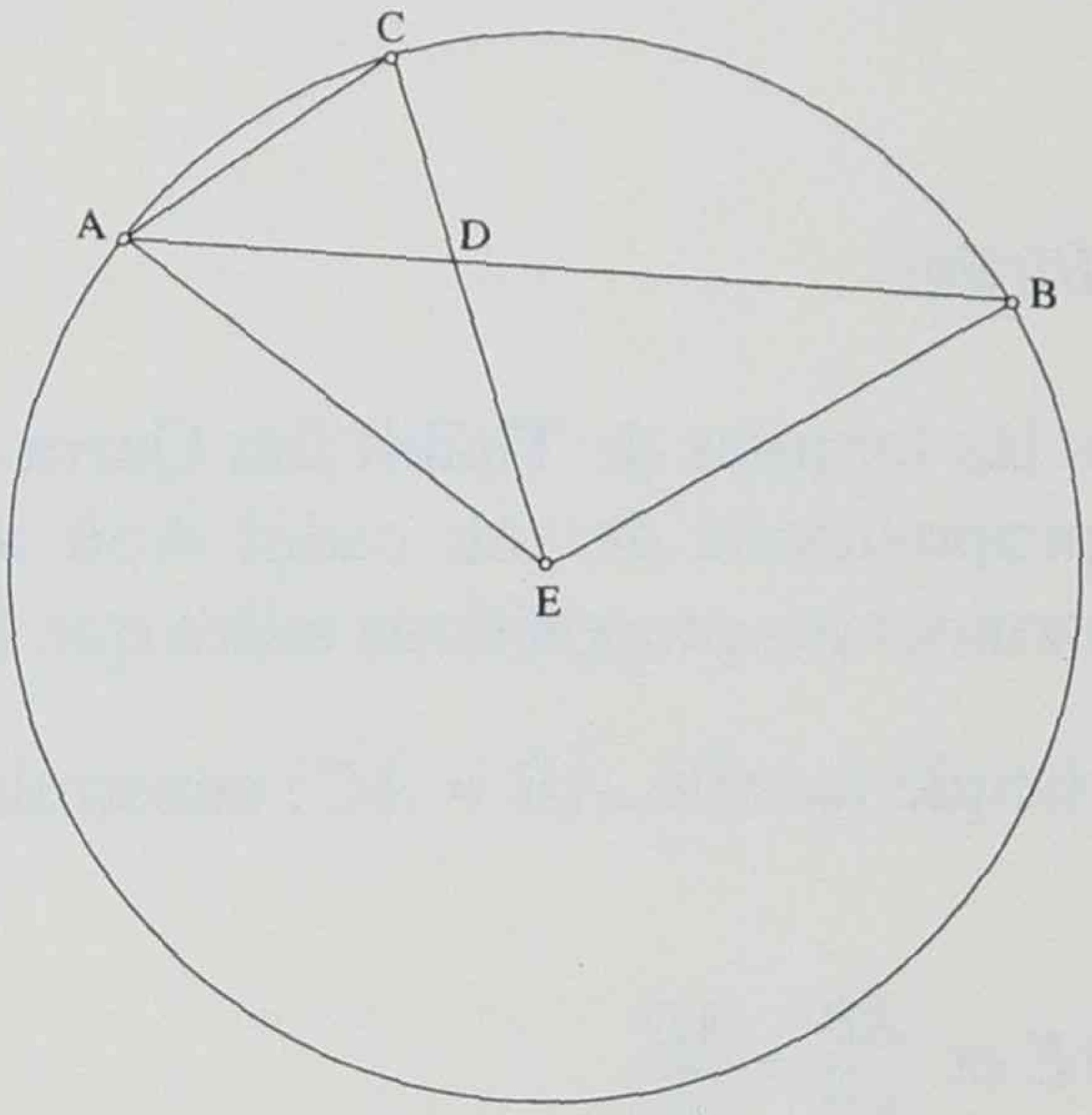


Fig. 82

Les deux triangles ACD et ACE sont semblables ($\hat{C}$ est commun et $AC = AD$ et $AE = CE$) ; donc $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{CE}$ et $C\hat{A}D = A\hat{E}C$ et $\widehat{CB} = 2\,\widehat{CA}$, d'où le résultat.

Al-Bīrūnī donne enfin le lemme suivant.

3° Soit C un point donné ; construire un segment CD qui coupe en un point D un autre segment donné AB tel que

(2) $$CD \cdot AB + BD^2 = AB^2.$$

Al-Sijzī note immédiatement qu'il aurait suffi à al-Bīrūnī d'ajouter une condition nécessaire, à savoir $CB = AB$.

Si cette construction est possible, alors la construction de l'angle le sera aussi.

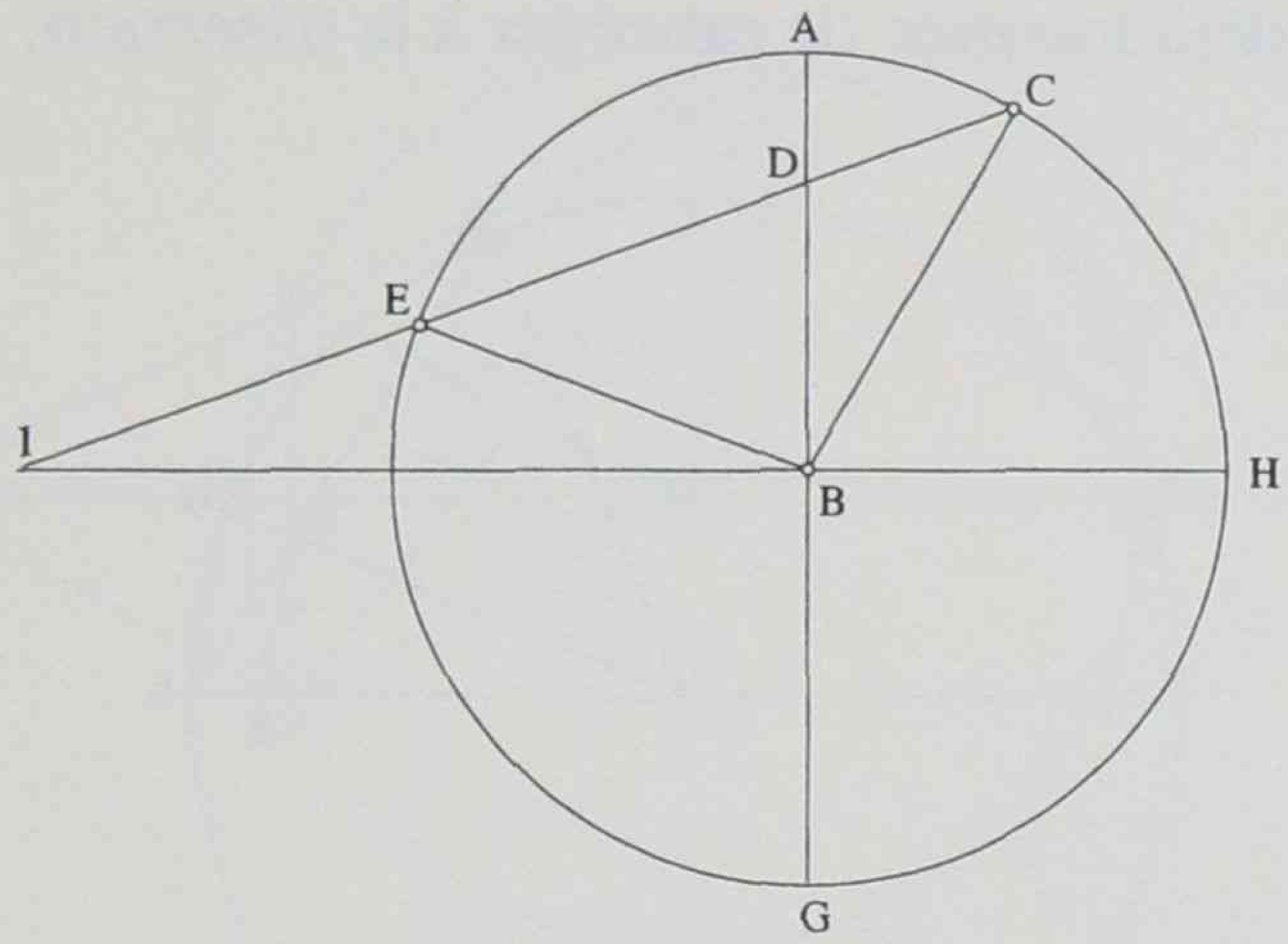


Fig. 83

Soit le cercle $\mathscr{C}(B, BH)$; prolongeons AB jusqu'en G et HB jusqu'en I ; et soit E l'intersection du cercle et de CI. En raison de la relation (2) et de l'égalité $CD \cdot DE = DA \cdot DG$ et de $AD \cdot DG + DB^2 = AB^2$, on a

$$CD \cdot DE + DB^2 = AB^2,$$

d'où

$$DE = AB.$$

Mais $D\hat{B}I$ est droit et $EB = DE$ (EB la médiane issue de l'angle droit). Le point E est donc le centre du cercle circonscrit au triangle DBI, donc $DE = EI$.

Mais $H\hat{B}C = B\hat{I}C + B\hat{C}I$; $B\hat{C}I = B\hat{E}C$ et $E\hat{B}I = B\hat{I}C$, donc

$$B\hat{I}C = \frac{1}{3} H\hat{B}C.$$

Démonstration par al-Sijzī des lemmes d'al-Bīrūnī

4° Pour démontrer 1° al-Sijzī renvoie d'abord à 2°, qui ramène en fait à son lemme à lui.

Ainsi il trace le cercle $\mathscr{C}(A, AB)$ et construit AD tel que son prolongement coupe le cercle en un point G qui vérifie $GB = BD$ (d'après 2° d'al-Bīrūnī qui est lui-même un corollaire du lemme d'al-Sijzī. On a

$$\frac{AB}{BG} = \frac{AE}{ED} \; (DE \,/\!/\, BG) ;$$

mais $BG = BD$ et $AE = AD$, donc

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DE},$$

d'où la possibilité déjà montrée de procéder à la trisection.

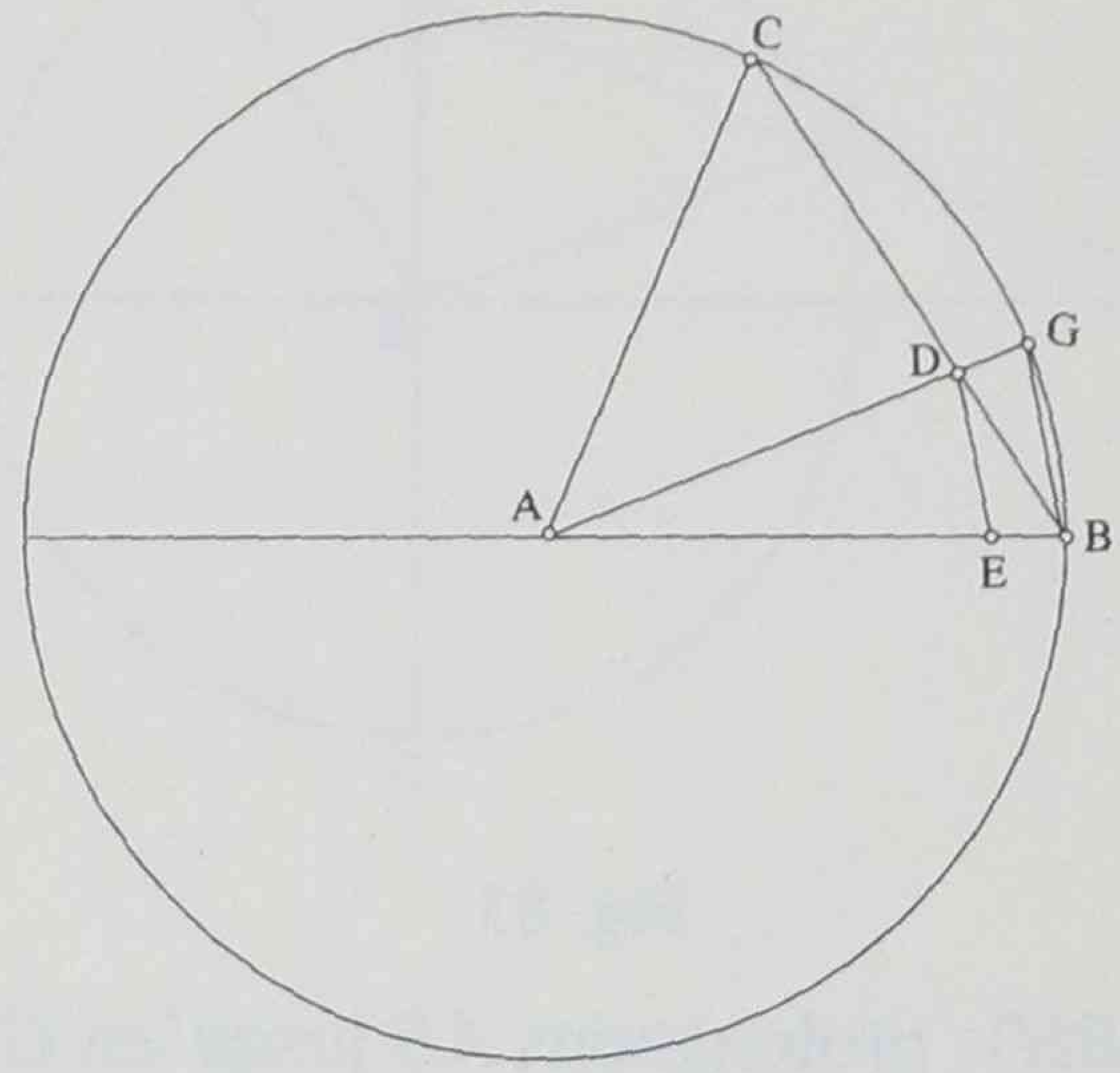


Fig. 84

5° Pour démontrer le deuxième lemme d'al-Bīrūnī, al-Sijzī a donc recours à son propre lemme. En effet, grâce à celui-ci, étant donné le cercle $\mathscr{C}(B, AB)$, on peut construire un triangle ANM tel que $AN = AM$.

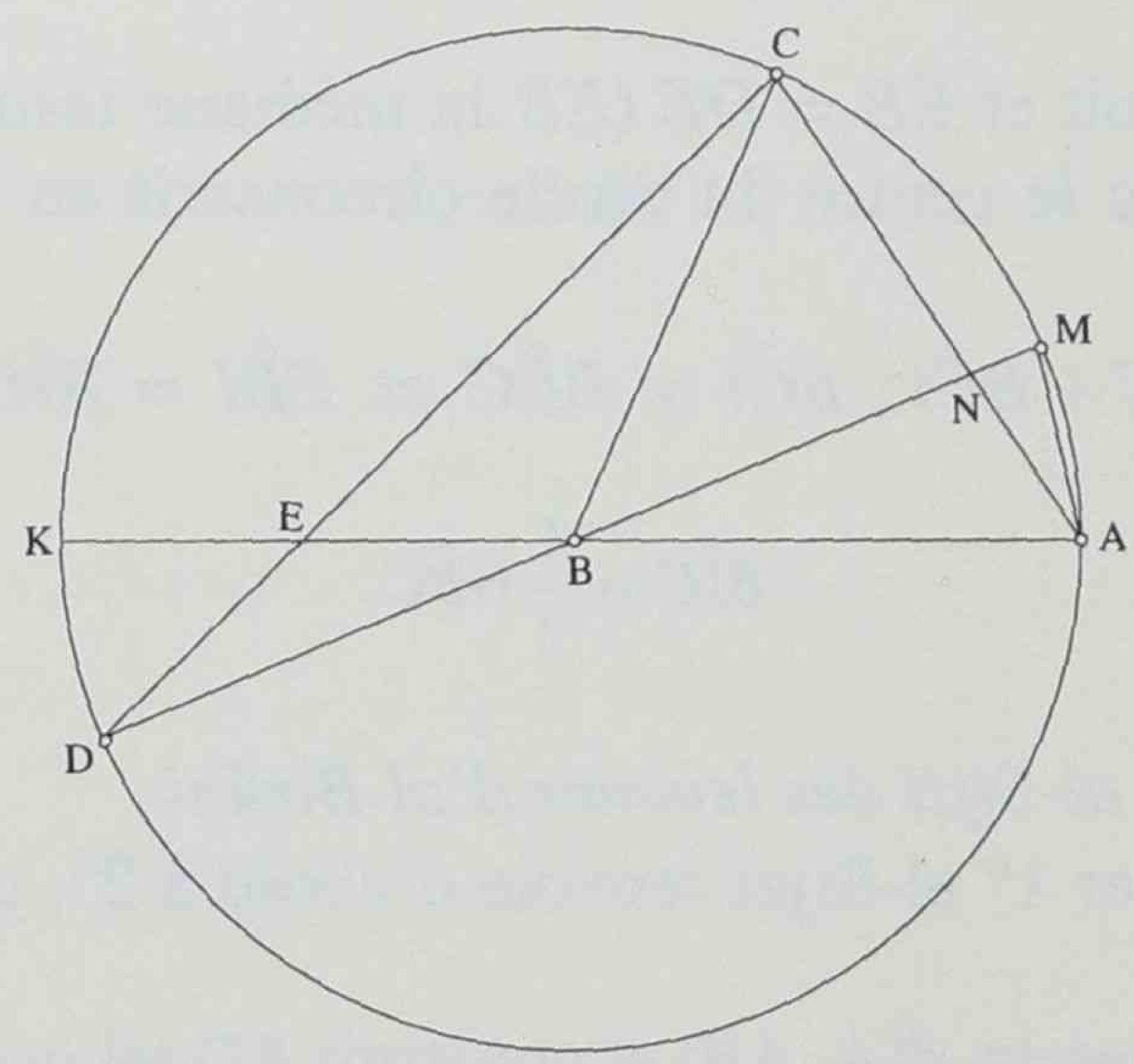


Fig. 85

6° Al-Sijzī démontre enfin le troisième lemme d'al-Bīrūnī de la manière que voici :

Soit le cercle $\mathscr{C}(B, AB)$ et l'angle ABC qu'on veut partager en trois parties égales. Construire un segment CLI tel que $LI = BH$.

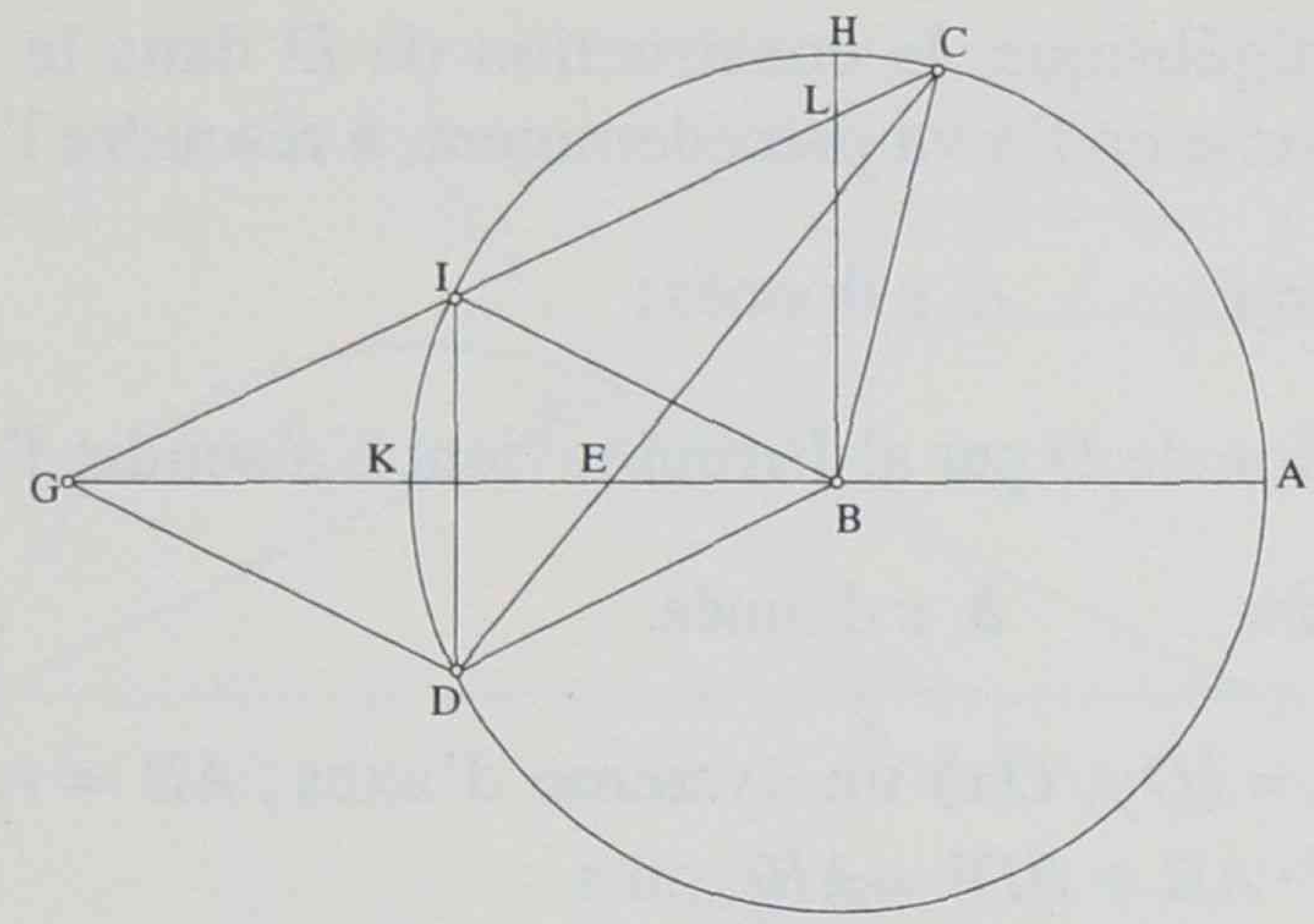


Fig. 86

Soit le segment CED tel que $ED = EB$, constructible d'après le lemme d'al-Sijzī.

Soit G sur le prolongement de BK tel que $DG = DB$; le point G est constructible quand D est connu.

On a dans les triangles CBD et BDG : $\hat{C} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{C}$ et $CB = BD$; $BD = DG$; donc $CD = BG$; d'où $C\hat{B}D = B\hat{D}G$. On a dans le quadrilatère $CBDG$, $CB = BD = DG$ et $\hat{B} = \hat{D}$, donc $B\hat{C}G = D\hat{G}C$ et $CG \,//\, BD$; donc $BIGD$ est un losange et $BI = GI$.

Remarque :

La construction d'al-Bīrūnī est en fait équivalente à celle d'al-Sijzī. En effet (Fig. 87) :

(Diviser $H\hat{B}C$) $\Leftrightarrow$ (trouver D sur AB tel que $CD \cdot AB + BD^2 = AB^2$)
$\Leftrightarrow$ (trouver D sur AB et E sur $\mathscr{C}$ tels que $ED = AB$)
$\Leftrightarrow$ (trouver D' sur BK et E' sur $\mathscr{C}$ tels que $D'E' = D'B$)
$\Leftrightarrow$ (trouver D' sur BK tel que $CD' \cdot BD' + BD'^2 = AB^2$)

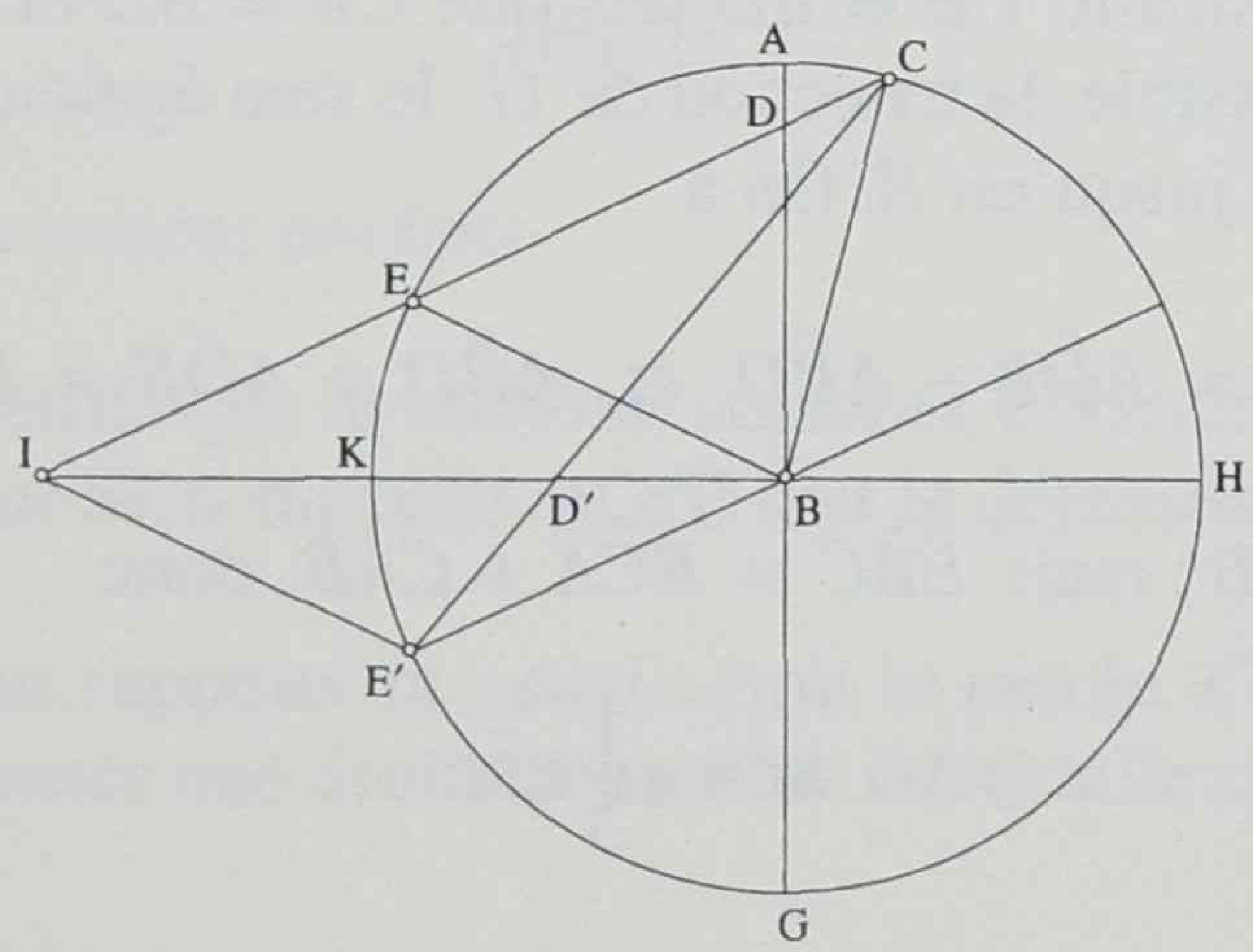


Fig. 87

Dans un langage algébrique, la construction de D dans la proposition d'al-Sijzī revient, comme on l'a vu précédemment, à résoudre l'équation

$$x^3 + ax^2 = c \qquad a, c \text{ donnés ;}$$

alors que la construction de D par al-Bīrūnī revient à résoudre l'équation

$$x^3 + c = bx \qquad b, c \text{ donnés.}$$

Posons $(AB, BH) = (Oy, Ox)$ un système d'axes ; $AB = r$, $C(\alpha, \beta)$ et $D(O, y)$; d'après $CD \cdot AB + BD^2 = AB^2$, on a

$$\left[\alpha^2 + (\beta - y)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot r + y^2 = r^2,$$

d'où

$$\frac{y^4}{r^2} + 2\beta y = 3y^2 ;$$

donc

$$y^3 + 2\beta r^2 = 3r^2 y$$

de la forme

$$x^3 + c = bx.$$

3.1.9. *Le lemme d'al-Ṣāghānī*

Soient $\hat{G}$ et $\hat{H}$ deux angles supplémentaires ; partager $\hat{G}$ en trois parties égales.

Soit ACB l'arc du cercle construit sur AC et d'angle $\hat{H}$. Prolongeons CA indéfiniment. Construire CB et BD tels que $CB = BD$ et $AB = AD$. Si cette construction est possible, la trisection de $\hat{G}$ le sera également.

Prolongeons AB jusqu'en E. On a

$$C\hat{A}B = A\hat{D}B + A\hat{B}D \quad \text{et} \quad A\hat{B}D = A\hat{D}B = D\hat{C}B,$$

donc $C\hat{A}B = 2A\hat{C}B$; mais $E\hat{B}C = B\hat{C}A + C\hat{A}B$, donc

$$B\hat{C}A = \frac{1}{3} E\hat{B}C.$$

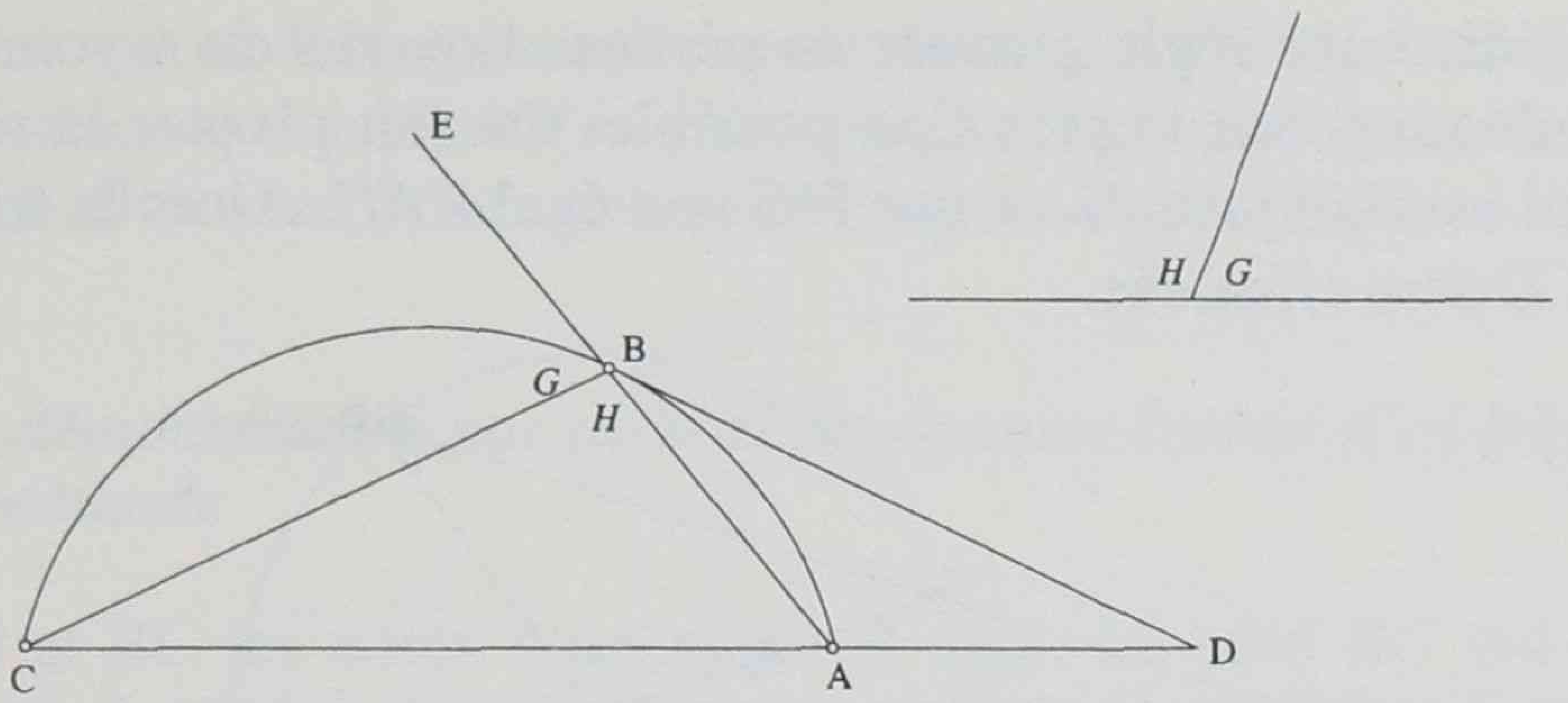


Fig. 88

Démonstration d'al-Sijzī

Reprenons la figure précédente, avec les notations d'al-Ṣāghānī. Soit le cercle $\mathscr{C}(L, LK)$ et $M \in \mathscr{C}$ tel que $I\hat{L}M = \hat{G}$. Construisons le segment MSN tel que $SN = SL$. Cette construction est possible à l'aide du lemme d'al-Sijzī. Joignons NL et construisons $A\hat{C}B = L\hat{M}N$. Joignons AB et construisons $BD = BC$; alors la construction est effectuée. En effet, les deux triangles CBD et DAB sont respectivement semblables aux triangles MLN et LSN ; donc $AD = AB$.

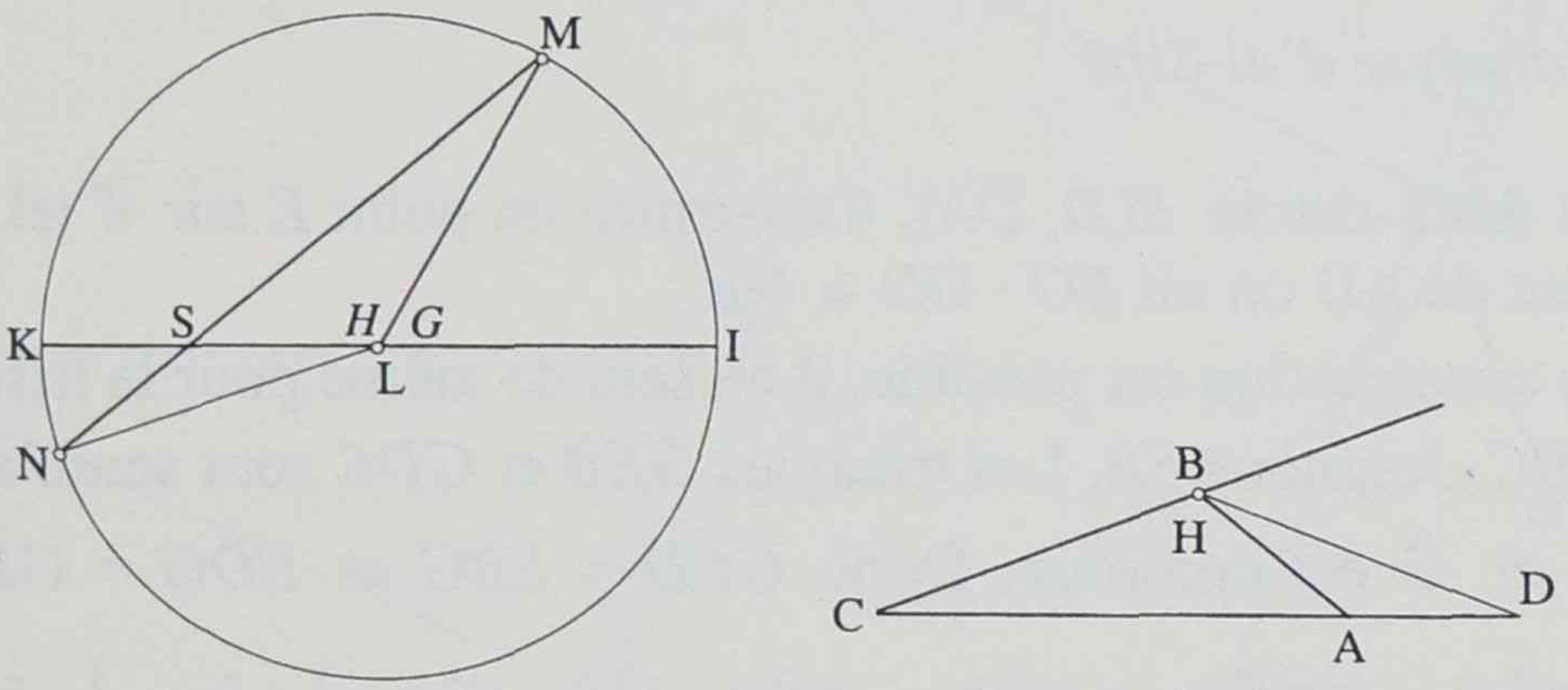


Fig. 89

3.1.10. *Lemme de certains anciens*

Il s'agit d'une *neusis* que la tradition attribuée à Nicomède. Dès le départ, on le remarquera, al-Sijzī rappelle qu'« il faut le déterminer par la géométrie fixe »[1].

Il commence par rappeler la *neusis*. Soit le cercle $\mathscr{C}(C, AC)$ et le point $D \in \mathscr{C}$. On veut mener une droite commune DHG telle que $HG = AC$.

[1] Voir *infra*, p. 346 ; ar. 347, 4.

On considère une règle graduée en parties aliquotes du rayon et de sorte que la graduation soit la plus fine possible. On fait pivoter la règle sur le point D qui est fixé jusqu'à ce que HG soit égal à AC. Alors la trisection de l'angle ACD sera effectuée.

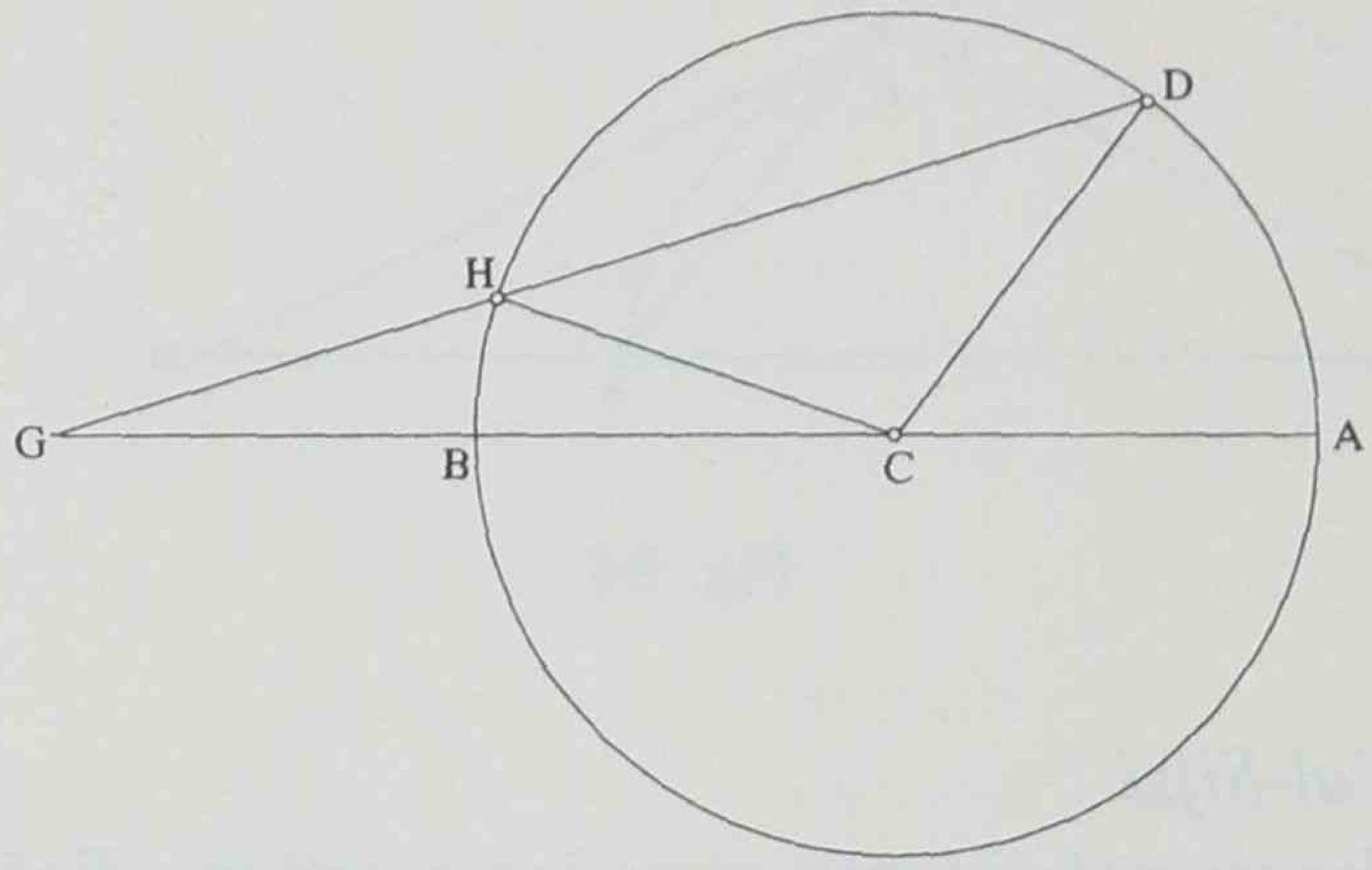


Fig. 90

Par la géométrie fixe : si $HG = AC$, alors la trisection de l'angle ACD est réalisable. En effet, on trace DHG tel que $HG = AC$; on a $A\hat{C}D = C\hat{D}G + D\hat{G}C$; mais $D\hat{H}C = C\hat{D}G = 2H\hat{G}C$; d'où $H\hat{G}C = \frac{1}{3} A\hat{C}D$.

3.1.11. *L'analyse d'al-Sijzī*

Soit un demi-cercle $\mathscr{C}(D, DA)$. Construire un point E sur $\mathscr{C}$ tel que si G est un point de AD on ait $BG \cdot GD = GE^2$.

Si cette construction est possible, il en sera de même pour la trisection de l'angle ABC. Joignons EB. Les triangles GEB et GDE sont semblables, car $\frac{BG}{GE} = \frac{GE}{GD}$ et $\hat{G}$ est commun. Donc $G\hat{E}D = E\hat{B}G$ et $E\hat{D}G = G\hat{E}B$, d'où $G\hat{E}B = G\hat{D}E = 2D\hat{E}B$ et $G\hat{E}D = D\hat{E}B$; donc $G\hat{E}D = \frac{1}{3} A\hat{G}E = \frac{1}{3} A\hat{B}C$.

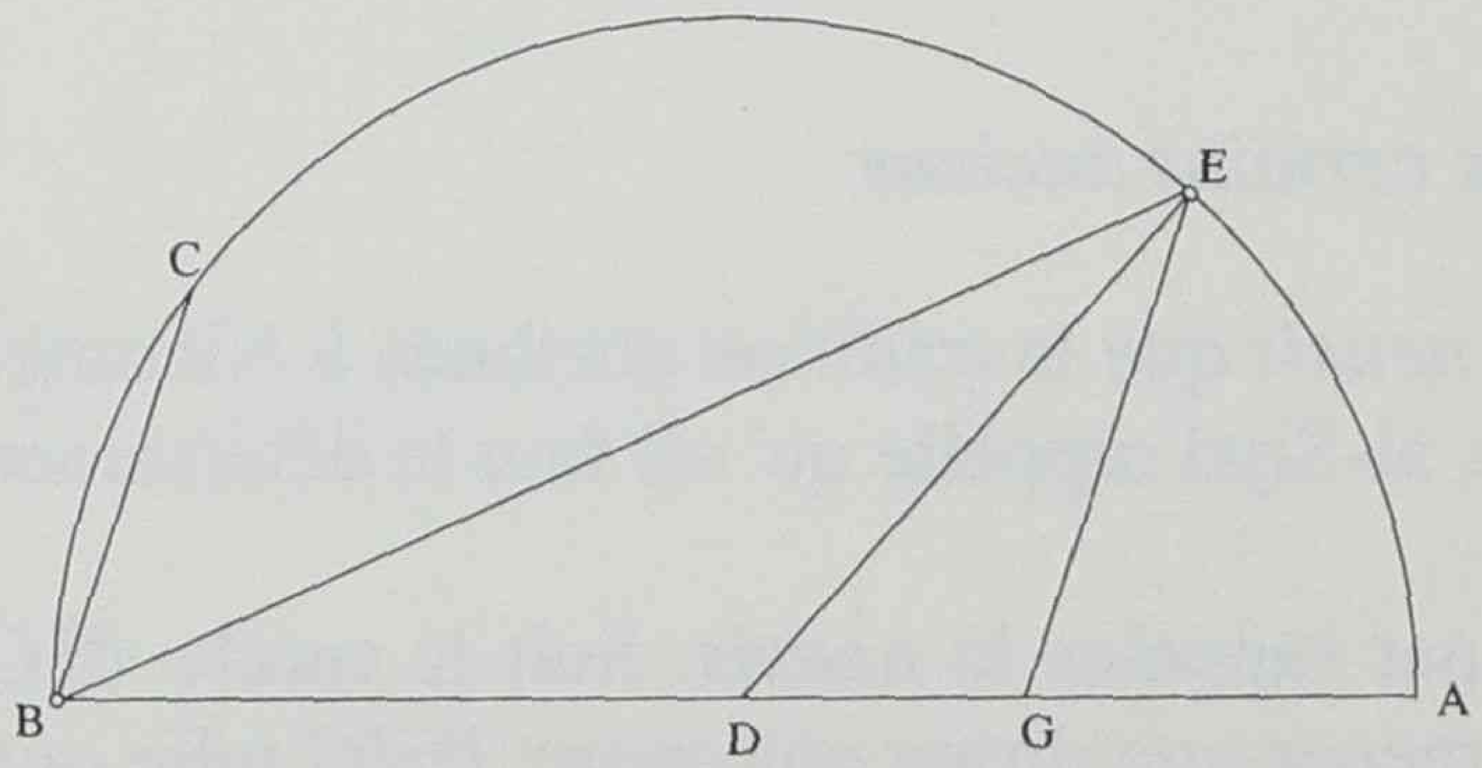


Fig. 91

Ce lemme est en fait un corollaire de celui d'al-Qūhī. Peut-être est-ce pour cette raison qu'al-Sijzī n'en réclame pas la paternité, mais seulement cette analyse. Il écrit en effet : « un autre lemme : notre analyse »[1].

3.1.12. *La démonstration par al-Sijzī du premier lemme d'al-Bīrūnī selon une autre méthode*

Soit AB et BC les côtés d'un angle B aigu. Le côté BC est prolongé indéfiniment du côté de C. Construire les points C sur BC et D sur AB tels que $AD = AC$ et $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$.

Soit l'hyperbole $\mathscr{H}$ de diamètre transverse $B'A'$, de côté droit égal à celui-ci et d'angle d'ordonnées égal à $A\hat{B}C$; et soit le cercle $\mathscr{C}(A', A'B')$; $\mathscr{C}$ coupe nécessairement $\mathscr{H}$ en $E' \neq B'$[2].

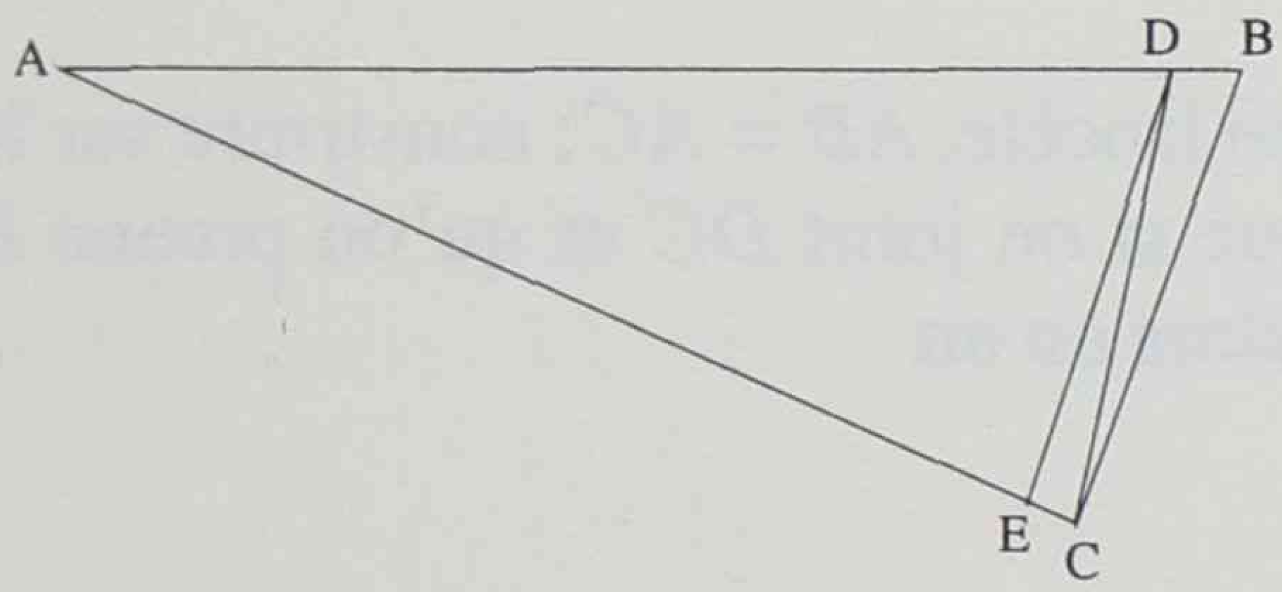


Fig. 92

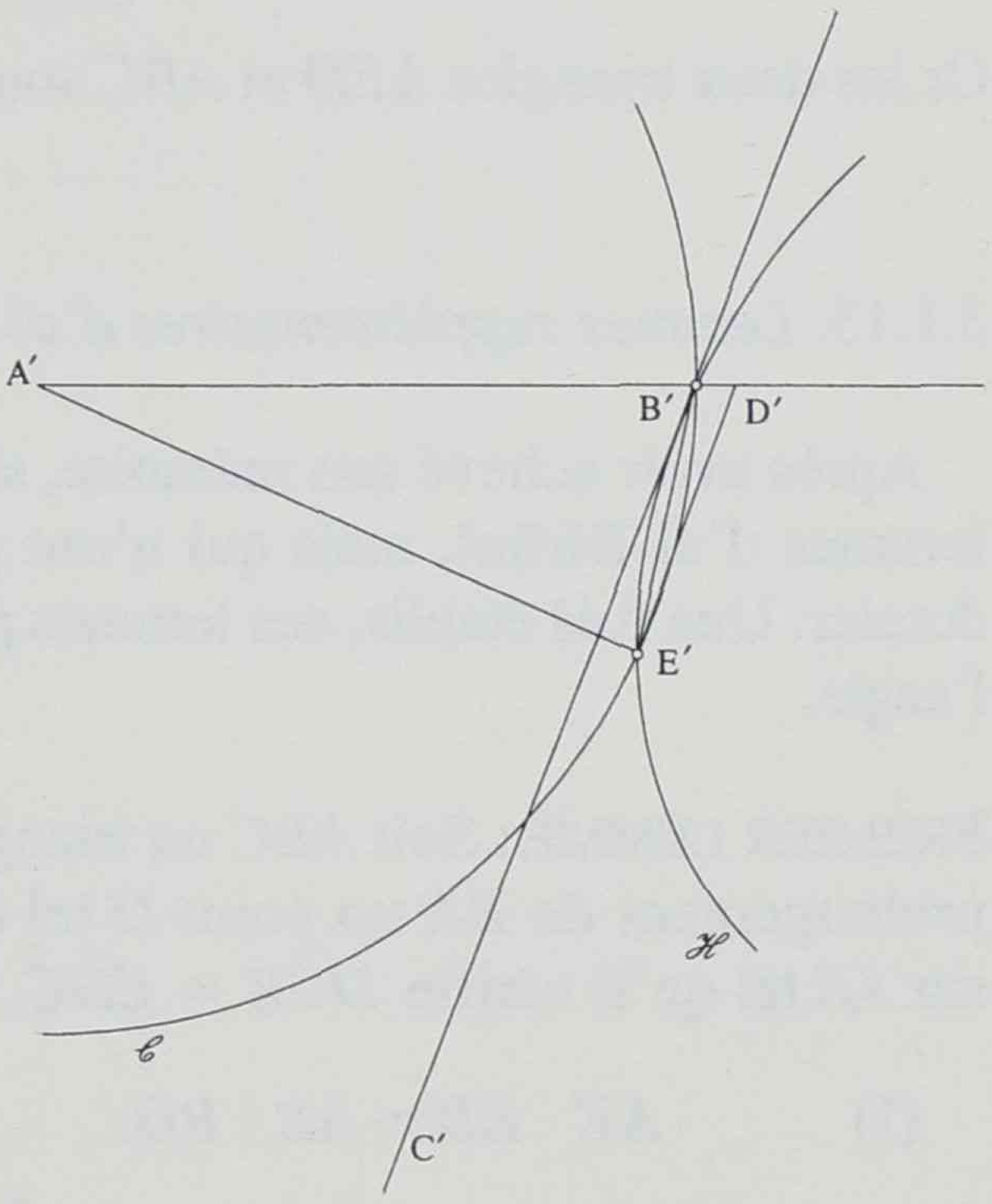


Fig. 93

[1] Voir *infra*, p. 348 ; ar. 349, 1.

[2] Al-Sijzī, dans sa démonstration, se réfère à deux figures, mais il change de notation au cours de la rédaction, les mêmes lettres acquérant ainsi deux significations différentes. Ainsi les lettres B et D s'échangent entre elles au cours de cette rédaction. Nous avons laissé le texte en l'état en changeant de notation dans le commentaire. Les lettres A, B, C, D de la première figure ne changent pas, alors que les lettres A, B, D, E de la deuxième figure sont notées A', B', D', E'.

Soit $E'D'$ un segment ordonnée ; choisissons alors C sur la première figure tel que $\frac{AB}{BC} = \frac{A'D'}{D'E'}$. Joignons AC, prenons $AD = AC$ et joignons DC. Les triangles ABC et $A'D'E'$ sont semblables car $A\hat{B}C = A'\hat{D}'E'$ et $\frac{AB}{BC} = \frac{A'D'}{D'E'}$. De plus E' étant sur l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$, on a $D'E'^2 = A'D' \cdot B'D'$, soit $\frac{A'D'}{D'E'} = \frac{D'E'}{B'D'}$, ce qui montre que les triangles $A'D'E'$ et $E'D'B'$ sont semblables. Comme $AD = AC$ et $A'E' = A'B'$, les triangles $E'D'B'$ et CBD sont semblables et par suite les triangles ABC et BCD sont semblables. Donc $B\hat{C}D = C\hat{A}D$.

Soit $DE \,//\, CB$, alors les deux triangles CED et CAD sont semblables car $C\hat{D}E = D\hat{C}B = D\hat{A}C$. Or on a $\frac{ED}{DA} = \frac{CD}{CA}$; mais $DA = CA$, donc $ED = CD$. Or les deux triangles AED et ABC sont semblables, donc $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = \frac{AC}{DC}$.

3.1.13. *Lemmes supplémentaires d'al-Bīrūnī démontrés par al-Sijzī*

Après avoir achevé son mémoire, al-Sijzī fait suivre en addenda quelques lemmes d'al-Bīrūnī, mais qui n'ont pas été établis, selon ses dires, par ce dernier. Une fois établis, ces lemmes permettront de résoudre la trisection de l'angle.

PREMIER LEMME : Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$; construire sur le prolongement de BA un point D tel que si on joint DC et qu'on prenne E sur AB tel qu'il vérifie $D\hat{C}E = E\hat{D}C$, alors on ait

(1) $\qquad AE \cdot EB = AB \cdot BD.$

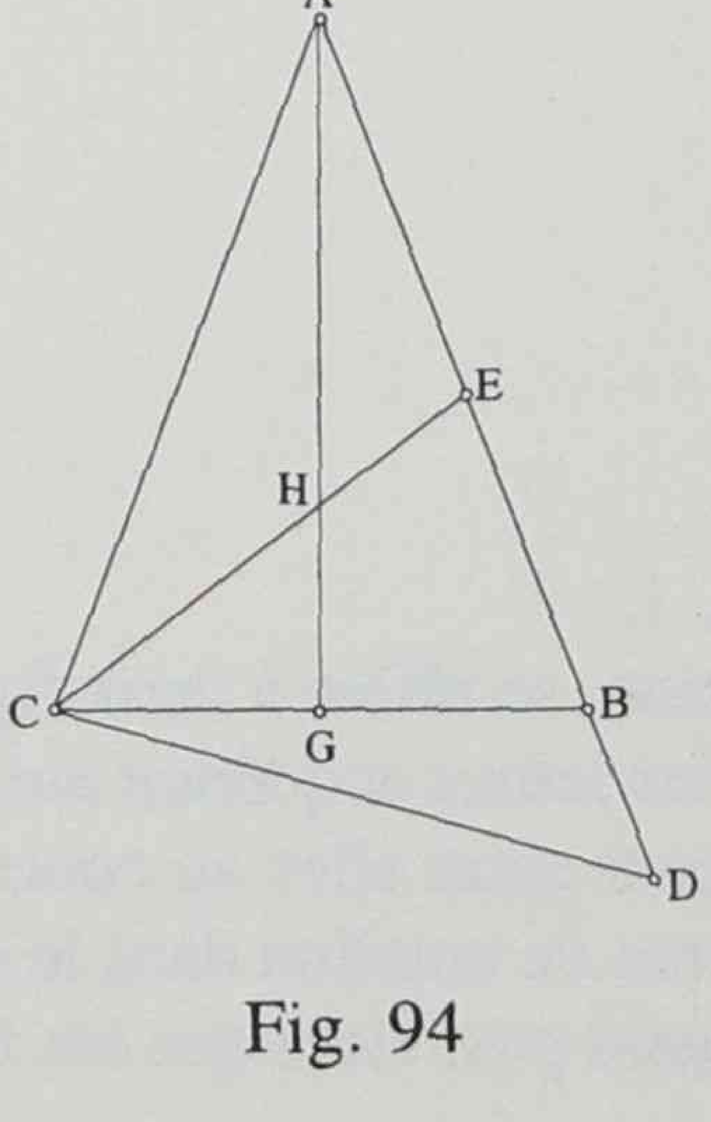


Fig. 94

Analyse:

De (1) on a

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AB}{EB},$$

d'où, par permutation

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BD}{EB}.$$

Mais $DBE = EHC$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{EH}{HC}$ (AH est bissectrice de $\hat{A}$) ; donc $EH = BD$ et $CH = BE$ [1].

On a donc obtenu DE, EC, DH. La trisection de $A\hat{B}I$ est alors possible car $CH = BE$ et $HC = BH$; donc

$$BH = BE,\ B\hat{E}H = E\hat{H}B \text{ et } E\hat{H}B = 2H\hat{C}B;$$

donc $B\hat{E}H = 2E\hat{C}B$; d'où la trisection de $I\hat{B}A$.

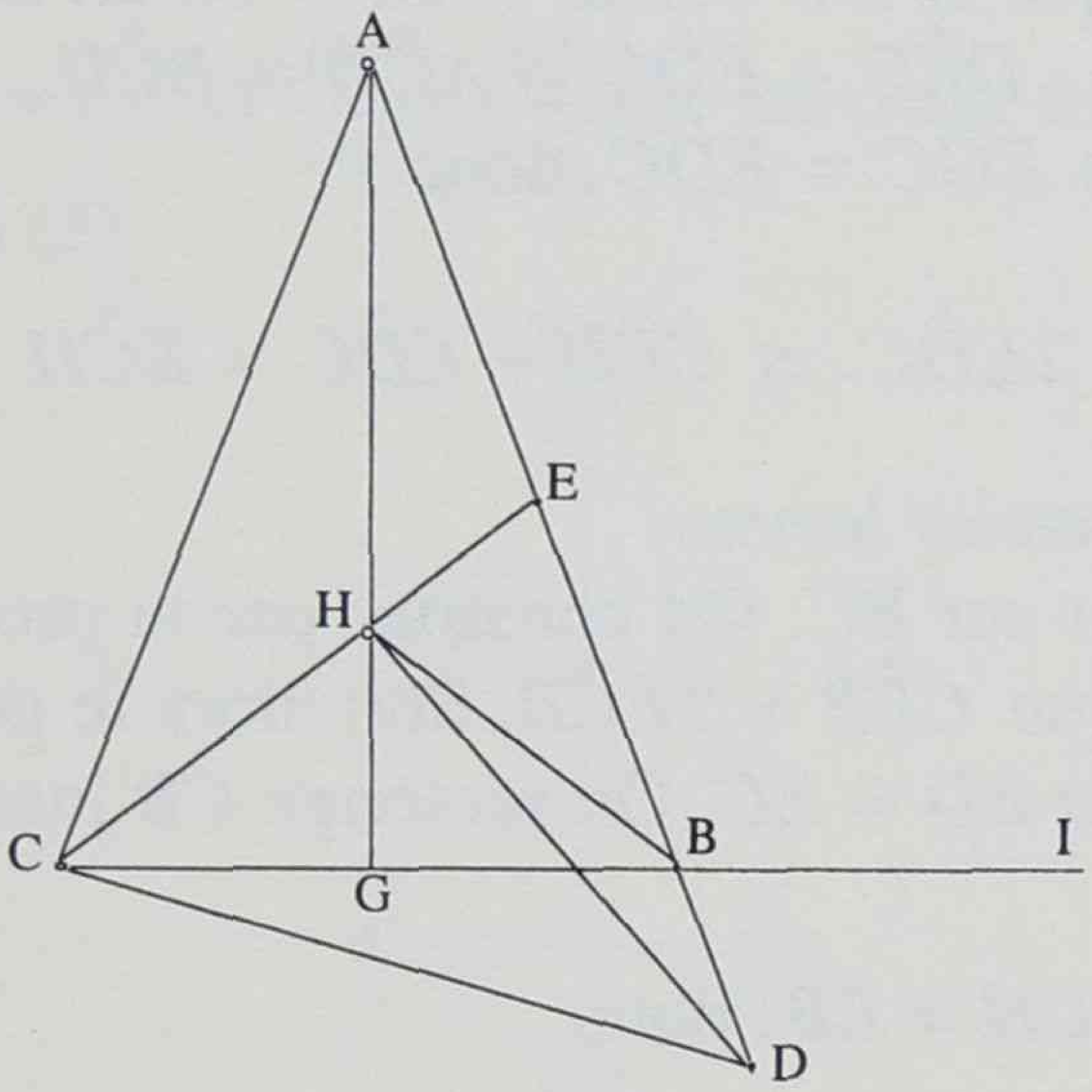


Fig. 95

[1] H est le pied de la bissectrice de l'angle A dans le triangle AEC, donc $\frac{HE}{HC} = \frac{AE}{AC}$; or par hypothèse $\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BE}$; on a donc $\frac{HE}{HC} = \frac{BD}{BE}$. On en déduit

$$\frac{HE + HC}{HC} = \frac{BD + BE}{BE} \Rightarrow \frac{EC}{HC} = \frac{DE}{BE};$$

or $EC = ED$, d'où $HC = BE$. On a également

$$\frac{HE}{HE + HC} = \frac{BD}{BD + BE} \Rightarrow \frac{HE}{EC} = \frac{BD}{ED},$$

d'où $HE = BD$.

Avant de démontrer les lemmes d'al-Bīrūnī, al-Sijzī établit la proposition suivante : construire sur un angle donné DCB un triangle DCE tel que $D\hat{E}C = 2E\hat{D}C$ et que $C\hat{D}E + C\hat{E}D = \hat{\alpha}$; $\hat{\alpha}$ un angle donné égal à l'angle $B\hat{C}H$ avec H sur le prolongement de CD.

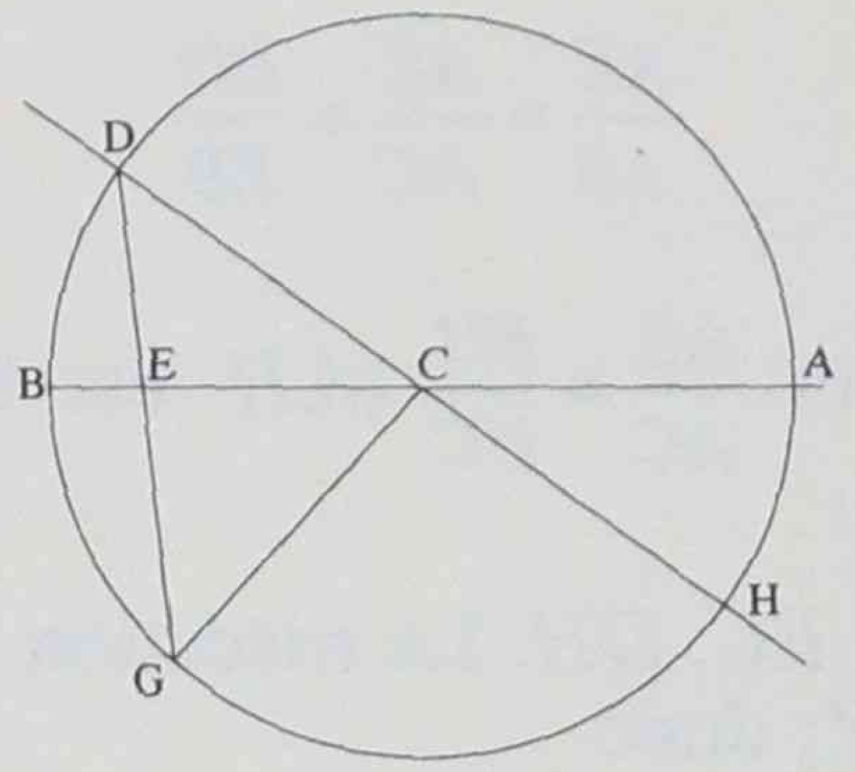


Fig. 96

Soit $B\hat{C}H$ ou $D\hat{C}A$ l'angle extérieur. Soit le cercle $\mathscr{C}(C, AC)$. Prolongeons DC jusqu'en H sur la circonférence. Par le lemme d'al-Sijzī, on construit le point E sur BC tel que si DE coupe $\mathscr{C}$ en G on ait $EG = EC$. On a alors $D\hat{E}C = 2E\hat{D}C$ et $D\hat{E}C + E\hat{D}C = A\hat{C}D = B\hat{C}H$. En effet, on a $C\hat{E}D = 2E\hat{C}G$. Mais $E\hat{G}C = E\hat{D}C$, donc

$$C\hat{E}D = 2E\hat{D}C \text{ et } C\hat{E}D + E\hat{D}C = E\hat{C}H = D\hat{C}A.$$

Démonstration du premier lemme

Soit AG la hauteur sur BC. On construit par la proposition ci-dessus le point E sur AB tel que $C\hat{E}B = 2E\hat{C}B$. Soit alors le point D sur le prolongement de AB tel que $ED = EC$. On prolonge CB jusqu'en I. On a déjà vu que $BH = BE$.

Mais $\frac{AC}{CH} = \frac{AE}{EH}$ et $CH = EB$; donc

$$\frac{AC}{BE} = \frac{AB}{BE} = \frac{AE}{EH} \text{ et } EH = BD;$$

donc

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AE}{BD};$$

d'où (1).

SECOND LEMME : Soit $ABCD$ un trapèze tel que AB // CD et

(1) $AC = BD$;

et tel que si E sur AD vérifie $DE = BD$, on ait

$$(2) \qquad \frac{DC}{BD} = \frac{AB}{AE}\,;$$

construire un tel trapèze sachant que l'on se donne CD et l'angle ACD.

Analyse:

On se donne CD et $\hat{C} = \hat{D}$. On prolonge CA et DB qui se rencontrent en H ; soit $HG \perp CD$. On construit à l'aide du lemme 1 la droite DEA (E sur HG, A sur HC) telle que $\frac{HA}{AE} = \frac{HC}{AC}$. Par le lemme 1, on a : $DE = AC = BD$. On mène AB parallèle à CD, donc

$$\frac{AB}{DC} = \frac{HA}{HC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{BD},$$

d'où (2).

Le quadrilatère $ACDB$ est alors le trapèze cherché.

Démonstration: $DE = CE$ et $\frac{DC}{DE} = \frac{AB}{AE}$ car les deux triangles CDE et ABE sont semblables ; d'où (2).

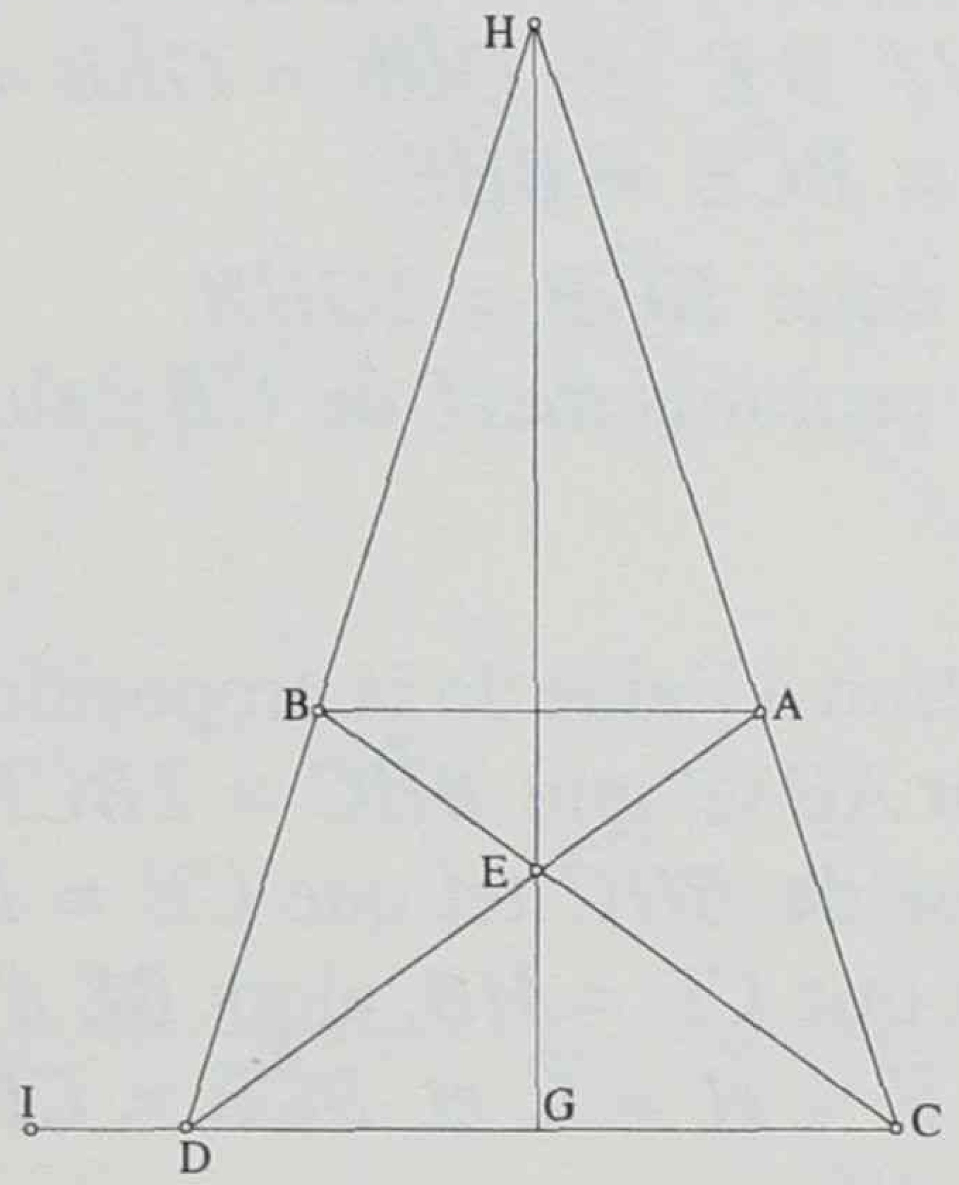


Fig. 97

PROPOSITION : Soit I sur le prolongement de CD. Partageons l'angle IDB en trois parties égales. Construisons le trapèze. On a $DE = DB$, donc $E\hat{B}D = B\hat{E}D$. Mais $B\hat{E}D = 2B\hat{C}D$, donc $D\hat{B}C = 2B\hat{C}D$. Or

$$I\hat{D}B = D\hat{B}C + D\hat{C}B = 3B\hat{C}D.$$

TROISIÈME LEMME : Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$; et soit AD une hauteur prolongée indéfiniment. Construire E sur AD prolongée et G sur BD tels que si EG coupe AB en H, on ait $BG = GE$ et $HG = CG$.

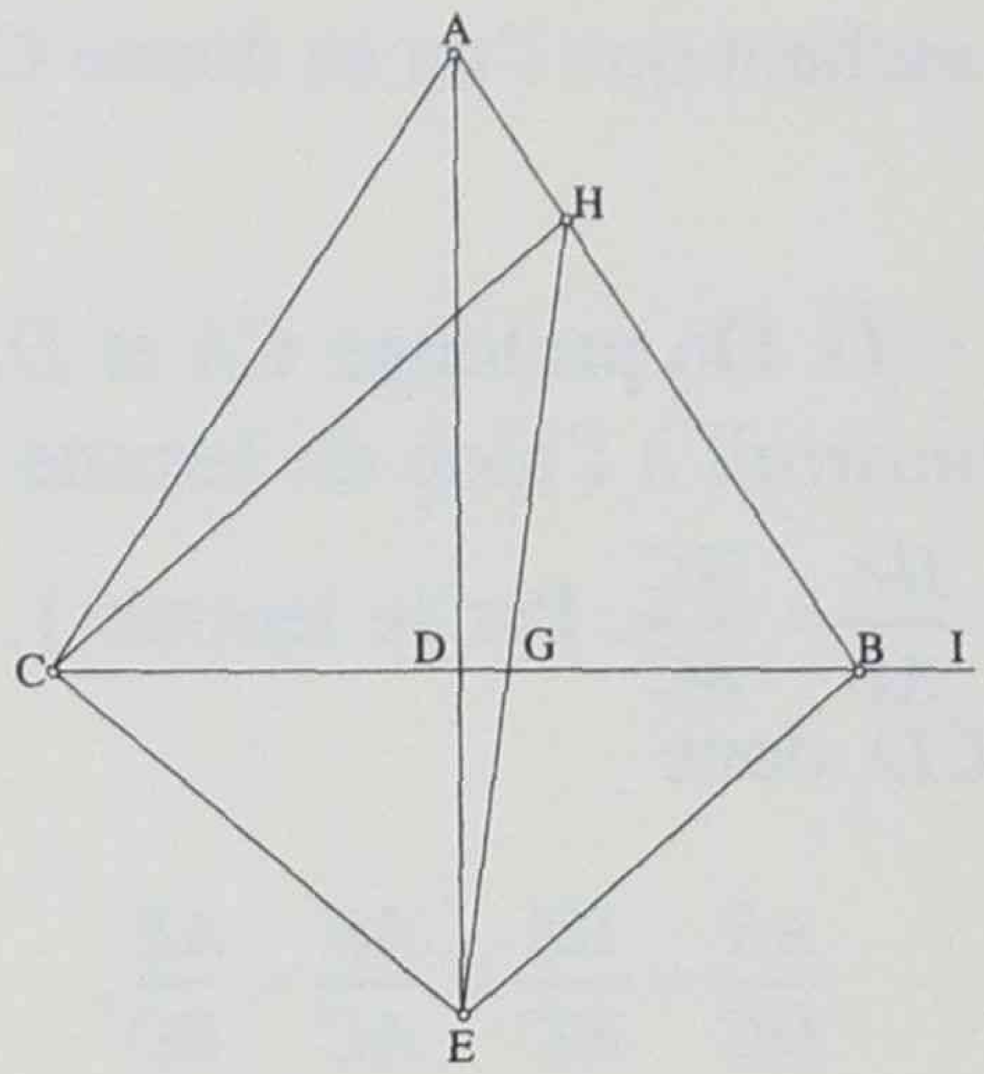


Fig. 98

Analyse :

Supposons que la construction a été effectuée, et joignons BE, CE et CH. On a $BHCE$ un trapèze avec $BE \mathbin{//} CH$ et $BH = CE$, car les deux triangles BGE et CGH sont isocèles, avec $BG = GE$ et $HG = CG$.

On a donc $CH \mathbin{//} BE$ et $G\hat{B}E = G\hat{E}B = G\hat{H}C = G\hat{C}H$, d'où $B\hat{H}E = B\hat{E}H$, car $C\hat{B}E = B\hat{C}E = B\hat{H}E$.

Mais $H\hat{G}B = 2G\hat{E}B$, donc $H\hat{G}B = 2G\hat{H}B$.

Soit le point I sur le prolongement de CB ; alors $H\hat{G}B + G\hat{H}B = H\hat{B}I$, donc $H\hat{B}I = 3G\hat{H}B$.

Démonstration : On construit à l'aide de la proposition auxiliaire du lemme 1 d'al-Bīrūnī le point H sur AB tel que $B\hat{H}C = 2B\hat{C}H$.

Soit E sur la bissectrice de $B\hat{H}C$ tel que $CE = HB$. On joint BE et EC. Comme $H\hat{C}E = C\hat{H}B$, et que $CE = HB$, alors $BE \mathbin{//} CH$. Dans les triangles BEG et CHG, on a $\hat{B} = \hat{E} = \hat{H} = \hat{C}$ et $B\hat{C}E = C\hat{H}E$; donc $B\hat{C}E = B\hat{E}H$ et $BH = BE$; donc $CE = BE$.

Le point E est donc sur AD, et on a $CG = HG$ et $GE = GB$.

QUATRIÈME LEMME : Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$; et soit AD une hauteur. Construisons G sur AD tel que si BG coupe AC en E, on ait

(1) $BG = EC$ ou $GE = GD$ ou $BG = GA$ ou $BG = GC$ (évident) ou $BG = GD$ (impossible).

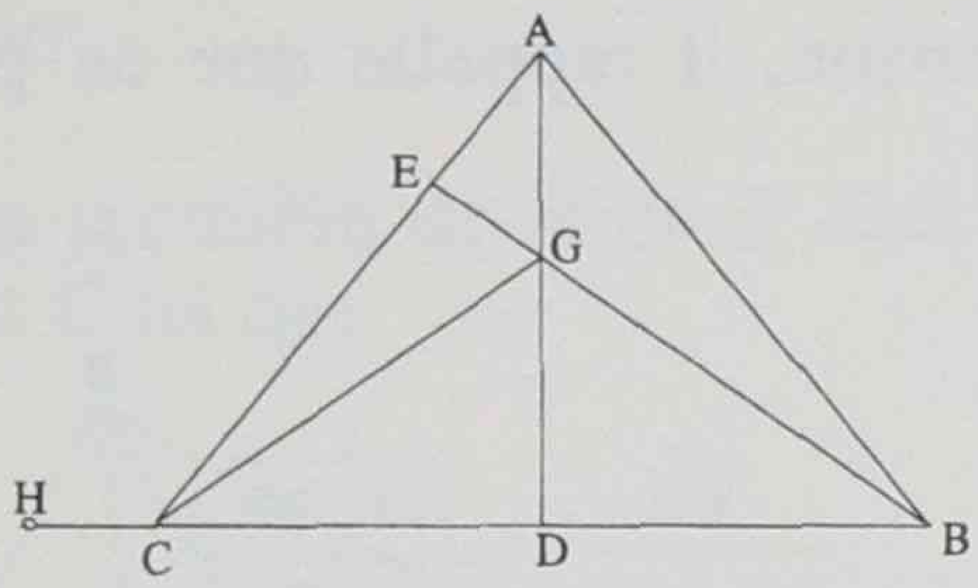


Fig. 99

Supposons la construction effectuée ; soit BGE donné. On joint CG ; on a $GB = CE$ par hypothèse. Mais $GB = GC$, donc $GC = CE$. Or $E\hat{G}C = 2E\hat{B}C$. Dans le triangle EBC on a $B\hat{E}C = 2E\hat{B}C$; donc $E\hat{C}H = 3E\hat{B}C$.

Démonstration : Trouver G vérifiant (1). On construit à l'aide de la proposition auxiliaire du premier lemme le point E sur AC tel que, dans le triangle BEC, on ait $\hat{E} = 2\hat{B}$. Comme $E\hat{G}C = 2\hat{B}$ également, on a $EC = GC$. Mais $GC = GB$, donc $EC = GB$.

CINQUIÈME LEMME : Soit ABC un triangle rectangle en $\hat{B}$ et soit l'angle $B\hat{D}A$ connu. Construire G sur BD tel que si CG coupe BA en E on ait

$$\frac{BG}{CE} = \frac{BD}{AC}.$$

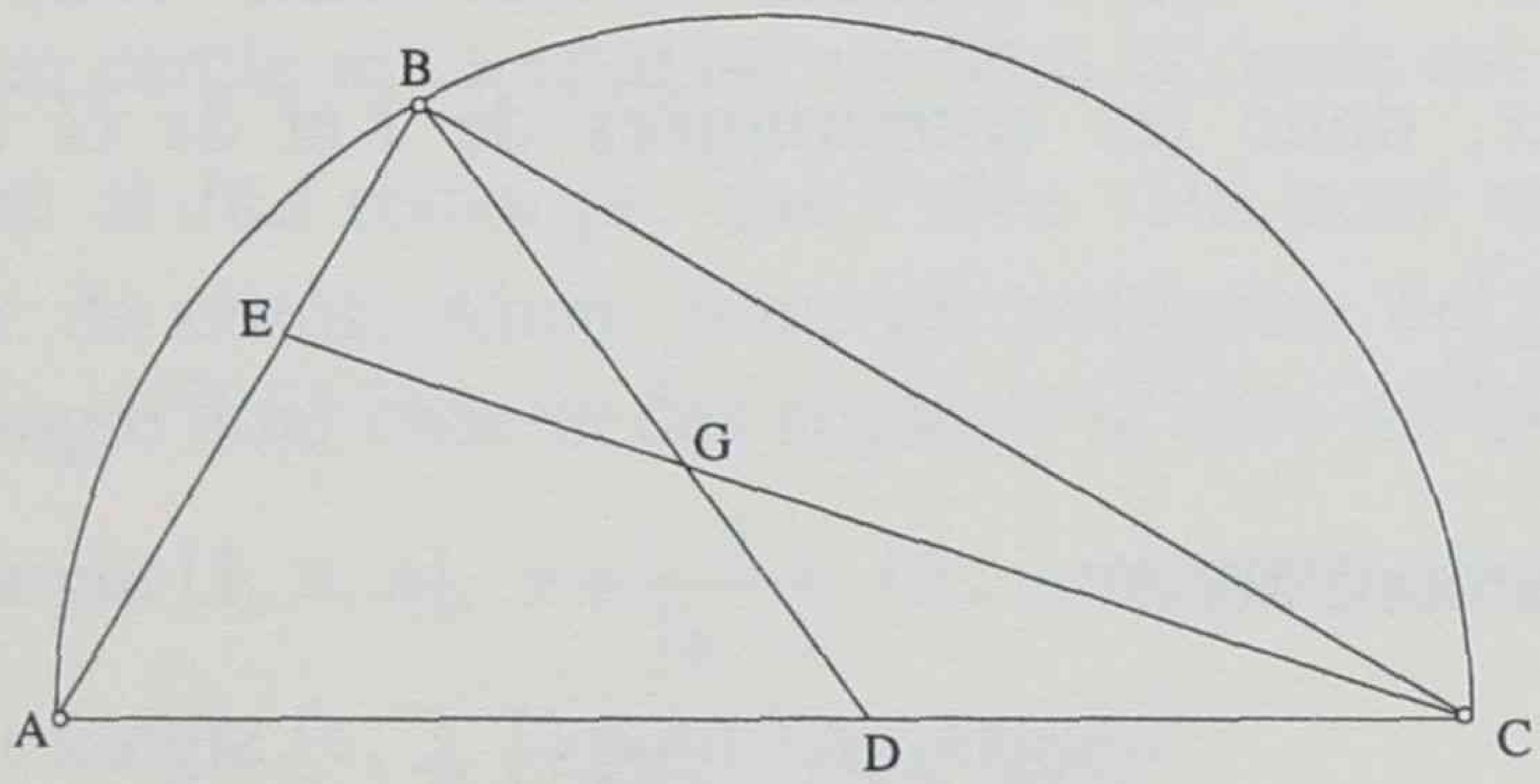


Fig. 100

Al-Sijzī écrit alors que si nous complétons les hypothèses, cette proposition sera un lemme pour la trisection de l'angle. Au lieu de l'analyse, il écrit seulement : « Il nous faut méditer le cinquième problème et nous demander s'il conduit à un lemme pour la division de l'angle en trois parties égales »[1].

[1] Voir *infra*, p. 378 ; ar. 379, 3-4.

Quant à sa démonstration, il rappelle que ce problème se ramène au précédent (le quatrième).

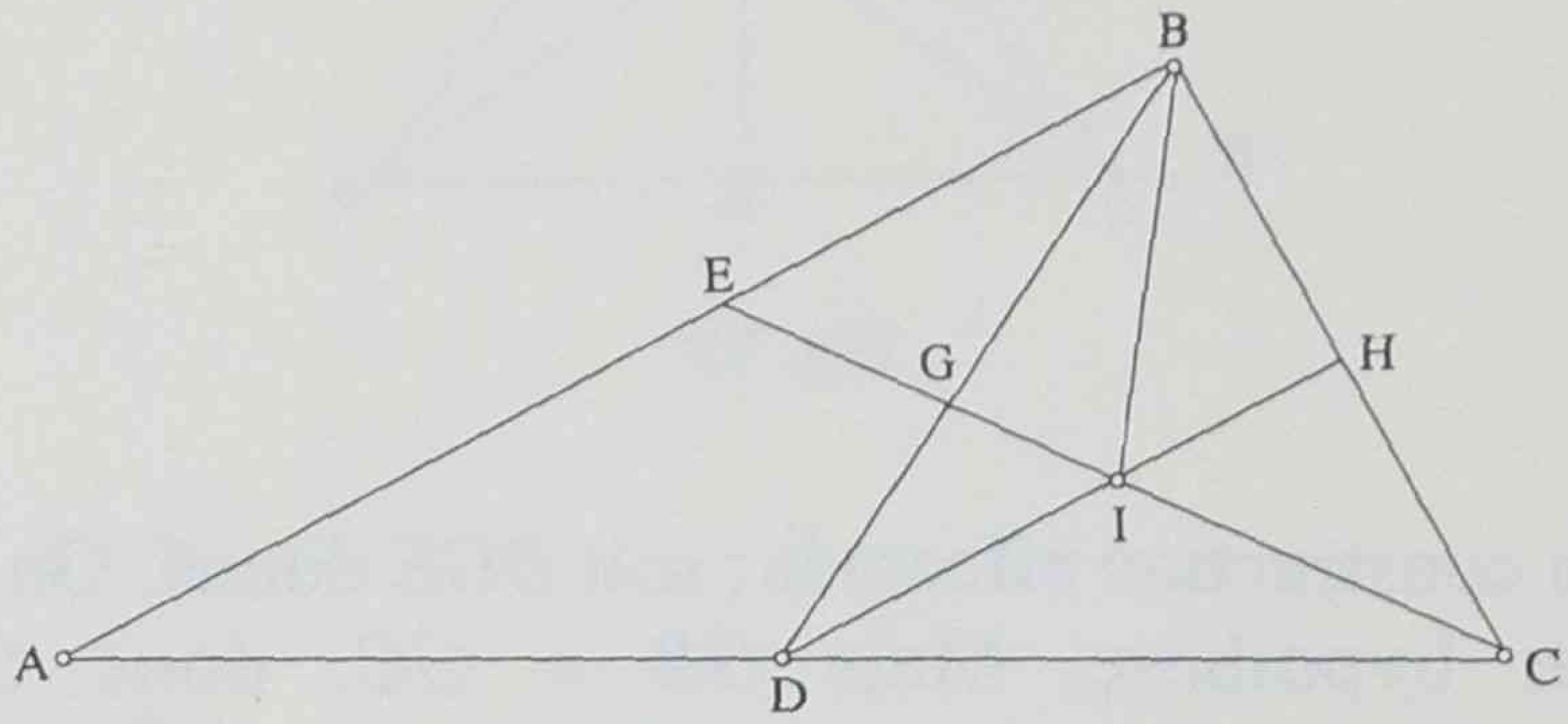


Fig. 101

Soit D sur AC tel que $BD = DC$; menons la hauteur DH du triangle isocèle DBC. On construit à l'aide du quatrième lemme $CIGE$ tel que $BG = CI$. On joint BI tel que $BI = CI$, donc $BI = BG$. Mais $CIE = 2BI$ car les triangles BIC et BIE sont isocèles ; donc $BG = \frac{1}{2}CE$ et $\frac{BG}{CE} = \frac{1}{2} = \frac{BD}{AC}$, D étant le milieu de AC. La suite se montre facilement, comme précédemment.

Choisissons comme axes les côtés BA, BC du triangle. Les coordonnées de A et C sont respectivement $(a, 0)$ et $(0, c)$. On cherche une droite d'équation $y = c - px$, passant par C et coupant DH et BD en I et G de manière que $BG = CI$. Les équations de DH et BD sont respectivement $y = \frac{c}{2}$ et $ay = cx$, donc les coordonnées de I et de G sont $I : \left(\frac{c}{2p}, \frac{c}{2}\right)$, $G : \left(\frac{ac}{ap+c}, \frac{c^2}{ap+c}\right)$.

La condition s'écrit donc

$$\frac{c^2\left(a^2+c^2\right)}{\left(ap+c\right)^2} = \frac{c^2\left(p^2+1\right)}{4p^2},$$

soit

$$a^2p^4 + 2acp^3 - 3(a^2 + c^2)p^2 + 2acp + c^2 = 0$$

équation du quatrième degré en p.

3.2. *L'heptagone régulier*

Il s'agit en fait de la première division d'Abū al-Jūd (D_2) : diviser un segment AB en un point C tel que

$$\frac{\sqrt{AB.AC}}{BC} = \frac{AB}{AB+BC}.$$

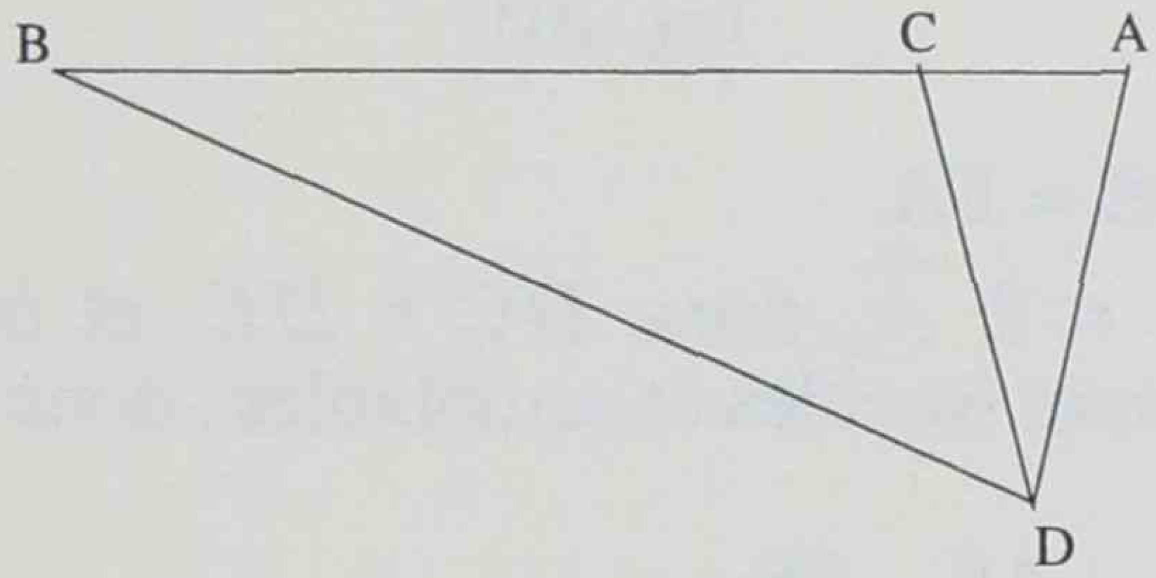


Fig. 102

De cette division on déduit la construction du point D tel que $BD = BA$ et $AD = \sqrt{AB \cdot AC}$. On montre que D est sur la médiatrice de AC et que les triangles ABD et ACD sont isocèles et semblables ; ils sont de type [1, 3, 3].

Abū al-Jūd avait proposé cette division, selon ses propres dires, dans la première épître, celle de 968-969. Il explique comment il a été conduit à ce problème et à cette division. Son modèle est Euclide et sa construction du pentagone régulier. Celle-ci fait intervenir un triangle isocèle dont chacun des angles à la base est double de l'angle au sommet ; alors $\alpha = \frac{\pi}{5}$. Un angle α inscrit dans un cercle intercepte un arc dont la corde est égale au côté du pentagone. Abū al-Jūd remarque que l'idée vaut pour un polygone à un nombre impair de côtés. Ainsi, pour un polygone de $2n + 1$ côtés, on utilisera un triangle dont chacun des angles à la base est n fois l'angle α au sommet, le triangle $[1, n, n]$, $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$. On comprend dès lors le choix par Abū al-Jūd du triangle [1, 3, 3] pour l'heptagone.

L'analogie a sans doute ses limites, et Abū al-Jūd devait savoir que l'heptagone n'est pas constructible à la règle et au compas. Voici l'analyse qu'il avait suivie pour construire un tel triangle.

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et $A\widehat{B}C = B\widehat{C}A = 3\ B\widehat{A}C$. Soit un point D sur AB et un point E sur AC tels que $B\widehat{C}D = B\widehat{A}C$ et $A\widehat{D}E = B\widehat{A}C$.

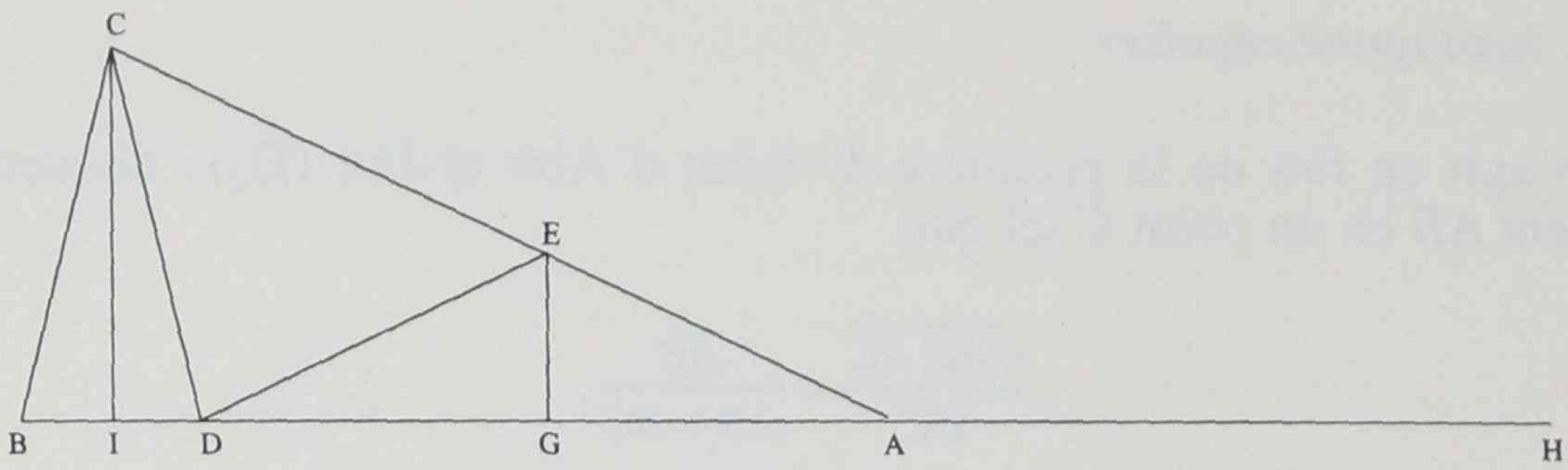


Fig. 103

On a $BC = CD$ et $DE = EA$.

D'autre part, $D\widehat{C}E = 2\,\widehat{A}$, donc $DC = DE$, et on a $BC = EA$. Les triangles ABC et BCD sont isocèles et semblables ; donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB \cdot BD;$$

d'où

$$(1) \qquad AE^2 = AB \cdot BD.$$

On mène $CI \perp BD$ et $GE \perp AD$; il vient $IB = ID$ et $GA = GD$. On a

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AI}.$$

On prolonge BA de $AH = AD$; alors $BH = 2\,AI$. Or $AD = 2\,AG$, donc

$$(2) \qquad \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{BH}.$$

Les points B, D, A, H vérifient donc (1) et (2) ; or $BH = AB + AD$. On peut alors caractériser la division (A, D, B) par la relation

$$(3) \qquad \frac{AB}{AB + AD} = \frac{\sqrt{AB \cdot BD}}{AD}.$$

Réciproquement, à partir d'une droite AB et d'un point D de cette droite qui vérifie la relation (3), on pourra obtenir un triangle isocèle tel que la somme de ses angles soit sept fois l'angle α au sommet, donc $\alpha = \frac{\pi}{7}$. On en déduit la construction de l'heptagone.

Abū al-Jūd ne donne ici ni la construction de la division, ni celle de l'heptagone, mais rappelle seulement qu'il avait déjà réalisé tout cela dans son mémoire de 968-969 à l'aide d'une parabole et d'une branche d'hyperbole. Mais là est précisément le point disputé. Il revient dans un autre traité intitulé *Livre sur la construction de l'heptagone dans le cercle* sur cet ancien mémoire, et écrit :

> Quant à mon ancienne épître sur la construction de l'heptagone, dans laquelle j'ai devancé tout le monde et me suis singularisé par la voie que j'ai suivie, je te [son correspondant] répète ici-même sa totalité en une seule proposition démontrée [...][1].

Abū al-Jūd donne alors la démonstration suivante :

Soit un segment AI de milieu B et le carré $BIKL$; soit la parabole $\mathscr{P}$ de sommet A, d'axe AI, de côté droit AB, et $\mathscr{H}$ la branche d'hyperbole de sommet B, de diamètre transverse $2\ BK$ et de côté droit $2\ BK$ – $\mathscr{H}$ admet donc les droites KI et KL pour asymptotes. Le sommet B de $\mathscr{H}$ est à l'intérieur de $\mathscr{P}$, $\mathscr{H}$ coupe donc $\mathscr{P}$ en deux points ; soit M celui qui est entre A et L. On mène $MD \perp AB$ et on construit un point C tel que $AC = CD = MD$. On a donc $AB \cdot AD = AC^2$; les deux triangles ABC et ADC sont semblables, ils sont de type [1, 3, 3] et par conséquent $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \frac{\pi}{7}$.

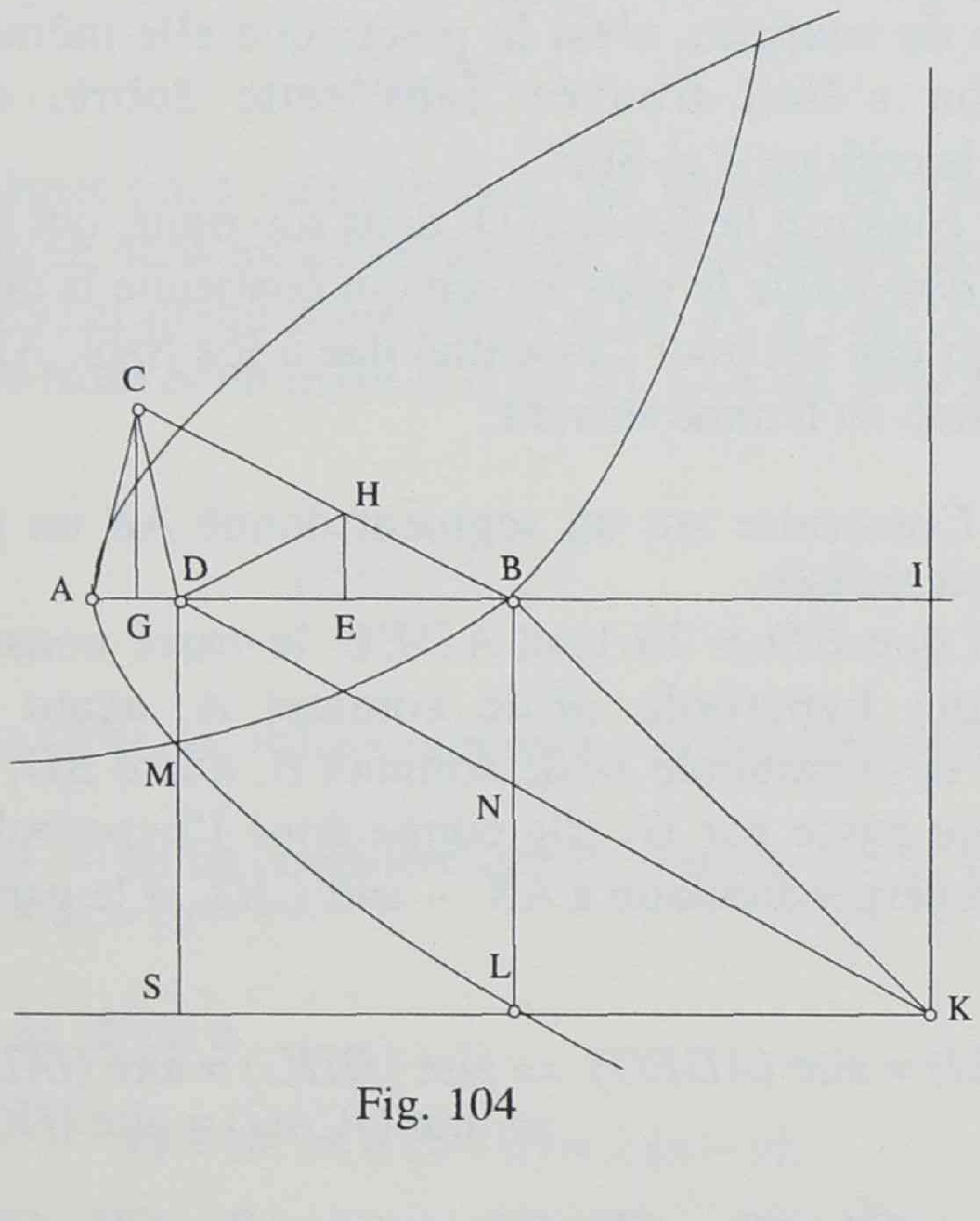


Fig. 104

[1] *Sur la construction de l'heptagone dans le cercle, qu'il a envoyé à Abū al-Ḥasan Aḥmad ibn Muḥammad ibn Isḥāq al-Ghādī*, dans *Les Mathématiques infinitésimales du* IX*e au* XI*e siècle*, vol. III, p. 702.

En effet, la condition d'Abū al-Jūd s'écrit ici $\frac{AB}{AB+BD} = \frac{\sqrt{AB \cdot AD}}{BD}$. Or $\sqrt{AB \cdot AD} = AC = MD$ et $AB + BD + DI$; la condition devient donc

$$MD \cdot DI = (AB - MS) \cdot DI = AB \cdot BD,$$

soit

$$MS \cdot DI = AB \cdot (DI - DB) = AB^2$$

qui n'est autre que l'équation de l'hyperbole $\mathscr{H}$.

Notons que la construction fait apparaître deux autres triangles : *CBD*, de type [1, 2, 4], et *DHB*, de type [1, 5, 5].

Abū al-Jūd donne donc la division (*A*, *D*, *B*) de type D_2, ce qui n'est pas mentionné. Il utilise seulement l'égalité $AC^2 = AB \cdot AD$, avec $AC = MD$. Enfin, il ne donne que la synthèse.

S'agit-il d'une rédaction de l'ancienne épître, où Abū al-Jūd rectifie en chemin quelques erreurs qui lui ont été reprochées ? La seule justification de cette logique de soupçon, c'est la polémique elle-même; car si une telle démonstration s'était trouvée dans cette épître, on comprendrait difficilement la critique d'al-Sijzī.

Ce dernier construit la division D_2 dans son traité, qui se trouve être ainsi le document *disponible* le plus ancien qui contienne la démonstration, dont il reconnaît qu'elle est pour l'essentiel due à Ibn Sahl. Al-Sijzī donne donc la démonstration du lemme suivant :

LEMME 1 : Construire sur un segment donné *AB* un point *C* tel que la division D_2 soit réalisée.

Soit *D* tel que $BD = 2BA$, et *ADEG* le carré construit sur *AD*. On considère une hyperbole $\mathscr{H}$ de sommet *A*, ayant *ED* et *EG* pour asymptotes ; et la parabole $\mathscr{P}$ de sommet *B*, d'axe *BD*, de côté droit *AB*. Cette parabole passe par *G*, elle coupe donc l'hyperbole au point *H*. On mène de *H* la perpendiculaire à *AB* — soit *CHJ*, et la parallèle à *AB* — soit *HIM*. On a

$$\text{aire }(HMEJ) = \text{aire }(ADEG) \Rightarrow \text{aire }(JHIG) = \text{aire }(IADM)$$
$$\Rightarrow \text{aire }(JCAG) = \text{aire }(HCDM).$$

On a donc

$$CA.\, AG = CH \cdot CD \Rightarrow CA.\, AB = CH \cdot CD.$$

Mais, $H \in \mathscr{P} \Rightarrow CH^2 = BC \cdot AB$ et $CD = AB + AC$, d'où

$$CA \cdot AB = (AB + AC)\sqrt{BC \cdot AB}.$$

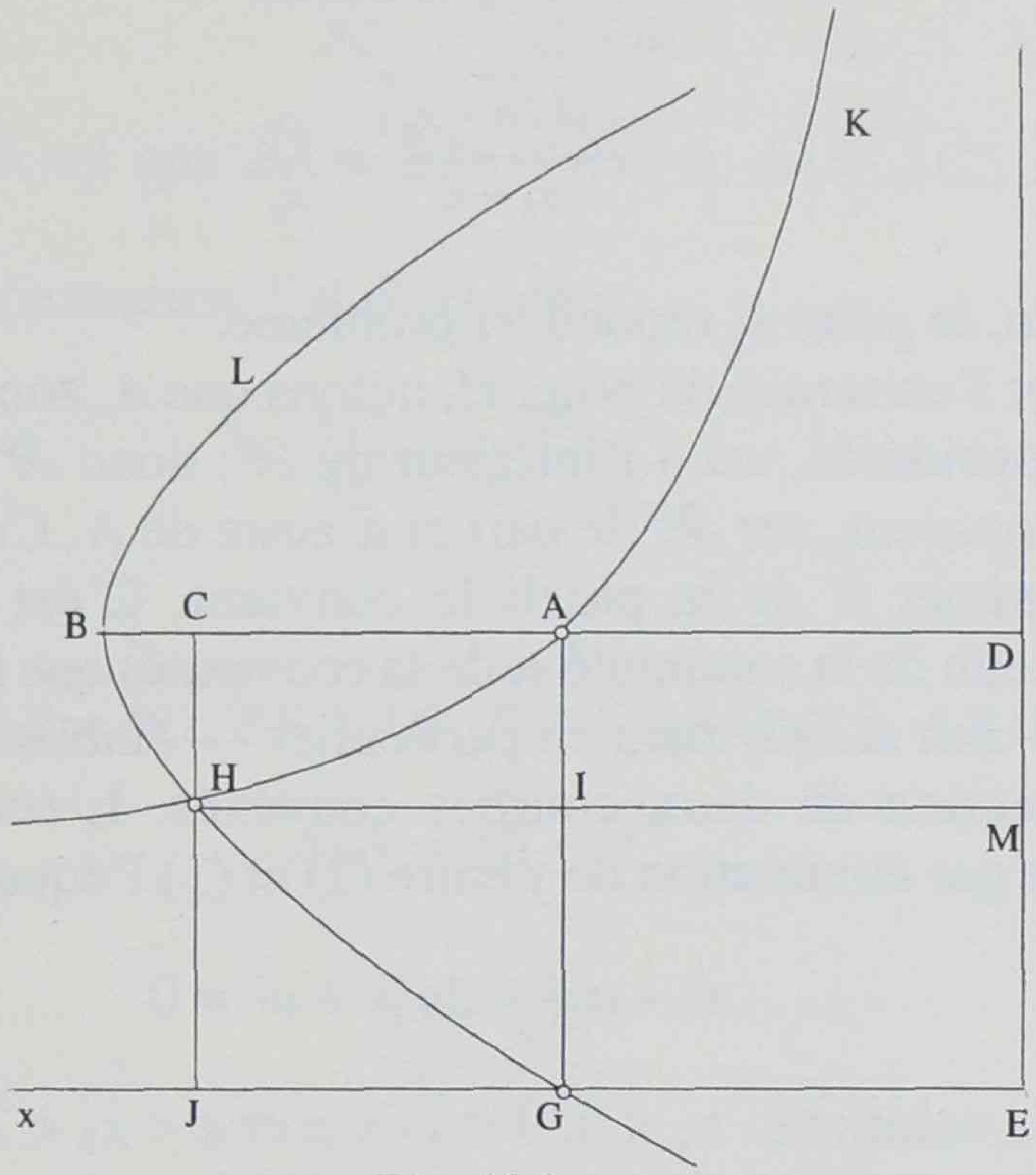


Fig. 105

Le problème admet donc une solution ; on montre qu'elle est unique. Reprenons la solution dans un autre langage. Considérons donc un repère orthonormé (Ex, Ey) et prenons les points $A\ (a; a)$, $B\ (2a ; a)$, avec $a > 0$. Le problème est de trouver un point $C \in [A\ B]$, $C(x, a)$, avec $a < x < 2a$ tel que

$$\frac{\sqrt{a(2a-x)}}{x-a} = \frac{a}{x}.$$

Les équations de $\mathscr{H}$ et de $\mathscr{P}$ dans ce repère s'écrivent respectivement

(1) $xy = a^2$ — on ne considère que la branche $x > 0$, $y > 0$
(2) $a\ (2a - x) = (a - y)^2$.

Pour tout point de $\mathscr{H}$ on a

$$xy = a^2 \Leftrightarrow a\ (x - a) = x\ (a - y),$$

d'où pour $x \neq 0$ et $x \neq a$

(3) $\dfrac{a-y}{x-a} = \dfrac{a}{x}.$

Si donc $H(x_0, y_0) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}$, on a d'après (2) et (3)

$$\frac{\sqrt{a(2a - x_0)}}{x_0 - a} = \frac{a}{x_0},$$

et si $a < x_0 < 2a$, le point H répond au problème.

Pour justifier l'existence du point H, notons que A, sommet de la branche d'hyperbole considérée, est à l'intérieur de $\mathscr{P}$; donc $\mathscr{H}$ coupe $\mathscr{P}$ en deux points qui se trouvent, sur $\mathscr{H}$, de part et d'autre de A. Celui qui est le plus proche du sommet B de la parabole convient. C'est de cette manière (l'emploi implicite de la continuité et de la convexité) que les mathématiciens de l'époque — Ibn al-Haytham en particulier — établissent l'existence du point d'intersection de deux courbes convexes. L'étude analytique de $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}$ donne par élimination de y entre (2) et (3) l'équation

$$x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$$

qui admet trois solutions : $x_1 < 0$, $0 < x_2 < a$ et $a < x_3 < 2a$. Le problème a donc une solution et une seule qui correspond à la racine x_3.

Une fois établie la division D_2, al-Sijzī traite dans un second lemme la construction d'un triangle ABC de type [1, 3, 3] en faisant intervenir la division (B, C, A) de ce même type (dans ce lemme, l'ordre A, B du lemme précédent devient B, A). La démonstration utilise le point E du segment [B, A] tel que $BE^2 = AB \cdot AC$; la division (B, E, C, A) est alors une division D_3, également conçue par Abū al-Jūd.

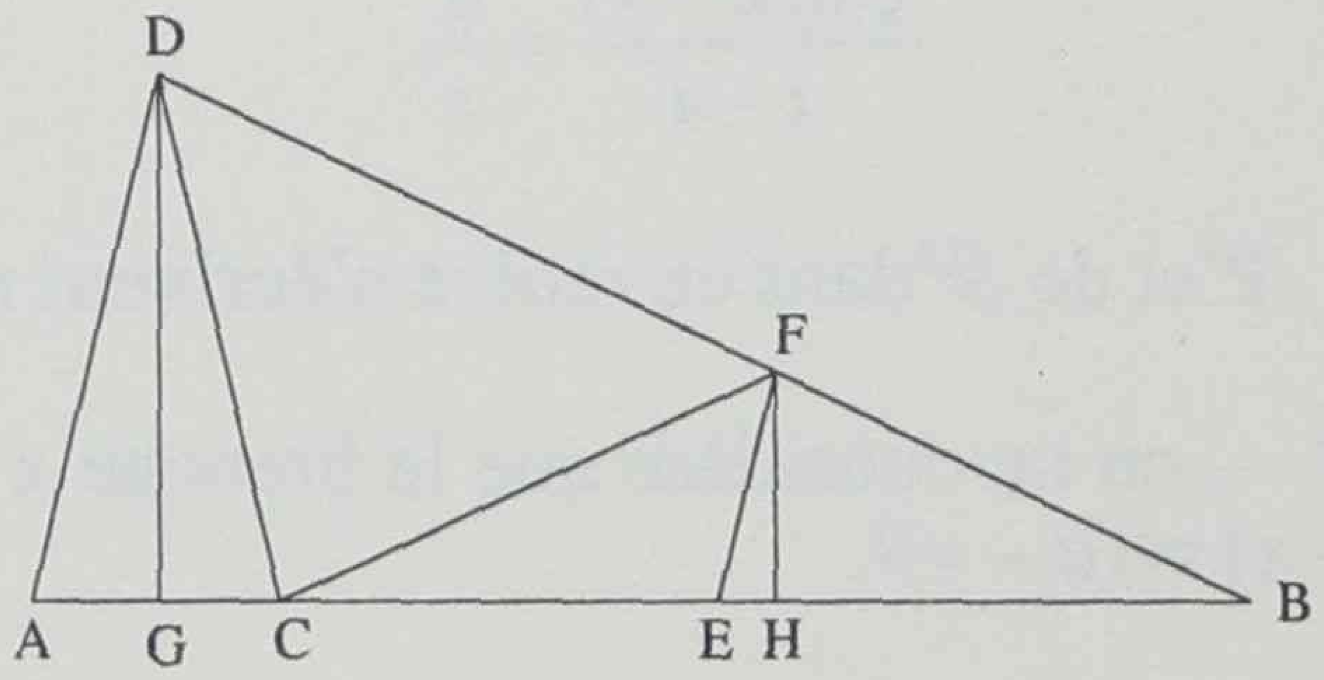


Fig. 106

LEMME 2 : Étant donné un segment AB, construire le triangle ABD tel que $BA = BD$ et $\widehat{A} = 3\,\widehat{B}$.

Soit C le point de BA obtenu par la division D_2 (avec l'ordre B, A). On a

$$\frac{\sqrt{AB \cdot AC}}{BC} = \frac{AB}{AB + BC}.$$

On construit D tel que $BA = BD$ et $AD = \sqrt{AB \cdot AC}$; D est le point cherché.

Suivons la démonstration d'al-Sijzī ; on a

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{AB + BC},$$

donc $AD < BC$.

Soit E tel que $BE = AD$, $EF \parallel AD$, $FH \perp AB$, $DG \perp AB$. On a

$$AD^2 = AB \cdot AC,$$

donc

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC},$$

et ABD et ADC sont deux triangles semblables ($\widehat{A}$ est commun). Alors le triangle ADC est isocèle et G est milieu de AC; d'où

$$GB = GC + CB = \frac{1}{2}(AC + 2CB) = \frac{1}{2}(AB + CB).$$

Mais

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{AB + BC} \text{ et } AD = EB,$$

d'où

$$\frac{EB}{\frac{1}{2}BC} = \frac{AB}{\frac{1}{2}(AB + BC)} = \frac{AB}{GB}.$$

D'autre part, les deux triangles FHB et DGB sont semblables, d'où

$$\frac{EB}{HB} = \frac{AB}{GB},$$

puisque $EB = FB$ et $AB = BD$.

On a alors

$$HB = \frac{1}{2}BC,$$

H est milieu de BC, donc $FC = FB = EB = AD = DC$, d'où

$$\widehat{DFC} = \widehat{FCB} + \widehat{B} = 2\ \widehat{B},\ \widehat{CDF} = 2\ \widehat{B}$$

et

$$\widehat{ACD} = \widehat{CDF} + \widehat{B} = 3\ \widehat{B}.$$

Mais $\widehat{A} = \widehat{ACD}$; on a enfin $\widehat{A} = 3\ \widehat{B}$, d'où $\widehat{B} = \frac{\pi}{7}$.

Remarquons que le point D est l'intersection du cercle (B, AB) et de la médiatrice de AC.

Al-Sijzī passe ensuite à la construction de l'heptagone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ donné. En utilisant le lemme 2, on construit un triangle isocèle EGD tel que $\widehat{E} = \widehat{G} = 3\widehat{D}$, et on construit dans $\mathscr{C}$ un triangle ABC semblable à DEG. On a $\widehat{B} = \widehat{C} = 3\ \widehat{A}$, d'où $\widehat{A} = \frac{\pi}{7}$ et BC est le côté de l'heptagone régulier. Pour construire les sommets de l'heptagone, al-Sijzī considère le point H du cercle tel que $\widehat{BCH} = \widehat{BAC}$ et CI bissectrice de $\widehat{ACH}$; alors $\widehat{BAC} = \widehat{BCH} = \widehat{HCI} = \widehat{ICA}$, d'où $CB = BH = HI = IA$. On obtient de même les points J et K tels que $CJ = JK = KA$, et ainsi l'heptagone régulier $AIHBCJK$.

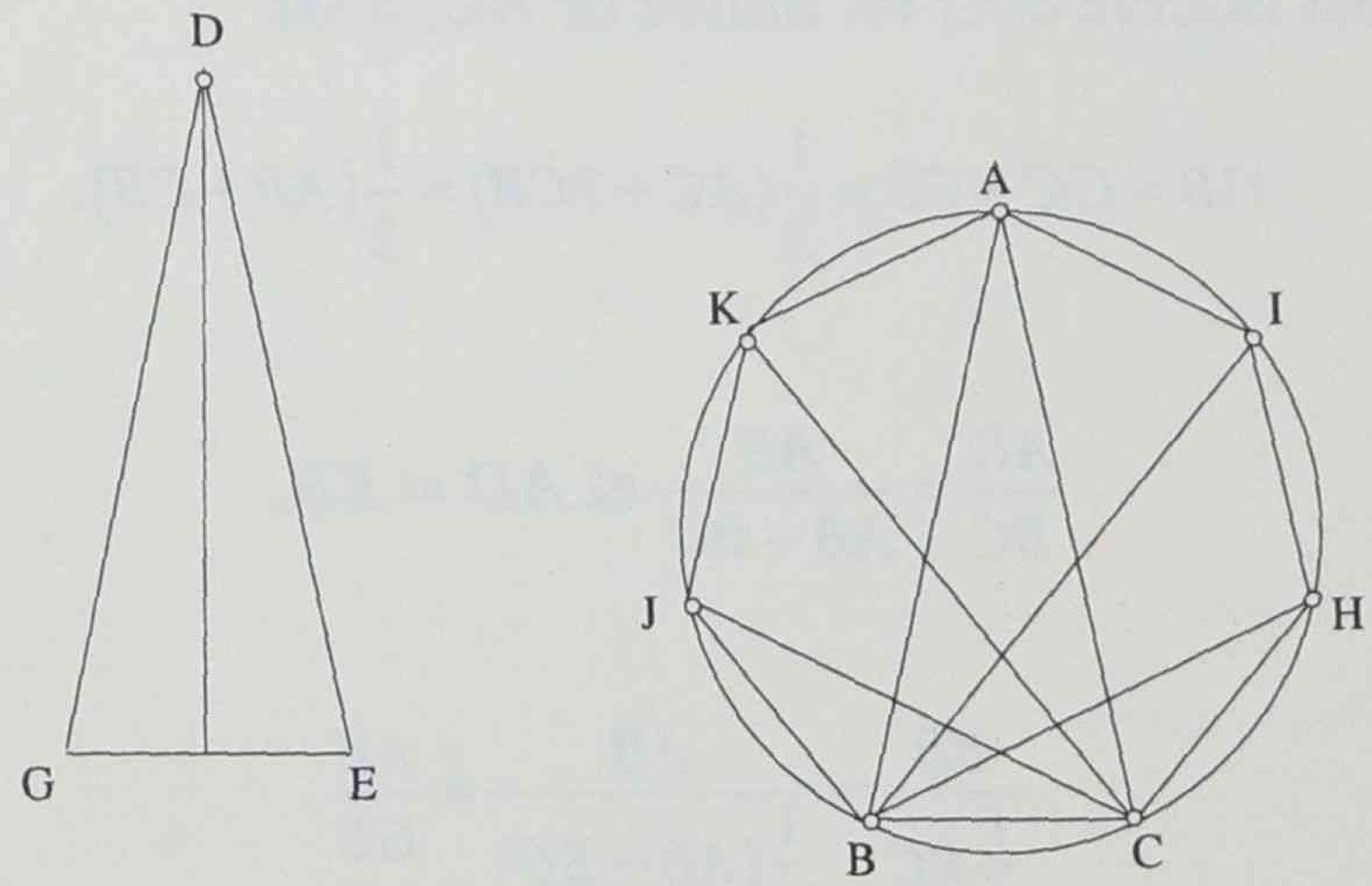


Fig. 107

Remarquons cependant qu'al-Sijzī n'indique pas comment construire le triangle ABC semblable au triangle DEG. On peut procéder ainsi : soit R le rayon du cercle donné et r le rayon du cercle circonscrit à DEG, on a $\frac{BC}{EG} = \frac{R}{r}$, ce qui correspond à la construction mentionnée par Abū al-Jūd dans son lemme 3 cité par al-Sijzī lui-même. On construit de même AB, $\frac{AB}{DE} = \frac{R}{r}$.

Au cours de l'examen des traités d'Abū al-Jūd et d'al-Sijzī, on n'a pas manqué de noter à plusieurs reprises, et avec des figures identiques, que la division d'Archimède (D_1) et celle d'Abū al-Jūd (D_2) ont été déterminées à partir de l'intersection d'une parabole $\mathscr{P}$ et d'une hyperbole $\mathscr{H}$. Reprenons, un peu différemment, l'étude de cette intersection.

Soit $ABCD$ un carré de côté a ; prenons (AD, AB) comme repère (Ax, Ay) et soit I le point tel que $BI = 2BC = 2a$. On considère l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ (une branche) qui passe par C et admet Ax et Ay comme asymptotes ; et la parabole $\mathscr{P}$ de sommet I, de côté droit a, d'axe IB parallèle à l'asymptote Ax. La parabole $\mathscr{P}$ passe par D et le point C est à l'intérieur de $\mathscr{P}$ (voir figure ci-dessous) ; on a

$$\mathscr{H} = \{(x, y) ; xy = a^2\} \qquad \text{avec } x > 0, y > 0$$

$$\mathscr{P} = \{(x, y) ; (a - y)^2 = a(2a - x)\}.$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection est

$$x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0,$$

qui a deux racines positives $x_2 \in\ ]0, a[$, abscisse du point L, et $x_3 \in\ ]a, 2a[$, abscisse du point H.

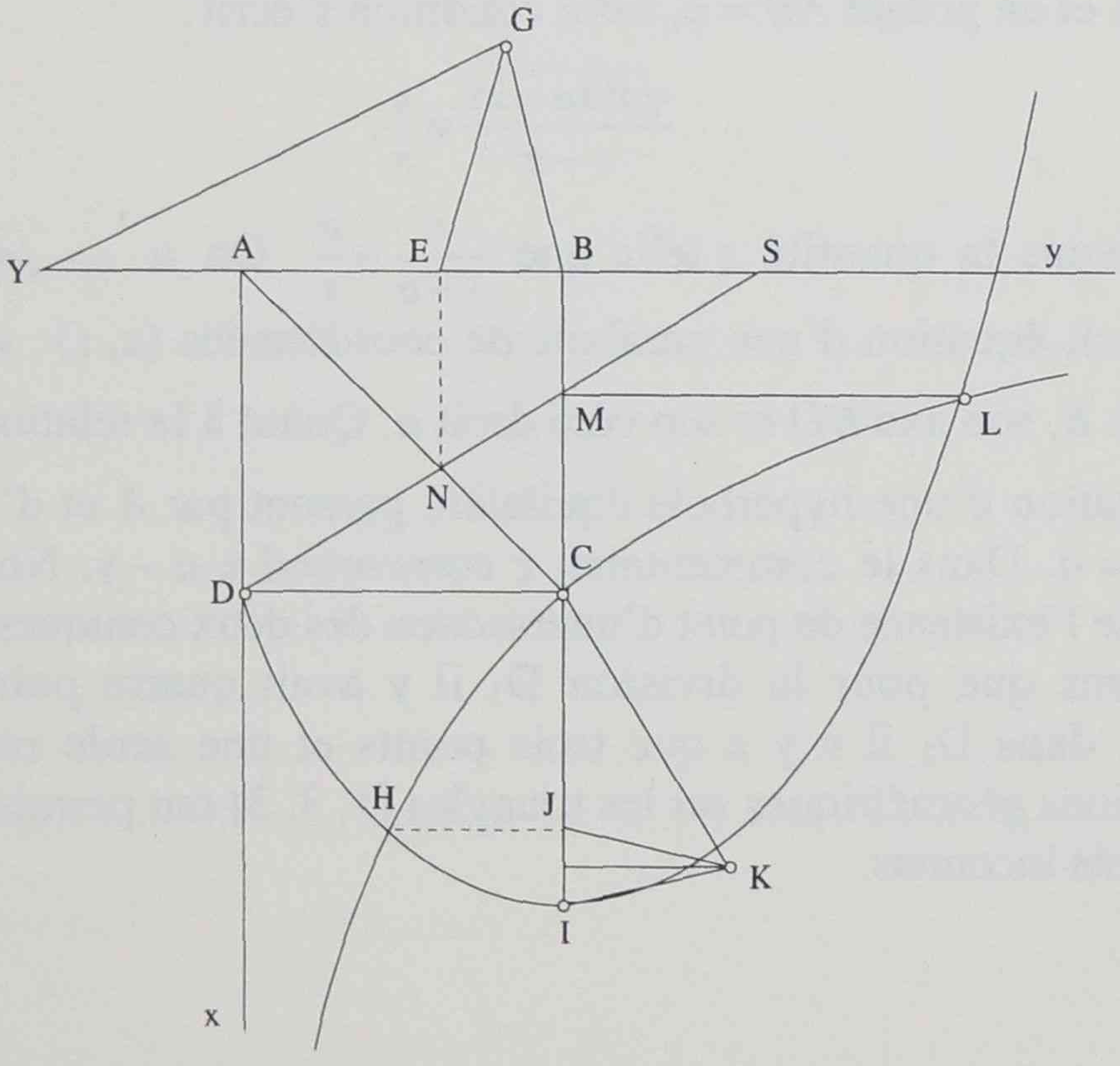


Fig. 108

Abū al-Jūd dans son *Livre sur la construction de l'heptagone dans le cercle*, et al-Sijzī dans son traité, utilisent le point H ; sa projection J sur l'axe de la parabole donne la division (I, J, C) de type D_2 avec $HJ^2 = IJ \cdot IC$. Le triangle isocèle construit sur la base IJ, avec $IK = JK = HJ$, est semblable au triangle IKC ; ce sont des triangles de type [1, 3, 3].

Abū al-Jūd — comme un auteur anonyme[1] — utilise le point L ; sa projection M sur le côté BC définit la division (D, N, M, S) de type D_1 (d'Archimède). La division (A, E, B, S) est aussi de type D_1. De (A, E, B, S) Abū al-Jūd déduit (B, E, A, Y) en posant $AY = BS$, $AY^2 = BS^2 = BA \cdot BE$, division de type D_3, donc la division (B, E, Y) est de type D_2. Le triangle isocèle EBG construit sur la base EB avec $BG = EG = BS$ est semblable au triangle BGY ; ce sont des triangles de type [1, 3, 3].

Pour conclure, avec la méthode d'Abū al-Jūd et d'al-Sijzī, on cherche donc à diviser un segment AB en un point C tel que

$$\frac{\sqrt{AB \cdot BC}}{AC} = \frac{AB}{AB + AC}.$$

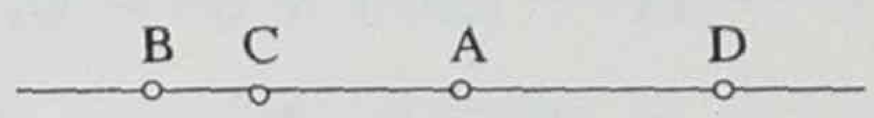


Fig. 109

Si on prend l'origine des abscisses au point D symétrique de B par rapport à A et en posant $AB = a$, cette condition s'écrit :

$$\frac{\sqrt{a(2a - x)}}{x - a} = \frac{a}{x}.$$

Introduisons la quantité z telle que $\frac{z}{x-a} = \frac{a}{x}$. On a $z = \sqrt{a(2a - x)}$ ou $z^2 = a(2a - x)$, équation d'une parabole de coordonnées (x, z) ; son sommet est le point B, son axe BD et son côté droit a. Quant à la relation $\frac{z}{x-a} = \frac{a}{x}$, c'est l'équation d'une hyperbole équilatère passant par A et d'asymptotes $x = 0$ et $z = a$. Dans le commentaire, z correspond à $a - y$. Notons qu'al-Sijzī justifie l'existence du point d'intersection des deux coniques.

Rappelons que pour la division D_1 il y avait quatre points et deux relations ; dans D_2 il n'y a que trois points et une seule relation. Les considérations géométriques sur les triangles [1, 3, 3] ont permis d'éliminer un des points inconnus.

[1] Voir *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. III, p. 384-386.

CHAPITRE II

LES TRIANGLES RECTANGLES NUMÉRIQUES

De la quarantaine de titres attribués à al-Sijzī, deux seulement portent sur la théorie des nombres. Le premier traité, aujourd'hui perdu, s'intitule « Réponse à un problème subtil sur le produit de deux cubes de deux points de vue, la géométrie et le nombre ». Le titre, mais aussi l'intérêt porté par al-Sijzī à la question de la dimension[1], nous donnent à imaginer le problème qui s'y trouvait traité. Il est clair en tout cas que cette « réponse » relève de la géométrie et de l'arithmétique dans un style sans doute euclidien.

Le second traité, qui, lui, nous est parvenu, traite des triangles rectangles numériques, c'est-à-dire qu'il relève de l'analyse diophantienne. Or al-Sijzī, nous l'avons dit, est un pur géomètre et nullement un algébriste. De cette longue liste de travaux, aucun titre en effet n'évoque l'algèbre. Pourquoi cet éminent géomètre aborde-t-il un tel thème, et dans quel esprit ? Cette question, inévitable, nous conduit à rappeler, aussi succinctement que possible, les étapes de la recherche sur ce sujet chez les prédécesseurs d'al-Sijzī.

C'est précisément vers le milieu du X^e siècle que se produit un événement capital dans l'histoire de la théorie des nombres, qui scellera le commencement d'une nouvelle tradition de recherche, avec deux fameux mathématiciens : al-Khujandī et al-Khāzin. On assiste alors en effet à la scission de l'analyse diophantienne, contre Diophante lui-même mais aussi contre les algébristes arabes, en deux chapitres : l'analyse diophantienne rationnelle, qui depuis Abū Kāmil était devenue un chapitre de l'algèbre ; et l'analyse diophantienne entière. Encore faut-il rappeler que cette séparation n'est pertinente que pour l'étude des équations diophantiennes non-homogènes.

En tant qu'arithmétique, la nouvelle analyse ne doit porter que sur les nombres entiers : telle est l'idée séminale d'al-Khujandī et d'al-Khāzin. C'est à ce prix seulement que l'on pourra introduire les normes de la démonstration, telle qu'on la rencontre dans les livres dits « arithmétiques » des *Éléments* d'Euclide. Il est vrai que l'analyse diophantienne rationnelle se contentait des algorithmes — la double égalité par exemple — sans procéder par de véritables démonstrations.

[1] Voir Pascal Crozet, « L'idée de dimension chez al-Sijzī », *Arabic Sciences and Philosophy*, 3.2, 1993, p. 251-286.

À présent, on ne se satisfait plus des algorithmes des solutions, mais il faut démontrer dans le style euclidien. C'est du reste cette nouvelle exigence qui engendrera le clivage entre ces deux chapitres de l'analyse diophantienne. Or c'est pour pouvoir y répondre que les mathématiciens du milieu du Xe siècle sont revenus à l'arithmétique des nombres entiers, que l'on peut représenter par des segments de droite. Pour établir ces démonstrations, ils ont accepté le recours à l'algèbre tant qu'il s'agissait d'établir des identités ou de procéder par des moyens combinatoires ; quant au reste, ils ont opté pour une géométrie des entiers. Ainsi, pour démontrer qu'il n'existe aucun couple d'entiers, carrés et impairs, dont la somme soit un carré, al-Khāzin recourt aux segments de droites et à la proposition IX.22 des *Éléments*[1].

Il est clair que le domaine le plus favorable à la réalisation de ce nouveau projet est celui où se rencontrent les *Arithmétiques* de Diophante et les *Éléments* d'Euclide. Or c'est là précisément le domaine des triplets pythagoriciens, ou des triangles rectangles numériques. Mais n'oublions pas qu'au Xe siècle les *Arithmétiques* étaient lues à la lumière de l'algèbre, si bien que c'est ce Diophante algébrisé que les tenants de l'analyse diophantienne entière ont lu dans l'éclairage d'Euclide.

C'est donc tout naturellement que le géomètre al-Sijzī trouve sa place au sein de cette tradition. Les bases géométriques de cette théorie des triangles rectangles numériques devaient en effet être consolidées pour que fussent établis, au moyen de la géométrie des entiers et sans exception, les propositions et les algorithmes. Cet idéal n'est accessible que si le domaine d'investigation se borne aux problèmes quadratiques. Or c'est précisément à ce domaine qu'al-Sijzī destine son traité, fermement décidé à trouver, dit-il, une « méthode universelle ». Ainsi, toute la première partie du traité est vouée à l'établissement du cas général, à savoir l'équation diophantienne

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x^2.$$

En un mot, même en théorie des nombres, al-Sijzī reste géomètre.

De ce traité d'al-Sijzī, nous donnons ici l'*editio princeps*, ainsi que la première traduction et analyse. Nous allons suivre pas à pas la démarche d'al-Sijzī.

PROPOSITION 1 : Résoudre $x^2 + y^2 = z^2$ en entiers.

[1] Voir R. Rashed, « L'analyse diophantienne au Xe siècle : l'exemple d'al-Khāzin », *Revue d'histoire des sciences*, 32.3, 1979, p. 193-222 ; repris dans *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes,* Collection « Sciences et philosophie arabes - Études et reprises », Paris, 1984, p. 195-225.

Analyse : Soit $AB = z$ et $AG = x$, on a aire $AC = z^2$, aire $AD = x^2$,
aire AC = aire AD + aire du gnomon
$z^2 = x^2$ + aire du gnomon.

Soit H tel que $AG = AH$, alors $y^2 = HB \cdot BG$.

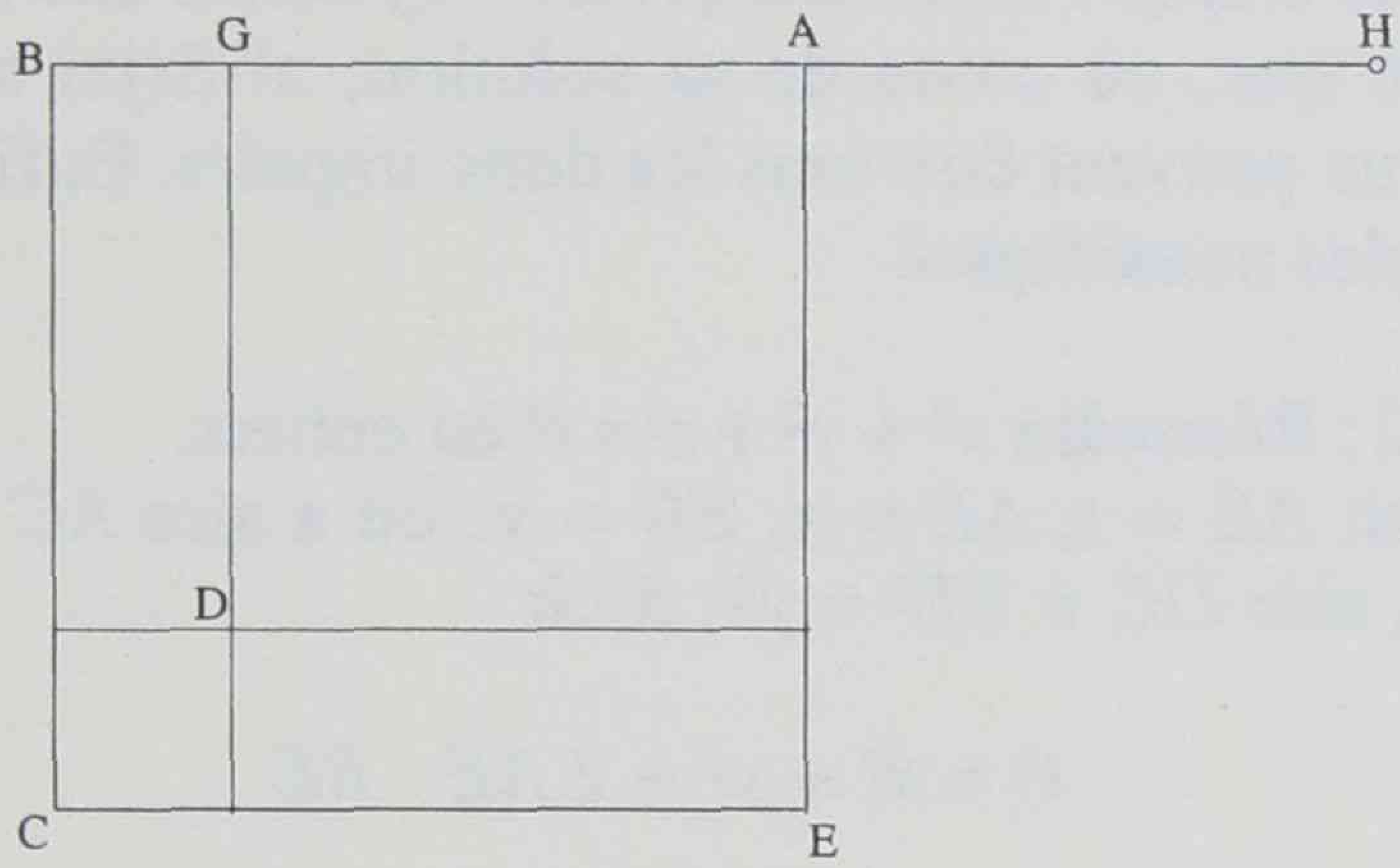


Fig. 1

Synthèse : On suppose y le terme pair et même $\frac{y^2}{2^k b} = 2a$. Alors on prend $GB = 2^k b$, d'où $HB = 2a$, $HG = 2a - 2^k b$, et on a $AG = a - 2^{k-1}b$. On constate alors que

$$AG^2 + y^2 = \left(a - 2^{k-1}b\right)^2 + 2^{k+1}ab = a^2 + 2a \cdot 2^{k-1}b + \left(2^{k-1}b\right)^2 = \left(a + 2^{k-1}b\right)^2 = AB^2.$$

En effet $AB = AG + GB = a - 2^{k-1}b + 2^k b = a + 2^{k-1}b$. On a ainsi le résultat.

Commentons différemment la solution d'al-Sijzī. On a

$$y^2 = (z - x)(z + x) \qquad \textit{analyse};$$

et soit le terme y pair,

$$y^2 = 2^k b(2a) \qquad \textit{synthèse};$$

alors $z + x$ est pair ; notons-le $2a$. On résout

$$z - x = 2^k b,$$
$$z + x = 2a.$$

On trouve une solution pour chaque k tel que $k > 0$, $2^{k-1}b < a$, c'est-à-dire $y^2 > 2^{2k}b^2$; donc $y > 2^k b$ et $y^2 = 2^{k+1}ab$. En particulier si $b = 1$ on a $2 \leq 2^k < y$, d'où une seule solution si y est divisible seulement par 2 et $y \neq 2$; 3 solutions si y est divisible seulement par 4 et $y > 8$; $2h - 1$ solutions si y est divisible seulement par 2^h et $y > 2^{2h-1}$. Supposons en effet $y = 2^h c$ avec c

impair et $c > 2^{h-1}$. On doit déterminer $k \geq 1$ et a tels que $y^2 = 2^{2h}c^2 = 2^{k+1}a$ ($b = 1$). Si $k + 1$ était plus grand que $2h$, on aurait $c^2 = 2^{k+1-2h}a$ pair, ce qui est impossible. On doit donc choisir $k \leq 2h - 1$ et on a alors $a = 2^{2h-1-k}c^2$. Chaque valeur de k dans l'intervalle $[1, 2h - 1]$ donne une solution.

On remarque que, au cours de sa solution, al-Sijzī sait que les deux termes x^2 et y^2 ne peuvent être tous les deux impairs. Enfin, al-Sijzī donne quelques exemples numériques.

PROPOSITION 2 : Résoudre $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ en entiers.

Analyse : Soit $AB = t$, $AE = x$, $EB = y$; on a aire $AC = AB^2 = t^2$, aire $AD = AE^2 = x^2$, aire $DC = EB^2 = y^2$; d'où

$$t^2 = x^2 + y^2 + 2\, AE \cdot BE$$

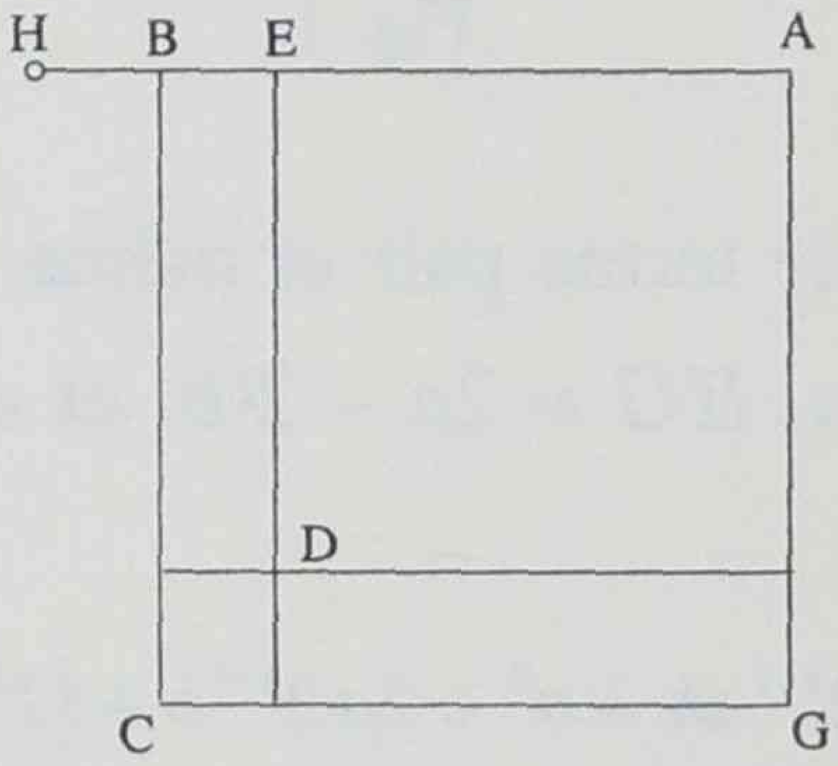


Fig. 2

donc $z^2 = 2AE \cdot BE = AE \cdot EH = 2x(t-x) = 2yx$.

Synthèse : Soit $z^2 = 2yx$ et posons $2y = EH$, $x = AE$ et $y + x = AB$.

Or

$$AB^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

et donc $z^2 = 2yx$ rend la construction non générale, puisqu'on a imposé $x + y = t$.

Il est clair que cette solution repose sur la remarque que si l'un des trois carrés du premier membre est le double produit des racines des deux autres, le premier membre devient un carré parfait. Le problème est donc ramené à trouver deux nombres x et y tels que $2xy$ soit un carré.

PROPOSITION 3 : Résoudre $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2$ en entiers.

Analyse : Posons aire $AE = x^2 + y^2$ et $BC = 2BD$; on a

$$\text{aire } AG = \text{aire } AE + \text{aire } EG + 2 \text{ aire } ED\,;$$

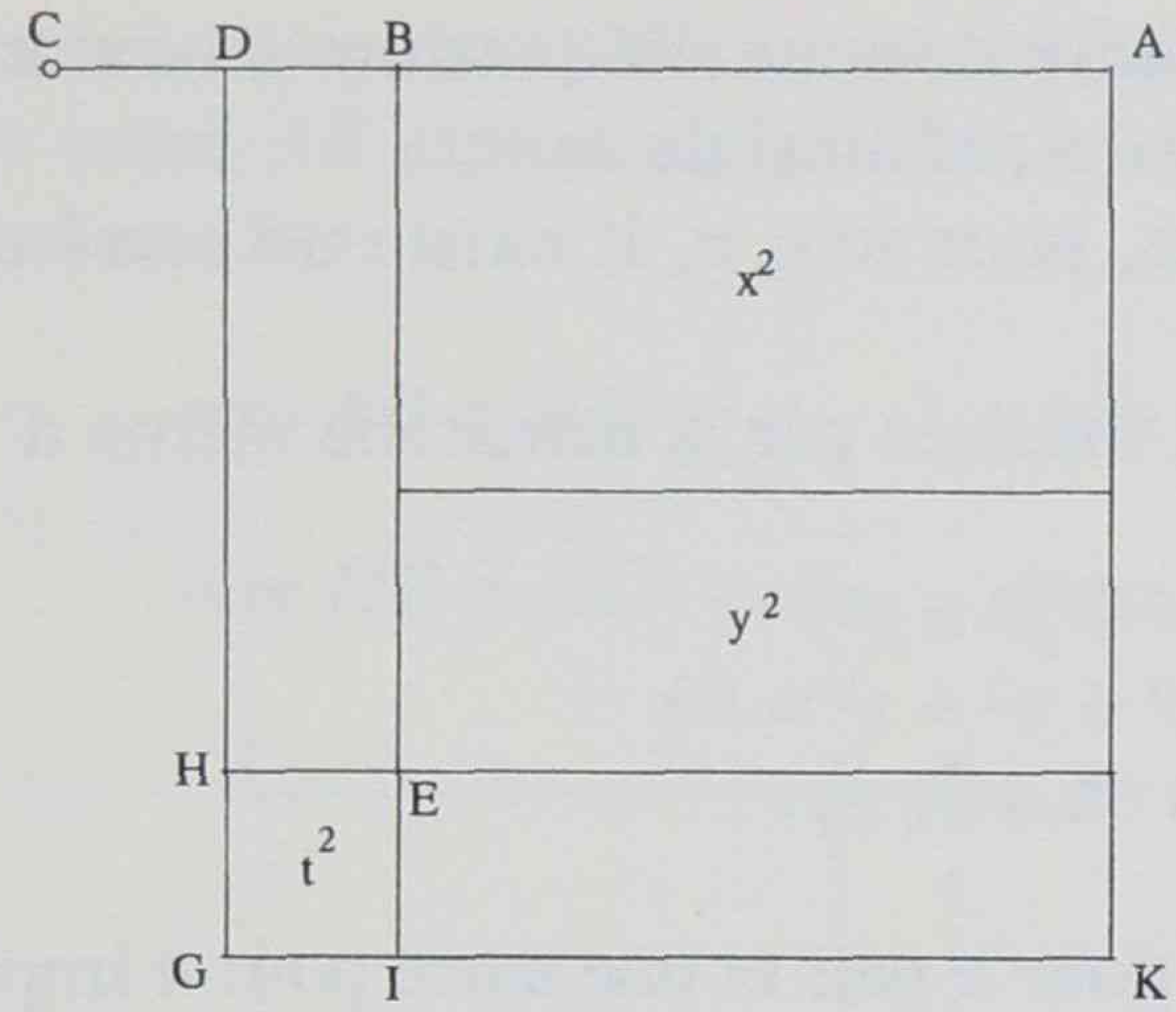


Fig. 3

mais

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\ AB \cdot BD$$

donc aire $AG = AD^2$; il est donc nécessaire que $2\ AB \cdot BD$ soit un carré si l'on veut la somme de quatre carrés.

Synthèse : On se donne $AB = v$ tel que $v^2 = x^2 + y^2$ et $BC = 2t$ tel que $2tv = z^2$. Or $BD = t$ et $AD = v + t = u$. Mais $(v + t)^2 = v^2 + t^2 + 2tv = x^2 + y^2 + t^2 + z^2$ et u^2 est donc la somme de quatre carrés.

Le problème est ainsi ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = v^2 \\ 2tv = z \end{cases}.$$

On a nécessairement $v = \lambda\left(p^2 + q^2\right)$ où p et q sont des nombres premiers entre eux dont l'un est pair et on doit même poser que $2\lambda t\left(p^2 + q^2\right)$ soit un carré.

Exemple : $30^2 = 36 + 64 + 20^2 + 20^2$.

C'est alors qu'al-Sijzī écrit :

> La quatrième se ramène à ces trois problèmes, comme la troisième s'est ramenée aux deux premiers. En général, tous les problèmes de cette recherche se ramènent aux deux premiers problèmes suivant cet exemple[1].

Il s'agit à l'évidence d'un procédé de récurrence qu'al-Sijzī avait nommé dans le titre « méthode universelle ». En effet, pour l'équation à cinq carrés, on part avec aire $AE = x^2 + y^2 + z^2$ et on continue comme précédemment ;

[1] Voir *infra*, p. 430 ; ar. 431, 8-10.

et de la même manière pour l'équation à six carrés, on part de aire $AE = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$; et ainsi de suite.

Plus généralement, pour tout n, il existe un carré qui est somme de n carrés (P_n).

La démonstration, inspirée par la démarche même d'al-Sijzī, est comme suit :

1) on a P_2 $(x^2 + y^2 = z^2)$
2) on a P_3 $(x^2 + y^2 + z^2 = t^2)$
3) si on a P_n, alors on a P_{n+2} ;

d'où une récurrence pour n pair et une autre pour n impair.

On remarque qu'on n'a besoin en fait que du cas $n = 2$ et du cas trivial $n = 1$ car la démonstration du cas $n = 3$ est faite par la méthode

P_1 est vrai et P_1 entraîne P_3 (d'après 3). On a ainsi

$$P_1 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_5 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{2n+1} \text{ et } P_2 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_6 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{2n+2}.$$

C'est par cette méthode que, au symbolisme près, al-Sijzī a montré que l'équation :

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x^2$$

a toujours une solution.

Il cherche un nombre (le plus petit dans ses exemples) t tel que $2vt = z^2$, alors

$$(x+t)^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + t^2 + z^2.$$

Il trouve ainsi un nombre carré qui est somme de $n + 2$ carrés ; si donc on sait résoudre les cas $n = 2$ et $n = 3$, on peut résoudre le cas général.

Al-Sijzī passe ensuite à d'autres propositions d'importance inégale, dont certaines sont des lemmes pour en établir d'autres dans ce même domaine des triangles rectangles.

LEMME 1 : Soit a un nombre donné et b un multiple d'ordre impair de a, c'est-à-dire $b = (2k + 1)\,a$; alors $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ est divisible par k (et même par $2k$) et par $k + 1$. En effet

$$\left(b^2 - a^2\right) = a^2\left[(2k+1)^2 - 1\right];$$

d'où le résultat.

LEMME 2 : Soit un entier n non-carré ; alors sa racine est irrationnelle.

Supposons que le carré AB représente l'entier n, et montrons que son côté BC est irrationnel m. On a

$$\text{aire } AB = AC^2 = n \qquad \text{(non carré)}$$

et

$$\text{aire } DE = DC^2 = a^2 \qquad \text{avec } a^2 < n < (a+1)^2\,;$$

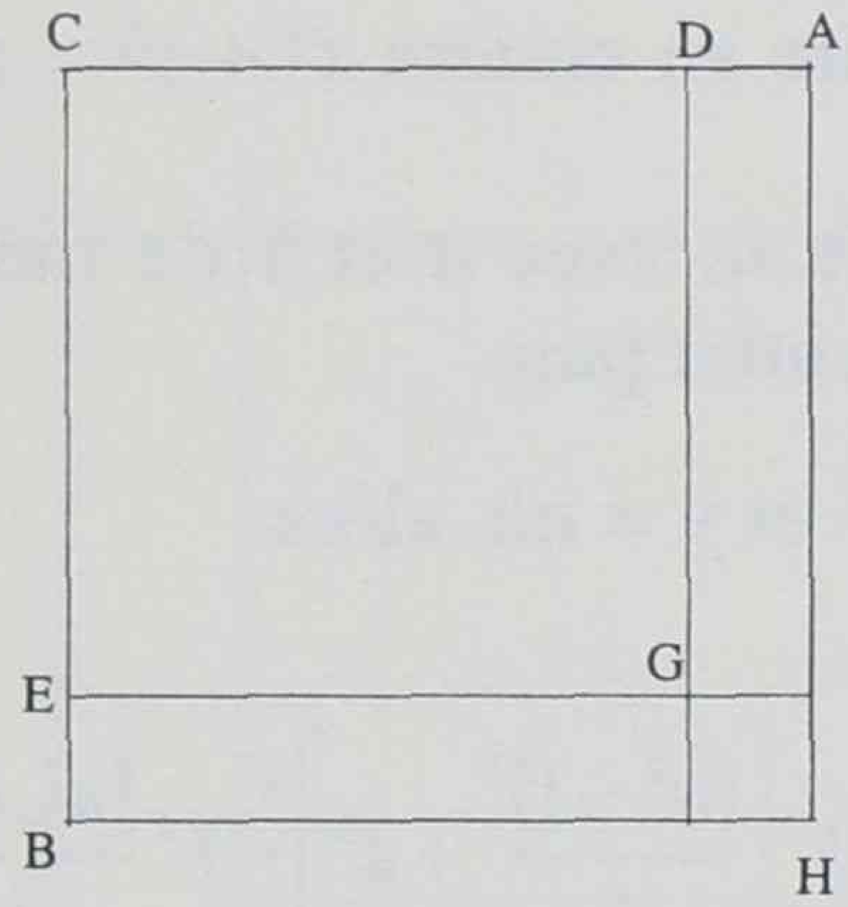


Fig. 4

donc $a < m < a + 1$. Posons $m = a + h$ avec $0 < h < 1$.

On a

$$\text{aire } BG = ah = \text{aire } AG \text{ et aire } GH = h^2,$$

d'où

$$n - a^2 = 2ah + h^2.$$

Si h était rationnel, $h = \frac{p}{q}$ avec $p < q$ et $(p, q) = 1$, on aurait $n - a^2$ entier et

$$n - a^2 = 2a\frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} = \frac{2apq + p^2}{q^2},$$

fraction irréductible, ce qui est impossible. Ce lemme est le célèbre résultat de Théétète mentionné par Platon, dans le dialogue du même nom. Notons qu'al-Sijzī combine ici arithmétique et géométrie puisque l'énoncé porte sur les entiers, alors que la démonstration passe par la géométrie pour revenir à l'arithmétique, ce qui est possible car il utilise un raisonnement par l'absurde.

Cette méthode sera appliquée plus tard par bien d'autres, dont Fibonacci. Celui-ci démontre de cette manière que l'équation cubique

$$x^3 + 20x^2 + 100x = 200$$

n'a pas de solution rationnelle[1].

La généralisation de cette méthode servira au XIX^e^ siècle pour établir que l'anneau des entiers est intégralement clos.

PROPOSITION 4 : Résoudre en entiers $x^2 + y^2 = z^2$ avec $z = x + h$, et h un nombre connu.

Soit AH un multiple de h, avec a et h de même parité ; la différence $d = a^2h^2 - h^2$ est alors un entier pair.

Posons $x = \frac{d}{2h} = \frac{h(a^2-1)}{2}$ et $y = ah$, alors

$$x^2 + y^2 = h^2\left[\frac{(a^2-1)^2}{4} + a^2\right] = h^2\frac{(a^2+1)^2}{4} = z^2,$$

donc

$$z = \frac{h(a^2+1)}{2} = x + h.$$

Ainsi, à tout entier a de même parité que h correspond une solution de

$$x^2 + y^2 = z^2$$

telle que

$$x = \frac{h(a^2-1)}{2},\ y = ah.$$

Remarque : la condition donnée par al-Sijzī « a et h de même parité » est une condition suffisante pour que $d = h^2(a^2 - 1)$ soit un nombre pair.

Elle n'est pas nécessaire. En effet, pour que d soit pair, il faut et il suffit que l'un des nombres h et $a^2 - 1$ le soit. Ainsi si le nombre h donné est impair, il faut prendre a impair ; en revanche si h est pair, on prend a quelconque, pair ou impair. Al-Sijzī lui-même rectifie implicitement plus loin la condition.

[1] Voir Baldassarre Boncompagni, *Tre scritti di Leonardo Pisano*, Firenze, 1854, p. 3 ; et notre article « Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes », *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIII, 2003, n. 2.

Pour se conformer à sa propre norme, al-Sijzī poursuit en établissant géométriquement le calcul précédent. Il donne alors deux solutions géométriques.

1) On pose $AB = h$ et l'aire $BK = h^2$. Soit maintenant le rectangle AL de côté AK tel que

$$\text{aire } AL = \frac{1}{2}(a^2h^2 - h^2)\,;$$

on a alors

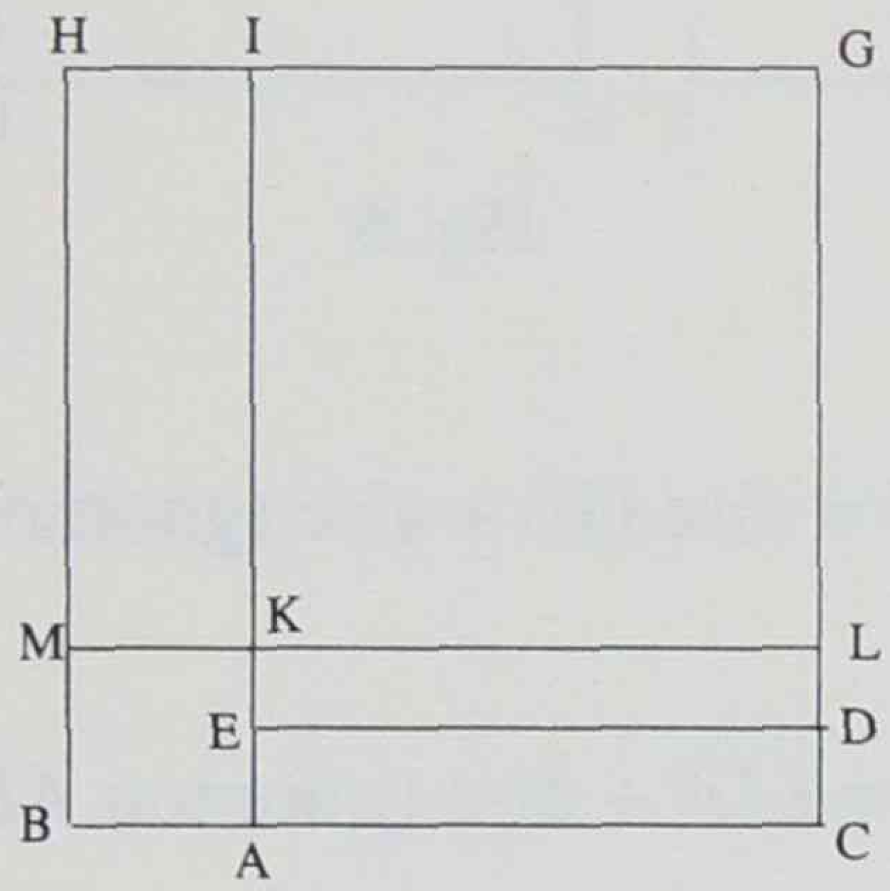


Fig. 5

$$KL = AC = \frac{1}{2}h(a^2 - 1) \text{ et } BC = \frac{1}{2}\,h(a^2 + 1).$$

Traçons les carrés de côtés BC et BA respectivement et achevons la figure. On a aire AL = aire IM, d'où

$$\text{aire } AL + \text{aire } IM + \text{aire } BK = a^2h^2,$$

et on a

$$x = KL = \frac{1}{2}h(a^2 - 1),\ y = ah,\ z = BC = x + h = \frac{1}{2}\,h(a^2 + 1).$$

2) Posons $HK = h$ et le carré HG de côté HK. On cherche à déterminer LD. Pour cela on pose aire (gnomon ABC) $= a^2h^2$, d'où

$$\text{aire (gnomon } ABC) = KH \cdot ME = h \cdot ME,$$

avec $ME = MD + DE = 2LD + DE$, d'où $a^2h = 2LD + h$ et on a donc

$$ML = LD = \frac{1}{2}h(a^2 - 1).$$

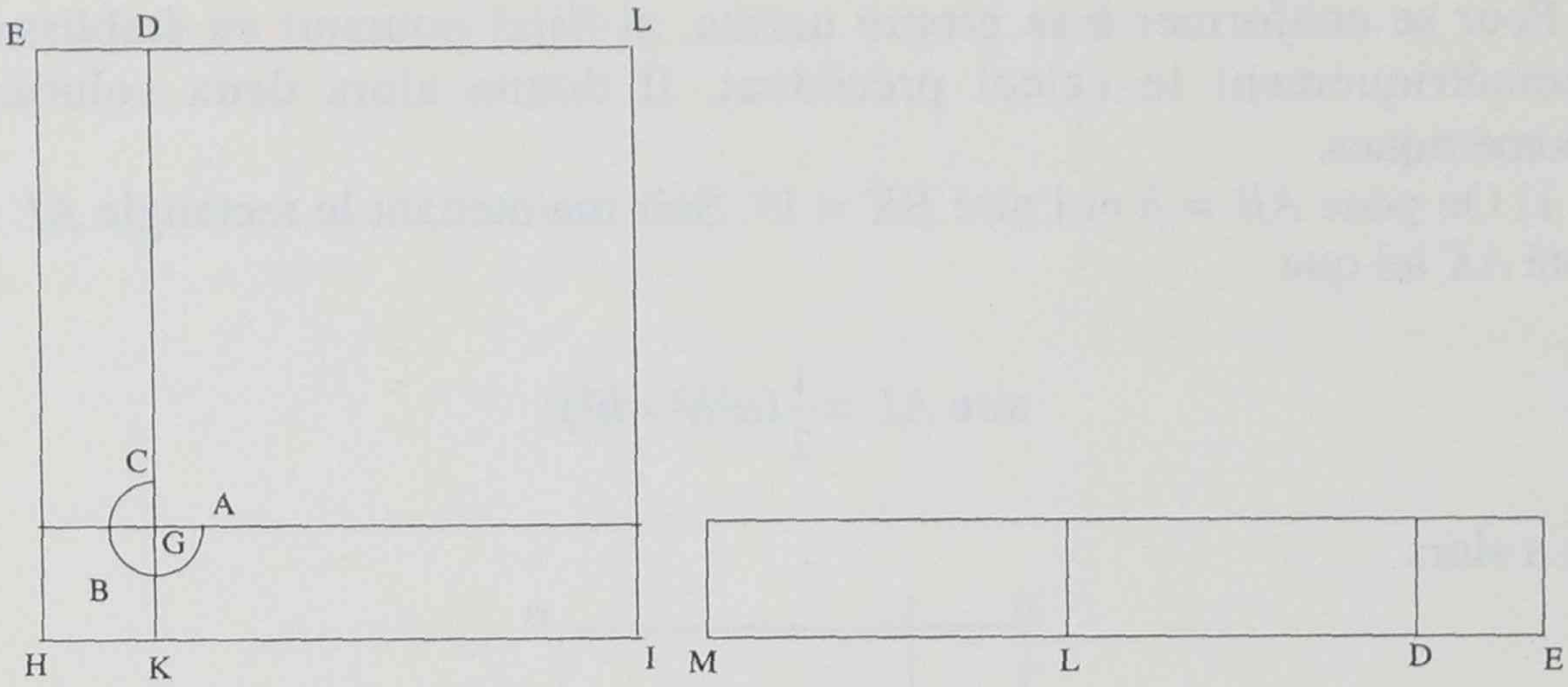


Fig. 6

On a

$$\text{aire } LH = \text{aire } GL + \text{aire (gnomon } ABC)$$

et

$$HI^2 = LD^2 + \text{aire (gnomon } ABC),$$

donc

$$\left[\frac{1}{2}h\left(a^2+1\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}h\left(a^2-1\right)\right]^2 + a^2h^2,$$

et ainsi on a x, y, z solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ avec la condition sur z.

Al-Sijzī donne quelques exemples numériques.

Exemple 1 : $h = 1$, $z = x + 1$; $a = 3$, on a $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.

Exemple 2 : $h = 3$, $z = x + 3$; $a = 3$, on a $x = 12$, $y = 9$, $z = 15$.

Exemple 3 : $h = 2$, $z = x + 2$; $a = 2$, on a $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

Remarque : Tout indique qu'al-Sijzī dans ce problème reconnaît parfaitement la solution générale et que d'autre part le problème a une infinité de solutions entières.

En effet, à tout entier $a > 1$ et tel que l'un au moins des entiers h et $a^2 - 1$ soit pair correspond une solution

$$x = \frac{1}{2}h(a^2 - 1),\ y = ah,\ z = \frac{1}{2}h(a^2 + 1).$$

Les plus petits entiers x et y associés à un nombre h correspondent à la plus petite valeur de a, soit $a = 2$ pour h pair et $a = 3$ pour h impair. À chaque valeur de h est donc associé un triangle primitif défini par $h = 2k - 1$ et $a = 3$, ou par $h = 2k$ et $a = 2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

On peut même représenter les triangles primitifs par * dans un tableau à double entrée, et tous les autres triangles par un point, •.

a \ h	1	2	3	4	5	6	7	8
2		*		•		•		•
3	*	•	•	•	•	•	•	•
4		*		•		•		•
5	*	•	•	•	•	•	•	•

Remarques:

a) Considérons dans le tableau les deux premières lignes ; on a

$$T(2, 2) = (3, 4, 5) ; T(2k, 2) = (3k, 4k, 5k) ; x < y$$

$$T(1, 3) = (4, 3, 5) ; T(k, 3) = (4k, 3k, 5k) ; x > y.$$

On voit ainsi que pour tout $k = (1, 2, 3 \ldots)$ on passe du triangle $T(k, 3)$ au triangle $T(2k, 2)$ en intervertissant x et y ; ainsi $T(k, 3)$ donne $z - x = k$ et $z - y = 2k$; et $T(2k, 2)$ donne $z - x = 2k$, $z - y = k$. Si k est le nombre donné, les deux triangles répondent à la condition d'al-Sijzī : « le côté de leur somme excède le côté de l'un d'eux d'un nombre donné »[1].

b) On remarque aussi que les triangles d'une même ligne sont tous homothétiques du premier triangle de cette ligne. Ceci résulte des lemmes 3 et 4, établis par al-Sijzī, et que l'on trouvera après.

Ainsi pour $p = 1, 2, 3 \ldots$, on a

• si $a = 2p + 1$, $T(2k, 2p + 1)$ est homothétique de $T(1, 2p + 1)$ dans le rapport k,

• si $a = 2p$, $T(2k, 2p)$ est homothétique de $T(2, 2p)$ dans le rapport k.

c) On observe que les seuls triangles primitifs se trouvent dans les deux premières colonnes, les autres termes sont des triangles dérivés. Ainsi pour $k, p \in \mathbf{N}^*$, on a :

$h = 2k - 1$ engendre les triangles $T(2k - 1, 2p + 1)$; $p \geq 1$;

$h = 2k$ engendre les triangles $T(2k, p)$; $p \geq 2$.

[1] Voir *infra*, p. 438 ; ar 439, 1-2.

On a ainsi

$$T(2k - 1, 2p + 1):$$

$$x = 2p(p + 1)(2k - 1)\,;\; y = (2p + 1)(2k - 1)\,;\; z = (2p^2 + 2p + 1)(2k - 1)$$

et

$$z - x = 2k - 1.$$

$$T(2k, p)$$

$$x = k(p^2 - 1)\,;\; y = 2\,pk\,;\; z = k(p^2 + 1) \text{ et } z - x = 2k.$$

La première colonne, formée des triangles $T(1, 2p + 1)$ ne contient que des triangles primitifs $x = 2p(p + 1)$, $y = 2p + 1$, $z = 2p' + 2p + 1$. La deuxième est formée des triangles $T(2, p)$; ceux-ci sont primitifs pour p pair, mais non primitifs pour p impair car alors x, y, z sont pairs.

d) Al-Sijzī, on l'a vu, étudie particulièrement les triangles de la ligne $a = 3$, c'est-à-dire le triangle primitif (4, 3, 5) et les triangles dérivés $(4h, 3h, 5h)$ pour lesquels on a $z - x = x - y = h$.

Or pour $a \geq 3$ on a

$$z - x = h \text{ et } x - y = \frac{1}{2}\, h(a^2 - 2a - 1)$$

et

$$x - y = z - x \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ ou } a = -1.$$

Ainsi la seule valeur de a conduisant à $x - y = z - x$ est donc 3 ; c'est pourquoi le choix d'al-Sijzī.

Le rapport $\dfrac{x - y}{z - x} = \dfrac{1}{2}\left(a^2 - 2a - 1\right)$ est constant pour a fixé, c'est-à-dire pour tous les triangles d'une ligne. C'est précisément de ce rapport qu'al-Sijzī semble parler plus loin.

LEMME 3 : Si $x^2 + y^2 = z^2$, alors $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$.

Cette proposition était déjà connue de Diophante ainsi que de ses successeurs ; al-Sijzī en donne la démonstration géométrique suivante :

Soit aire $HE = AC^2 = z^2$ somme de deux carrés : x^2 = aire BH et y^2 = aire (gnomon). Posons $BX = 2AB$, $BK = 2BC$ et $KX = 2AC = 2z$ et construisons le carré PI homothétique du carré HE dans l'homothétie $(B, 2)$.

On a

$$\text{aire } BP = 4 \text{ aire } BH = (2x)^2$$

et

$$\text{aire } PI = 4 \text{ aire } HE = (2z)^2.$$

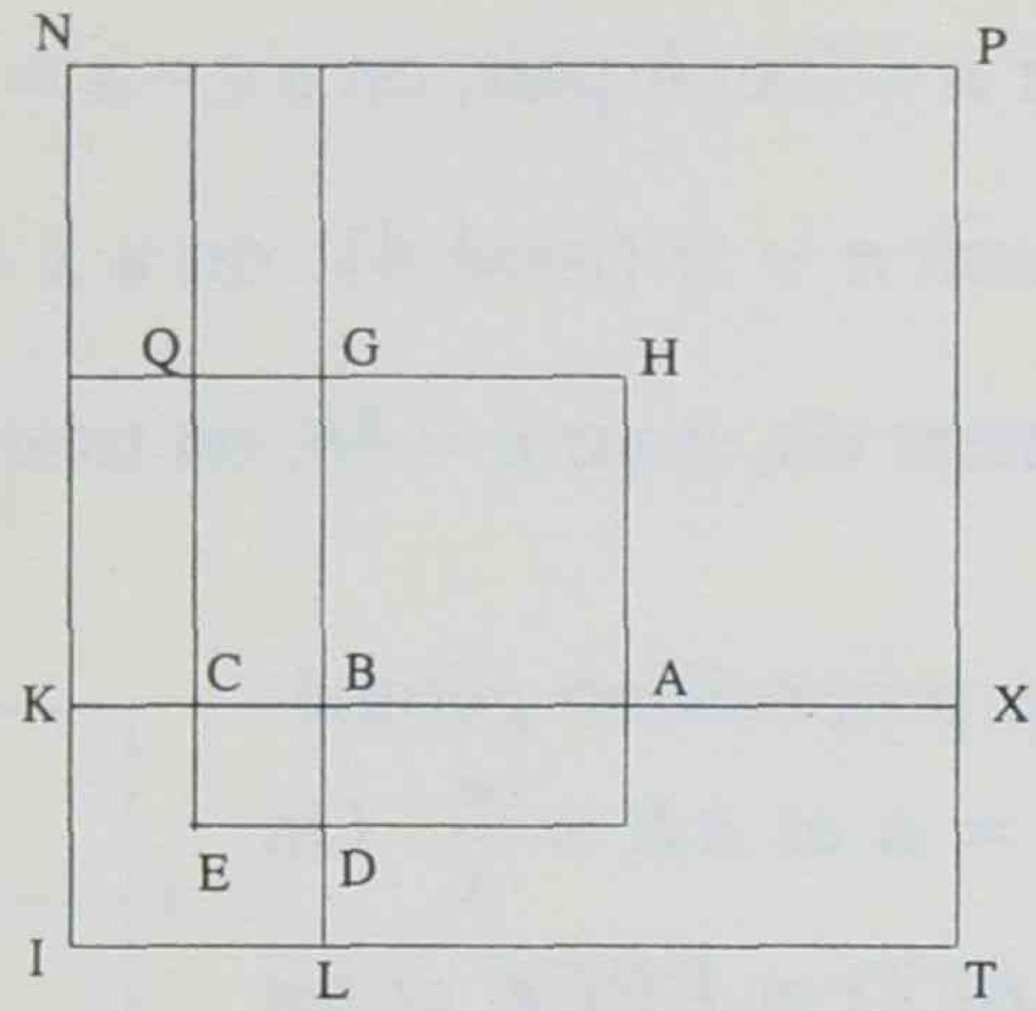


Fig. 7

Le gnomon (BT, BI, BN) est homothétique du gnomon (AD, DC, CG), donc aire (BT, BI, BN) = $(2y)^2$, et on a donc $(2x)^2 + (2y)^2 = (2z)^2$.

Remarque: D'après ce lemme, si pour un entier donné h impair on a une solution (x, y, z) avec a impair, alors $(2x, 2y, 2z)$ est une solution pour le nombre pair $h' = 2h$, avec le même a impair. Al-Sijzī retrouvera ainsi la solution écartée en exigeant a et h de même parité.

Al-Sijzī recommence pour $h = 3$ et montre que si $x^2 + y^2 = z^2$ alors $(3x)^2 + (3y)^2 = (3z)^2$. Il l'établit par la même méthode, c'est-à-dire en utilisant l'homothétie (B, 3).

LEMME 4: Si $x = y + 1$, alors $kx = ky + k$ pour tout entier k.

Al-Sijzī en donne une démonstration géométrique à l'aide des segments de droite.

Une conséquence immédiate des lemmes 3 et 4:

Si (x, y, z) vérifient $x^2 + y^2 = z^2$ et $z - x = 1$, alors (kx, ky et kz) vérifient $kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$ avec $kz - kx = k$.

Exemples: $x^2 + y^2 = z^2$, $z - x = 5$.

Al-Sijzī donne la solution par deux méthodes:

1) Par application des deux précédents lemmes. Les plus petits nombres carrés conduisant à $h = 1$ sont

$$(x_1, y_1, z_1) = (4, 3, 5) \Rightarrow z_1 - x_1 = x_1 - y_1 = 1.$$

2) Par application des formules déjà établies

$$x = \frac{1}{2}\, h(a^2 - 1),\ y = ah,\ z = \frac{1}{2}\, h(a^2 + 1).$$

Pour les triangles obtenus à partir de $a = 3$, on a $z - x = x - y = h$, comme l'affirme al-Sijzī. Mais pour toute autre valeur de a, on a $z - x = h$, et $x - y \neq h$. Ainsi pour $a = 2$ et h pair, on a $z - x = h$, $x < y$ et $y - x = \frac{h}{2}$.

Plus généralement, soit $n \equiv 0 \pmod 4$; on a $x = n$, $y = \frac{3}{4}n$, $z = \frac{5}{4}n$, avec $z - x = \frac{n}{4}$. Autrement dit, pour $n = 4h$, on trouve le triangle T(h, 3), de côtés $4h$, $3h$ et $5h$.

Al-Sijzī établit cette proposition géométriquement. Soit $AB = n$ et $AE = \frac{n}{4}$. On construit les carrés $ABCD$ et $EBFK$ et les points G et H tels que $EG = BH = AE$. Sur GH, soit le point M tel que $HM = AE$; on achève le carré CM de côté $\frac{5n}{4}$.

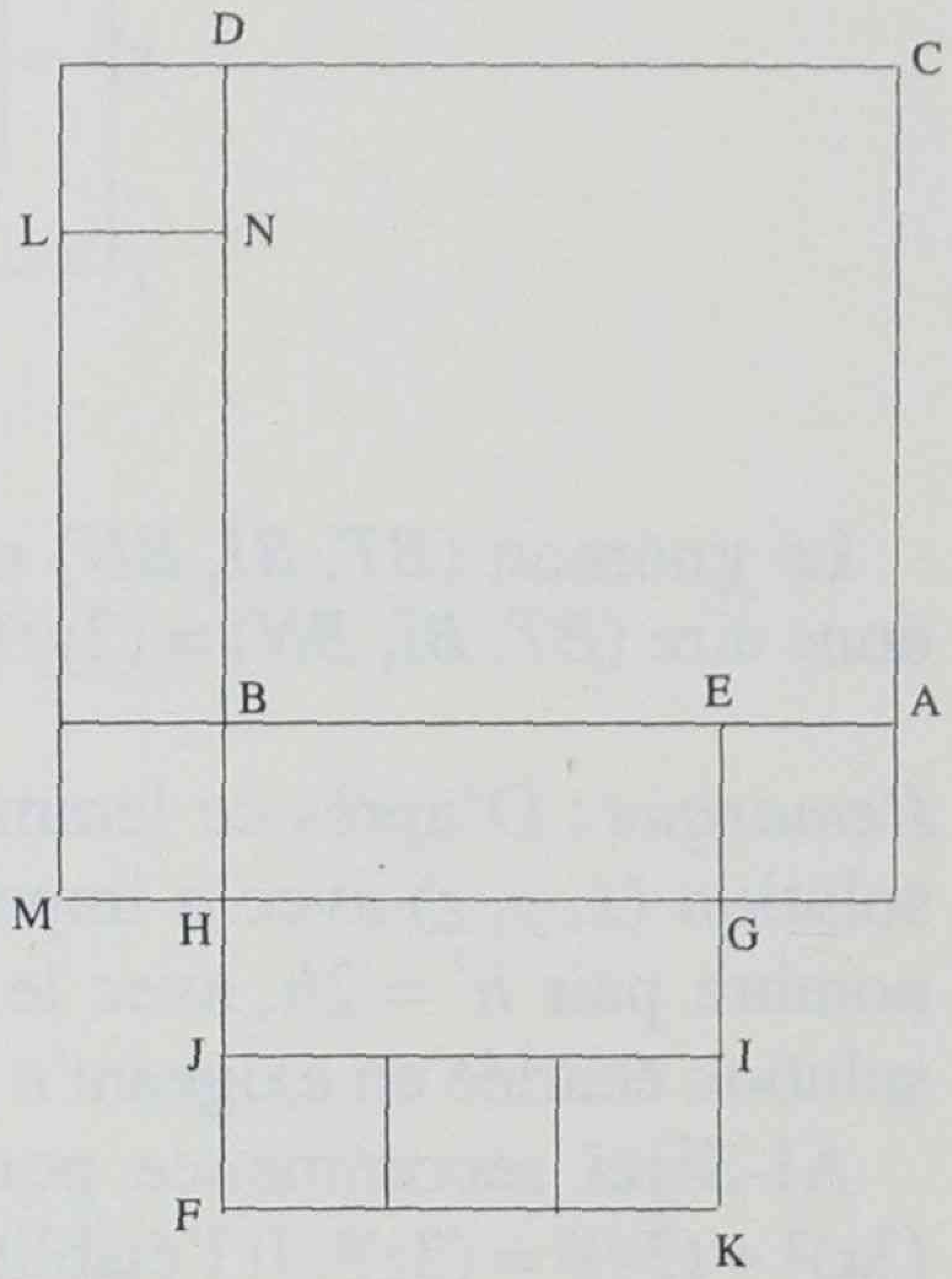


Fig. 8

On a par construction :

aire BC + aire du gnomon (AH, MD)

= aire CM.

Il reste à montrer que

aire du gnomon (AH, MD) = aire BK.

Ce qui est immédiat.

PROPOSITION 5 : Pour tout couple (p, q) tel que $p > q > 0$, $[(p, q) = 1$ et p et q de parités opposées], alors $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$ et $z = p^2 + q^2$ sont les côtés d'un triangle rectangle, et $z - x = 2q^2$.

Il s'agit de la proposition X.29 des *Éléments* d'Euclide. Peut-être est-ce pour cette raison, et aussi du fait qu'al-Khāzin l'a établie par analyse et synthèse, qu'al-Sijzī ne la démontre pas, non plus que ses applications.

Application 1. Soient les entiers successifs $n - 1$, n, $n + 1$, alors $x = n^2 - 1$, $y = 2n$, $z = n^2 + 1$, forment un triangle numérique, avec $z - x = 2$.

Application 2. Soient les entiers successifs $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, alors $x = 2n^2 + 2n$, $y = 2n + 1$, $z = 2n^2 + 2n + 1$, forment un triangle numérique, avec $z - x = 1$.

Application 3. Soient trois entiers en progression de raison 2 : $n - 2$, n, $n + 2$, alors $x = 4n$, $y = n^2 - 4$, $z = n^2 + 4$ forment un triangle rectangle numérique tel que $z - y = 8$.

On a vu comment al-Sijzī établit l'existence, pour toute valeur de n, d'une solution entière pour l'équation $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = t^2$. Il procède par récurrence en construisant une telle solution en passant de $n - 2$ à n. De plus, on a constaté que, pour n donné, il ne cherche pas toutes les solutions de l'équation ; il se contente d'en exhiber une. Avec l'exigence d'une démonstration géométrique et la géométrie dont il disposait, il lui aurait été sans doute difficile d'aborder le problème de la solution générale. Celle-ci peut être obtenue par application de la « méthode de la corde »[1] : on coupe l'hypersurface de l'espace affine $\mathbf{A}^{n+1}$ définie par l'équation par une droite qui passe par le point (0, 0, … , 0, 1, 1) ; on pose

$$\begin{cases} x_j = m_j u & 1 \le j \le n-1 \\ t = x_n + pu \end{cases}$$

(u paramètre le long de la droite). On a

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j^2\right) u^2 + x_n^2 = x_n^2 + 2px_n u + p^2 u^2,$$

d'où

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j^2 - p^2\right) u = 2px_n$$

et, en tenant compte de l'homogénéité,

$$x_n = \sum_{j=1}^{n-1} m_j^2 - p^2, \ u = 2p, \ x_j = 2pm_j \ (1 \le j \le n-1) \text{ et } t = \sum_{j=1}^{n-1} m_j^2 + p^2.$$

On prend pour les m_j et p des entiers quelconques.

Pour conclure on peut dire qu'al-Sijzī explore systématiquement toutes les solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ en donnant une classification de ces solutions en fonction des paramètres $h = z - x$ et $a = \frac{y}{h}$. À chaque fois il essaye d'établir géométriquement le résultat. En outre il a aussi donné une solution de l'équation $x_1^2 + ... + x_n^2 = z^2$ quelque soit l'entier n.

Al-Sijzī se place délibérément, dans ce mémoire, dans la tradition de l'analyse diophantienne entière, comme nous l'avons souligné dans l'introduction. Il s'occupe donc de solutions entières de l'équation diophantienne générale $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = z^2$ dont il veut prouver qu'elle admet toujours au moins une solution entière. Pour l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, il établit quelles solutions elle peut avoir lorsque la différence $z - x = h$ est donnée ; il examine alors l'ensemble de toutes les solutions.

Nous avons remarqué qu'al-Sijzī, à la fois par nécessité de méthode et par son option géométrique, bannit au cours de cette étude tout recours à l'algèbre. Dans cette nouvelle analyse, il ne suffit plus de trouver une solution par un quelconque algorithme, mais il faut démontrer les algorithmes eux-mêmes à l'aide des méthodes géométriques et arithmétiques. Cette exi-

[1] Voir Diophante, *Les Arithmétiques*, t. III.

gence de la démonstration distingue cette nouvelle analyse de celle menée par Diophante dans les *Arithmétiques* ainsi que de celle conduite par certains algébristes. La limitation de l'étude d'al-Sijzī à l'équation précédente correspond au cadre de la géométrie plane, où on raisonne par comparaison d'aires. Étant donnée la généralité de la question posée où trois variables au moins sont présentes, et celle de la méthode délibérément cherchée, al-Sijzī ne pouvait pas penser à une autre géométrie, celle des coniques par exemple. Pouvait-il en être autrement si le problème ne comprenait que deux variables ? Nous ne le croyons cependant pas car, d'une part, on est ici dans le domaine de l'analyse entière et, d'autre part, il aurait fallu, aux mathématiciens de l'époque, caractériser les courbes par leurs équations, ce qui était encore étranger à cette mathématique. Il faut attendre presque un millénaire avant qu'on tire les fruits du rapprochement de l'analyse diophantienne, rationnelle cette fois, et des équations de courbes.

UN PROBLÈME EN THÉORIE DES NOMBRES

Dans son *Anthologie des problèmes*, al-Sijzī cherche à résoudre le problème diophantien (double équation) suivant :

$$\begin{cases} x + a = y_1^2 \\ x - a = y_2 \end{cases}$$

La solution, établie géométriquement, correspond à l'algorithme suivant : on calcule $\frac{a}{2}$; on l'élève au carré et on ajoute un carré unité. On ajoute à la somme le nombre $a = 2 \times \frac{a}{2}$ ou bien on retranche de la somme le même nombre. On obtient les carrés parfaits $\left(\frac{a}{2}+1\right)^2$ et $\left(\frac{a}{2}-1\right)^2$.

On note qu'au cours de la démonstration, al-Sijzī égalise un segment à une surface. Il introduit en effet l'unité de longueur 1, de sorte que $a = a \times 1$, pour interpréter le segment a comme un rectangle. Ce détour est rendu nécessaire par le caractère non homogène du problème. Cette solution d'al-Sijzī n'est pas la plus générale. On trouve, sous une forme algorithmique, la solution générale dans Diophante 2.11 ; rappelons qu'elle consiste à décomposer $\frac{a}{2}$ en deux facteurs u, v et à prendre $x = u^2 + v^2$, $y_1 = u + v$, $u^2 = u - v$.

Comme on vient de le voir, la solution d'al-Sijzī est dans l'esprit du second livre des *Éléments* d'Euclide.

CHAPITRE III

HISTOIRE DES TEXTES

Au long des remarques historiques que nous allons faire sur les textes établis et traduits ici, nous allons nous référer plus d'une fois à trois collections manuscrites complémentaires, quoique d'origines différentes. Comme nous l'avons énoncé dans la préface, on trouvera dans le second volume l'histoire de chacune de ces collections, ainsi qu'une description détaillée des manuscrits. Ici on se bornera aux brefs rappels nécessaires à l'histoire des textes repris dans ce premier volume. Ces collections sont les suivantes :

1° La collection n° 3652 de la bibliothèque Chester Beatty à Dublin, notée C.

2° La collection Reşit n° 1191 de la Bibliothèque Süleymaniye d'Istanbul, notée ici R.

3° La collection de Nabī Khan et d'Obaidur Rahman Khan de Lahore, notée ici N.

4° La collection Or 168 de la Bibliothèque de l'Université de Leiden, notée L.

1° La collection C se composait initialement de deux volumes, comprenant en majorité des écrits mathématiques d'al-Sijzī. Une table des matières au début du premier volume reproduit les titres de ces traités, leurs numéros, ainsi que les numéros des folios qu'ils occupent. Cette collection est d'une seule et même main, celle de al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn Muḥammad ibn ʿAlī ibn Aḥmad Niẓām al-Mulk. Ce dernier a achevé la copie à Bagdad le matin du vendredi 7 Ramaḍān 611 de l'Hégire, c'est-à-dire le 9 janvier 1215, comme l'indique le colophon du premier volume.

À l'origine donc, cette collection comprenait trente-huit traités, tous d'al-Sijzī, dont dix-sept composaient un premier volume et vingt et un le second. La copie a été effectuée — pour un certain nombre des traités, si ce n'est pour tous — à partir d'un autographe ; c'est ce que rappelle le copiste (voir par exemple fol. 16ᵛ). L'examen des noms des propriétaires montre que la collection est restée en Orient jusqu'à la moitié du XIXᵉ siècle au moins, pour ensuite se retrouver à Dublin.

Or cette collection C a subi deux accidents graves : la perte du second volume d'une part, et de huit feuillets du premier volume d'autre part. En effet les feuillets 59^{v} à 67^{v} — selon l'ancienne numérotation — ont été arrachés ; ils contenaient cinq traités, dont un court fragment du dernier est encore présent (fol. 68^{r}). Ces feuillets ont disparu tardivement, comme on le verra.

2° La collection R est une copie du premier volume de C et de lui seul. La confrontation des deux manuscrits — omissions, ajouts, erreurs, etc. — ainsi que l'examen codicologique, ne laissent aucun doute sur ce résultat. Cette copie a heureusement été réalisée avant que les feuillets du premier volume aient été arrachés, si bien que la collection R a conservé les cinq traités manquant à C. Mais à part ces derniers traités, on peut négliger la collection R pour l'édition critique[1]. Tout indique qu'il s'agit d'une copie bien tardive (milieu du XVIII^{e} siècle), en écriture *nasta'līq*. Il se pourrait même qu'elle ait été commandée par le mathématicien Muṣṭafā Ṣidqī, qui lui-même avait transcrit bien des manuscrits mathématiques à Istanbul. En effet cette collection appartenait à ce dernier, comme l'indique le sceau de la première page.

3° La collection N contient, entre bien d'autres traités dus à différents mathématiciens, six écrits d'al-Sijzī. Tous les traités de la collection ont été copiés à l'école al-Niẓāmiyya de Mossoul, et dans celle de Bagdad à partir de l'année 554-557 de l'Hégire (1159-1162), en écriture *nasta'līq*. Cette collection comprend en outre une liste de vingt-cinq traités mathématiques d'al-Sijzī. Or, chose étonnante, à l'exception d'un seul titre, cette liste, qui se trouve dans le premier volume de C, donne la plupart des titres qui devaient se trouver dans le second volume de C, plus quelques nouveaux titres. Elle permet donc de contrôler les titres donnés dans C et d'enrichir notre connaissance grâce à d'autres écrits d'al-Sijzī ; nous la publions dans le second volume.

4° La collection L a été copiée en 587 de l'hégire (1191) en *naskhī*, de la même main (voir P. Voorthoeve, *Handlist of Arabic Manuscripts*, Leiden University Press, 1980, p. 301-306).

Elle comprend trois traités d'al-Sijzī. Il s'agit de :

[1] Cette collection a fait l'objet d'une reproduction photographique sous le titre *Collection of Geometrical Works by al-Sijzī*, Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science edited by Fuat Sezgin, Facsimile Editions, Series C, vol. 64 Frankfurt am Main, 2000. Cette reproduction est précédée d'une brève introduction de J. Hogendijk, p. V-XIX.

• *Risāla fī waṣf al-quṭu' al-makhrūṭiyya*, fol. 1v-22v.
• *Risala fī qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya*, fol. 23r-40v.
• *Risāla fī taḥṣīl īqā' al-nisba al-mu'allafa*, fol. 41r-44r.

Or ces trois titres ne se trouvent ni parmi ceux de C, ni sur la liste de N. Comme d'autre part dans le second traité sur la trisection de l'angle al-Sijzī évoque les procédés d'al-Bīrūnī, né en 972, on peut supposer sans risque que la composition de ce traité a eu lieu dans les années quatre-vingt-dix du dixième siècle. Il s'agit donc d'une rédaction tardive, d'un mathématicien actif depuis quatre décennies déjà.

Venons-en à présent aux textes établis et traduits ici.

1° *Sur les propriétés de la coupole hyperbolique et de la coupole parabolique*

Ce texte appartenait à C avant d'être arraché, avec les quatre autres, du premier volume. C'est le onzième traité de ce volume. Dans C, il s'intitule « Son (al-Sijzī) épître à son père Abī al-Ḥusayn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl, que Dieu prolonge ses jours, sur les propriétés des sections hyperboliques et paraboliques ». Cet écrit occupait alors les folios 64-65. C'est sur ce manuscrit que le copiste de R l'a transcrit, fol. 66r-68v. Cette épître d'al-Sijzī nous est parvenue également de la main de l'auteur. Il s'agit de la collection de la Bibliothèque Nationale de Paris, n° 2457, dont la majeure partie a été copiée par al-Sijzī en personne[1] ; il est ici noté B. L'épître occupe les folios 137v-139r. Al-Sijzī place cette épître à la suite de la copie du traité de Thābit ibn Qurra sur la mesure du paraboloïde, où ce dernier commence par étudier certaines coupoles paraboliques. C'est pour ainsi dire une reconnaissance par al-Sijzī de sa source d'inspiration[2]. Al-Sijzī, qui écrit en *naskhī* distincte, avait achevé ce texte le lundi rām-rūz du mois de Bahman 340 (Yazdegard), soit le 12 février 972. Il rappelle qu'il a lui-même confronté et corrigé cette copie sur le modèle, c'est-à-dire l'épître expédiée à son père.

La présence de l'autographe nous permet d'apercevoir les accidents que la tradition manuscrite a fait subir au texte d'al-Sijzī. Ainsi, si on écarte le

[1] Voir la description de ce manuscrit dans R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, London, 2002, p. 735-736.

[2] Voir R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, London, 1996, p. 272 et 320-322.

titre et quelques différences dues à l'évolution de l'orthographe, nous constatons qu'il y a environ trente fautes, essentiellement d'arabe, communes aux deux manuscrits, c'est-à-dire du fait d'al-Sijzī. Le copiste (Chester Beatty et/ou Reşit) a corrigé environ neuf fautes commises par al-Sijzī et a ajouté deux mots, appelés par le contexte. En revanche, il a omis une dizaine de mots et trois phrases de deux mots au moins et a commis environ quarante-cinq fautes, sans compter l'inversion — sans conséquence — d'une phrase.

2° *Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique*

Ce livre se trouve parmi ceux qui ont été arrachés au premier volume de C, n° 10, fol. 61-63. Il a été copié dans R à partir de C, fol. 63^v-65^v. C'est, à notre connaissance, le seul manuscrit conservé de ce texte.

3° *Sur la description des sections coniques*

Ce livre existe en un seul manuscrit. Il fait partie de la collection L, fol. 1^v-22^v (notons que les folios sont en désordre). On lit sur la page de garde de la main du copiste le titre *Fī rasm al-quṭūʿ al-makhrūṭiyya* (*Sur le tracé des sections coniques*), mais dans le corps du texte, al-Sijzī écrit *fī waṣf* que l'on doit rendre par « sur la description ».

4° *Traité sur la construction du compas parfait*

Ce texte se trouvait dans le second volume, perdu, de C, sous le titre *Fī ʿamal al-birkār al-makhrūṭī bī-ṭarīq ṣināʿī*, *Sur la construction du compas conique par une méthode artificielle*. C'est le vingt-neuvième traité de C. Il figure ainsi sur la liste (n° 17) reproduite dans N sous le titre *ʿAmal birkār al-makhrūṭ*, *La construction du compas du cône*. Al-Sijzī lui-même s'y réfère dans le traité précédent sous le titre *Fī ʿamal al-birkār al-makhrūṭī*, *Sur la construction du compas conique*. De ce traité il n'existe qu'un seul manuscrit que nous avons eu la chance de rencontrer. Il se trouve à la bibliothèque de Rampur (Inde), sous le n° 3698, fol. 103^v-104^v. Ce manuscrit a été transcrit en *nastaʿlīq*, par un copiste qui, à l'évidence, ne comprenait pas le texte qu'il recopiait et a négligé de reproduire les figures.

5° *Comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent et qui ne se rencontrent pas*

Ce texte appartenait au premier volume de C, n° 13. Sa majeure partie appartenait aux feuilles arrachées, de sorte qu'il ne reste qu'un fragment, folio 68^r.

À la fin du colophon, le copiste écrit : « Il (al-Sijzī) l'a composé l'an 349 Yazdegard », c'est-à-dire en 980-981, et donc après bien des travaux sur les coniques.

Le copiste de R l'a transcrit à partir de C et de lui seul. Il nous est parvenu aussi en quatre autres manuscrits :

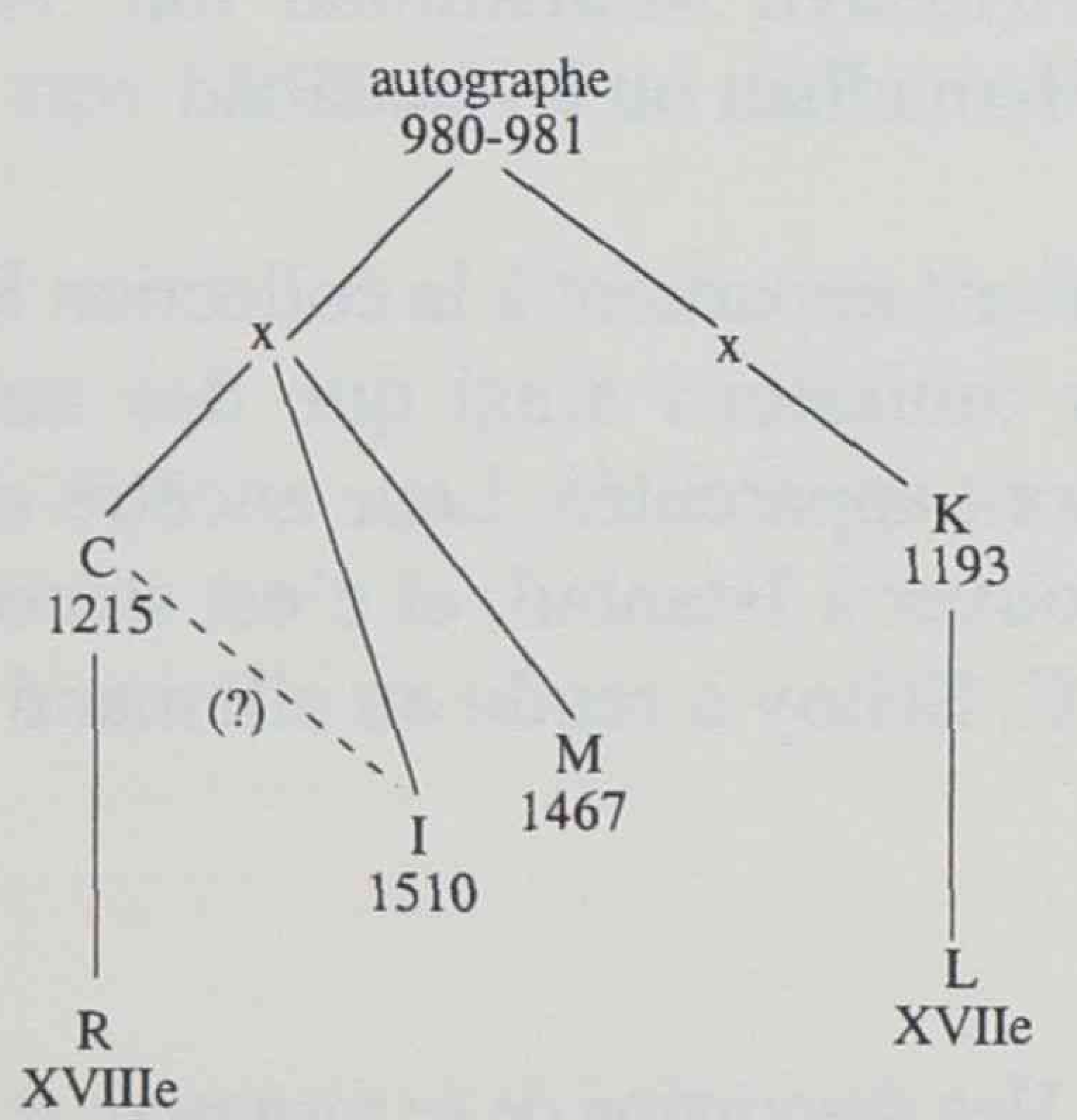
• Columbia University Or 45/11, fol. 233-236, noté K, copié en 589 de l'hégire (1193), en écriture *naskhī* ; toutes les figures ont été tracées par le copiste. Ce manuscrit était encore à Alep au XVII^{e} siècle, lors de la visite que Golius a effectuée dans cette ville.

• Leiden Or. 14, fol. 226-231. Nous avons établi que le texte d'al-Sijzī, ainsi que bien d'autres traités, ont été copiés sur le manuscrit précédent, celui de Columbia, et sur celui-ci uniquement[1]. Nous n'avons donc pas tenu compte de ce manuscrit pour l'établissement du texte.

• Meshed, Āstān Quds 5521/3, fol. 11^{r}-13^{v}, noté M, copié en 867 de l'hégire (1467), en écriture *nasta'līq*.

• Istanbul, Université A 314, fol. 51^{r}-54^{r}, noté I, copié en 916 de l'hégire (1510), en écriture *naskhī*[2]. Ce traité a été transcrit d'une copie de la main de Fakhr al-Dīn al-Marāghī dont il a achevé la transcription au mois de Jumādā al-ūlā 643 H./1245, à Mossoul. Il est très vraisemblable que ce manuscrit a été copié sur C avant que les feuilles correspondantes soient arrachées. Étant donné qu'il ne reste qu'un petit fragment de ce texte dans C, nous n'avons aucun moyen pour établir en toute rigueur cette conjecture.

Nous proposons donc le stemma suivant :



[1] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, 2000, p. 533-534.

[2] Voir R. Rashed et Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IX^{e} siècle. Le recueil de propositions géométriques de Na'īm ibn Mūsā*, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, 2004, p. 9.

6. *Toutes les figures sont à partir du cercle*
Ce traité nous est parvenu en un seul manuscrit. Il appartient à la collection Khuda Bakhsh n° 2519, fol. 280r-282r, en écriture *naskhī*. Cette collection est datée de 631 H (1234)[1]. Elle comprend 42 traités et opuscules de mathématiques et d'astronomie[2].

7. *Sur la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales*
Ce livre existe en un seul manuscrit. Il fait partie de la collection L, fol. 23r-40v.

8. *Sur la détermination des deux moyennes par la géométrie*
Ce livre existe en un seul manuscrit. Il fait partie de la collection N, fol. 30-32.

Nous donnons ici l'*editio princeps* ainsi que la première traduction des huit traités précédents

9. *Sur la construction de l'heptagone régulier et la trisection de l'angle*
Ce livre existe en trois manuscrits. On le trouve écrit de la main de Muṣṭafā Ṣidqī, dans la collection 41 de Dār al-Kutub, fol. 113v-115v. Cette copie, notée Q, a été transcrite le mardi 9 Jumādā al-ūlā 1153 H, c'est-à-dire le 2 août 1740.

Le deuxième manuscrit est le 4821 de la Bibliothèque Nationale, fol. 10v-16v, de la main d'al-Ḥusayn Muḥammad ibn ʿAlī. Il a très vraisemblablement été copié à Hamadhān ou à Asadābād vers 1149-1150[3]. On l'a noté B.

Le troisième manuscrit appartient à la collection R, fol. 80v-83r.

Or, l'examen des omissions ainsi que des autres accidents de copie montre que Q et R sont apparentés. Leur ancêtre commun devait très vraisemblablement se trouver à Istanbul, et c'est sa copie que Muṣṭafā Ṣidqī a transcrite. En 1926, C. Schoy a rendu en allemand le texte de Q, mais sans

[1] Voir *supra*, p. 106. Une description de ce manuscrit se trouve dans le *Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore*, prepared by Maulavi Abdul Hamid, vol. XXII (Arabic MSS.) : Science, Bihar, Patna, 1937, n° 2468, p. 60-92.

[2] Elle comprend notamment presque toutes les œuvres d'Ibrāhīm ibn Sinān, voir R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au* Xe *siècle*, Leiden, 2000, p. 5 et 91.

[3] Voir la description de ce manuscrit dans *Les Mathématiques infinitésimales du* IXe *au* XIe *siècle*, vol. III, p. 649-653.

en donner d'édition critique[1]. En 1984 J. P. Hogendijk a donné une édition et une traduction du texte[2]. Il existe également une version abrégée de ce texte dans la collection Thurston 3 de la Bodleian Library, fol. 129, que nous avons déjà établie[3].

10. *La solution par une méthode universelle d'un problème numérique*
Ce livre existe en un seul manuscrit. Il fait partie de la collection N, fol. 340-351.

11. *Fragment de l'*Anthologie de problèmes *en théorie des nombres*
Il s'agit du problème 55 de l'*Anthologie de problèmes* (établie et traduite dans le volume II), qui occupe les folios 85^{v}-86^{r} de la collection Chester Beatty 3045 à Dublin (noté D) et les folios 42^{v}-43^{r} de la collection Dār al-Kutub, Riyāḍa 699 au Caire (noté C).

12. *Fragment cité par al-Samaw'al en théorie des nombres*
Ce fragment est cité par al-Samaw'al dans son livre *al-Bāhir* en algèbre (voir notre édition p. 147).

[1] C. Schoy, « Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der ViekönIglichen Bibliothek zu Kairo », *Isis*, 8, 1926, p. 21-40.

[2] J. P. Hogendijk, « Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon », *Archive for History of Exact Sciences*, 30, 1984, p. 197-330, aux p. 292-316.

[3] *Les Mathématiques infinitésimales du* IX*e au* XI*e siècle*, vol. III, p. 758-761.

TEXTE ET TRADUCTION

I

Fī khawāṣṣ al-qubba al-zā'ida wa-al-mukāfi'a

Sur les propriétés de la coupole hyperbolique et de la coupole parabolique

B-137v
R-66r

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Épître de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl
à son père Abū al-Ḥusayn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl

Sur les propriétés de la coupole hyperbolique
et de la coupole parabolique

À l'éminent Shaykh Abū al-Ḥusayn Muḥammad ibn ʿAbd al Jalīl,
de son serviteur Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl

Paix soit sur toi, et la miséricorde de Dieu et sa Bénédiction

Après avoir fini de trouver ce qui a trait aux propriétés de l'ellipse à partir des figures ovale et lenticulaire, c'est-à-dire les deux solides engendrés par la rotation de l'ellipse sur son plus grand et son plus petit diamètre, j'avais l'esprit préoccupé par l'effort de trouver les propriétés des figures solides engendrées par la rotation de l'hyperbole et de la parabole, qui sont la coupole hyperbolique et la coupole parabolique, jusqu'à ce que j'ai conversé à ce propos avec un certain géomètre qui a expliqué que la chose était telle qu'elle m'était venue à l'idée, et a expliqué ce qu'il en est des propriétés de la parabole, par une voie autre que celle que j'ai suivie, alors que je ne la trouvais pas bien.

Mais, puisque ces propriétés sont uniformes dans ces solides — à présent que j'en ai terminé avec les propriétés des figures ovale et lenticulaire — il convient de ne pas négliger ce qui résulte des propriétés

ب-١٣٧-ظ
ر-٦٦-و

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل إلى أبيه أبي الحسين محمد بن عبد الجليل في خواص القبة الزائدة والمكافئة

للشيخ الفاضل أبي الحسين محمد بن عبد الجليل من عبده أحمد بن محمد بن عبد الجليل

والسلام عليك ورحمة الله وبركاته

قد كان خاطري مشتغلاً بعد فراغي من وجود جهات خواصّ القطع الناقص من الشكل البيضي والعدسيّ، أعني المجسمين الحادثين من إدارة القطع الناقص على قطره الأطول والأصغر، بطلب وجود خواص الشكل المجسم الحادث من إدارة القطع الزائد والمكافئ اللذين هما القبة الزائدة والقبة المكافئة، إلى أن جاريت ذكر ذلك عند بعض المهندسين، فذكر أن الأمر كما خطر ببالي وذكر أمر خواص القطع المكافئ بطريق غير الطريق الذي سلكت فيه مع ما أني استحسنته.

ولأن هذه الخواص مطردة في هذه المجسمات، وإذ فرغت من خواص الشكل البيضي والعدسي، خليق لنا ألا نغفل عما يحدث من خواص هذين

1 البسملة: ناقصة [ر] – 2 محمد بن: أثبتها تحت السطر [ر] – 2-3 كتاب ... والمكافئة: ناقصة [ب]، ونجد في الهامش «يو» – 6 والسلام: السلم [ب] – 7 خاطري: خاطبتي [ر] – 8 المجسمين: مجسمين [ر] – 10 اللذين: اللذان [ر] – 11 جاريت: غير واضحة، فأعاد كتابتها في الهامش [ب]، بمعنى جاراه في الحديث، أي تناظر / عند: كتب أولاً «مع»، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 12 وذكر أمر: من [ر] – 13 مع ما: معما [ر، ب]، وكذلك فيما بعد / مع ما أني استحسنته: العبارة غامضة، وتحتمل معنيين حسب موقع «ما». فإن كانت «ما» زائدة على مع، فسيكون المعنى «مع استحساني إياه»، وإن كانت «ما» النافية فسيكون المعنى «مع أني لم استحسنه»، هذا ما أخذنا به – 14 ولأن: لان [ر] / إذ: أثبتها في الهامش [ب] ناقصة [ر] – 15 خليق: فخليق [ر].

de ces deux figures solides engendrées par la rotation de l'hyperbole et de la parabole autour de l'axe, et ce qui s'ensuit nécessairement du tracé du mouvement d'une droite parallèle à une droite donnée sur la circonférence d'une hyperbole ou d'une parabole sur une surface plane[1].

Peut-être existe-t-il de nombreuses propriétés, si nous méditons ces figures, comme à notre habitude dans tout ce que nous cherchons et examinons. J'ai expédié cette partie que j'ai composée à l'éminent Shaykh — Que Dieu prolonge son séjour et perpétue son bien-être —, afin qu'en l'examinant il se divertisse et trouve plaisir à cet écrit, si Dieu le veut.

Lorsque nous avons trouvé les propriétés des sections coniques qui sont le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole dans les solides engendrés par le tracé du mouvement d'un triangle rectangle et par le mouvement d'un rectangle qui sont le cône <droit> et le cylindre <droit>, nous avons cherché les sections dans les solides engendrés à partir de ces sections et nous avons alors trouvé que ce qui s'engendre dans la sphère est le cercle ; étant donné que dans les figures engendrées par la rotation d'une ligne autour d'un axe le cercle ne manque jamais, et le cercle se trouve dans toutes les figures de révolution ; et nous ne trouvons dans la sphère aucune des sections mentionnées, autre que le cercle.

Nous avons ensuite cherché de ces sections dans la figure ovale ou lenticulaire et nous trouvons alors l'ellipse, étant donné que l'ellipse à partir de laquelle a été engendrée la figure ovale ou lenticulaire en est la plus proche et en particulier du cercle. Nous avons donc trouvé en elles l'ordre de deux choses: le cercle qui est le plus semblable, comme nous l'avons trouvé dans la sphère et dans tous les autres solides de révolution, et puisqu'elles
R-66v sont engendrées / à partir de l'ellipse, nous avons trouvé en ces deux figures les sections elliptiques et les cercles seulement.

Nous avons examiné ensuite le solide engendré à partir de la parabole, nous avons trouvé en lui les sections paraboliques, elliptiques et le cercle. Or nous avons rappelé que les cercles se trouvent dans tous les solides de révolution, et que l'ellipse a un rapport proche du cercle, elle se trouve alors nécessairement dans cette figure.

Nous avons examiné le solide engendré à partir de l'hyperbole, nous avons trouvé en lui l'hyperbole, l'ellipse et le cercle: l'hyperbole car il est engendré à partir de cette figure, l'ellipse et le cercle en raison de ce que nous avons mentionné pour la parabole.

[1] Al-Sijzī annonce ici l'étude des deux coupoles et celle des solides cylindriques qu'il étudie dans le second texte.

الشكلين المجسمين الحادثين من إدارة القطع الزائد والمكافئ على المحور، وما يلزم من ارتسام حركة خط موازٍ لخط معطى على محيط قطع زائد أو مكافئ على بسيط مسطح.

وربما توجد خواص كثيرة، إذا تأملناه كعادتنا في سائر طلبنا وفحصنا. وقد أنفذت هذا المقدار الذي عملت إلى الشيخ الفاضل – أطال الله بقاءه وأدام سلامته – ليتسلى بالنظر فيه ويستأنس به، إن شاء الله.

ولما وجدنا خواص القطوع وهي الدائرة والناقص والزائد والمكافئ في المجسمات الحادثة من ارتسام حركة مثلث قائم الزاوية ومتوازي ⟨الأضلاع⟩ قائمة الزوايا، وهما المخروط والأسطوانة، طلبنا ⟨القطوع⟩ في المجسمات الحادثة من هذه القطوع، فوجدنا فيما يحدث من الكرة الدائرة إذ الأشكال الحادثة من إدارة خط على محور لا تخلو من الدائرة، والدائرة موجودة في جميع الأشكال الدورية، ولسنا نجد في الكرة شيئًا من القطوع المذكورة سوى الدائرة.

ثم طلبنا في البيضي والعدسي ⟨من هذه القطوع فوجدنا القطع الناقص⟩، إذ القطع الناقص المتولد منه البيضي والعدسي أقرب شكل إليهما، وخاصة إلى الدائرة. فوجدنا فيهما ترتيب شيئين: الدائرة أشبه، كما وجدنا في الكرة ⟨و⟩مما في سائر الأشكال المجسمة الدورية، ولأنهما يحدثان / ر-٦٦-ظ من القطع الناقص، فقد وجدنا فيهما القطوع الناقصة والدوائر فقط.

ثم نظرنا إلى المجسم الحادث من القطع المكافئ، فوجدنا فيه القطوع المكافئة والناقصة والدوائر. وقد ذكرنا أن الدوائر موجودة في جميع المجسمات الدورية وبأن للقطع الناقص مناسبة قريبة عند الدائرة، فلذلك لزم وجوده في هذا الشكل.

ونظرنا إلى المجسم الحادث من القطع الزائد، فوجدنا فيه القطع الزائد والناقص والدائرة: أما الزائد فلأنه حادث من ذلك الشكل؛ وأما الناقص والدائرة فلأجل ما ذكرنا في المكافئ.

2 أو مكافئ: ومكاف [ر] – 4 تأملناه: الضمير يعود هنا على الشكل البيضي والعدسي؛ ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى – 5 هذا: هذه [ر] – 5-6 أطال ... سلامته: رحمه [ر] – 9 قائمة: الصفة تعود على الأضلاع – 11 إذ: اذا [ر] / الحادثة: الحادث [ر] / محور: كتب بعدها «الأسطوانة»، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] / تخلو: يخلوا [ب، ر]، ولن نشير إليها فيما بعد – 15 إذ: اذا [ر] / إليهما: اليه [ب، ر] – 16 ترتيب: ترتب [ر] – 21 وبأن: وكان [ب، ر] – 24 الزائد: الزاوية [ر].

Par conséquent, nous avons trouvé dans l'un des solides, qui est la sphère, les cercles seulement, et ceux-ci sont limités par le plus grand extrême, qui est le plus grand cercle de la sphère. Ce solide est dans le premier rang.

Nous avons trouvé dans le solide ovale ou lenticulaire des cercles et des sections elliptiques qui sont limités par deux extrêmes: le plus grand cercle de ce solide et la plus grande ellipse de celui-ci. Ce solide est dans le deuxième rang.

Et dans le solide cylindrique, le cercle limité et les sections elliptiques illimitées. Ce solide est dans le troisième rang.

Dans la coupole hyperbolique ou parabolique: dans l'hyperbolique, l'el-
B-138r lipse, le cercle et l'hyperbole; / dans le parabolique, la parabole, l'ellipse et le cercle. Mais nous ne trouvons pas la parabole dans la coupole hyperbolique, ni l'hyperbole dans la coupole parabolique; ces coupoles sont le quatrième rang.

Quant au solide conique, nous avons trouvé en lui les cercles illimités de part et d'autre, en grandeur et en petitesse, les ellipses, les hyperboles et les paraboles illimitées, et ce solide englobe les quatre figures, bien plus, les cinq figures, c'est-à-dire le triangle. Ce solide est dans le cinquième rang.

C'est pourquoi l'éminent Apollonius l'a institué comme règle et a cherché les propriétés de ces quatre figures à partir du solide conique et a laissé la recherche des propriétés de l'ellipse à partir du cylindre — propriétés que nous avons trouvées par la démarche la plus aisée et la voie la plus facile — et a pris les chemins difficiles, car le cône englobe toutes les figures mentionnées. Ceci est donc une classification naturelle et un examen universel de ce sujet.

Commençons maintenant par exposer ce à quoi nous voulons parvenir.

– **1** – Soit *CAD* une parabole; nous la faisons tourner autour de son axe qui est *AB*; il vient la coupole parabolique *CAD*.

فإذاً، قد وجدنا في أحد المجسمات، وهي الكرة، الدوائر فقط، مع ما أنها محدودة بالطرف الأعظم، وهو أعظم دائرة تقع عليها؛ وهو في المرتبة الأولى؛

وفي المجسم البيضي والعدسي الدوائرَ والقطوعَ الناقصة المحدودتين 〈بطرفين〉، وهما أعظم دائرة تقع عليه وأعظم قطع ناقص يقع عليه؛ وهو في المرتبة الثانية؛

وفي المجسم الأسطواني الدائرةَ المحدودة والقطوعَ الناقصة الغير المحدودة؛ وهو 〈في〉 المرتبة الثالثة؛

وفي القبة الزائدة والمكافئة: أما الزائدة فالقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد؛ / وأما المكافئة فالقطع المكافئ والناقص والدائرة. لكن لسنا نجد في ب-١٣٨-و القبة الزائدة القطعَ المكافئ، و〈لا〉 في المكافئة القطعَ الزائد، وهما في المرتبة الرابعة.

فأما المجسم المخروطي، فقد وجدنا فيه الدوائرَ الغير المحدودة بكلا الطرفين بالعظم والصغر، والقطوعَ الناقصةَ والزائدةَ والمكافئةَ الغير المحدودة وهو جامع للأشكال الأربعة بل للخمسة، أعني المثلث؛ وهو في المرتبة الخامسة.

فلذلك الفاضل أبلونيوس قد جعله دستوراً، وطلب خواص هذه الأشكال الأربعة عن المجسم المخروطي، وترك طلب خواص القطع الناقص عن الأسطوانة التي وجدناها بأهون سعي وأسهل مسلك، وأخذ المآخذ الصعبة، لأن المخروط جامع لهذه الأشكال المذكورة. فهذه قسمة طبيعية وفحص كليّ في هذا المعنى.

فلنبتدئ الآن بذكر ما كان غرضنا فيه.

- آ - قطع جـ ا د المكافئ، أدرناه على سهمه، وهو آ ب، فصار قبة جـ ا د المكافئة.

1 الدوائر: الدائرة [ر] – 4 الدوائر: الدائرة [ر] – 9 فالقطع الناقص والدائرة: فالدائرة والقطع الناقص [ر] / القطع: ناقصة [ب] – 10 المكافئة: المكافى [ب] فى المكافئ [ر] / والناقص: كلمة غير موجودة في [ر] – 17 فلذلك: ولذلك [ر] / أبلونيوس: ابللونيوس [ب، ر]، وكذلك فيما بعد – 22 فلنبتدئ: فلنبتدأ [ر] – 23 آ: ناقصة [ر] / أدرناه: ادرنا [ب، ر] / فصار: وصار [ر].

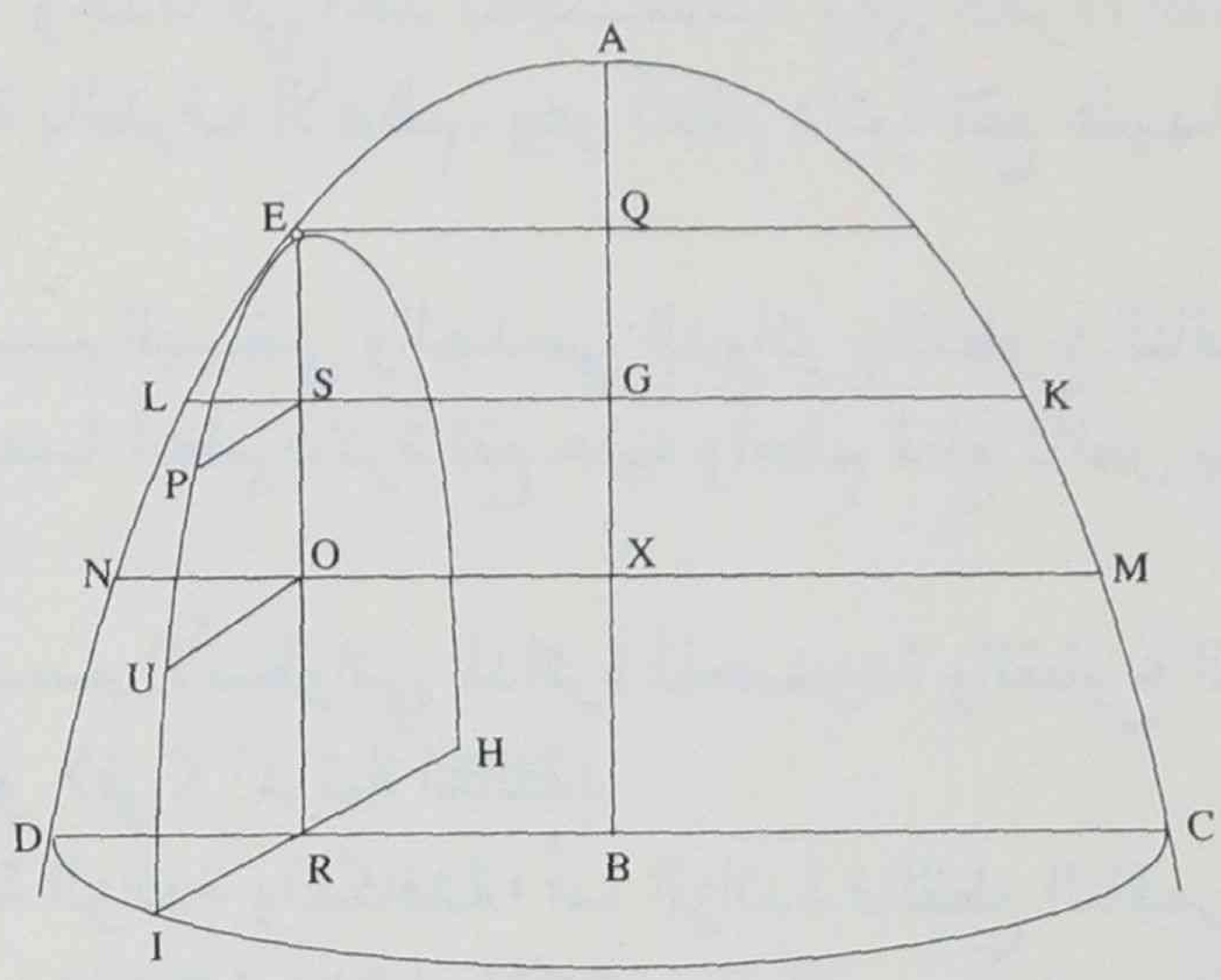


Fig. 1

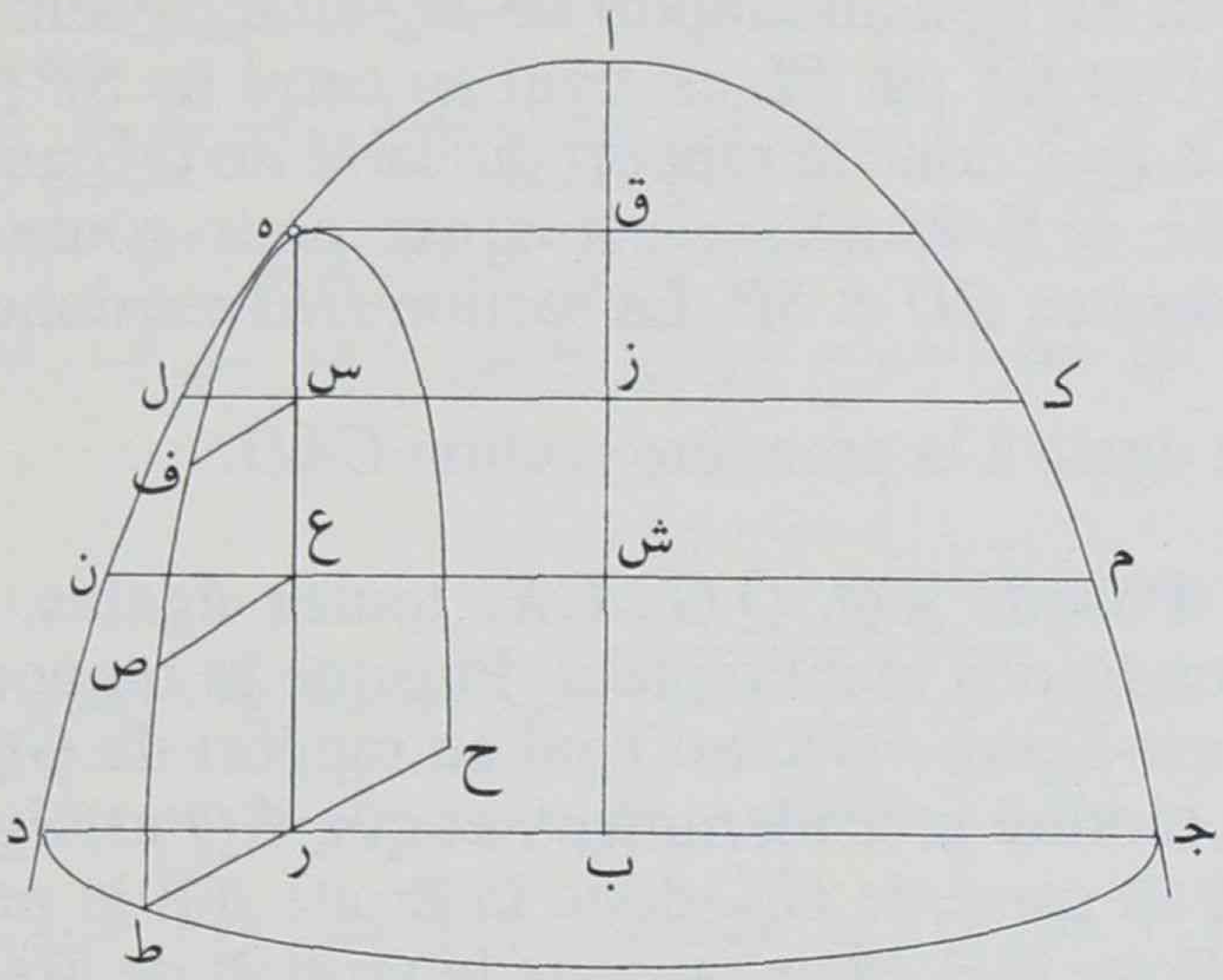
Je dis que la section par un plan sécant est ou bien une parabole égale à la section *CAD*, ou bien une ellipse ou bien un cercle.

Démonstration: Le plan sécant ou bien est parallèle à l'axe *AB*, ou bien il ne lui est pas parallèle.

Qu'il lui soit d'abord parallèle. Soit la section *HEI*; que le plan *HEI* soit
R-67^{r} perpendiculaire au plan *CAD*. Il faut montrer / que la section est une parabole égale à la section *CAD* et que son axe est la droite *ER*, intersection du plan *HEI* et du plan *CAD*. Menons les droites ordonnées dans la section *CAD*, qui sont *KL*, *MN*; menons *EQ* parallèle à celles-ci et traçons autour des deux diamètres *KL* et *MN* deux cercles sur la surface latérale de la coupole parabolique. Menons les perpendiculaires *SP*, *OU* aux droites *KL*, *MN* dans les plans des deux cercles. Il est clair que *KS* par *SL* est égal au carré de *SP* et que *MO* par *ON* est égal au carré de *OU*. Mais le rapport du carré de *XN*, c'est-à-dire de *MO* par *ON* plus le carré de *XO*, au carré de *GL*, c'est-à-dire *KS* par *SL* plus le carré de *GS*, est égal au rapport de *AX* à *AG*. De même, le rapport du carré de *LG* au carré de *QE* est égal au rapport de *AG* à *AQ*, comme l'a montré l'éminent Apollonius dans la <proposition> 19[1] du premier <livre> des *Coniques.*

Mais par séparation, le rapport de *KS* par *SL* au carré de *QE* est égal au rapport de *GQ* à *QA*. De même, le rapport de *MO* par *ON* au carré de *QE* est égal au rapport de *XQ* à *QA*. Par égalité des rapports, on a le rapport de

[1] Proposition 20 dans l'édition de Heiberg.



أقول: إن السطح القاطع له إما أن يكون قطعًا مكافئًا مساويًا لقطع جـ ا د، وإما قطعًا ناقصًا وإما دائرة.

برهانه: أن السطح القاطع له إما أن يكون موازيًا لسهم ا ب وإما غير موازٍ له.

فليكن أولاً موازيًا له، وهو قطع ح ه ط؛ وليكن سطح ح ه ط على زاوية قائمة على سطح جـ ا د. ينبغي أن نبين / أنه قطع مكافئ مساوٍ لقطع جـ ا د ر-٦٧-و وسهمه خط ه ر المشترك بين سطح ح ه ط وسطح جـ ا د. ونخرج خطوط الترتيب في قطع جـ ا د، وهما كـ ل م ن، ونخرج ه ق موازيًا لهما، وندير على قطري كـ ل م ن دائرتين على بسيط القبة المكافئة، ونخرج عمودي س ف ع ص على خطي كـ ل م ن في بسيطي الدائرتين. فبيّنٌ أن كـ س في س ل يعدل مربع س ف، وم ع في ع ن يعدل مربع ع ص. لكن نسبة مربع ش ن، أعني م ع في ع ن ومربع ش ع، إلى مربع ز ل، أعني كـ س في س ل ومربع ز س، كنسبة ا ش إلى ا ز. وكذلك نسبة مربع ل ز إلى مربع ق ه كنسبة ا ز إلى ا ق، وقد بينه الفاضل أبلونيوس في يط من الأولى من *المخروطات*.

لكن بالتفصيل نسبة كـ س في س ل إلى مربع ق ه كنسبة ز ق إلى ق ا. وكذلك نسبة م ع في ع ن إلى مربع ق ه كنسبة ش ق إلى ق ا. فبالمساواة

1 السطح القاطع له: يعني أن السطح القاطع يحدث هذه القطوع، ولن نشير إليها مرة أخرى، وسنترجمها على حسب هذا المعنى بالفرنسية / قطعًا مكافئًا مساويًا: قطع مكافئ مساو [ب، ر] – 2 قطعًا ناقصًا: قطع ناقص [ب، ر] – 3 برهانه: برهان ذلك [ر] – 7 ه ر: ه ز [ب، ر]، وكذلك فيما يلي – 8 موازيًا: مواز [ب] – 12 ش ع: س ع [ر] – 13 وكذلك: ولذلك [ب] / ل ز إلى مربع: ناقصة [ر] – 17 وكذلك: ولذلك [ب] / نسبة (الأولى): أثبتها في الهامش [ب].

MO par *ON* à *KS* par *SL* égal au rapport de *XQ* à *GQ*. Mais *MO* par *ON* est égal au carré de *OU* et *KS* par *SL* est égal au carré de *SP* ; *OE* est égale à *XQ* et *SE* est égale à *QG*, donc le rapport du carré de *OU* au carré de *SP* est égal au rapport de *OE* à *SE*; c'est ainsi pour toute droite menée parallèlement aux droites *OU* et *SP*. La section *HEI* est donc une parabole.

Je dis qu'elle est égale à la première section *CAD*.

Démonstration : Posons *AQ*, *QG*, *GX*, toutes égales, et menons les droites selon les conditions mentionnées. Puisque le rapport de *KS* par *SL*
B-138v au carré de *EQ*, c'est-à-dire / *GS*, est égal au rapport de *GQ* à *QA*, d'après ce que nous avons montré précédemment, et que *GQ* est égale à *QA*, alors *KS* par *SL* est égal au carré de *GS*, donc la droite qui le peut, c'est-à-dire *SP*, est égale à la droite *QE*. Mais puisque le rapport de *MO* par *ON*, c'est-à-dire le carré de *OU*, à *KS* par *SL*, c'est-à-dire le carré de *SP*, est égal au
R-67v rapport de *OE* à *SE* et que *OE* / est le double de *SE*, le carré de *OU* est donc le double du carré de *SP*, le carré de *GL* est le double du carré de *QE* ; mais *QE* est égal à *SP*, donc *OU* est égale à *GL*. Leurs diamètres[1] et leurs ordonnées sont égales, donc elles sont égales.

Que le plan sécant de la coupole ne soit pas parallèle à l'axe *AB* et que *AB* ne lui soit pas perpendiculaire, comme le plan *GPEI*.

Je dis que la section est une ellipse.

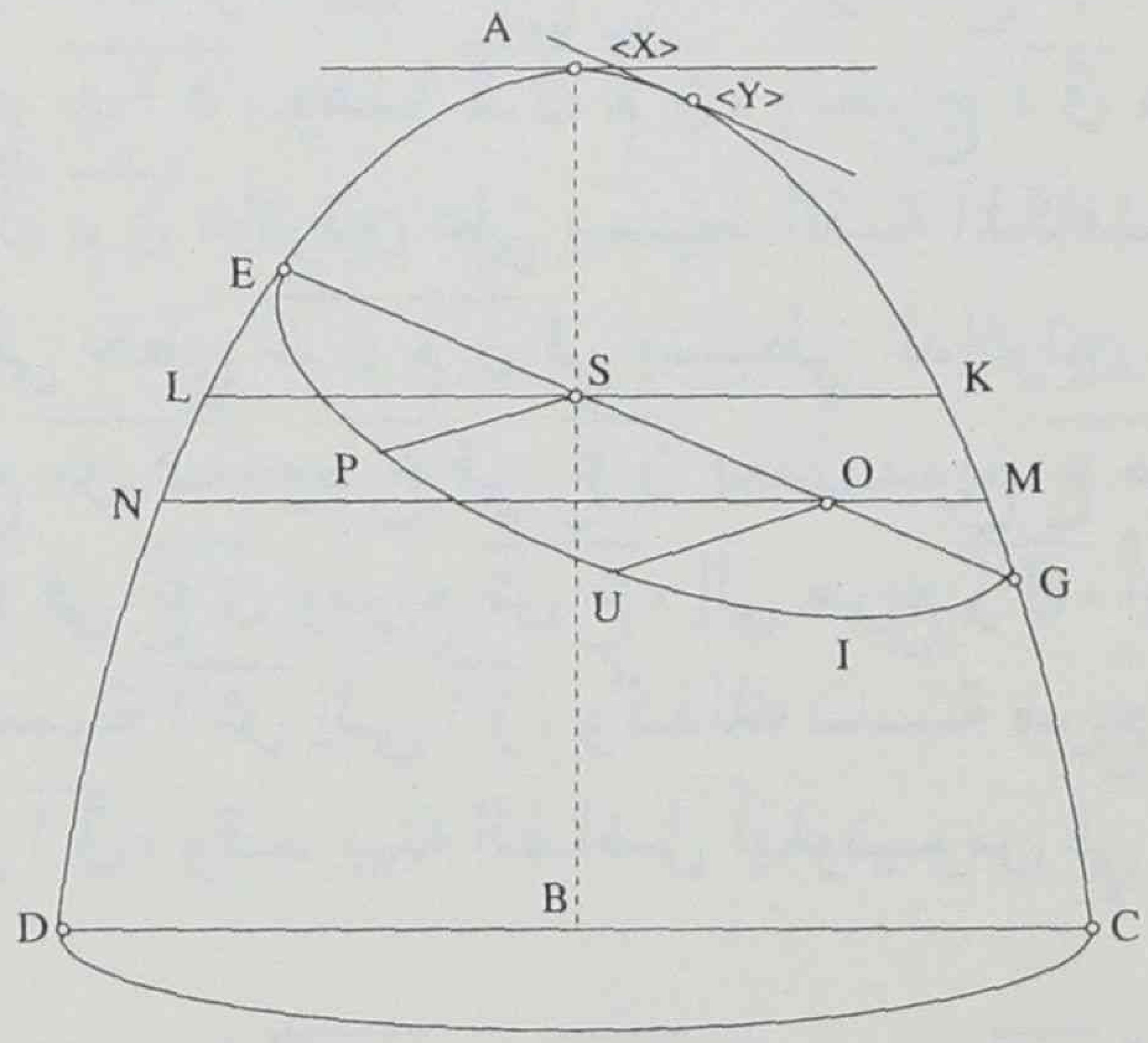


Fig. 2

[1] Il s'agit des portions de diamètre *AG* = *EO*.

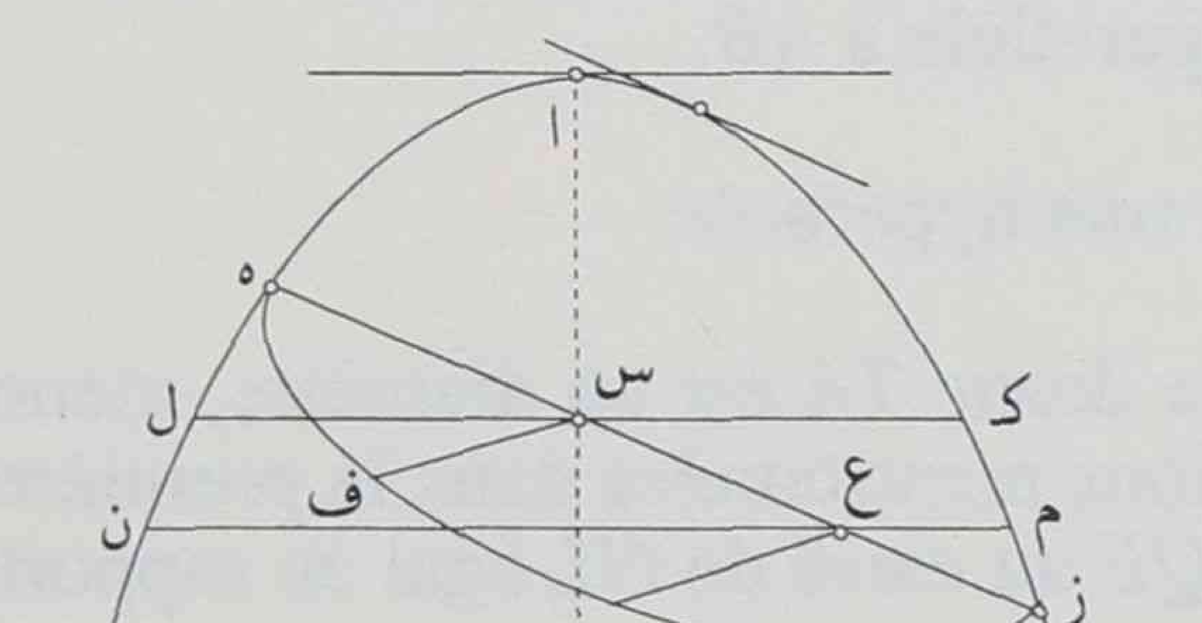
نسبة م ع في ع ن إلى كـ س في س ل كنسبة ش ق إلى ز ق. لكن م ع في ع ن يعدل مربع ع ص، وكـ س في س ل يعدل مربع س ف؛ وع ه يعدل ش ق، وس ه يعدل ق ز، فنسبة مربع ع ص إلى مربع س ف كنسبة ع ه إلى س ه، وعلى هذا أيّ خط أخرج موازياً لخطي ع ص س ف. فقطع ح ه ط هو المكافئ.

وأقول: إنه مساوٍ لقطع جـ ا د الأول.

برهانه: أن نجعل ا ق ق ز ز ش كلها متساوية، ونخرج الخطوط على الشرائط المذكورة. فلأن نسبة كـ س في س ل إلى مربع ه ق، أعني / ز س، ب-١٣٨-ظ كنسبة ز ق إلى ق ا على ما بينا متقدماً، وز ق مثل ق ا، فإن كـ س في س ل يعدل مربع ز س. فالخط القوي عليه، وهو س ف، يعدل خط ق ه. ولأن نسبة م ع في ع ن، أعني مربع ع ص، إلى كـ س في س ل، أعني مربع س ف، كنسبة ع ه إلى س ه، وع ه / ضعف س ه، ف⟨مربع⟩ ع ص ضعف ⟨مربع⟩ ر-٦٧-ظ س ف و⟨مربع⟩ ز ل ضعف ⟨مربع⟩ ق ه وق ه مثل س ف، فـ ع ص مثل ز ل. فأقطارهما وخطوط ترتيبهما متساوية، فهما متساويان.

ثم ليكن السطح القاطع للقبة غير موازٍ لمحور ا ب ولا ا ب عموداً عليه مثل سطح ز ف ه ط.

أقول: إنه قطع ناقص.



4 على: فوق السطر [ر] – 7 برهانه: برهان ذلك [ر] – 8-9 كـ س ... كنسبة: ناقصة [ر] – 10-11 يعدل خط ... س ف: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] – 15 ليكن: لم يكن [ر] / ا ب (الأولى): ا ت [ر] / عموداً: عمود [ب، ر] – 16 مثل سطح: كسطح [ر].

Démonstration : Menons, parmi les droites ordonnées, deux droites *KL*, *MN* qui coupent *GE* en *S* et *O*. Menons *SP* et *OU* perpendiculaires à *KL* et *MN* et dans les plans des deux cercles formés sur les diamètres *KL* et *MN*. Puisque le rapport de *GS* par *SE* à *KS* par *SL* est égal au rapport du carré de la droite tangente à la section *CAD* parallèle à *GE* au carré de la droite qui lui est tangente et parallèle à *KL* ; qu'il en est de même pour le rapport de *GO* par *OE* à *MO* par *ON* et que d'après ce que l'éminent Apollonius a montré dans <la proposition 17> du troisième <livre> des *Coniques*, on a le rapport de *GS* par *SE* à *GO* par *OE* égal au rapport de *KS* par *SL* à *MO* par *ON*, c'est-à-dire au rapport du carré de *SP* au carré de *OU*, donc la section *GIE* est une ellipse, d'après ce qu'a montré l'éminent Apollonius dans la <proposition> 20 du premier <livre> des *Coniques*[1].

Il est clair que si l'axe est perpendiculaire au plan sécant à la coupole, alors la section sera un cercle. Le plan sécant à la coupole parabolique engendre donc une parabole, ou bien une ellipse, ou bien un cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

– **2** – Soit l'hyperbole *CAD* que nous faisons tourner autour de son axe *AB* ; il vient la coupole hyperbolique *CAD*.

Je dis que la section par un plan sécant est ou bien une hyperbole, ou bien une ellipse, ou bien un cercle.

Démonstration : Le plan sécant est ou bien parallèle à l'axe *AB* ou bien ne lui est pas parallèle.

Qu'il lui soit d'abord parallèle. Que ce soit le plan *HEI*, qu'il coupe <le plan de> la section hyperbolique *CAD* suivant un angle droit et que leur intersection soit *ER* parallèle à *AB*.

Je dis que *HEI* est une hyperbole.

Étant donné que la droite *TA* est un diamètre, menons *KL*, *MN*, *QE*, *SP*, *OU* selon les conditions mentionnées dans la première proposition. On a le rapport du carré de *QE* au carré de *GL* égal au rapport de *TQ* par *QA* à *TG*

[1] Proposition 21 dans l'édition de Heiberg.

برهانه: أن نخرج كـ ل م ن خطين من خطوط الترتيب يقطعان ز ه على س ع، ونخرج س ف ع ص عمودين على كـ ل م ن وفي سطحي الدائرتين الكائنتين على قطري كـ ل م ن. فلأن نسبة ز س في س ه إلى كـ س في س ل كنسبة ⟨مربع⟩ الخط المماس لقطع جـ ا د الموازي لـ ز ه إلى ⟨مربع⟩ الخط المماس له الموازي لـ كـ ل، وكذلك كنسبة ز ع في ع ه إلى م ع في ع ن. و⟨كما⟩ قد بين أبلونيوس الفاضل في ⟨يز⟩ من الثالثة من *المخروطات*، تكون نسبة ز س في س ه إلى ز ع في ع ه كنسبة كـ س في س ل إلى م ع في ع ن، أعني كنسبة مربع س ف إلى مربع ع ص، فقطع ز ط ه قطع ناقص، على ما بينه أبلونيوس الفاضل في كـ من الأولى من *المخروطات*.

وبيّنٌ أنه إن كان السهم عموداً على السطح القاطع للقبة، فإن القطع يكون دائرة. فالسطح القاطع للقبة المكافئة إما قطع مكافئ وإما قطع ناقص وإما دائرة؛ وذلك ما أردنا بيانه.

– ب – قطع جـ ا د الزائد، أدرناه على سهمه، وهو ا ب، فصار قبة جـ ا د الزائدة.

أقول: إن السطح القاطع له إما أن يكون قطعًا زائداً وإما ناقصًا وإما دائرة.

برهانه: أن السطح القاطع له إما موازٍ لسهم ا ب وإما غير موازٍ له.

فليكن أولاً موازيًا له، وهو سطح ح ه ط، وليقطع قطع جـ ا د الزائد على زاوية قائمة، ويكون الفصل المشترك لهما، وهو ه ر، موازيًا لـ ا ب.

أقول: إن ح ه ط قطع زائد.

لأن خط ت ا هو القطر، ونخرج كـ ل م ن ق ه س ف ع ص على الشرائط المذكورة في الشكل الأول؛ تكون نسبة مربع ق ه إلى مربع ز ل

1 برهانه: برهان ذلك [ر] – 2 عمودين: عمود [ب، ر] / كـ ل: قل [ر] / سطحي: سطح [ب، ر] – 3 الكائنتين: ناقصة [ر] – 5 وكذلك: ولذلك [ب] – 6 ⟨يز⟩: ترك فراغًا لها [ب، ر] – 7 ز س: س [ر] – 8 ز ط ه: ز ح ه ط [ب، ر] – 9 كـ: ل [ر] – 10 أنه: أثبتها فوق السطر [ر] – 11 قطع (الثانية): ناقصة [ب] – 12 أردنا بيانه: اردناه ان نبين [ر] – 13 ب: ناقصة [ر] / أدرناه: ادرنا [ر، ب] – 15 قطعًا زائداً: قطع زائد [ب، ر] / ناقصًا: ناقص [ب، ر] – 17 برهانه: برهان ذلك [ر] / إما (الأولى): أثبتها فوق السطر [ر] – 18 موازيًا: مواز [ب، ر] / وليقطع: ولنقطع [ر] – 19 موازيًا: مواز [ب، ر] – 21 لأن: كتب قبلها «برهانه»، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] / القطر: كتب أولاً «الضلع الشبيه»، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت «القطر» في الهامش [ب] نجد فوقها «قطر» [ر] – 22 تكون: كتب أولاً «فلأن»، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت الصواب في الهامش [ب].

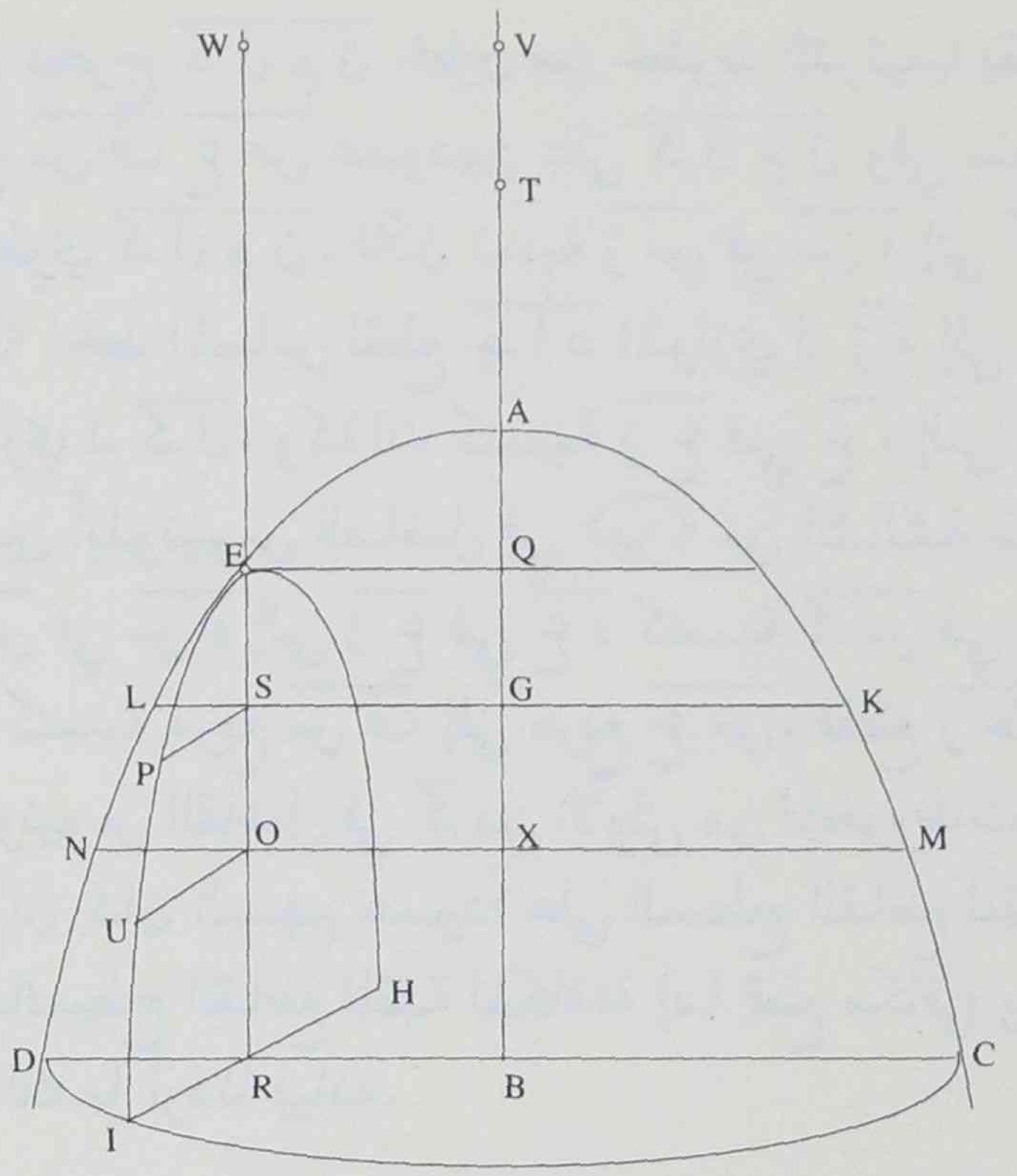
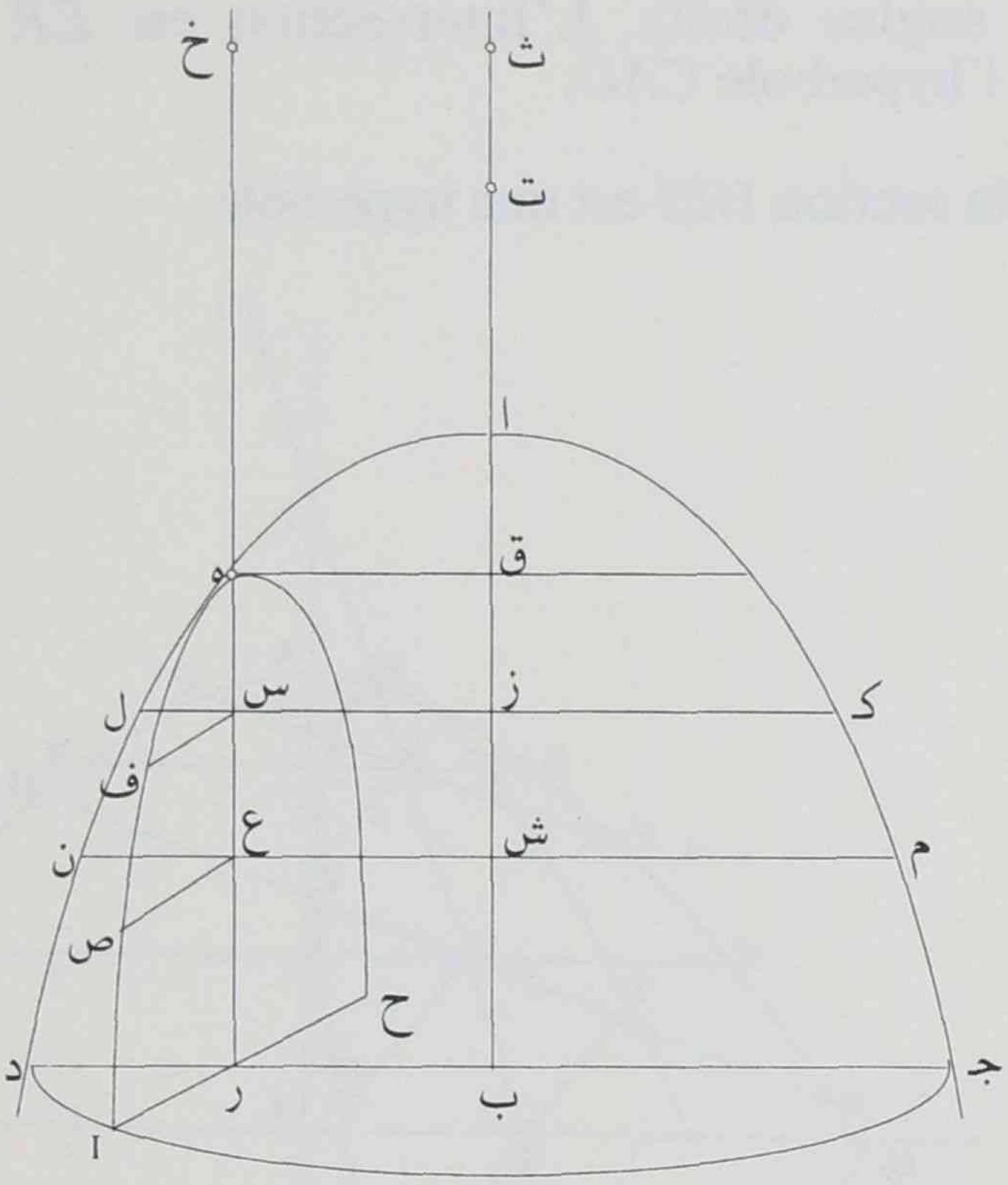


Fig. 3

par *GA*, d'après ce qu'a démontré l'éminent Apollonius dans la <proposition> 20[1] du premier <livre> des *Coniques*. De même, le rapport du carré de *QE* au carré de *XN* est égal au rapport de *TQ* par *QA* à *TX* par *XA*. Posons *TV* égale à *AQ*. Si nous retranchons des carrés de *GL* et de *XN* le carré de *QE* et de *TX* par *XA* et de *TG* par *GA*, *TQ* par *QA*, il reste le rapport de *MO* par *ON* à *KS* par *SL* égal au rapport de *VX* par *XQ* à *VG* par *GQ*. Posons donc *EW* égale à *QV*, donc le rapport de *MO* par *ON*, c'est-à-dire le carré de *OU* à *KS* par *SL*, c'est-à-dire le carré de *SP*, est égal au rapport de *WO* par *OE* à *WS* par *SE*, et toute droite menée parmi les droites ordonnées sera dans le même état selon cet exemple. La surface *HEI* est donc une hyperbole et le côté semblable[2] pour la section *HEI* est la droite
R-68^{r} *EW*. / C'est en raison de cela que le côté semblable pour l'une quelconque
B-139^{r} des sections parallèles <à l'axe> excède le côté *AT* du double / de la droite que sépare sur la droite *AB* menée par le sommet de la section, la parallèle à la droite *CD*.

[1] Proposition 21 dans l'édition de Heiberg.
[2] Il s'agit du diamètre de la section *HEI*.



كنسبة ت ق في ق ا إلى ت ز في ز ا، على ما بينه الفاضل أبلونيوس في كـ من الأولى من *المخروطات*. وكذلك نسبة مربع ق ه إلى مربع ش ن كنسبة ت ق في ق ا إلى ت ش في ش ا. فلنجعل ت ث مساوياً لـ ا ق. فإذا ألقينا من مربعي ز ل ش ن مربع ق ه، ومن ت ش في ش ا و‹من› ت ز في ز ا، ت ق في ق ا، تبقى نسبة م ع في ع ن إلى كـ س في س ل كنسبة ث ش في ش ق إلى ث ز في ز ق. ولنجعل ه خ مثل ق ث. فنسبة م ع في ع ن، أعني مربع ع ص، إلى كـ س في س ل، أعني مربع س ف، كنسبة خ ع في ع ه إلى خ س في س ه؛ وعلى هذا المثال أي خط أخرج من خطوط الترتيب هذه حاله. فسطح ح ه ط قطع زائد والضلع الشبيه لقطع ح ه ط خط ه خ./ ولهذا ر-٦٨-و
تبين أن الضلع الشبيه لأي قطع يكون من القطوع المتوازية زائد على ضلع ا ت بضعف فضل / الخط الفاصل لخط ا ب المخرج من رأس القطع الموازي ب-١٣٩-و
لخط جـ د.

1 كـ: ل [ر] – 2 وكذلك: ولذلك [ب] – 3 مساوياً: مساو [ب، ر] – 6 ه خ: ه جـ [ر] – 7 كـ س: قس [ر] – 9 ه خ: ه جـ [ر] – 10 ضلع: الضلع [ر] – 11 الفاصل: الفاضل [ر] – 12 جـ د: ق ه [ب، ر].

Menons ensuite un plan non parallèle à l'axe qui coupe la section *CAD* suivant des angles droits. L'intersection est *ER* et elle est l'un des diamètres de l'hyperbole *CAD*.

Je dis que la section *HEI* est une hyperbole.

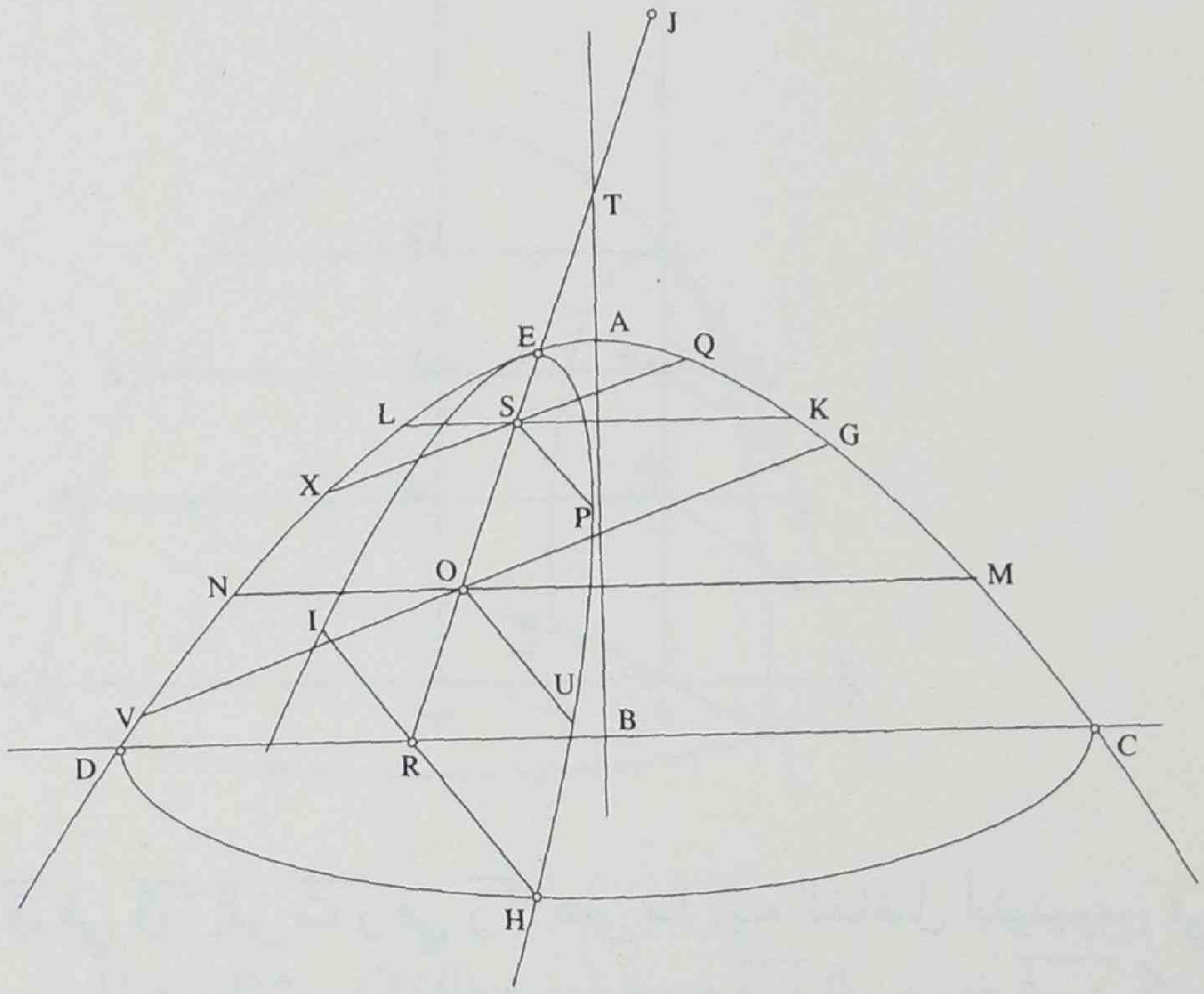


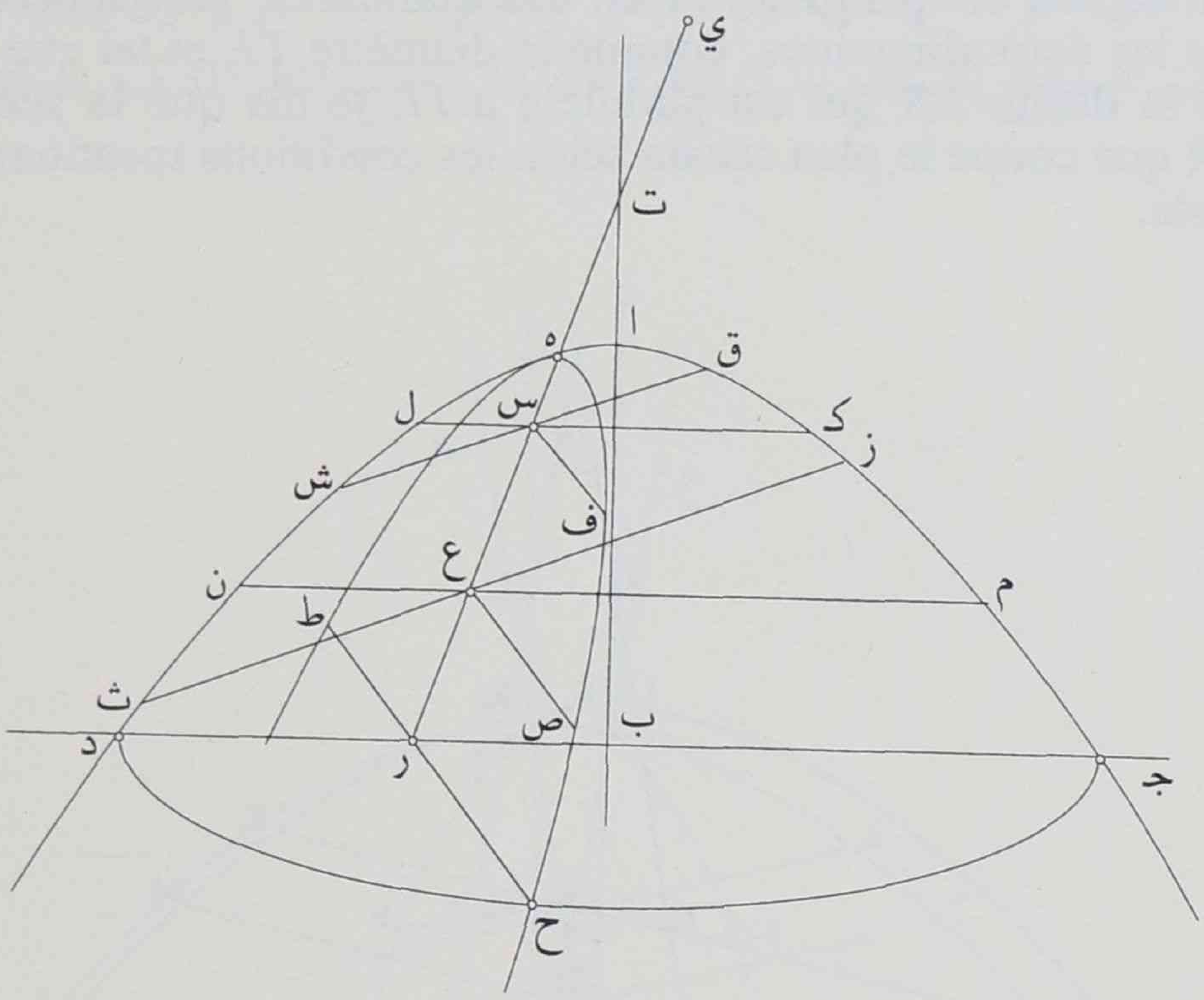
Fig. 4

Démonstration: Menons *QX* et *GV* des ordonnées au diamètre *ER* et menons *SP* et *OU* perpendiculaires à *KL* et *MN* dans le plan des deux cercles formés sur les diamètres *KL* et *MN*, comme nous l'avons mentionné. Puisque le rapport de *QS* par *SX* à *GO* par *OV* est égal au rapport de *KS* par *SL* à *MO* par *ON*, d'après ce que requièrent les préliminaires que nous avons mentionnés à partir d'Apollonius dans le troisième <livre> des *Coniques*[1], et que *KS* par *SL* est égal au carré de *PS* et *MO* par *ON* est égal au carré de *OU*, alors le rapport de *QS* par *SX*, c'est-à-dire le carré de *SX*, à *GO* par *OV*, c'est-à-dire le carré de *OV*, est égal au rapport du carré de *SP* au carré de *OU*. Le rapport du carré de *UO* au carré de *SP* est donc égal au rapport de *JO* par *OE* à *JS* par *SE*. La section *HEI* est donc une hyperbole. /

[1] Il s'agit de la proposition 17 du livre III des *Coniques*, comme on l'a vu dans le cas de la parabole. Cette proposition s'applique au cercle et aux trois coniques.

ثم لنخرج السطح غير موازٍ للسهم، وقطع قطع جـ ا د على زوايا قائمة. فالفصل المشترك ه ر وهو قطر من أقطار قطع جـ ا د الزائد.

أقول: إن قطع ح ه ط قطع زائد.



برهانه: أن نخرج ق ش ز ث خطوط الترتيب لقطر ه ر، ولنخرج س ف ع ص عمودين على كـ ل م ن وفي سطحي الدائرتين الكائنتين على قطري كـ ل م ن، على نحو ما ذكرنا. فلأن نسبة ق س في س ش إلى ز ع في ع ث كنسبة كـ س في س ل إلى م ع في ع ن، بما لزم من المقدمات التي ذكرناها من أبلونيوس في الثالثة من المخروطات. وكـ س في س ل يعدل مربع ف س وم ع في ع ن يعدل مربع ع ص، فنسبة ق س في س ش، أعني مربع س ش، إلى ز ع في ع ث، أعني مربع ع ث، كنسبة مربع س ف إلى مربع ع ص. فنسبة مربع ص ع إلى مربع س ف كنسبة ي ع في ع ه إلى ي س في س ه. فقطع ح ه ط قطع زائد. /

2 فالفصل: فالفصل [ر] – 4 برهانه: برهان ذلك [ر] – 5 عمودين: عمود [ب، ر] / سطحي: سطح [ر] – 8 ذكرناها: ذكرنا [ب، ر] – 8-9 يعدل مربع: مساو لمربع [ر] – 9 يعدل مربع: مساو لمربع [ر] – 11 ي ع: تع [ب] مهملة [ر] – 12 ي س: فس [ر] تس [ب] / ح ه ط: جهد [ر].

R-68v Si la coupole est coupée par un plan qui passe par l'une des droites ordonnées et tel que l'axe ne lui soit pas perpendiculaire, alors la démonstration que la section est une ellipse est la même que pour l'ellipse à partir de la coupole parabolique. Mais si l'axe lui est perpendiculaire, la section est un cercle.

Si le plan sécant est parallèle à l'un des diamètres, sans rencontrer la section dans les deux directions, comme le diamètre *TJ*, et tel que l'intersection soit la droite *ER* qui est parallèle à *TI*, je dis que la section de diamètre *ER* que coupe le plan sécant selon les conditions mentionnées est une hyperbole.

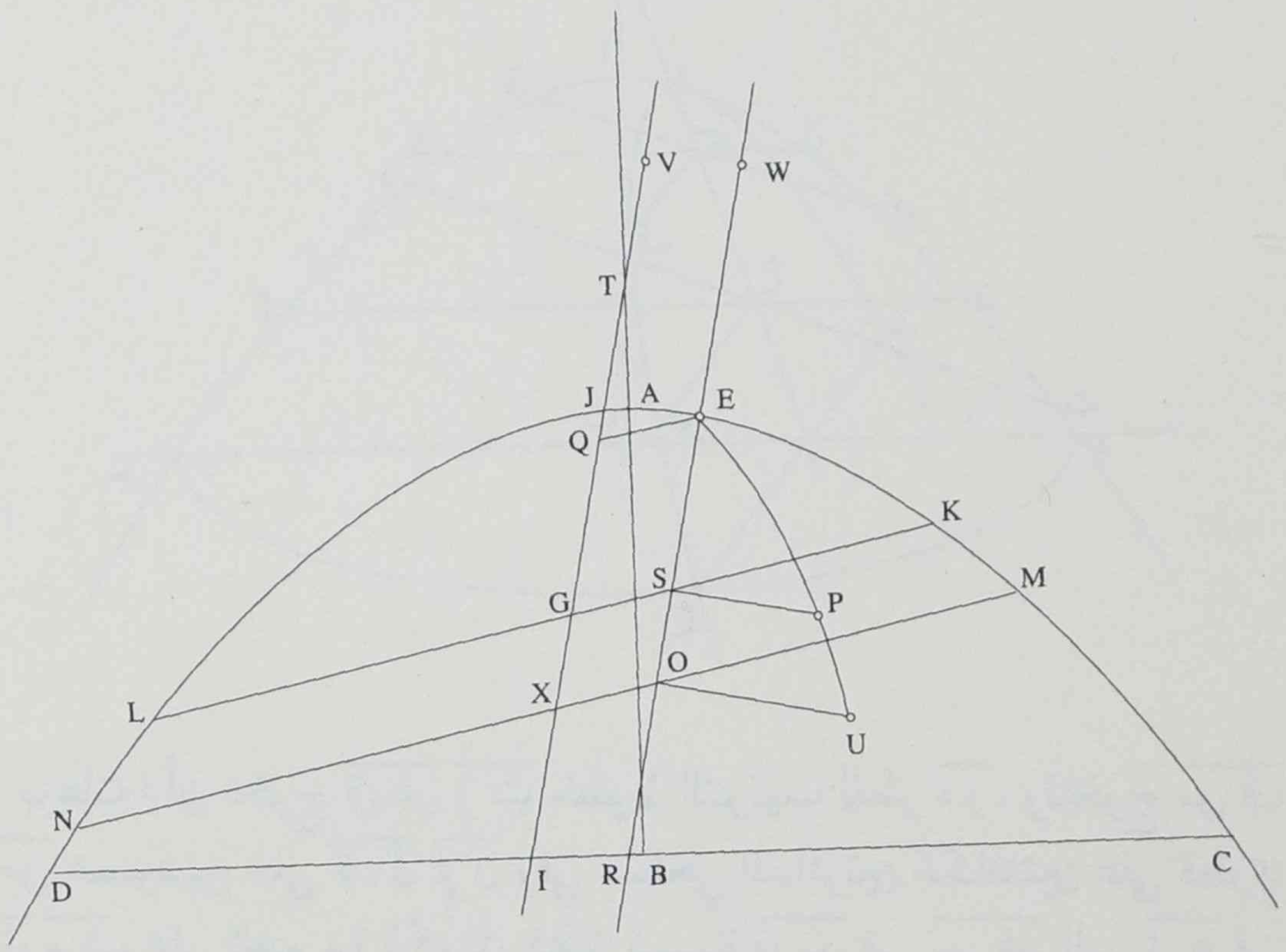


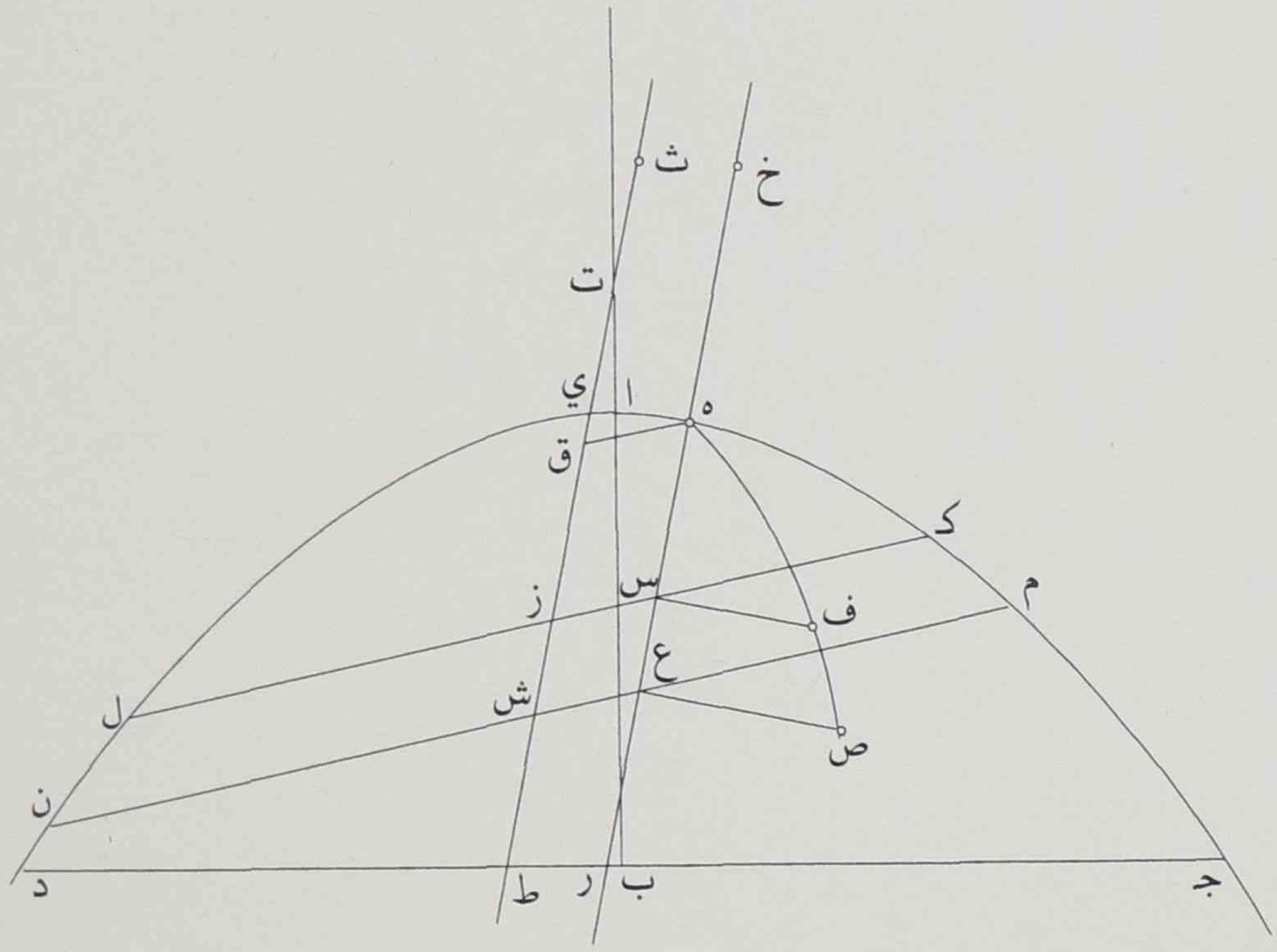
Fig. 5

Démonstration: Menons du point *E* l'une des droites ordonnées, soit la droite *EQ*, relative au diamètre *IT*, menons *KL* et *MN* parallèlement à elle et posons *TV* égale à *TJ*, comme précédemment dans le premier cas de la figure de la coupole hyperbolique. On a le rapport de *VG* par *GJ* à *VX* par *XJ* égal au rapport de *KS* par *SL*, c'est-à-dire le carré de *SP* à *MO* par *ON*, c'est-à-dire le carré de *OU*[1]. Posons *WE* égale à *VJ*; on a le rapport de *WO* par *OE* à *WS* par *SE* égal au rapport du carré de *OU* au carré de *SP*. La section dont le diamètre est *WR* est donc une hyperbole. Ce qu'il fallait démontrer.

[1] Les égalités de rapport sont exactes, mais l'auteur ne donne pas le détail des calculs qui conduisent à ces égalités (voir le commentaire).

فإن قطع القبة بسطح جائز على أحد خطوط الترتيب ولم يكن السهم قائماً عليه، فالبرهان على أنه قطع ناقص هو البرهان بعينه الذي في القطع الناقص من القبة المكافئة. وإن كان السهم عموداً عليه، فهو دائرة. ر-٦٨-ظ

وإن كان السطح القاطع موازياً لأحد خطوط الأقطار ولا يلقى القطع في الجهتين، مثل قطر ت ي، ويكون الفصل المشترك خط ه ر وهو يوازي ت ط، أقول: إن السطح القاطع الذي قطره ه ر على الشرائط المذكورة، هو قطع زائد.



برهانه: أن نخرج من نقطة ه خط ه ق من خطوط الترتيب لقطر ط ت، ونخرج كـ ل م ن يوازيانه، ونجعل ت ث مثل ت ي فيما قدمنا في الجهة الأولى من صورة القبة الزائدة؛ تكون نسبة ث ز في ز ي إلى ث ش في ش ي كنسبة كـ س في س ل، أعني مربع س ف إلى م ع في ع ن، أعني مربع ع ص. ونجعل خ ه مثل ث ي، فتكون نسبة خ ع في ع ه إلى خ س في س ه كنسبة مربع ع ص إلى مربع س ف. فالقطع الذي يكون قطره خ ر قطع زائد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

2 قائماً: قائم [ب، ر] – 4 موازياً: مواز [ب] – 5 ت ي: تط [ب، ر] / الفصل: الفضل [ر] / ت ط: حط [ب، ر] – 6 هو: فهو [ر] – 8 برهانه: برهان ذلك [ر] – 9 مثل: ناقصة [ر] / ت ي: خي [ب، ر] – 11 أعني (الثانية): ناقصة [ر].

Quant aux solides engendrés par le tracé du mouvement d'une droite parallèle à une droite donnée[1] suivant le périmètre d'une des sections, nous avons trouvé certaines propriétés engendrées par les plans sécants de ces solides.

Nous le compléterons et l'expédierons avec « Les commentaires géométriques », étant donné que la plupart des démonstrations dans nos livres sont liées à certaines propositions de ce livre.

[1] C'est-à-dire à une quelconque direction donnée.

فأما المجسمات الحادثة من ارتسام حركة خط مستقيم موازٍ لخط معطى على محيط أحد القطوع، فقد وجدنا بعض الخواص الذي يحدث من السطوح القاطعة لتلك المجسمات.

وسنتممه وننفذه مع التعليقات الهندسية إذ أكثر البراهين في كتبنا متعلقة ببعض أشكال هذا الكتاب.

1 مستقيم: ناقصة [ر] – 4 التعليقات: تعليقات [ب، ر] / البراهين: براهين [ب، ر] / في: ناقصة [ب] أثبتها فوق السطر [ر] – 5 الكتاب: كتب بعدها «وحسبنا الله ونعم الوكيل ونعم المولى ونعم النصير كتبته يوم الاثنين رام روز من بهمن ماه سنة شم يزدجردية؛ عارضت وصححت» [ب] «تم الكتاب، ذكر المصنف أنه فرغ منه في سنة شم يزدجردية وعليه خطه، الشكل في الوجه الآخر» [ر].

TEXTE ET TRADUCTION

II

Fī khawāṣṣ al-mujassam al-nāqiṣ, al-zā'id wa-al-mukāfi'

Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Livre de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl

Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique

Le solide elliptique est une figure solide qu'on engendre par la rotation d'une droite autour de deux ellipses parallèles[1], rotation qui ne s'écarte pas du parallélisme de la droite qui joint leurs deux centres. Nous appelons cette droite[2] *le côté du solide* et nous appelons la droite qui joint les deux centres *l'axe du solide*.

L'ellipse est appelée *la base du solide* et le grand diamètre de l'ellipse est appelé *le grand diamètre de la base du solide* ; de même pour le petit diamètre et ainsi pour les autres diamètres. Le centre de l'ellipse est appelé *le centre de la base du solide* et les droites ordonnées qui sont dans la section, nous les appelons *les cordes de la base*.

Parmi les solides, certains sont droits et certains sont obliques. Le solide droit est celui dont l'axe est perpendiculaire au plan de sa base. Quant à l'oblique, c'est celui dont l'axe fait un angle donné avec le plan de sa base. L'angle donné est celui formé par son axe et la droite qui joint l'extrémité de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'axe sur le plan de sa base à l'extrémité de l'axe qui se trouve sur le plan de sa base.

Le solide hyperbolique (resp. parabolique) est celui qu'on engendre par la rotation d'une droite suivant le périmètre de deux sections hyperboliques (resp. paraboliques) parallèles telle que la droite mobile, lors de sa rotation,

[1] Situées dans des plans parallèles (voir le commentaire).
[2] La droite mobile.

بسم الله الرحمن الرحيم ٦٣-ظ

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل
في خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ

المجسم الناقص هو شكل مجسم يحدث من إدارة خط مستقيم على قطعين ناقصين متوازيين دوراناً غير زائل عن موازاة الخط الذي يصل ما بين مركزيهما ؛ وهذا الخط سميناه *ضلع المجسم*، والخط المستقيم الذي يصل ما بين مركزيهما سميناه *محور المجسم*.

والقطع الناقص يسمّى *قاعدة المجسم*، وقطر القطع الناقص الأطول يسمّى 〈قطر〉 *قاعدة المجسم الأطول*، وكذلك الأصغر وسائر الأقطار على هذا السبيل. ومركز القطع يسمّى *مركز قاعدة المجسم*، وخطوط الترتيب التي في القطع سميناها *أوتاراً للقاعدة*.

ومن المجسم ما يكون قائماً ومنه ما يكون مائلاً. فأما المجسم القائم فهو الذي يكون محوره قائماً على سطح قاعدته على زوايا قائمة. وأما المائل فهو الذي يكون محوره على زاوية ما مفروضة على سطح قاعدته. والزاوية المفروضة هي التي تحدث من محوره ومن الخط الذي يصل من طرف العمود الواقع من رأس المحور على سطح قاعدته إلى طرف المحور الذي يقع على سطح قاعدته.

والمجسم الزائد (المكافئ) هو الحادث من إدارة الخط المستقيم على محيطي قطعين زائدين (مكافئين) متوازيين، ويكون الخط المدير غير زائل في

11 التي : الذي / سميناها : سميناه – 12 قائماً : قائم / مائلاً : مائل – 13 يكون : فوق السطر – 15 تحدث : يحدث، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 16 المحور (الأولى) : المخروط – 18 المكافئ : فوق كلمة الزائد ؛ وهذه طريقة السجزي للتعبير في نفس الوقت عن الحالتين – 19 متوازيين : المتوازيين / زائل : زائلة.

ne s'écarte pas du parallélisme de la droite qui joint les sommets des deux sections. L'axe de l'hyperbole (resp. parabole) est l'axe de la base du solide hyperbolique (resp. parabolique). Ses droites ordonnées sont appelées cordes de la base du solide. La droite mobile autour du pourtour de la section est le côté du solide hyperbolique (resp. parabolique).

–**1** – Les droites qui joignent les extrémités des plans sécants au solide elliptique, qui sont parallèles, sont aussi parallèles et égales.

Soit *AB* la base du solide elliptique et le plan sécant qui lui est parallèle est *CD*. Supposons un point *H* sur le périmètre de la base *AB*, menons l'axe *EG*, menons le côté *HI* et joignons *EH* et *IG*.

Je dis que *HI* est égale à *EG* et que *EH* est égale à *IG*.

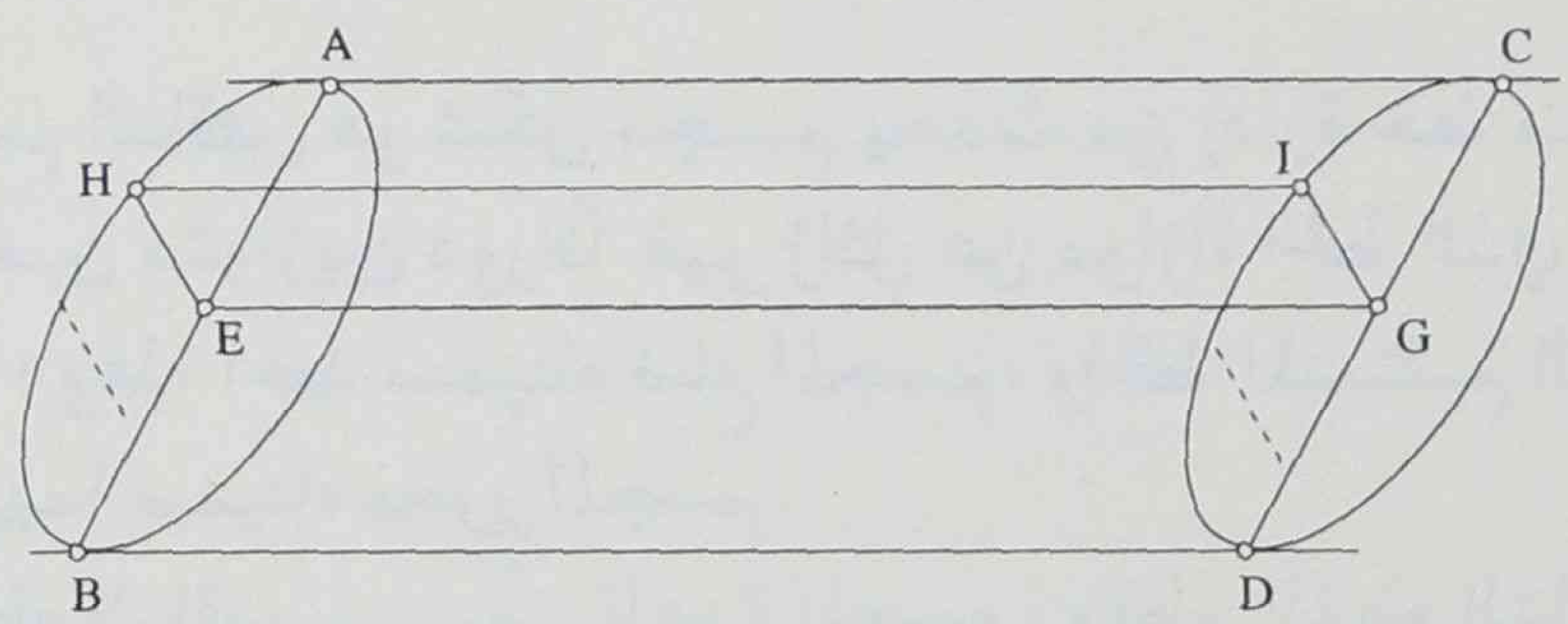


Fig. 1

64r *Démonstration* : Les deux droites *EH* et *IG* sont dans un même plan / qui est le plan *HIG*. Or les droites qui se trouvent dans deux plans parallèles et qui sont dans un même plan ne se rencontrent pas. Mais les droites *EH* et *IG* qui se trouvent dans deux plans parallèles sont dans un même plan, donc elle ne se rencontrent pas. Donc *EH* est parallèle à *IG* et *IH* est parallèle à *EG*, donc *HI* est égale à *EG* et *EH* est égale à *IG*, la section *CI* est donc une ellipse égale et semblable à la base *AB*. On démontre cela facilement, en menant leurs diamètres et leurs ordonnées en partant de l'égalité et de la proportionnalité. Ce qu'il fallait démontrer.

– **2** – Les plans sécants au solide elliptique qui passent par son axe ou qui sont parallèles à son axe sont des parallélogrammes.

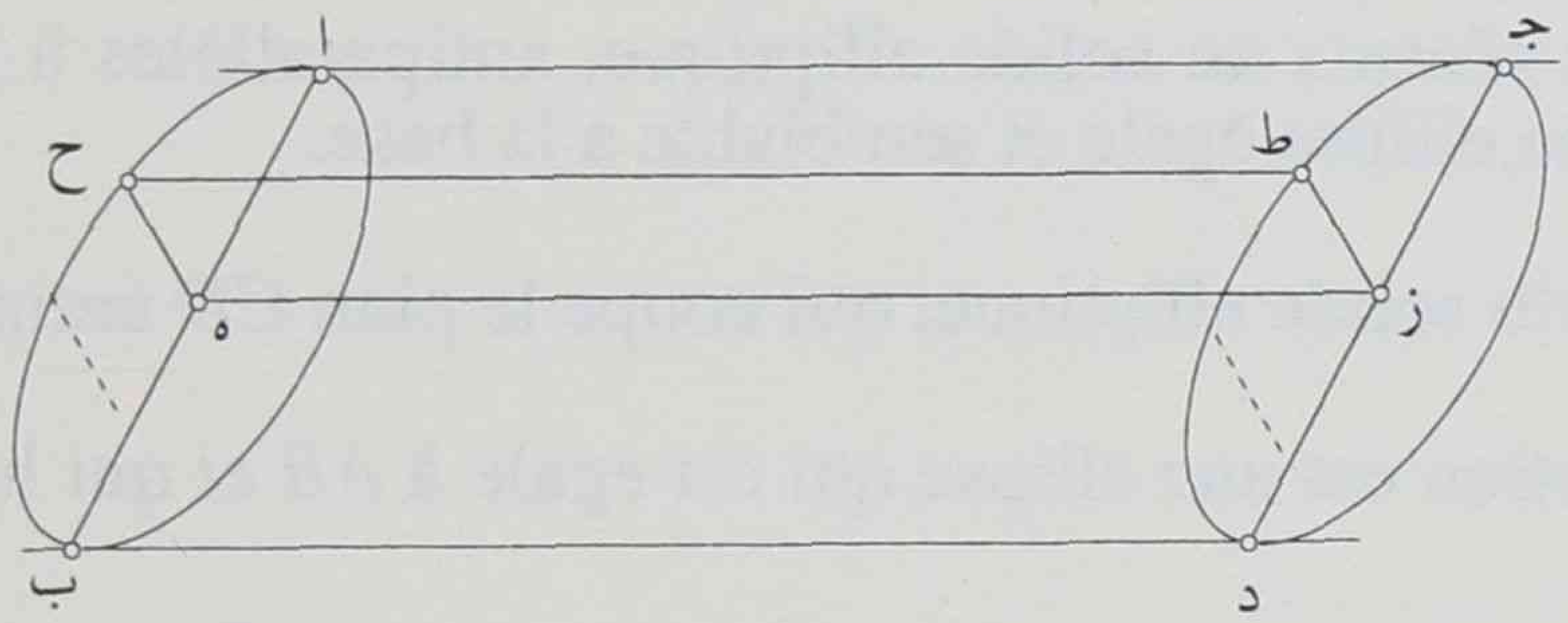
Soit le solide elliptique *ABCD* ; qu'il soit donc coupé par le plan *KLNM* parallèle à l'axe *EG* et par le plan *SOIH* qui passe par l'axe *EG*.

إدارته لموازاة الخط الذي يصل ما بين رأسي القطعين. سهم القطع الزائد (المكافئ) هو سهم قاعدة المجسم الزائد (المكافئ) ‹و›خطوط ترتيبه تسمى أوتاراً لقاعدة المجسم، ‹و›الخط المدير حول محيط القطع هو ضلع المجسم الزائد (المكافئ).

‹آ› الخطوط المستقيمة التي تصل ما بين أطراف السطوح القاطعة للمجسم الناقص المتوازية، هي أيضاً متوازية ومتساوية.

فليكن قاعدة المجسم الناقص ا ب، والسطح القاطع له الموازي لها جـ د. ولنفرض نقطة ح على محيط قاعدة ا ب، ونخرج محور ه ز، ونخرج ضلع ح ط، ونصل ه ح ط ز.

أقول: إن ح ط مساوٍ لـ ه ز وه ح مساوٍ لـ ط ز.



برهان ذلك: أن خطي ه ح ط ز في سطح واحد، / وهو سطح ح ط ز. و-٦٤
والخطوط التي تقع في سطحين متوازيين ‹وتكون في سطح واحد لا تلتقي، وخطا ه ح ط ز اللذان يقعان في سطحين متوازيين› يكونان في سطح واحد، فلا يلتقيان، فـ ه ح يوازي ط ز وط ح يوازي ه ز، فـ ح ط يساوي ه ز، وه ح يساوي ط ز، فقطع جـ ط قطع ناقص مساوٍ ومشابه لقاعدة ا ب. والبرهان عليه سهل بإخراج أقطارهما وخطوط ترتيبهما من المساواة والمناسبة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹ب› السطوح القاطعة للمجسم الناقص الجائزة على محوره أو على موازاة محوره تكون متوازية الأضلاع.

فليكن مجسم ا ب جـ د الناقص، فليقطعه سطح كـ ل ن م الموازي لمحور ه ز وسطح س ع ط ح الجائز على محور ه ز.

3 أوتاراً لقاعدة: اوتار القاعدة / محيط: المحيط – 7 الموازي: الموازية.

Je dis que chacun des plans est un parallélogramme.

Démonstration: Les droites KL, MN sont parallèles à l'axe EG, elles sont donc égales car elles sont les côtés du solide elliptique, de même SO et HI sont parallèles et égales. Mais les droites qui joignent les extrémités de droites parallèles et égales sont elles aussi parallèles et égales. Les deux plans mentionnés sont donc des parallélogrammes. Ce qu'il fallait démontrer.

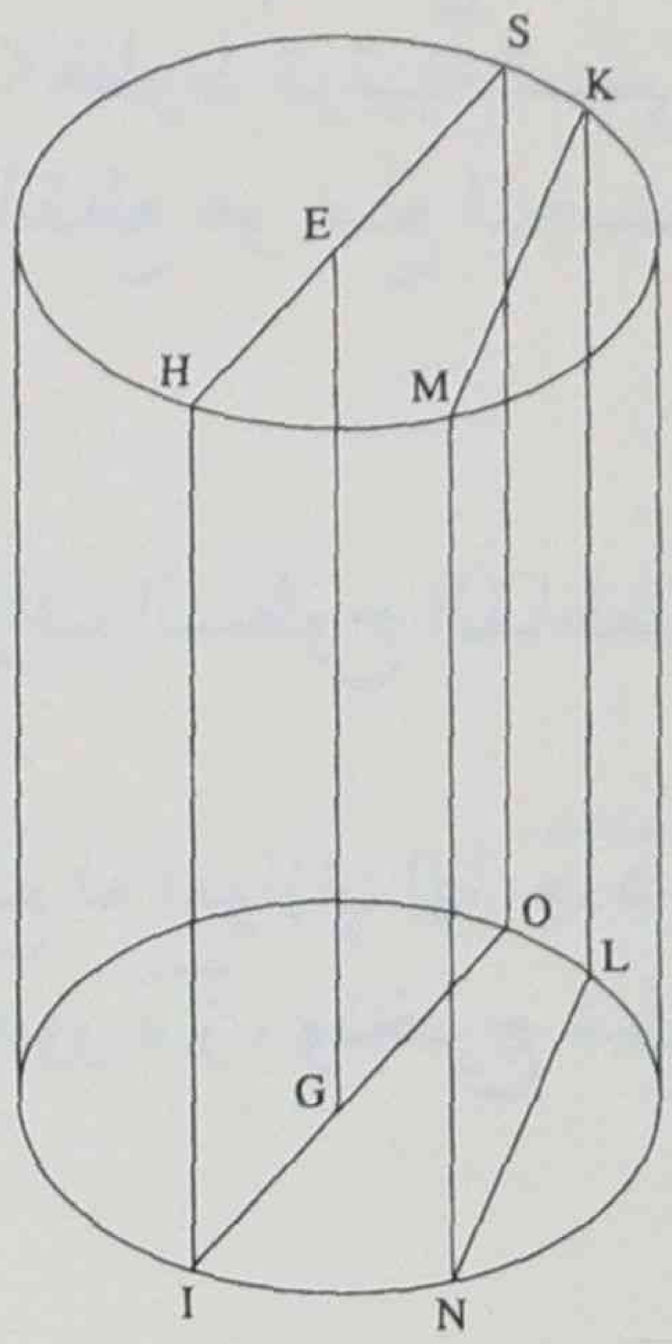


Fig. 2

– **3** – Les plans sécants au solide elliptique, antiparallèles à la base, le coupent suivant une ellipse égale et semblable à la base.

Soit AB la base du solide elliptique, qui coupe le plan CD antiparallèle.

Je dis que la section est une ellipse qui est égale à AB et qui lui est semblable.

Démonstration: Menons les diamètres AB et EG le plus grand et le plus petit, menons les côtés AC et BD. Il est clair qu'ils sont parallèles ; joignons CD. Puisque l'angle DCA est égal à l'angle CAB[1] et que AC est parallèle à BD, CD sera égale à AB. Menons du centre H la droite HI au milieu de CD. Il est clair que HI est parallèle à AC, donc la droite HI est l'axe du solide elliptique. Menons le côté GK et menons KIL. Puisque GK et HI sont parallèles, alors les droites EG et KL sont antiparallèles[2], donc l'angle $GKIL$ est égal à l'angle $KGHE$. Mais l'angle GHI est égal à l'angle KIH,

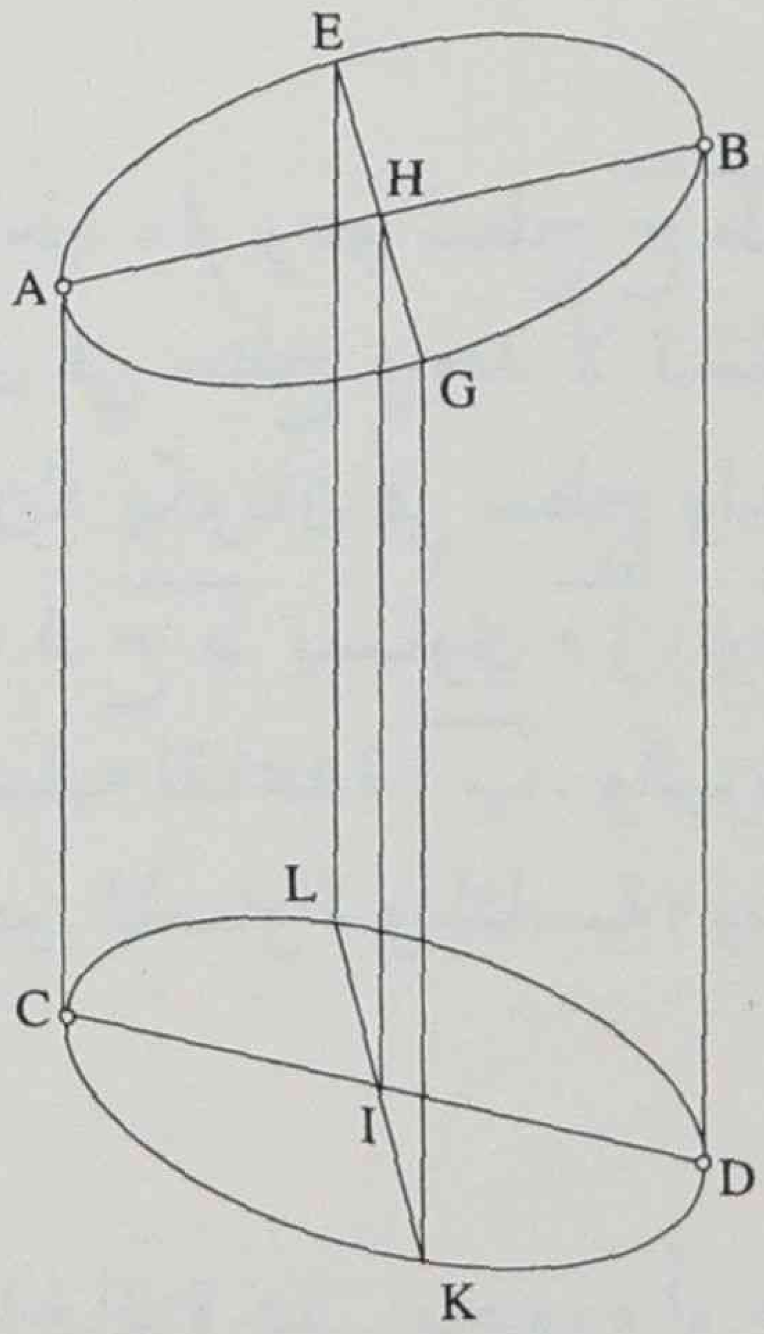
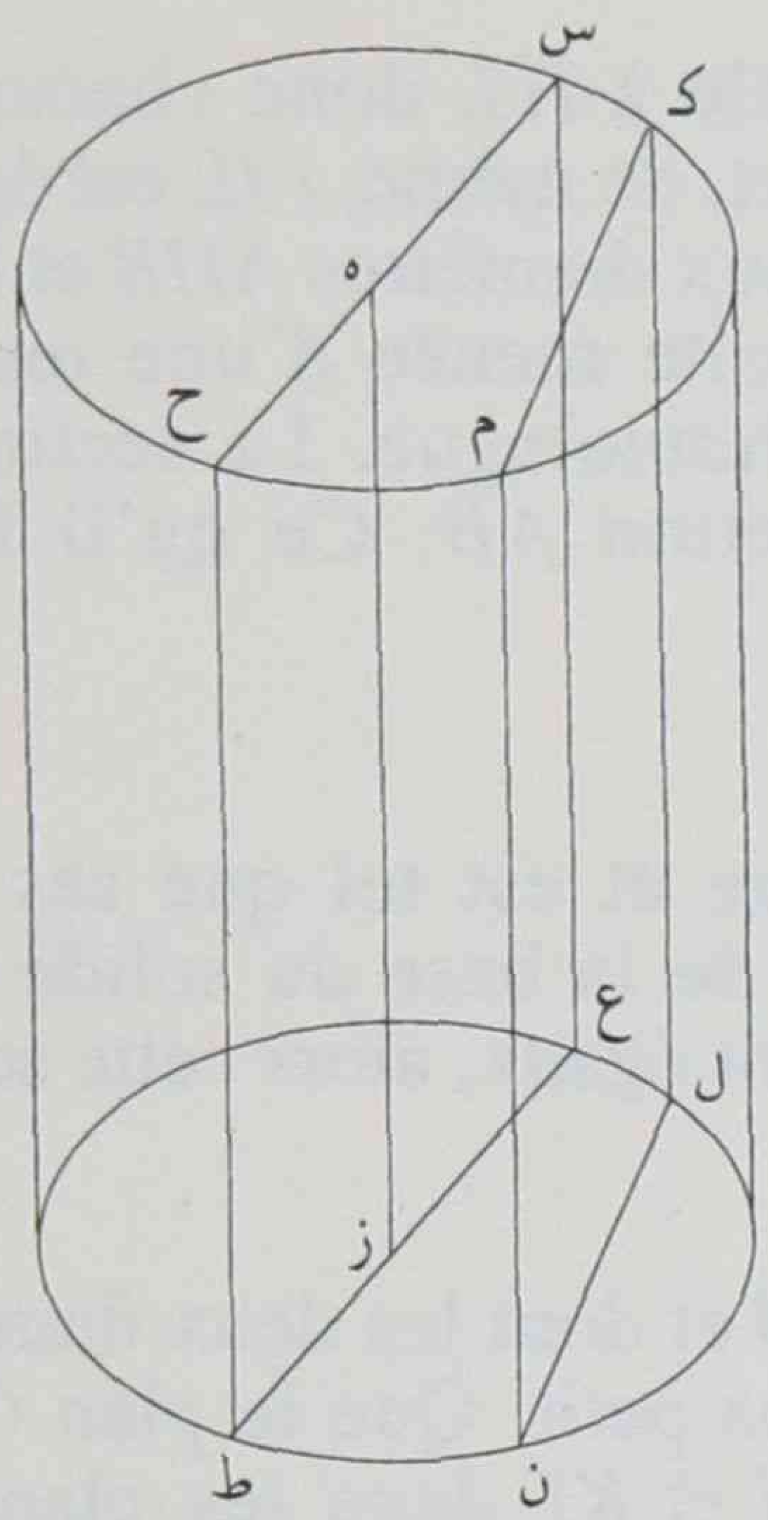


Fig. 3

[1] Voir le commentaire p. 31.
[2] *Ibid.*



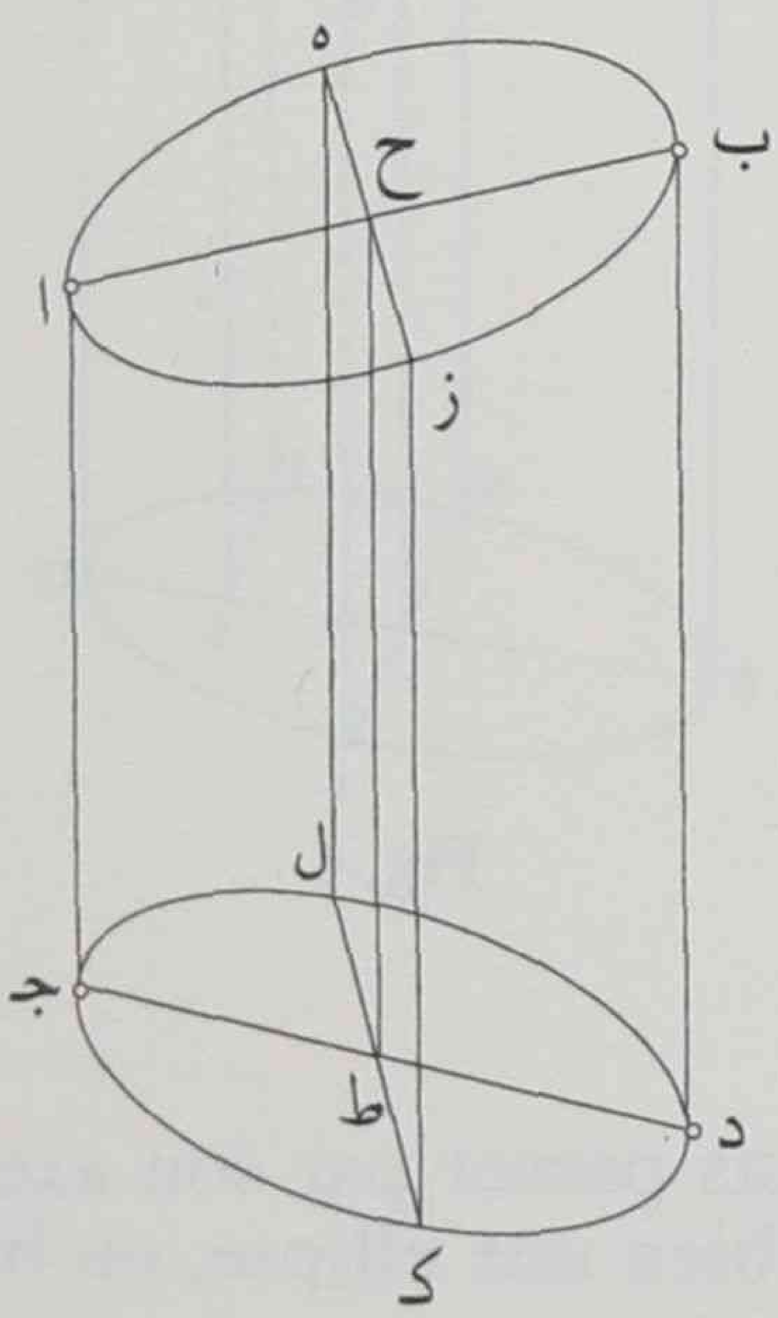
أقول: إن كل واحد منهما متوازي الأضلاع.

برهان ذلك: أن خطي كـ ل م ن يوازيان محور ه ز، فهما متساويان لأنهما ضلعا المجسم الناقص؛ وكذلك س ع ح ط متوازيان متساويان. والخطوط التي تصل ما بين أطراف الخطوط المتوازية المتساوية هي أيضًا متوازية متساوية. فالسطحان المذكوران متوازيا الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نبين [وذلك ما أردناه].

<جـ> السطوح القاطعة للمجسم الناقص على خلاف وضع قاعدته تكون قطعًا ناقصًا مساويًا ومشابهًا للقاعدة.

فليكن قاعدة المجسم الناقص ا ب تقطع سطح جـ د على خلاف وضعه.

أقول: إنه قطع ناقص مساوٍ ومشابه له.



برهان ذلك: أنا نخرج قطري ا ب ه ز الأطول والأصغر، ولنخرج ضلعي ا جـ ب د. فبيّنٌ أنهما متوازيان؛ ولنصل جـ د. فلأن زاوية د جـ ا مساوية لزاوية جـ ا ب وا جـ يوازي ب د، يكون جـ د مساويًا لـ ا ب. ولنخرج من مركز ح خط ح ط إلى نصف جـ د. فبيّنٌ أن ح ط يوازي ا جـ، فخط ح ط هو محور المجسم الناقص. فلنخرج ضلع ز كـ ونخرج كـ ط ل. فلأن ز كـ ح ط متوازيان، فخطا ه ز كـ ل على خلاف وضع الآخر، فزاوية ز كـ ط ل مثل زاوية كـ ز ح ه. وزاوية ز ح ط مثل زاوية كـ ط ح،

5 ضلعا: ضلعي – 8-9 فالسطحان المذكوران متوازيا: فالسطحين المذكورين متوازيي – 13 المجسم: مجسم – 21 ح ط (الأولى): جط – 23 فخطا: فخطي.

donc chacun d'eux est droit et *GK* est parallèle à *HI*, donc chacun des
64v angles *G* et *K* est droit ; *IL* est donc égale à *GH* et, de même, / *IL* est égale à *HE*, donc les diamètres *KIL* et *CID* sont égaux aux diamètres *AHB* et *GHE*, chacun à son homologue. De même, toute droite menée d'une manière ordonnée dans la section *AB* est égale à son homologue. La section est donc une ellipse égale et semblable à la section *AB*. Ce qu'il fallait démontrer.

– **4** – Si un plan coupe un solide elliptique et est tel que ses deux diamètres[1] soient dans les plans des diamètres de la base du solide elliptique, le plus grand et le plus petit, et qu'ils soient égaux, alors cette section est un cercle.

Soit le solide elliptique *ABGH* de base *CADB* et dont les deux diamètres sont *AB* et *CD*, *AB* le plus grand et *CD* le plus petit. Que le plan *GKHI* coupe le solide ; on a les deux diamètres *GH* et *KI* dans les plans des diamètres *AB* et *CD*, et tels que *HL* soit égale à *IL*.

Je dis que la section *GIHL* est un cercle.

Démonstration : Nous supposons un point sur le diamètre *AB* ; soit le point *M*. Nous menons *MN* parallèle à *CD* et *SO* parallèle à *KL* dans le plan parallèle au plan *CDKI*, alors d'après ce que nous avons montré dans notre *Livre sur l'ellipse,* on a le rapport de *CE* à *MN* égal au rapport de *KL* à *OS* et également, d'après ce que nous avons montré dans ce livre : que si le rapport de *BE* à *EM* est égal au rapport de *HL* par *LG* à *HS* par *SG* – mais *HL* par *LG* est égal au carré de *KL*, et *HS* par *SG* est égal au carré de *SO* –, alors la ligne *GOKHI* est la circonférence d'un cercle. Ce que nous voulions.

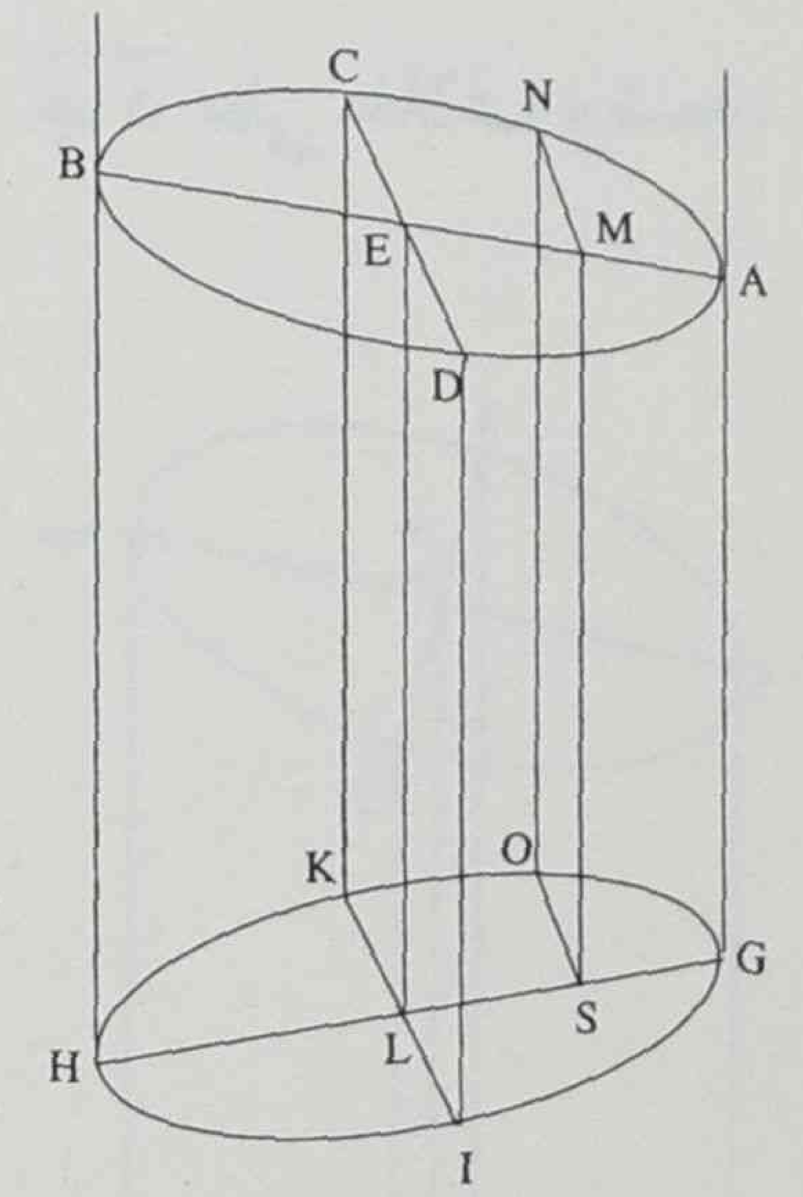


Fig. 4

– **5** – Si un plan coupe un solide elliptique sans passer par son axe et sans être parallèle à l'axe, alors la section est ou bien une ellipse, ou bien un cercle.

Que le plan *CID* coupe le solide elliptique *ABCD* sans passer par l'axe *EG* et sans lui être parallèle.

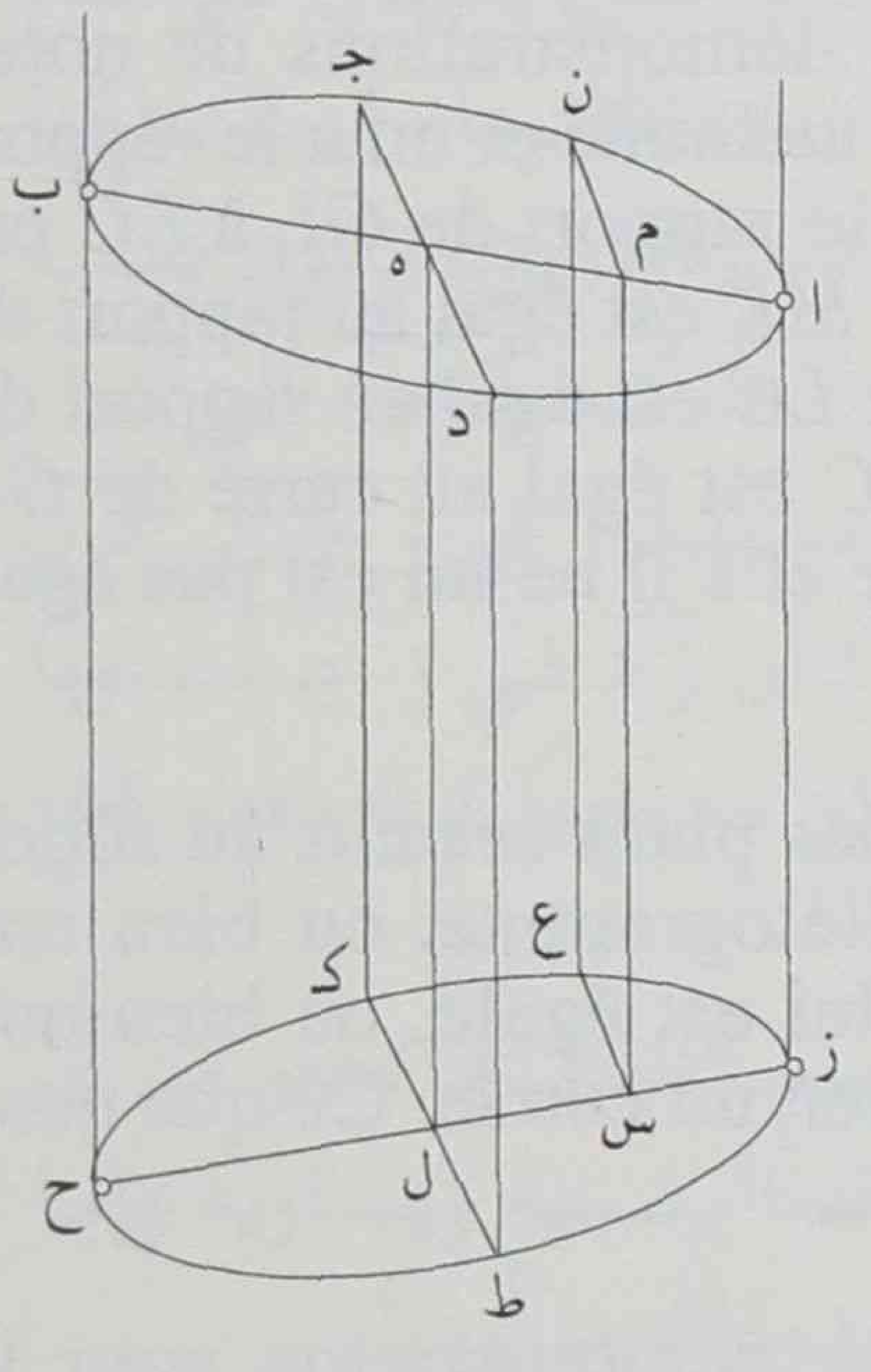
[1] Les deux diamètres de la section plane.

فكل واحدة منهما قائمة وز ك يوازي ح ط، فكل واحدة من زاويتي ز ك قائمة؛ ف ط ل مثل ز ح، وكذلك / ط ل مثل ح ه، فقطرا ك ط ل ٦٤-ظ جـ ط د مثل قطري ا ح ب ز ح ه، كل واحد مثل نظيره. وكذلك أي خط أخرج على الترتيب في قطع ا ب يساوي نظيره، فهو قطع ناقص مساوٍ له ومشابه له؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<د> إذا قطع سطحٌ مجسماً ناقصاً يكون قطراه في سطحي قطري قاعدة المجسم الناقص الأطول والأقصر، ويكونان متساويين، فإنها دائرة.

فليكن مجسم ا ب ز ح الناقص، وقاعدته جـ ا د ب، وقطراه ا ب جـ د، ا ب الأطول وجـ د الأقصر. وقد قطع سطح ز ك ح ط المجسم، فصار قطرا ز ح ك ط في سطحي قطري ا ب جـ د ويكون ح ل مساوياً لـ ط ل.

أقول: إن سطح ز ط ح ل دائرة.



برهان ذلك: أنا نفرض نقطة على قطر ا ب، وهي نقطة م. ونخرج م ن يوازي جـ د، وس ع يوازي ك ل وعلى السطح الموازي لسطح جـ د ك ط، فبما بينا في كتابنا في *القطع الناقص*، تكون نسبة جـ ه إلى م ن كنسبة ك ل إلى ع س، ولما بينا أيضاً في ذلك الكتاب أنه إذا كان نسبة ب ه إلى ه م كنسبة ح ل في ل ز إلى ح س في س ز – لكن ح ل في ل ز مساوٍ لمربع ك ل، وح س في س ز مساوٍ لمربع س ع – فخط ز ع ك ح ط محيط الدائرة؛ وذلك ما أردناه.

<ه> إذا قطع المجسمَ الناقص سطحٌ غير مارّ على محوره ولا موازٍ للمحور، فهو إما قطع ناقص وإما دائرة.

فليكن سطح جـ ط د قطع المجسم الناقص الذي عليه ا ب جـ د ولا هو مارّ على محور ه ز ولا موازٍ له.

2 ح ه: جه / فقطرا: فقطري – 3 ز ح ه: ز حد – 6 مجسمًا ناقصًا: مجسم الناقص / قطراه: قطريه / سطحي: سطح – 7 فإنها: يعني أن القطع سيكون دائرة – 8 وقطراه: وقطريه – 9 قطرا: قطري – 10 سطحي: سطح / ح ل: ح – 20 ح ل: جل / وح س: ف حس.

Je dis que la section est ou bien un cercle, ou bien une ellipse.

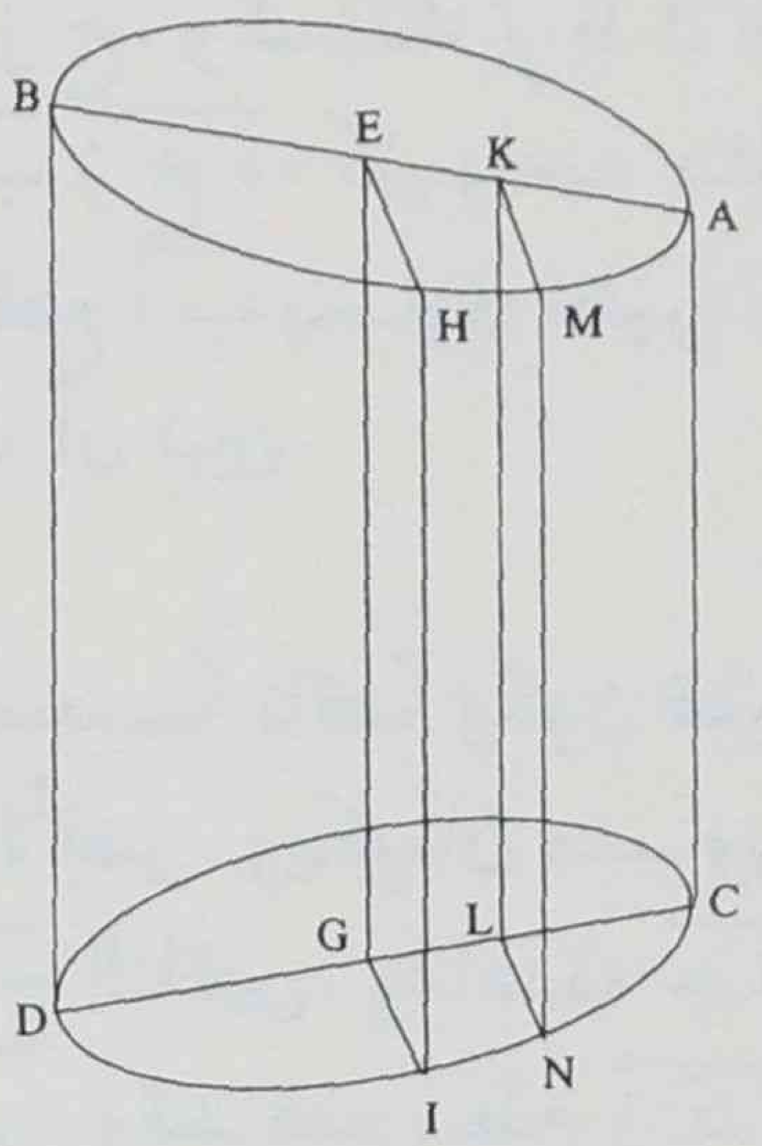


Fig. 5

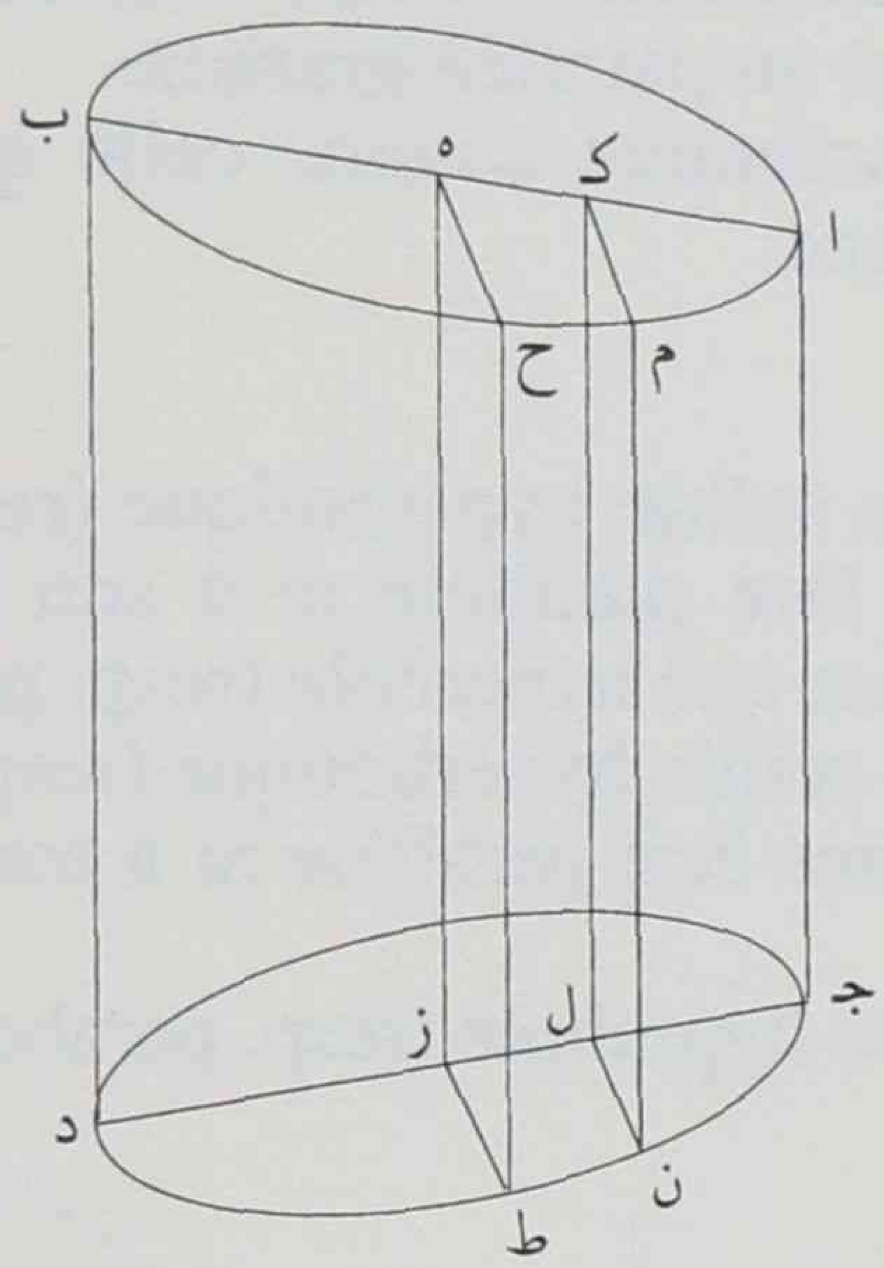
Menons *AB* dans la base *AHB* et menons *EH*, *KM* des droites élevées sur *AE* et *EG* et *KL* sur *KB*[1]. Menons les droites *CD*, *GI*, *LN* leurs homologues. D'après ce que nous avons poursuivi dans les démonstrations de notre *Livre sur l'ellipse*, nous poursuivons cette même méthode et on a le rapport de *DG* à *GC* égal au rapport de *BE* à *EA*. Mais le rapport de *GL* à *LC* est égal au rapport de *EK* à *KA* et le rapport de *EH* à *MK* est égal au rapport de *IG* à *NL*, donc le rapport de *DG* par *GC* à *DL* par *LC* est égal au rapport du carré de *GI* au carré de *LN*. Si donc *GD* par *GC* est égal au carré de *GI*, alors la ligne *CID* est une circonférence de cercle et s'il ne lui est pas égal,
65r / alors c'est une ellipse.

On a par conséquent montré que les sections des plans sécants au solide elliptique ne peuvent être que ou bien un parallélogramme, ou bien une ellipse qui est semblable à l'ellipse de base et lui est égale, ou bien une ellipse qui ne lui est ni égale, ni semblable, ou bien un cercle. Ce que nous voulions.

Quant aux autres propriétés de l'ellipse, leur démonstration pour le solide elliptique est facile car elle est la même que la démonstration des propriétés de la section du cylindre. C'est pourquoi nous ne l'avons pas exposée.

[1] *EH* et *KM*, ordonnées relatives au diamètre *AB*. Les droites *EG* et *KL*, menées des points *E* et *K* pris sur *KB*, sont parallèles au côté du solide.

أقول: إنه إما أن يكون دائرة أو قطعًا ناقصًا.



فلنخرج ا ب في قاعدة ا ح ب ونخرج ه ح ك م خطين يقومان على ا ه، وه ز وك ل على ك ب. ونخرج خطوط جـ د ز ط ل ن نظائرها. فبما سلكنا في براهين كتابنا في *القطع الناقص*، نسلك بعينه ذلك الطريق، تكون نسبة د ز إلى ز جـ كنسبة ب ه إلى ه ا. ونسبة ز ل إلى ل جـ كنسبة ه ك إلى ك ا، ونسبة ه ح إلى م ك كنسبة ط ز إلى ن ل، فتكون نسبة د ز في ز جـ إلى د ل في ل جـ كنسبة مربع ز ط إلى مربع ل ن. فإن كان ز د في ز جـ مساويًا لمربع ز ط، فخط جـ ط د محيط دائرة، وإن لم يكن مساويًا / له، فهو قطع ٦٥-و ناقص.

فقد تبيّن إذاً أن السطوح القاطعة للمجسم الناقص لا تخلو من أن تكون إما سطحًا متوازي الأضلاع وإما قطعًا ناقصًا يشبهه ويساويه وإما قطعًا ناقصًا غير مساوٍ له ولا مشابه له وإما دائرة؛ وذلك ما أردناه.

وأما سائر الخواص التي في القطع الناقص، فالبرهان عليها من جهة المجسم الناقص سهل، لأنه بعينه مثل البرهان من خواص قطع الأسطوانة، فلذلك تركنا ذكرها.

2 خطين: خطوط – 3 وه ز وك ل على: في ه ب وا ل في / فبما: فيما – 4 في القطع الناقص: لقطع – 5 ه ك: بل – 6 م ك: بل – 10 تخلو: يخلوا – 11 سطحًا: سطح / قطعًا ناقصًا: قطع ناقص – 12 قطعًا ناقصًا: قطع ناقص – 14 من: في.

– **6** – Si un plan coupe un solide hyperbolique (resp. parabolique) en passant par son axe ou parallèlement à son axe, ou parallèlement à ses ordonnées, alors la section est un parallélogramme.

La démonstration est exactement comme celle que nous avons mentionnée pour le solide elliptique.

– **7** – Si un plan coupe un solide hyperbolique (resp. parabolique) sans passer par son axe et sans être parallèle ni à son axe, ni à ses droites ordonnées[1], alors la section est une hyperbole (resp. parabole).

Que le plan *CED* coupe le solide hyperbolique (resp. parabolique) *ABCD* sans passer par son axe et sans être parallèle ni à son axe, ni à ses droites ordonnées[2].

Je dis que la section est une hyperbole (resp. parabole).

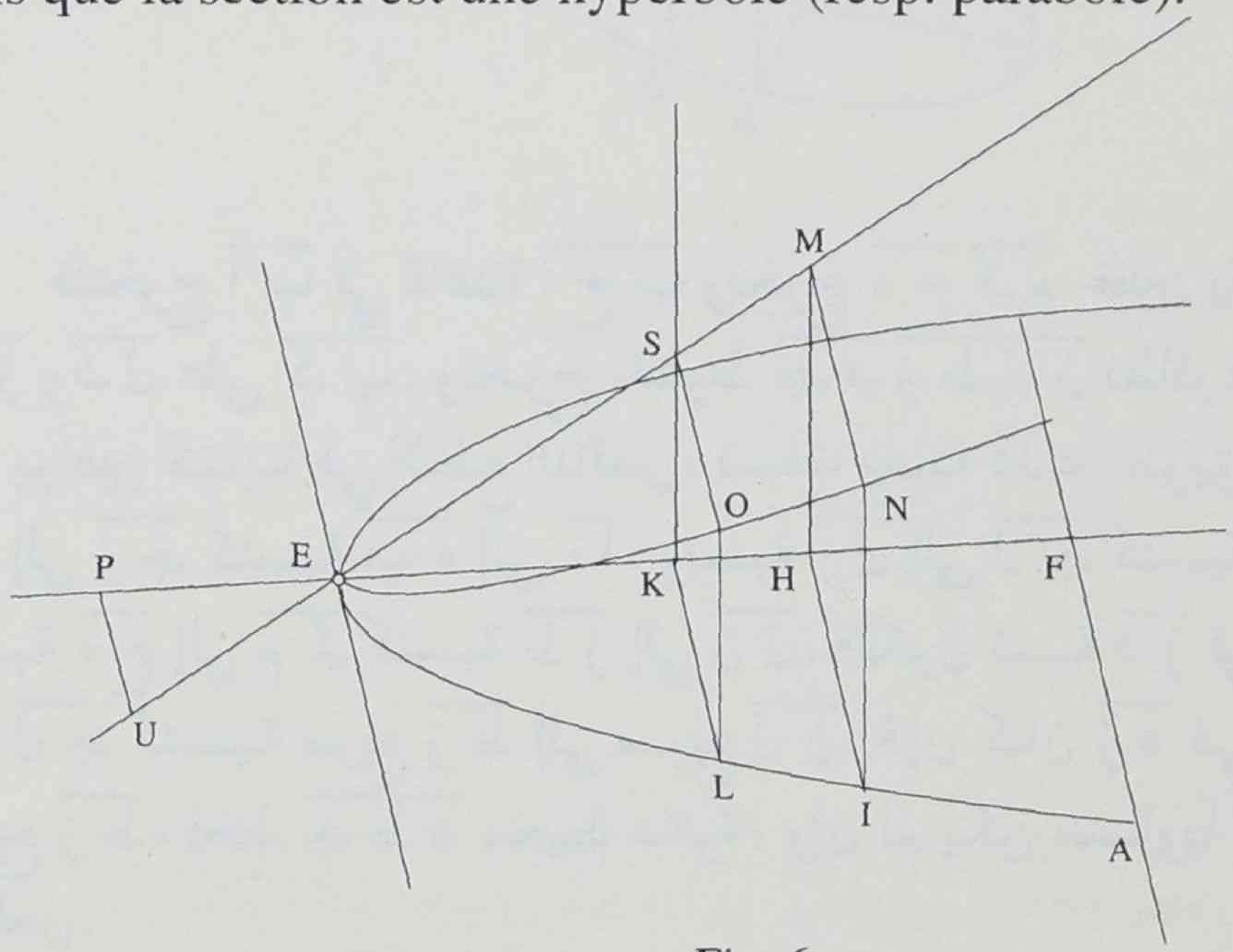


Fig. 6

Démonstration: Nous menons l'axe *EF* et nous menons un plan qui passe par l'axe *EF* et qui est parallèle à l'un des côtés du solide. L'intersection du plan sécant et du plan qui passe par l'axe *EF* est la droite *EM*. Nous supposons deux points *H* et *K* sur l'axe, nous menons la droite *KL* et la droite *HI* ordonnées et nous menons deux droites parallèles au côté du solide à partir des points *H* et *K* jusqu'au plan sécant au solide ; alors elles tombent sur la droite d'intersection, c'est-à-dire *EM*, aux points *S* et *M*. Nous menons deux plans qui passent par les droites *HI* et *KL* parallèles au côté du solide. Leur intersection avec le plan sécant au solide tombera sur les deux droites *NM* et *SO* ; joignons *IN* et *LO*. Il est clair qu'elles sont deux côtés du solide et parallèles aux droites *HM* et *KS*. Si *HI*, *KL* sont parallèles à *MN* et *SO*, alors les droites *NM* et *SO* sont égales aux droites

[1] L'énoncé ne correspond pas à la démonstration. Dans 7, il faut en revanche que le plan soit parallèle aux ordonnées.

[2] *Ibid.*

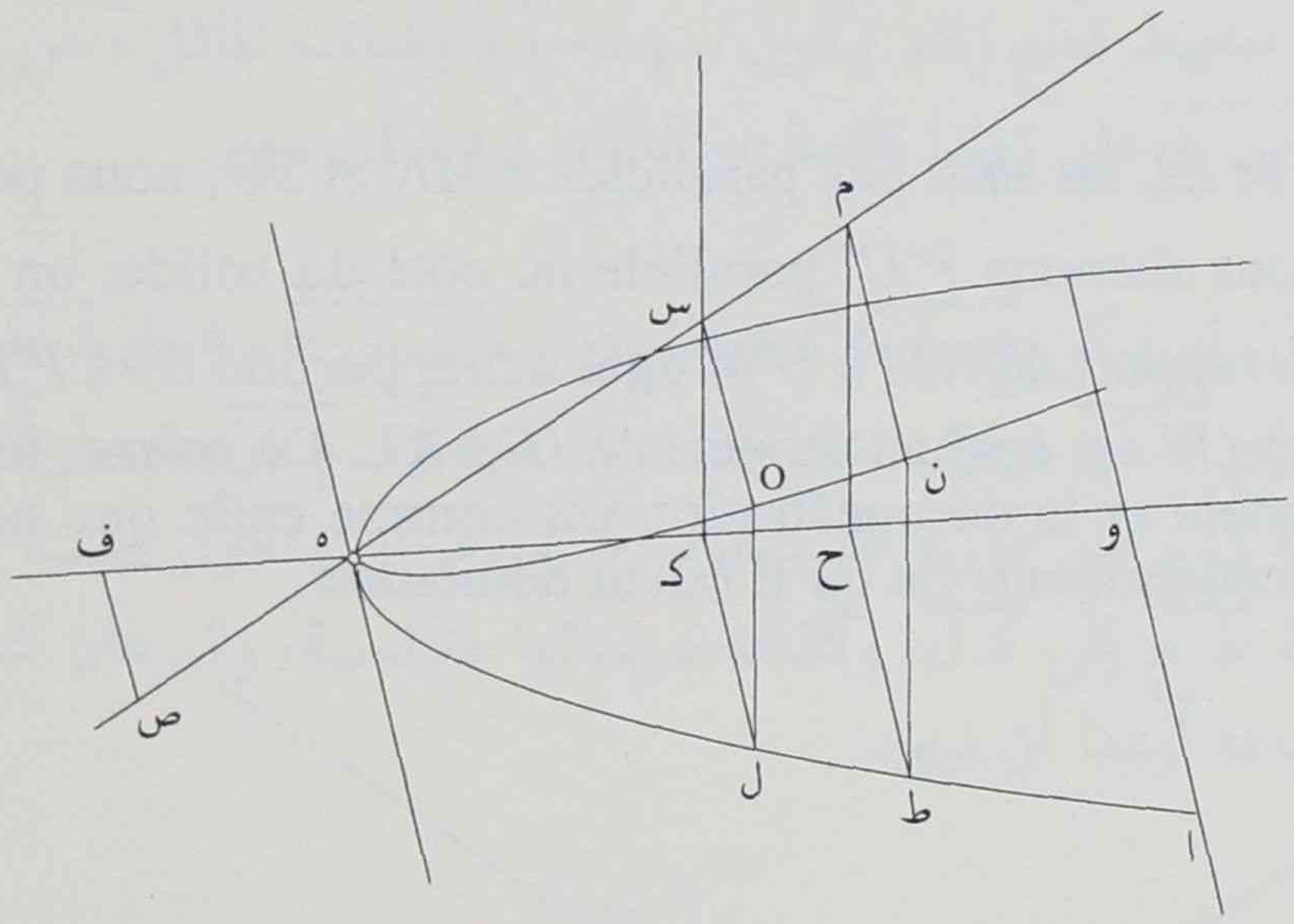
〈و〉 إذا قطع سطح مجسماً زائداً 〈مكافئاً〉 〈و〉مرّ على سهمه أو على موازاة سهمه أو على موازاة خطوط ترتيبه، فهو متوازي الأضلاع.

البرهان عليه مثل ما ذكرنا في المجسم الناقص سواء.

〈ز〉 إذا قطع سطحٌ مجسماً زائداً (مكافئاً)، غير 〈مار على سهمه ولا〉 موازٍ لسهمه ولا لخطوط ترتيبه، فهو قطع زائد (مكافئ).

فليقطع سطح ج ه د مجسم ا ب ج د الزائد 〈المكافئ〉، غير مارّ على سهمه ولا موازٍ له ولا لخطوط ترتيبه.

أقول: إنه قطع زائد 〈مكافئ〉.



برهان ذلك: أنا نخرج سهم ه و، ونخرج سطحًا يجوز على سهم ه و ويوازي ضلعًا من أضلاع المجسم. فيكون الفصل المشترك بين السطح القاطع وبين السطح الجائز على سهم ه و خط ه م. ونفرض نقطتي ح كـ على السهم، ونخرج خط كـ ل 〈وخط ح ط〉 من خطوط الترتيب، ونخرج خطين مستقيمين موازيين لضلع المجسم من نقطتي ح كـ إلى السطح القاطع للمجسم، فتقع على الخط الذي هو الفصل المشترك، أعني ه م على نقطتي س م. ونخرج سطحين جائزين على خطي ح ط كـ ل موازيين لضلع المجسم. فيقع الفصل المشترك بينهما وبين السطح القاطع للمجسم 〈على〉 خطي ن م س ع؛ ولنصل ط ن ل ع. فبيّنٌ أنهما ضلعان للمجسم وموازيان لخطي ح م كـ س. فإن كان ح ط كـ ل موازيين لـ م ن س ع، فإن خطي ن م س ع

1 مجسمًا زائداً: مجسم زائد – 4 مجسمًا زائداً (مكافئًا): مجسم زائد (مكافئ) – 5 لسهمه: سهمه – 7 لخطوط: خطوط – 10 ضلعًا: ضلع / فيكون: فكون – 11 خط: وخط – 17 ضلعان: ضلعين / وموازيان: وموازيين.

HI et *KL*. Menons dans l'hyperbole son côté transverse *EP* et posons le rapport de *HE* à *EP* égal au rapport de *ME* à *EU*, donc le rapport de *UM* à *PH* est égal au rapport de *ME* à *HE* et égal au rapport de *SE* à *KE*. Mais le rapport de *US* à *PK* est égal au rapport de *ES* à *EK*. Par ce que nous avons montré dans notre *Livre sur les propriétés de l'ellipse*, on a le rapport de
65v *UM* par *ME* à *PH* par *EH* égal au rapport de *US* par *SE* à *PK* / par *KE*; par permutation, on a le rapport de *UM* par *ME* à *US* par *SE* égal au rapport de *PH* par *EH* à *PK* par *KE*. Mais le rapport de *PH* par *EH* à *PK* par *KE* est égal au rapport du carré de *IH* au carré de *KL*. Le rapport de *UM* par *ME* à *US* par *SE* est donc égal au rapport du carré de *HI* – c'est-à-dire de *NM*, car il lui est égal – au carré de *KL* – c'est-à-dire de *SO* qui lui est égal. La ligne *EON* est donc le périmètre d'une hyperbole dont l'axe est *EM* et le côté transverse *EU*, et les ordonnées suivant des angles droits sont *NM* et *SO*. Ce qu'il fallait démontrer.

– **8**[1] – Si *HI* et *KL* ne sont pas parallèles à *MN* et *SO*, nous posons *P′H* égal à *KL* et nous menons *P′U′* parallèle au côté du solide, on aura *MU′* égale à *SO* et le rapport de *NM* à *U′M* égal au rapport de *IH* à *P′H*, donc le rapport de *NM* à *OS* est égal au rapport de *IH* à *KL*. De même, leurs carrés sont proportionnels et la démonstration est comme celle que nous avons mentionnée précédemment. Ce qu'il fallait démontrer.

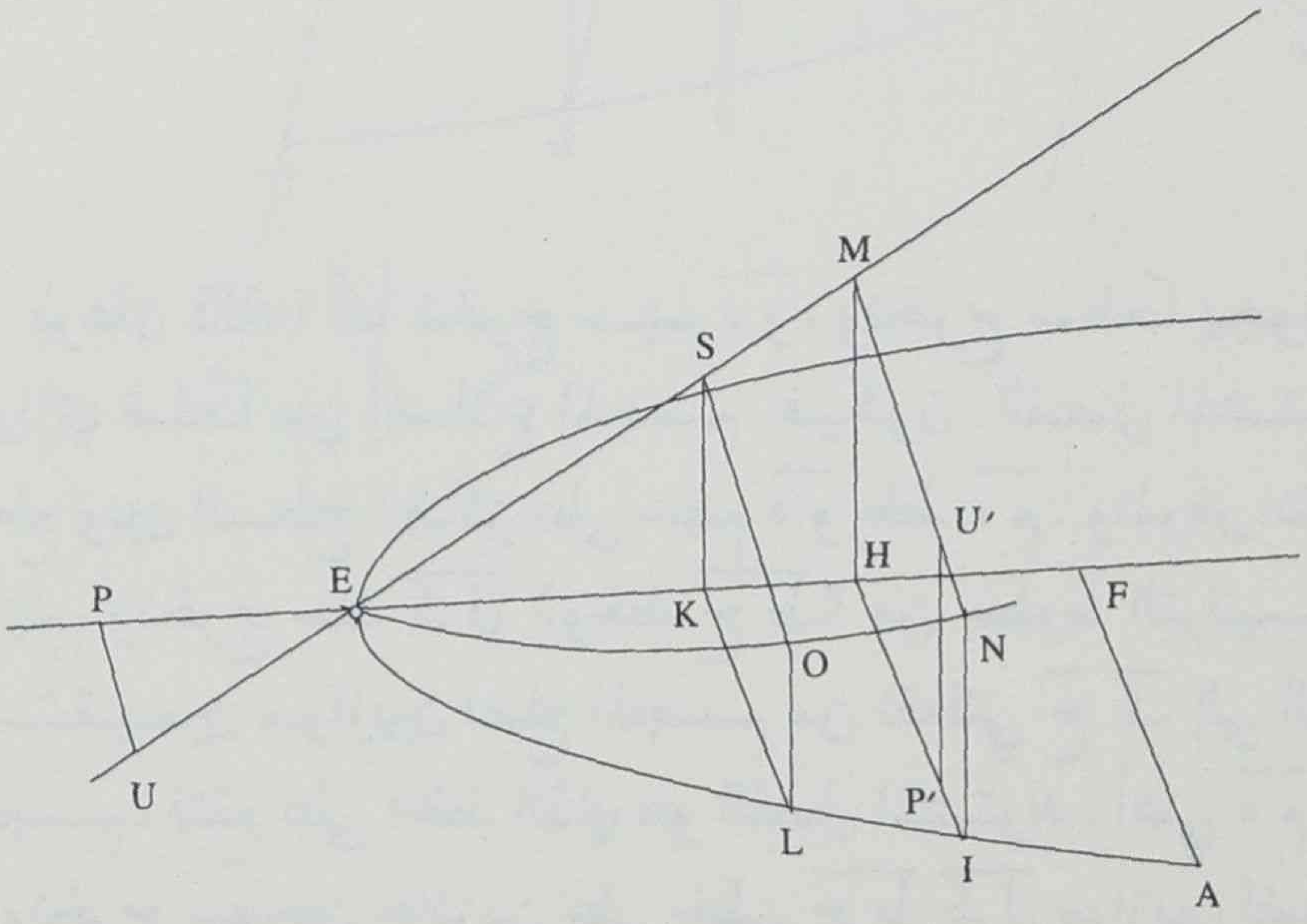
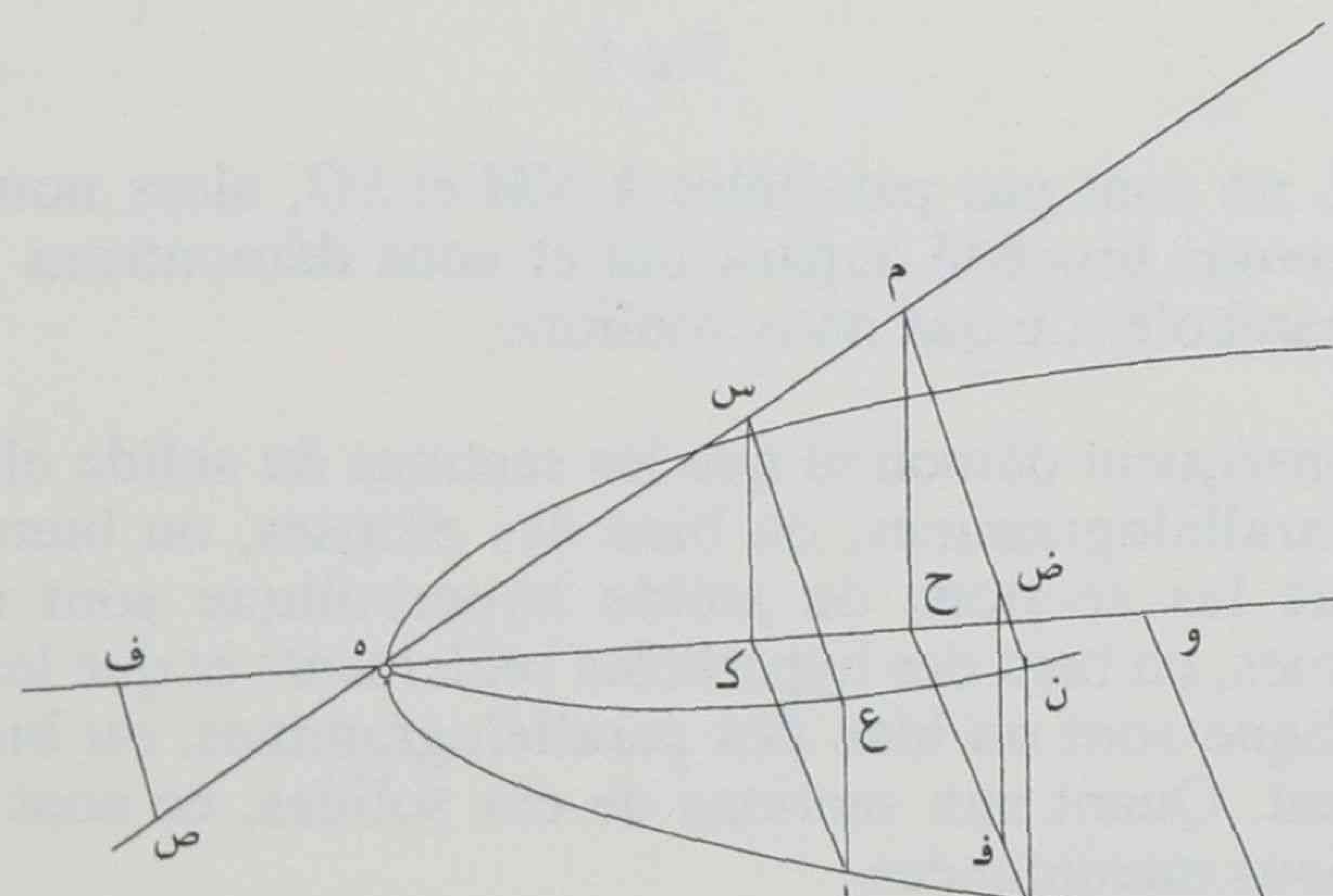


Fig. 7

[1] Cet énoncé correspond aux conditions données dans la proposition précédente, c'est-à-dire que le plan sécant n'est pas parallèle aux ordonnées.

مساويان لخطي ح ط ك ل. فلنخرج في القطع الزائد ضلعه المائل عليه ه ف، ونجعل نسبة ح ه إلى ه ف كنسبة م ه إلى ه ص، فنسبة ص م إلى ف ح كنسبة م ه إلى ح ه وكنسبة س ه إلى ك ه. ونسبة ص س إلى ف ك كنسبة ه س إلى ه ك. فبما بينا في كتابنا في *خواص القطع الناقص*، تكون نسبة ص م في م ه إلى ف ح في ه ح كنسبة ص س في س ه إلى ف ك / في ك ه؛ ٦٥-ظ
وبالإبدال تكون نسبة ص م في م ه إلى ص س في س ه كنسبة ف ح في ه ح إلى ف ك في ك ه. لكن نسبة ف ح في ه ح إلى ف ك في ك ه كنسبة مربع ط ح إلى مربع ك ل، فنسبة ص م في م ه إلى ص س في س ه كنسبة مربع ح ط – أعني ن م لأنه مساوٍ له – إلى مربع ك ل – أعني س ع المساوي له. فخط ه ع ن محيط قطع زائد يكون سهمه ه م وضلعه المائل ه ص وخطوط ترتيبه ن م س ع على زوايا قائمة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<ح> وإن لم يكن ح ط ك ل موازيين لـ م ن س ع، نجعل ف ح مساوياً لـ ك ل ونخرج ف ض يوازي ضلع المجسم، فيكون م ض مساوياً لـ س ع وتكون نسبة ن م إلى ض م كنسبة ط ح إلى ف ح، فتكون نسبة ن م إلى ع س كنسبة ط ح إلى ك ل؛ وكذلك مربعاتها متناسبة، والبرهان كما قدمنا ذكره؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



1 مساويان: مساويين – 3 ف ك: قل، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 11 أردنا: اردناه – 13 ف ض: ف ص، وكذلك فيما يلي – 16 أردنا: اردناه.

– **9** – Menons dans la parabole le côté droit *EP*. Il est donc clair que le rapport de *ME* à *SE* est égal au rapport de *HE* à *KE* et est égal au rapport du carré de *IH* au carré de *KL*. Le rapport de *ME* à *SE* est donc égal au rapport du carré de *IH* au carré de *KL*. Mais *IH* est égale à *NM* et *KL* est égale à *SO*, donc le rapport de *EM* à *ES* est égal au rapport du carré de *NM* au carré de *SO*. Posons *ME* par *EU′* égal au carré de *NM* ; *NED* est une parabole dont l'axe est la droite *EM* et dont le côté droit est la droite *EU*.

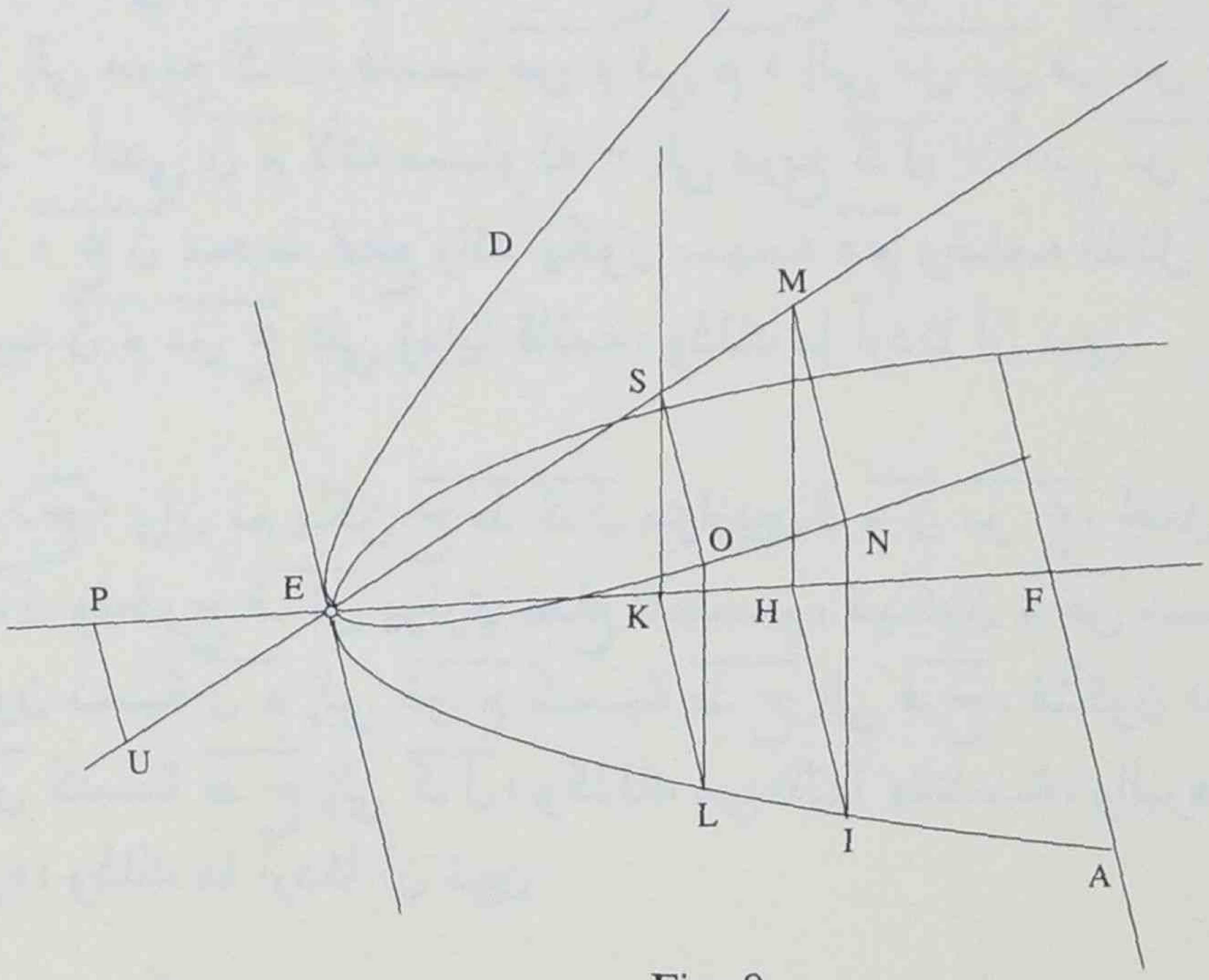


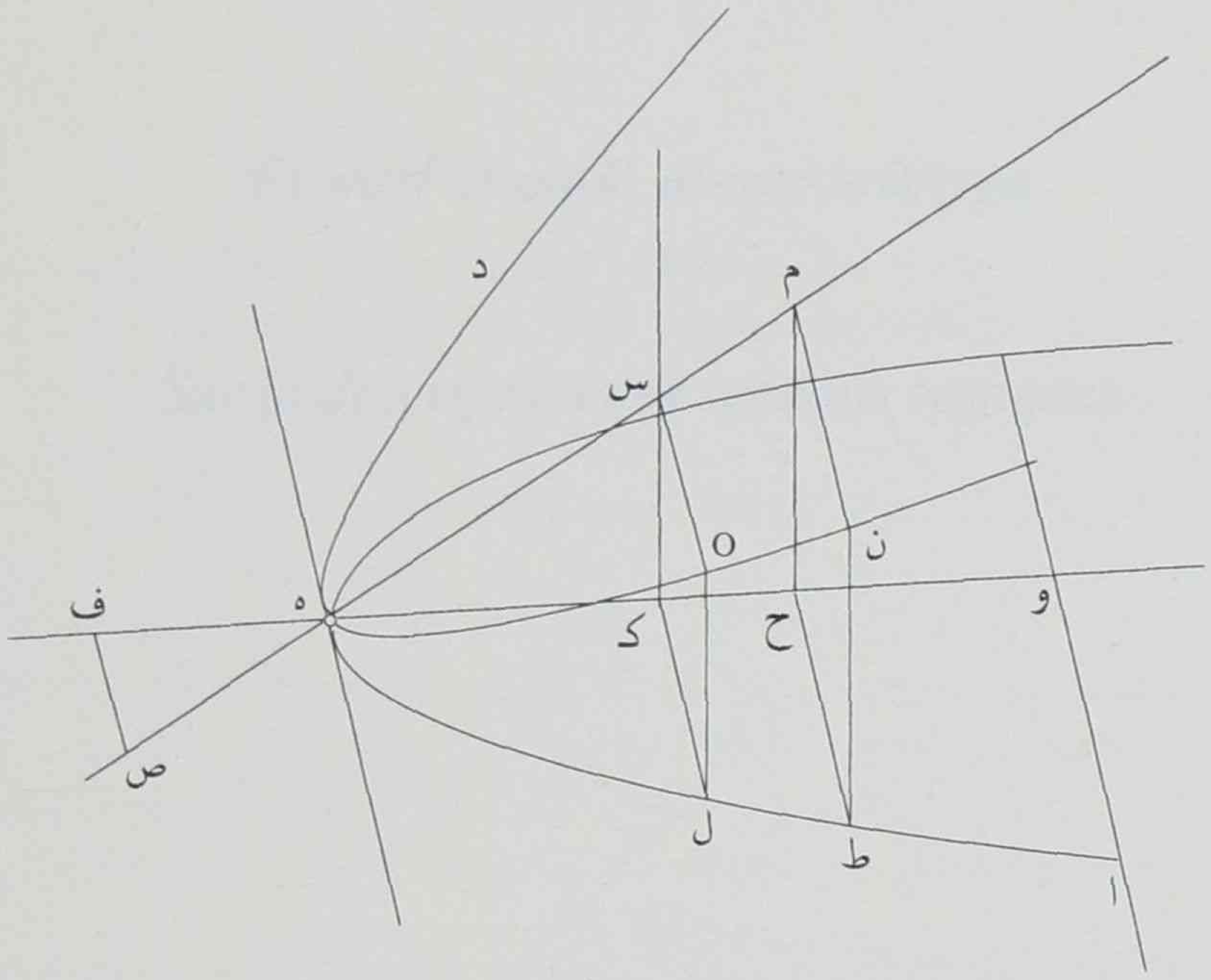
Fig. 8

Si *HI* et *KL* ne sont pas parallèles à *NM* et *SO*, alors nous procédons comme nous avons procédé auparavant et nous démontrons que la ligne *NED* est une parabole. Ce que nous voulions.

On a par conséquent démontré que les sections du solide elliptique sont ou bien des parallélogrammes, ou bien des ellipses, ou bien des cercles seulement ; que les sections du solide hyperbolique sont ou bien des parallélogrammes, ou bien des hyperboles seulement ; et que les sections du solide parabolique sont ou bien des parallélogrammes, ou bien des paraboles seulement. Quant aux sections de ces solides, ce sont les sections parmi les sections mentionnées.

Le livre de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl est achevé.
Grâce à Dieu, le Très-Haut.

‹ط› ولنخرج في القطع المكافئ ضلعه المنتصب عليه ه ف. فبيّن أن نسبة م ه إلى س ه كنسبة ح ه إلى ك ه ‹و›كنسبة مربع ط ح إلى مربع ك ل. فنسبة م ه إلى س ه كنسبة مربع ط ح إلى مربع ك ل. لكن ط ح مثل ن م، وك ل مثل س ع، فنسبة ه م إلى ه س كنسبة مربع ن م إلى مربع س ع. نجعل م ه في ه ض مثل مربع ن م، فيكون ن ه د قطعاً مكافئاً ‹سهمه خط ه م› وضلعه المنتصب خط ه ص.



وإن لم يكن ح ط ك ل موازيين لـ ن م س ع، فلندبر كما دبرنا متقدماً ونبرهن أن ‹خط› ن ه د قطع مكافئ؛ وذلك ما أردنا.

فقد تبين إذاً أن قطوع المجسم الناقص لا تخلو من أن تكون إما سطوحاً متوازية الأضلاع وإما قطوعاً ناقصة وإما دوائر فقط، وأن قطوع المجسم الزائد تكون إما متوازية الأضلاع وإما قطوعاً زائدة فقط، وأن قطوع المجسم المكافئ إما متوازية الأضلاع وإما قطوعاً مكافئة فقط. وأما ‹قطوع هذه المجسمات فهي› قطع من هذه القطوع المذكورة.

تم كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل، بحمد الله تعالى.

1 ضلعه: ضلع بها المكافئ – 2 س ه: مه / ك ه: فوق السطر – 5 ه ض: حـ ص / قطعاً مكافئاً: قطع مكافئ – 9 تخلو: يخلوا – 10 سطوحاً: سطوح / قطوعاً: قطوع – 11 قطوعاً: قطوع – 12 قطوعاً: قطوع.

TEXTE ET TRADUCTION

III

Fī waṣf al-quṭūʿ al-makhrūṭiyya

Sur la description des sections coniques

1v *Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux*
De Lui nous avons l'assistance

Traité de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī

Sur la description des sections coniques

Comme le désir de l'éminent Shaykh dans les sciences démonstratives et leurs semblables en mathématiques, que rien ne vient corrompre et qui n'affectent d'aucun doute celui qui les comprend, est un désir absent de son temps, il s'est singularisé en le concevant à son époque, si bien qu'il a surpassé ses semblables au point de n'avoir plus de semblables, et qu'il a distancé ses pairs au point de ne plus avoir de pairs. Outre ce qu'il m'avait naguère ordonné lors de la séparation et de la survenue de l'absence, en me demandant les commentaires que j'ai rédigés et les démonstrations que j'ai établies pour que leur examen fasse briller son esprit et soit une préparation à ses entretiens et à ses études — mais moi je le place au-dessus de cela, étant donné ce qu'il a réuni de hauts faits et qu'il a poursuivi tous les chemins dans les espèces des mathématiques —, grâce à Dieu, j'ai composé pour lui un livre afin de décrire les sections coniques, dans lequel j'ai exposé comment les engendrer, la quantité de leurs espèces et leurs tracés, par des méthodes faciles et accessibles, ainsi que des choses subtiles et utiles. Si j'y ai satisfait, c'est grâce à son règne et à la hauteur de son rang ; et si j'ai failli en quoi que ce soit de cela, qu'il me l'indique et attire mon attention sur cela. C'est à Dieu que je me remets et c'est de Lui que je dépends.

Il a dit : Le cône est ou bien droit, et on l'appelle *cône cylindrique*, ou
6r bien oblique. On obtient le cône droit / en traçant un triangle rectangle que l'on fait tourner autour de l'un des deux côtés de l'angle droit du triangle qui sera un axe, jusqu'à ce qu'il revienne par sa rotation à la position à partir de laquelle il a commencé à se mouvoir ; le second côté <de l'angle droit> du triangle trace alors un cercle qui sera la base du cône, l'hypoténuse du triangle trace la surface latérale du cône et l'axe sera perpendiculaire au plan du cercle de sa base au centre : l'une des extrémités de l'axe sera le centre du cercle de la base et l'autre extrémité le sommet du cône.

بسم الله الرحمن الرحيم ١-ظ

وبه نستعين

رسالة لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي
في وصف القطوع المخروطية

لما كانت رغبة الشيخ الفاضل في العلوم البرهانية وما شاكلها من الرياضة، التي لا يشوبها شوبٌ ولا يعترض لمن أحاط بها ريبٌ، الرغبةَ التي لا توجد في دهره، وتفرد باقتنائها في عصره، حتى جاوزَ أشكالَه فليس له شكلٌ، وأفات أمثالَه فلا يوجد له مثلٌ، مع ما سبق من أمره إياي، عند الفرقة وحدوث الغيبة، بطلبه التعليقات التي عملت، والبرهانات التي أثبت، ليكون نظره إليها جَلاءً لخاطره وعدةً لمناظره ومذاكره، فأنا أجلّه عن ذلك لما قد جمع من المناقب وذهب في أنواع الرياضيات كلّ المذاهب؛ لكني، بحمد الله، صنفت له كتاباً في وصف القطوع المخروطية، ذكرت فيه كيفية حدوثها وكمية أنواعها ورسومها بطرق سهلة قريبة مع أشياءَ لطيفة مفيدة. فإن أجدتُ فبدولته وعلو جدّه، وإن قصرتُ في شيء من ذلك أرشدني إليه ونبهني عليه، وبالله التوكل وعليه المعول.

قال: أما المخروط فهو إما قائم، ويقال له مخروط أسطواني، وإما مائل. أما القائم منه / فهو من ارتسام مثلث قائم الزاوية، بأن يدار على أحد ٦-و ضلعي المثلث ‹المحيطين بالزاوية القائمة›، ويكون محوراً، وينتهي بدورانه إلى الموضع الذي منه بدأ بالحركة؛ فيرسم الضلعُ الثاني من المثلث دائرةً تكون قاعدة المخروط، وقطرُ المثلث يرسم بسيطَ المخروط، والمحور يكون قائماً على مركز سطح دائرة قاعدته، ويكون أحد طرفي المحور مركز دائرة القاعدة والطرفُ الآخر رأس المخروط.

5 العلوم: علوم – 8 مع ما: معما – 10 مذاكره: المقصود موضع الذِّكر أو المذاكرة، أي جلسات الدراسة – 16 مخروط: مخوط.

On obtient le cône oblique en traçant une droite qui tourne en suivant la circonférence d'un cercle donné et qui est telle que l'autre extrémité de la droite qui n'est pas dans le plan du cercle soit fixée, et que la droite menée de ce second point au centre du cercle donné, qui est la base du cône, ne lui soit pas perpendiculaire ; cette droite mobile, dont le mouvement engendre la surface latérale du cône, est appelée dans les deux cas *le côté du cône*. Le second point d'extrémité de la droite est appelé *le sommet du cône*. L'angle engendré par la droite qui joint le centre de la base du cône et son sommet et par la droite appelée *côté du cône* est appelé *l'angle au sommet*
6v *du cône*[1]. / Le triangle engendré par la section du cône qui passe par l'axe du cône est appelé *triangle du cône*. Les plans qui coupent ce triangle, qui lui sont perpendiculaires et qui ne passent pas par le sommet du cône séparent la surface latérale du cône par des lignes convexes qui sont les sections du cône ; ce sont elles que nous voulons tracer et dont <nous voulons> trouver les espèces, les diamètres et les centres.

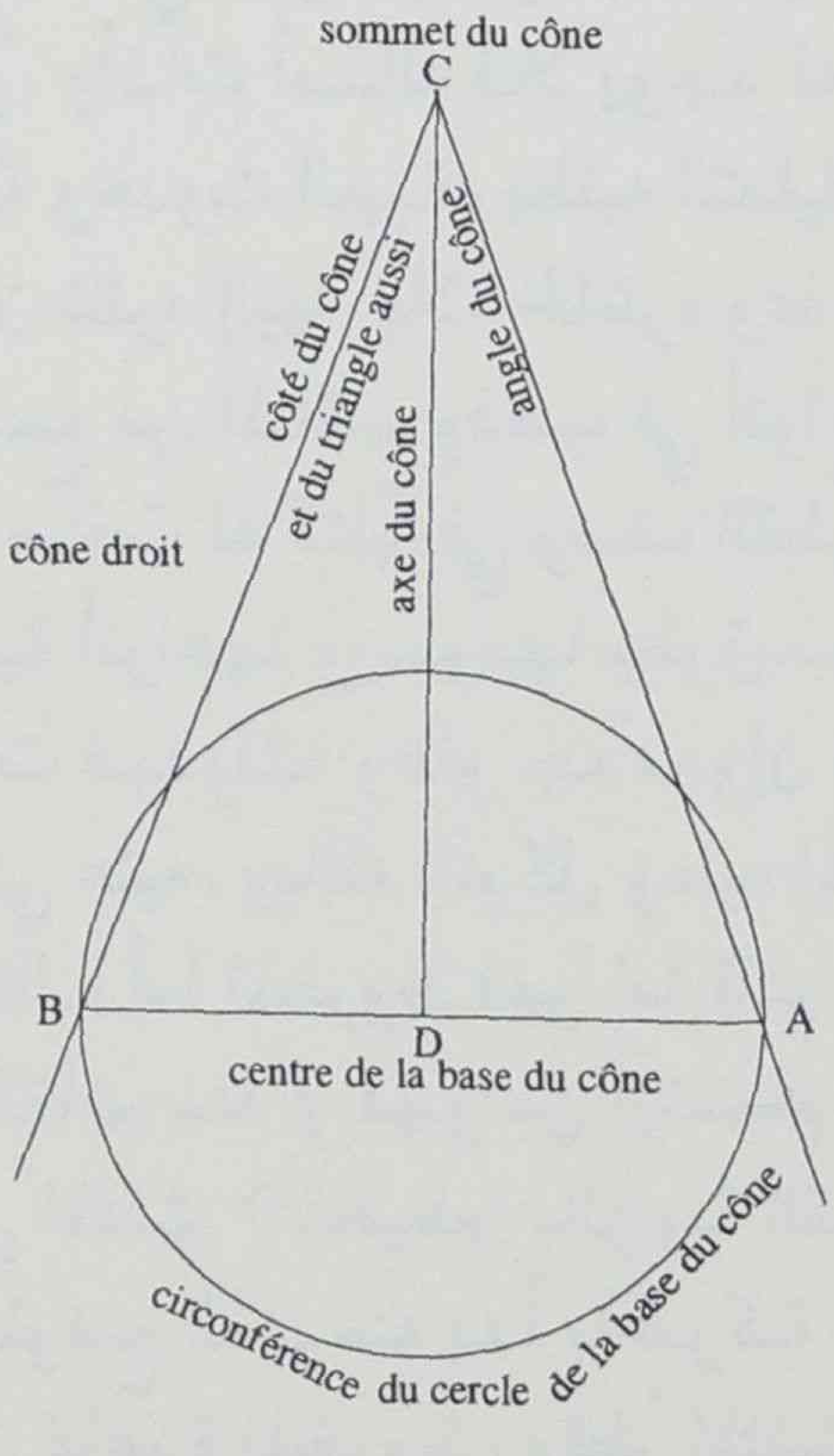


Fig. 1.2

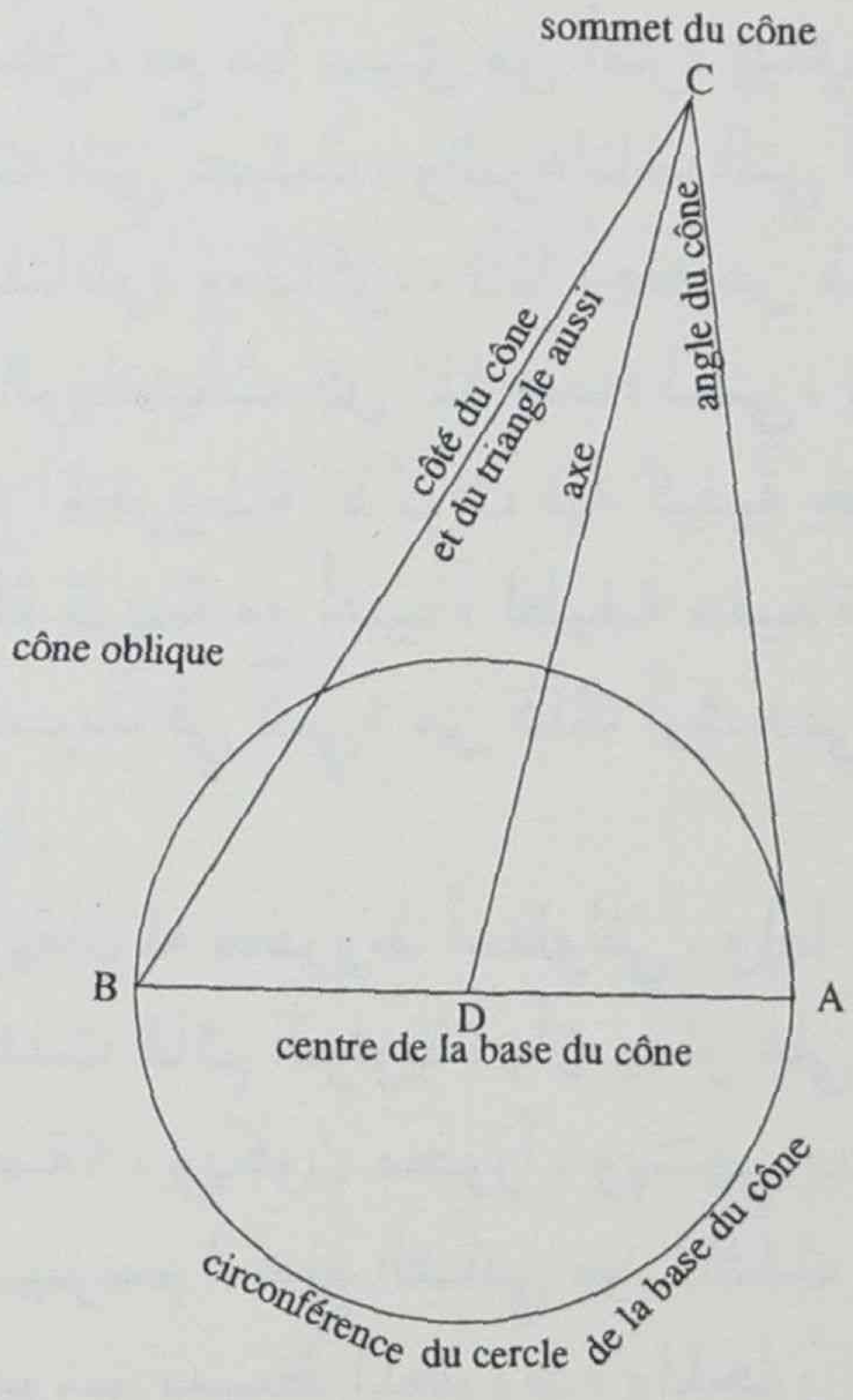
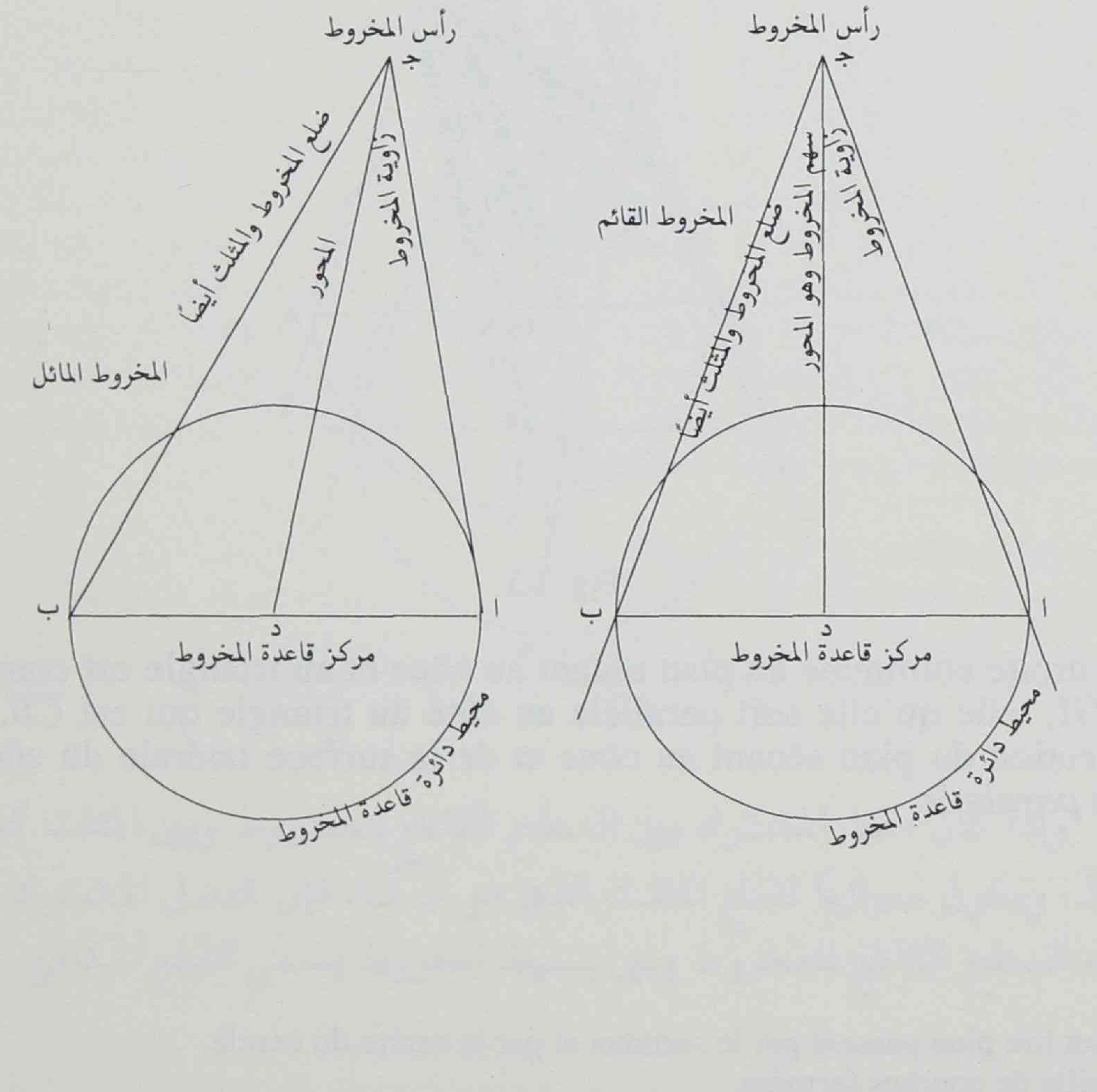


Fig. 2.2

[1] Dans le cas du cône droit cet angle a une grandeur fixe. Dans le cas du cône oblique, cet angle varie quand la génératrice tourne autour de l'axe *CD*. Dans tout le texte il sera question d'un cône de révolution.

وأما المخروط المائل فهو من ارتسام خط مستقيم يدور على محيط دائرة موضوعة، ويُثبت الطرف الآخر من الخط ‹الذي› ليس على سطح الدائرة؛ والخط الخارج من تلك النقطة الثانية إلى مركز الدائرة الموضوعة، التي هي قاعدة المخروط، غيرُ قائم عليه على زوايا قائمة؛ وهذا الخط المتحرّك، الذي يحدث من حركته بسيط المخروط، في كلا الوضعين يسمّى *ضلع المخروط*. والنقطة الثانية من طرف الخط تسمّى *رأس المخروط*. والزاوية التي تحدث من الخط الذي يصل بين مركز قاعدة المخروط وبين رأسه ومن الخط، الذي يسمى *ضلع المخروط*، تسمى *زاوية رأس المخروط*. / والمثلث الحادث من قطع المخروط الجائز على محور المخروط يسمى *مثلث* ٦-ظ *المخروط*، والسطوح القاطعة لهذا المثلث وتقع عليه على زوايا قائمة وغير جائزة على رأس المخروط تفصل بسيط المخروط بخطوط محدبة هي قطوع المخروط، وهي التي يكون غرضنا في رسومها وكيفية وجود أنواعها وأقطارها ومراكزها.



1 ارتسام: اقسام – 5 كلا: كل.

Supposons un cône *CAEB*, *CAB* le triangle qui le coupe en passant par
son sommet[1] qui est le point *C*, la droite commune à un plan qui coupe le
plan du triangle, et qui est parallèle à la base du cône, et au plan du tri-
angle, est la droite *GH* ; *GH* sera alors le diamètre d'un cercle ; un tel plan
coupe le triangle du cône suivant des angles droits et coupe la surface
latérale du cône suivant un cercle. Si la droite commune au plan sécant au
cône et au triangle est comme la droite *GL*, c'est-à-dire qu'elle joint les
deux côtés du triangle, alors l'intersection de ce plan et de la surface
latérale du cône est appelée une *ellipse*, qui est une figure arrondie et al-
longée ; ainsi le cercle circulaire et le cercle allongé appartiennent au même
3r domaine, ils sont dans le domaine de l'ellipse / dont le contour est limité[2] ;
leurs propriétés sont les mêmes, cependant certaines changent ; celles qui
dans le cercle allongé sont suivant un rapport sont, pour la plupart, dans le
cercle arrondi selon l'égalité[3].

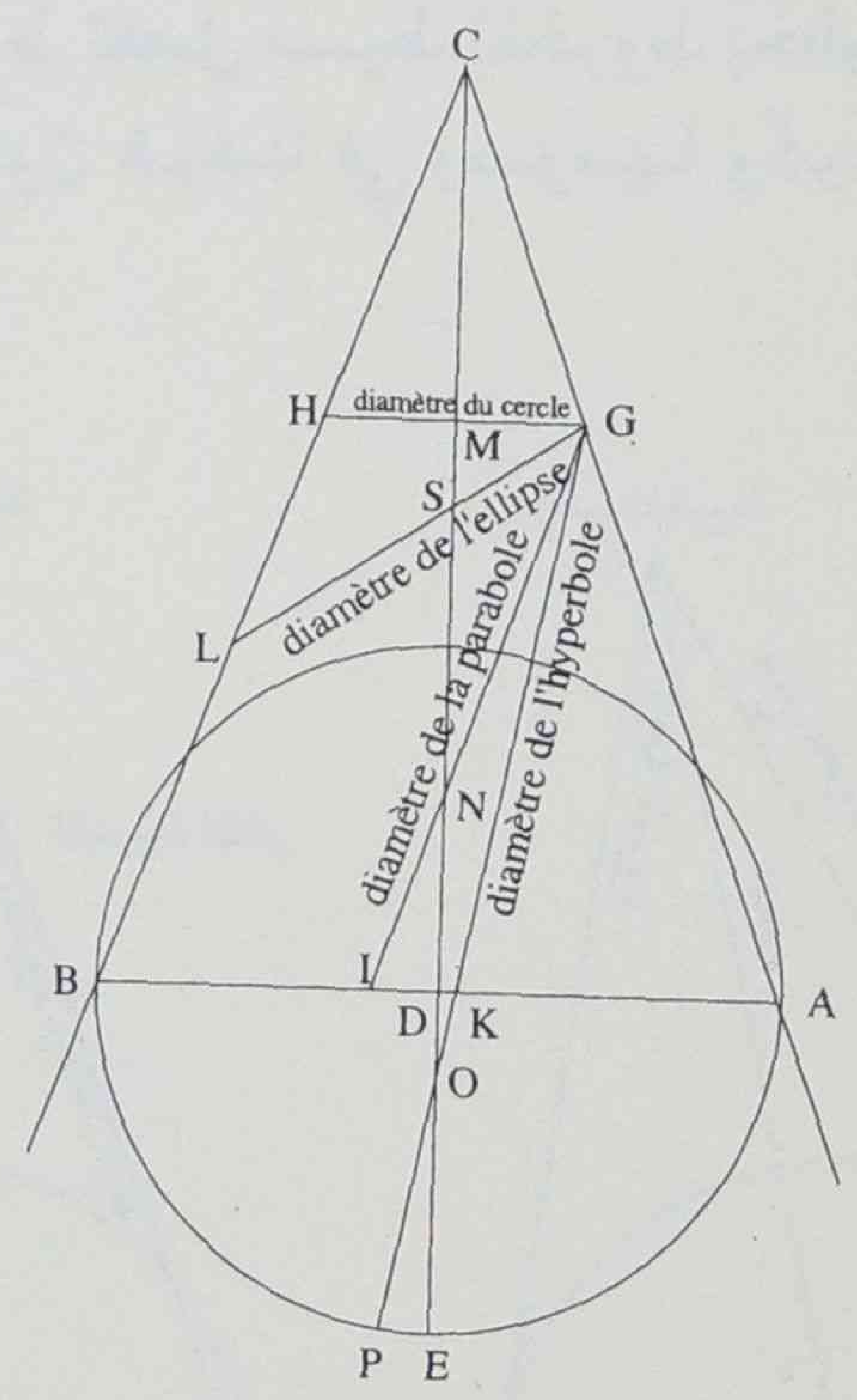


Fig. 1.3

Si la droite commune au plan sécant au cône et au triangle est comme la droite *GI*, telle qu'elle soit parallèle au côté du triangle qui est *CB*, alors l'intersection du plan sécant au cône et de la surface latérale du cône est appelée *parabole*.

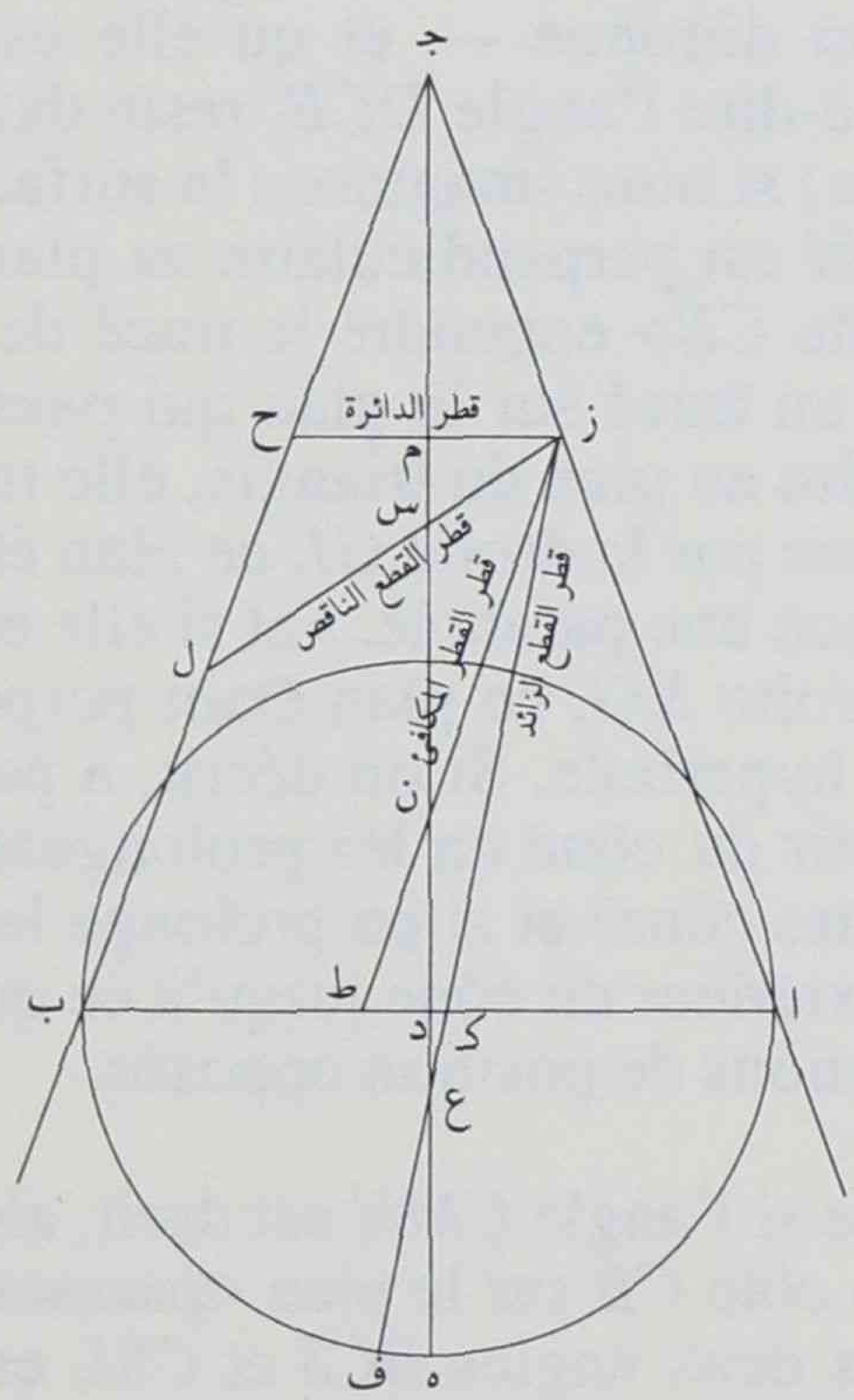
[1] Il faut lire plan passant par le sommet et par le centre du cercle.

[2] Famille de courbes fermées.

[3] Sous-entend-il ici que dans le cas du cercle, le diamètre est égal au côté droit et dans le cas de l'ellipse, c'est le rapport du diamètre au côté droit qui intervient ?

فلنفرض مخروطَ جـ ا ه ب، والمثلث القاطع له الجائز على رأسه – وهي نقطة جـ – جـ ا ب، والخطَّ المشترك بين السطح القاطع لسطح المثلث الموازي لقاعدة المخروط ‹وسطح المثلث› خط ز ح، فيكون ز ح قطر الدائرة؛ وهو سطح يقطع مثلث المخروط على زوايا قائمة ويقطع بسيط المخروط بدائرة.

وإذا كان الخط المشترك بين السطح القاطع للمخروط وبين المثلث كخط ز ل، وهو يصل ما بين ضلعي المثلث، فإن الفصل المشترك بين ذلك السطح وبين بسيط المخروط يسمى *القطع الناقص*، وهو شكل مدوّر مستطيل، فالدائرة المستديرة والدائرة المستطيلة تكونان في حيز واحد، وهما في حيز القطع الناقص / [و]محدود الإحاطة، وخواصهما واحدة، بعضها يتغير: ما يكون ٣-و
في الدائرة المستطيلة بالنسبة، فيكون أكثرها في الدائرة المدورة بالمساواة.



وإذا كان الخط المشترك بين السطح القاطع للمخروط وبين المثلث كخط ز ط، ويكون موازيًا لضلع المثلث الذي هو جـ ب، فإن الفصل المشترك بين ذلك السطح القاطع للمخروط وبين بسيط المخروط يسمّى *القطع المكافئ*.

Si la droite commune au plan sécant au cône et au triangle est comme la droite *GK*, qui rencontre le côté du triangle, qui est *BC*, dans la direction de *C*, si on les prolonge continûment, alors l'intersection de ce plan et de la surface latérale du cône est appelée *hyperbole*.

Voici leurs figures[1]. /

4r On a ainsi montré que si on prolonge le cône dans la direction de la base indéfiniment, alors le diamètre du cercle, c'est-à-dire *GH*, et le diamètre de l'ellipse, c'est-à-dire *GL*, rencontrent la droite *CB* dans la direction de *B* sur[2] la surface latérale du cône, l'ellipse et le cercle seront de contour fermé ; la droite *GI* qui est le diamètre de la parabole ne rencontre la droite *CB* ni dans la direction de *B* ni dans la direction de *C*, étant donné qu'elles sont parallèles ; le diamètre *GK* de l'hyperbole rencontre la droite *CB* dans la direction de *C*, qui est son sommet, et leur rencontre est à l'extérieur du cône.

Si nous prenons *CD* comme axe et si nous faisons tourner le côté *CB* autour de l'axe *CD* sur la surface latérale supposée — en imaginant que la droite *CB* augmente ou diminue — et qu'elle est telle que l'angle au sommet du cône, c'est-à-dire l'angle *DCB*, reste dans son état et que l'axe *CD* tourne sur lui-même ; si nous imaginons la surface illimitée et si le plan passant par la droite *GH* est perpendiculaire au plan du triangle, alors par ce mouvement <la droite *CB*> engendre le tracé de la circonférence d'un cercle ; si elle effectue un tracé sur le plan qui passe par la droite *GL*, ce plan étant perpendiculaire au plan du triangle, elle trace une ellipse ; si elle trace sur le plan qui passe par la droite *GI*, ce plan étant perpendiculaire au
4v plan du triangle, elle trace une parabole, / et si elle effectue un tracé sur un plan qui passe par la droite *KG*, ce plan étant perpendiculaire au plan du triangle, elle trace une hyperbole. Si on décrit, à partir des deux côtés du triangle engendré à partir du cône en les prolongeant dans la direction du sommet du cône, un autre cône[3] et si on prolonge le plan dans la direction de *G* indéfiniment à l'extérieur du cône jusqu'à ce qu'il coupe l'autre cône, alors elle trace deux sections de position opposée.

On a ainsi montré que si l'angle *CMH* est droit, alors il s'engendre par le tracé du mouvement du côté *CB* sur le plan <passant par> la droite *GH*, un cercle ; si la somme des deux angles *BCS* et *CSL* est plus petite que deux angles droits, alors il s'engendre par le tracé du mouvement de la droite *CL*

[1] Voir Fig. 1.1, 1.2 et 1.3.

[2] Litt. : vers.

[3] Al-Sijzī semble vouloir dire que, en prolongeant les deux côtés du triangle engendré dans le cône par un plan passant par son axe, on décrit un autre cône. C'est une manière un peu rapide de s'exprimer, ces deux droites seront en effet deux génératrices au second cône.

وإذا كان الخط المشترك بين السطح القاطع للمخروط وبين المثلث كخط ز ك، وهو الذي يلقى ضلع المثلث، الذي هو ب جـ، من جهة جـ، إذا أخرجا دائماً، فيكون الفصل المشترك بين ذلك السطح وبين بسيط المخروط يسمّى *القطع الزائد*.

وهذه صورها. /

فقد تبيّن أن المخروط إذا خرج من جهة القاعدة إخراجًا بلا نهاية، فإن قطر الدائرة، أعني ز ح، وقطر القطع الناقص، أعني ز ل، يلحقا خط جـ ب من جهة ب نحو بسيط المخروط، ويكون القطع الناقص والدائرة تامي الإحاطة؛ وخط ز ط، الذي هو قطر القطع المكافئ، لا يلحق خط جـ ب لا من جهة ب ولا من جهة جـ، إذ هما متوازيان؛ وقطر ز ك للقطع الزائد يلحق خط جـ ب نحو جهة جـ، الذي هو رأسه، ⟨ويكون تقاطعهما⟩ خارج المخروط. ٤-و

فإذا عملنا جـ د محوراً، وأدرنا ضلع جـ ب على محور جـ د - بأن نتوهم أن خط جـ ب يتزايد ويتناقص - على بسيط السطح المفروض، وتكون زاوية رأس المخروط، أعني زاوية د جـ ب، على حالتها، ومحورَ جـ د يدور على نفسه، وتوهمنا السطح بلا نهاية، والسطح ⟨الجائز على خط ز ح⟩ قائمًا على سطح المثلث على زوايا قائمة، يحدث بارتسام هذه الحركة محيط دائرة؛ وإذا رسم على السطح الجائز على خط ز ل، ويكون السطح قائمًا على سطح المثلث، يرسم قطعًا ناقصًا. وإذا رسم على السطح الجائز على خط ز ط، ويكون السطح قائمًا على سطح المثلث، رسم قطعًا / مكافئًا. وإذا رسم على السطح الجائز على خط ك ز، ويكون السطح قائمًا على سطح المثلث، يرسم قطعًا زائدًا. وإذا رُسم من ضلعي المثلث الحادث من المخروط بإخراجهما نحو جهة رأس المخروط مخروط آخر، وأخرج السطح من جهة ز بلا نهاية خارج المخروط إلى أن يقطع المخروط الآخر، فيرسم قطعين متقابلي الوضع. ٤-ظ

فقد تبين إذاً أنه إذا كانت زاوية جـ م ح قائمة، فيحدث برسم حركة ضلع جـ ب على سطح خط ز ح دائرة؛ وإذا كانت زاويتا ب جـ س جـ س ل أقلّ من زاويتين قائمتين، يحدث برسم حركة خط جـ ل على السطح الجائز

2 ز ك: و ك – 7 يلحقا: لحق– 8 تامي: تام – 14 جـ ب: جـ د – 17 قائمًا: قائم – 18 قائمًا: قائم – 21 ك ز: قد تقرأ «حـ ر» – 26 فيحدث: يأخذ بالفاء في جواب «إذا» دون ضرورة ويتركها أحيانًا دون سبب، وسنبقى النص على حاله – 27 زاويتا: زاويتي.

sur le plan passant par la droite *GL*, une ellipse; si la somme des deux angles *BCN* et *CNI* est égale à deux angles droits, il s'engendre par la rotation de la droite *CB* sur le plan <passant> par la droite *GNI*, une parabole; si la somme des deux angles *BCO* et *COP* est plus grande que deux droits, il s'engendre par le tracé de la rotation de la droite *CB* sur le plan passant par la droite *GKO*, une hyperbole.

Si nous posons la droite *CD* comme axe du compas et si nous plaçons sur la branche du compas un tube de sorte que la droite *CB* glisse, entre et
5r sort dans le tube, / afin que le tire-ligne soit long ou court et remplace l'autre branche du compas, comme nous l'avons décrit dans notre livre *Sur la construction du compas conique*. Si la position de l'axe *CD* par rapport au plan est selon les cas mentionnés, d'après d'une part la formation de l'angle à l'extrémité de la branche du compas[1] et <d'autre part celle> de l'angle formé à l'extrémité *C* par la branche *CD* et l'autre branche *CB* du compas, il sera possible de tracer les sections mentionnées à l'aide du
5v compas. Voici la représentation du compas conique. /

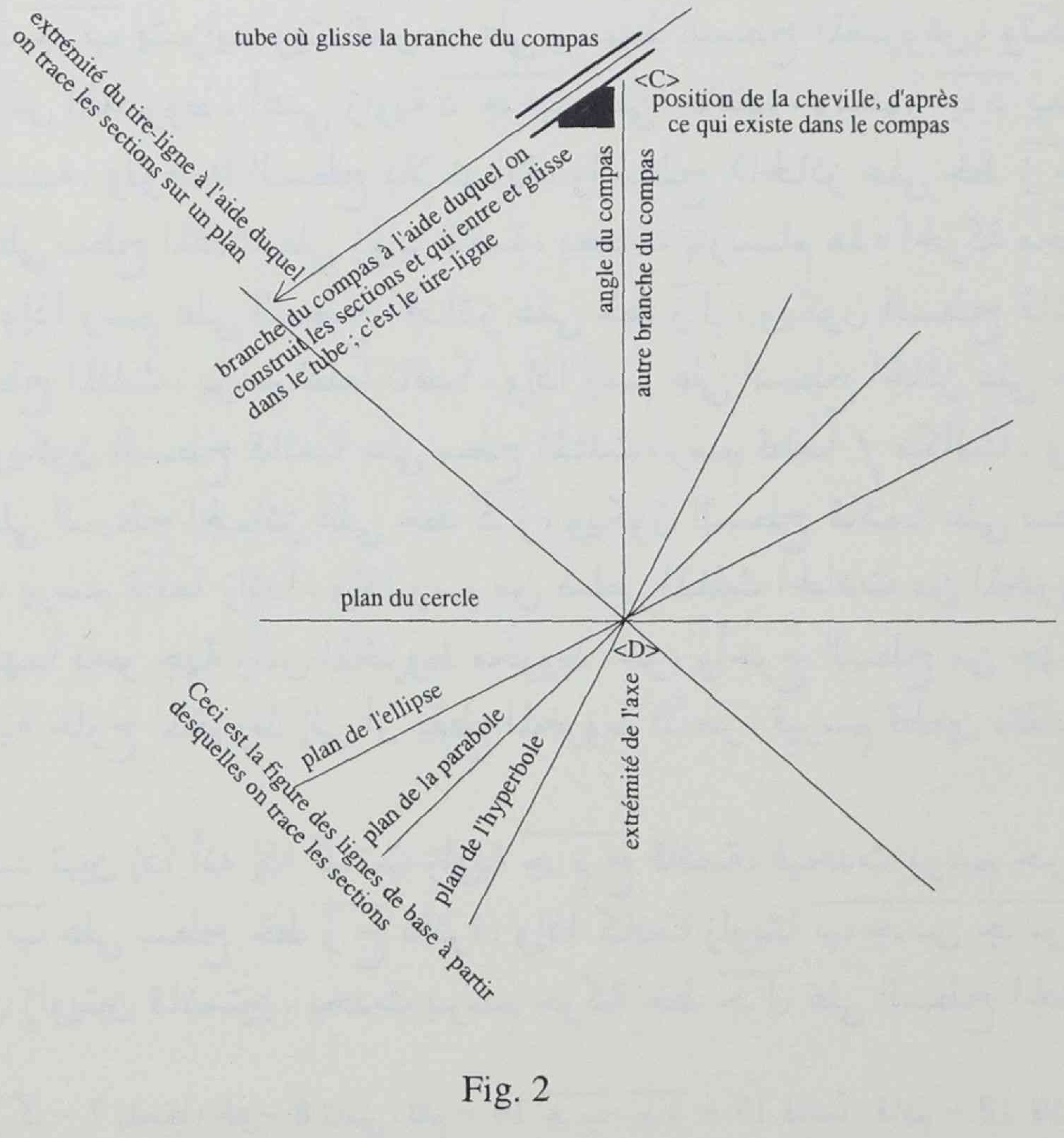
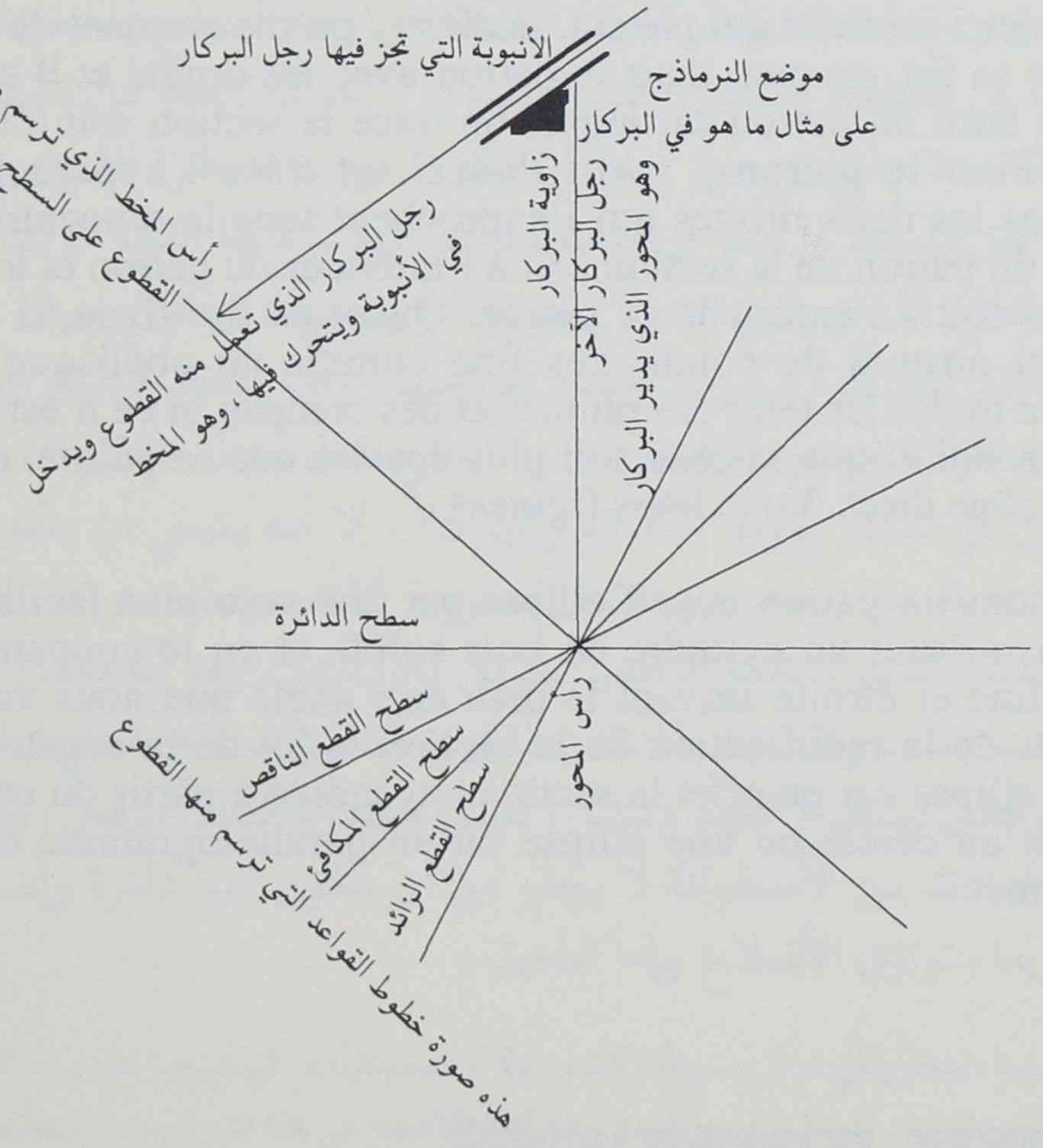


Fig. 2

[1] « Extrémité » désigne ici la pointe. Il s'agit de l'angle que fait l'axe *CD* avec le plan sécant.

على خط ز ل القطع الناقص؛ وإذا كانت زاويتا ب جـ ن جـ ن ط مساويتين لزاويتين قائمتين، فيحدث بإدارة خط جـ ب على السطح الذي على خط ز ن ط القطع المكافئ؛ وإذا كانت زاويتا ب جـ ع جـ ع ف أعظم من قائمتين، فيحدث برسم إدارة خط جـ ب على السطح الذي على خط ز كـ ع القطع الزائد.

فإذا جعلنا خط جـ د محور البركار ⟨ووضعنا على رجل البركار أنبوبة
على⟩ أن يحرك في الأنبوبة ويخرج / منها ويدخل فيها خط جـ ب، حتى ٥-و
يصير المخط طويلاً أو قصيراً ينوب عن الرجل الآخر من البركار، على ما
وصفنا في كتابنا في *عمل البركار المخروطي*. وإذا كان وضع محور جـ د
⟨على⟩ السطح على هذه الأوضاع المذكورة من إحداث الزاوية الكائنة على
رأس رجل البركار والزاوية الكائنة على طرف جـ الحادثة بين رجل جـ د
ورجل جـ ب الآخر من البركار، تهيأ رسم القطوع المذكورة بهذا البركار؛
وهذا مثال البركار المخروطي: / ٥-ظ



1 على خط: غير واضحة – 2 بإدارة: ادارة – 7 أن: بان – 8 الرجل: التذكير جائز لأنه مجاز.

Construction des patrons pour tracer les sections

Une autre voie pour trouver le tracé des sections coniques est <l'usage> des patrons, c'est-à-dire que nous construisons un cône cylindrique[1] en bois solide, d'une certaine grandeur, par tournage avec une extrême régularité. Nous le coupons ensuite à l'aide d'une scie fine et large pour avoir une hyperbole, ou une parabole ou une ellipse telle que l'endroit de la section soit plan et régulier[2].

Nous construisons ensuite à partir d'elle[3], de la même grandeur et de la même forme, des patrons en bois ou en cuivre ou en fer. Il faut qu'il y ait sur l'une des deux faces du patron une protubérance qui le dépasse, comme la forme des bords des patrons des papetiers pour que la teinture ne colle pas sur la limite du patron et ne coule pas de celui-ci sur la face du papier ou autre.

Si le patron est pour l'ellipse, il faut que le bord du patron qui suit la section soit en son intérieur pour qu'on puisse tenir le patron lorsqu'on fait tourner le tire-ligne autour de la section, car le cas de l'ellipse est dans le même état que le cas du cercle, c'est pourquoi il ne faut pas qu'on arrête la rotation du tire-ligne, à partir du moment où il se met en mouvement jusqu'à la fin, sur la surface du plan sur lequel on trace.

6r Dans les deux sections qui restent, le début / du mouvement du tire-ligne se sépare de sa fin, on peut tenir le patron avec les doigts et il est permis aussi que le bord du patron sur lequel on trace la section soit à l'intérieur du patron. Pour le patron à partir duquel on trace l'hyperbole qui ne rencontre pas les deux droites qui l'approchent sans la rencontrer, il faut que le bord du patron de la section soit à l'intérieur du patron et le bord des deux droites soit à l'extérieur du patron. Quant au tire-ligne, il faut qu'il soit en acier arrondi de pointe très fine comme un obélisque fendu, à l'exemple de toutes les têtes des plumes et des compas, si ce n'est qu'il faut qu'il soit arrondi et que sa base soit plus épaisse que sa pointe, d'après la figure d'un cône droit. Voici leurs figures[4]. /

7r Construisons un patron pour l'ellipse par une voie plus facile, c'est-à-dire en construisant un cylindre en bois solide et en le coupant à l'aide d'une scie fine et étroite suivant le plan de l'angle que nous voulons — nous faisons de la rectification de la section la loi de la construction du patron de l'ellipse car en effet la section engendrée à partir du cylindre ne peut être qu'un cercle ou une ellipse ou un parallélogramme ou une de leurs portions.

[1] Cône cylindrique : par opposition à pyramide.

[2] Il s'agit d'une coupure cylindrique, c'est-à-dire d'une section non polygonale.

[3] « elle » désigne la section plane obtenue.

[4] Voir les figures aux pages suivantes.

عمل مساطر لرسم القطوع

وطريق آخر لوجود رسم القطوع المخروطية بالمساطر: وهو أنا نعمل مخروطاً أسطوانيًا من خشب صلب مقتدر القدّ بالخرط بغاية ما أمكن استواؤه. ثم نقطعه بمِنشار دقيق عريض قطعًا زائداً أو مكافئًا أو ناقصًا، يكون موضع القطع منه بسيطاً مستويًا.

ثم نعمل منه بمقدار قدّه وهيئته مساطر من خشب أو صفر أو حديد. وينبغي أن يكون على أحد وجهي المسطرة زيادة ناتئة عنها كهيئة حرف مساطر الوراقين لئلا يلزق الصبغ على حاشية المسطرة ويسيل منها إلى وجه الكاغد أو غيره.

فإن كان المسطرة للقطع الناقص، ينبغي أن يكون حرف المسطرة الذي يلي القطع داخلها، حتى يتهيأ أخذ المسطرة عند إدارة المخط حول القطع، لأن حال القطع الناقص بمنزلة حال الدائرة؛ وذلك أنه ينبغي ألا تقطع إدارة المخط من وقت ابتدائه بالحركة إلى انتهائه من وجه السطح المخطوط عليه.

فأما في القطعين الباقيين، فينقطع ابتداء / حركة المخط من انتهائه، وقد ٦-و تهيأ أخذه بالأصابع، ويجوز أيضًا أن يكون حرف المسطرة الذي يُرسم عليه القطع داخل المسطرة. فأما في المسطرة التي يرسم منها القطع الزائد الذي لا يلقاه الخطان اللذان يقربانه ولا يلقيانه، فينبغي أن يكون حرف مسطرة القطع داخل المسطرة وحرف الخطين خارجها. وأما المخط فينبغي أن يكون من حديد فولاذ مدور دقيق الرأس جداً على مثال مِسلّة مشقوقة، على مثل ما يكون في سائر رؤوس الأقلام والبركار، إلا أنه ينبغي أن يكون مدور وقاعدته أغلظ من رأسه، على شكل المخروط القائم؛ وهذه صورها. /

ولنعمل مسطرة للقطع الناقص بطريق آخر سهل، وهو أنا نعمل أسطوانة ٧-و من خشب صلب ونقطعها بالمنشار اللطيف الدقيق بسطح <على> أي زاوية أردنا، ونجعل تسطيح القطع دستوراً لعمل مسطرة القطع الناقص؛ وذلك لأن القطع الحادث من الأسطوانة لا يخلو من أن يكون إما دائرة وإما قطعًا ناقصًا وإما متوازي الأضلاع وإما قِطَعها.

2 المخروطية: المخروطي – 5 بسيطًا: كتب أولاً «اسطوانيًا»، ثم ضرب عليها بالقلم – 14 انتهائه: يعني انتهاء المخط من حركته، وربما كان الأفصح في هذا التركيب «انتهائها» – 16 المسطرة (الثاثية): المسطر / منها: الأفصح «بها» – 19 مشقوقة: مسقوق – 22 بطريق: طريق – 25 يخلو: يخلوا – 26-25 قطعًا ناقصًا: قطع ناقص.

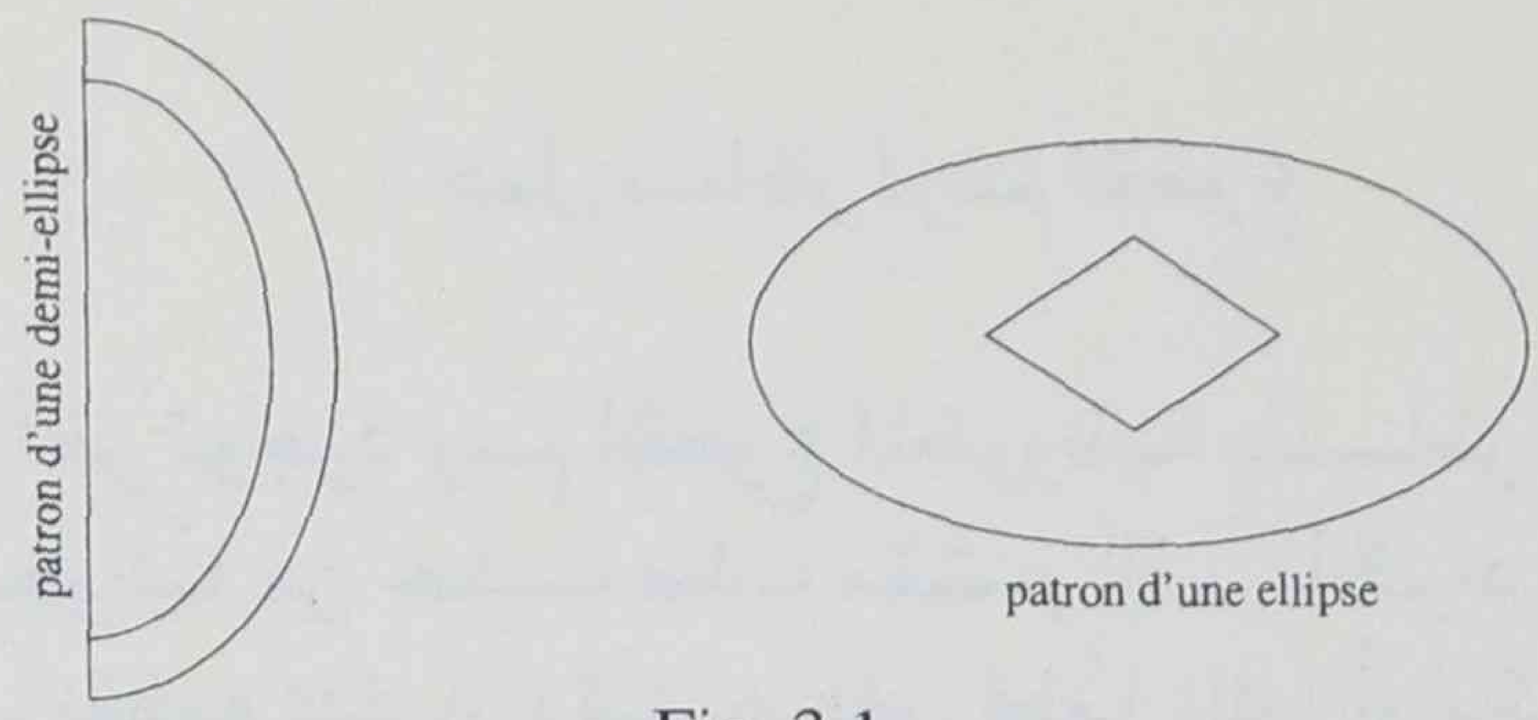


Fig. 3.1

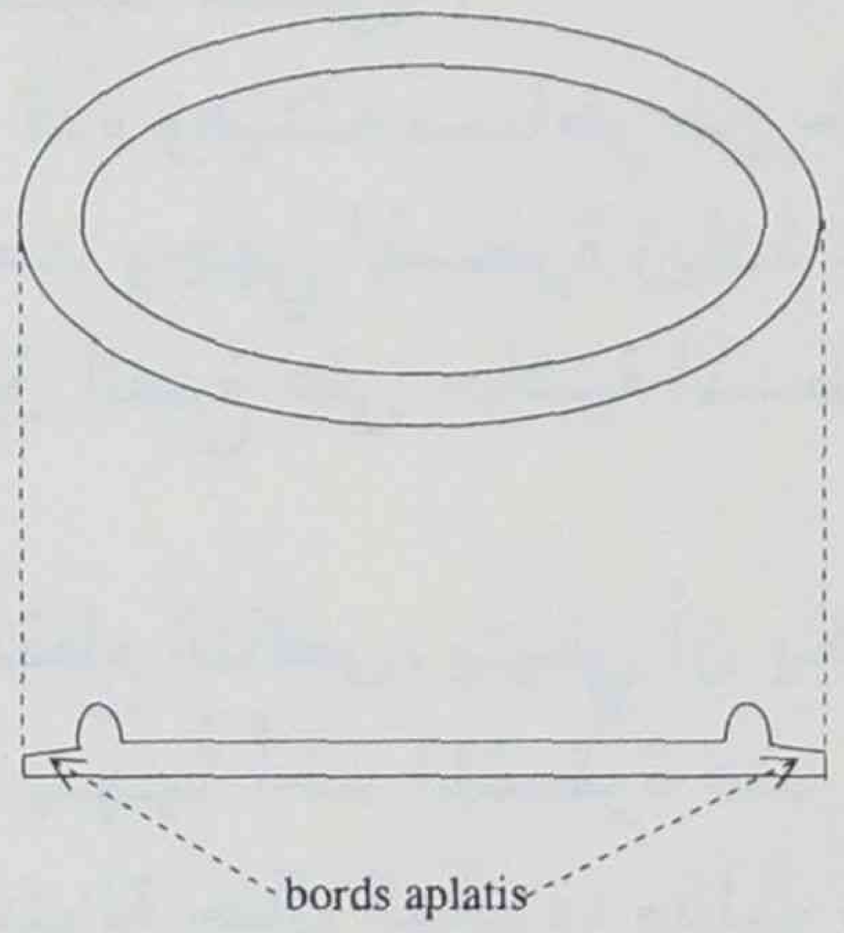


Fig. 3.2

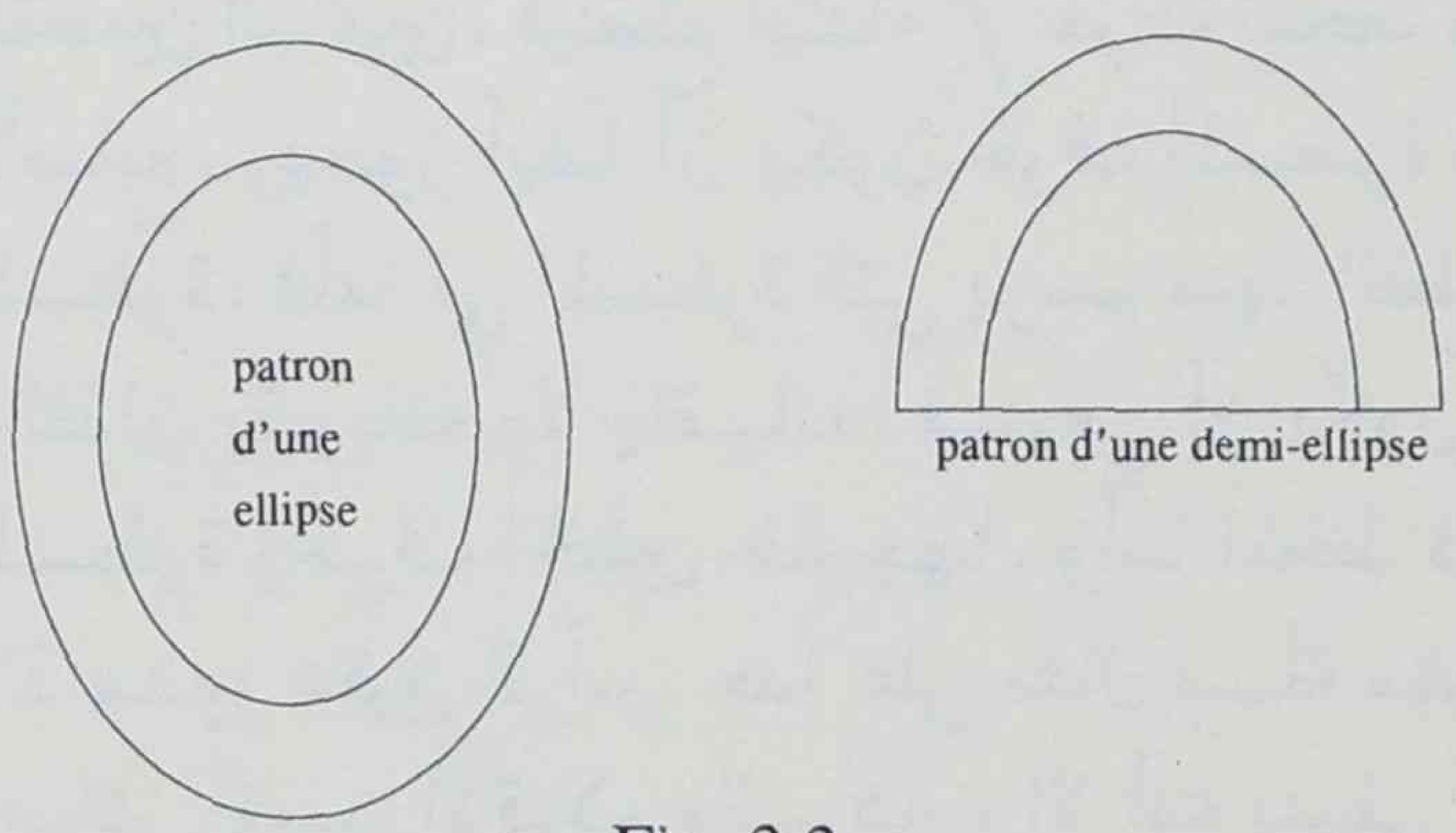


Fig. 3.3

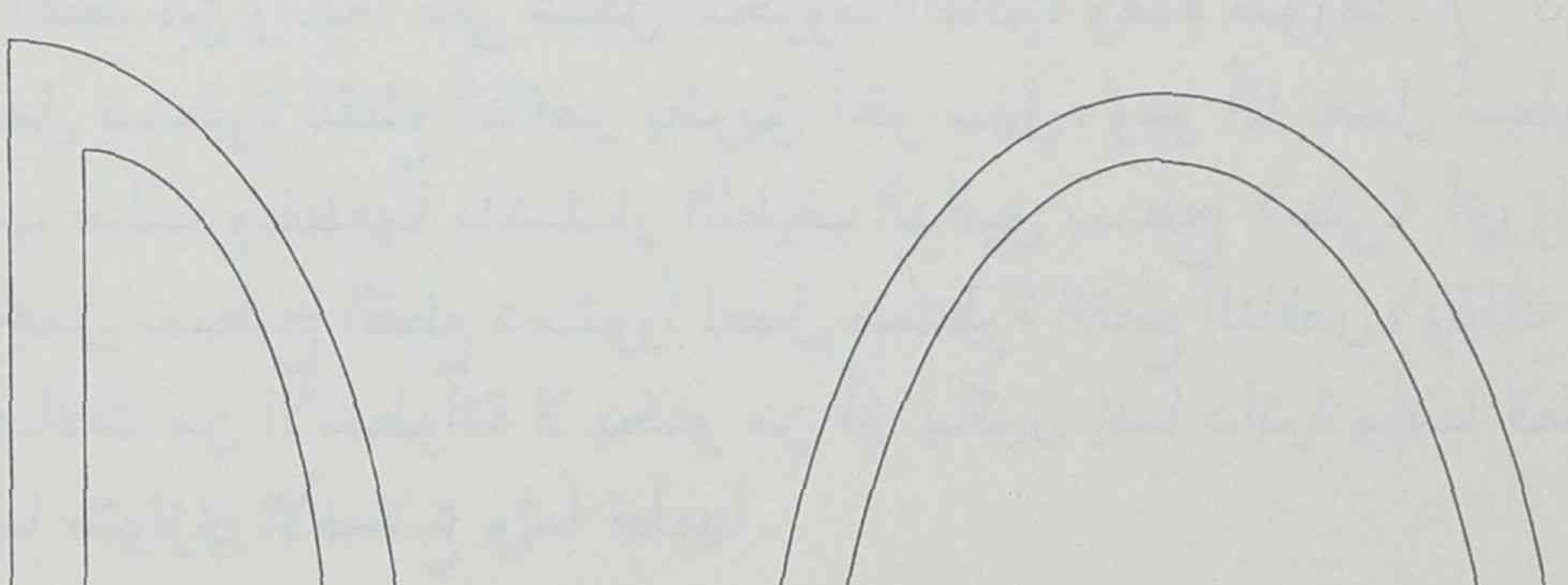
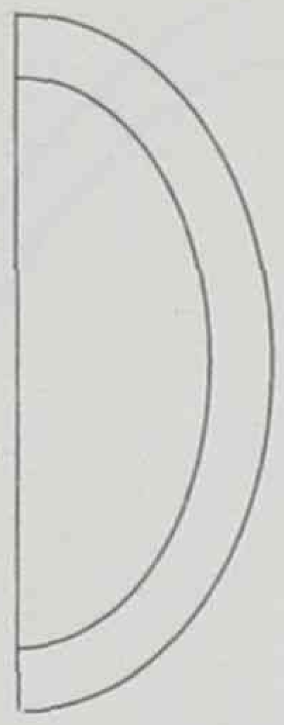
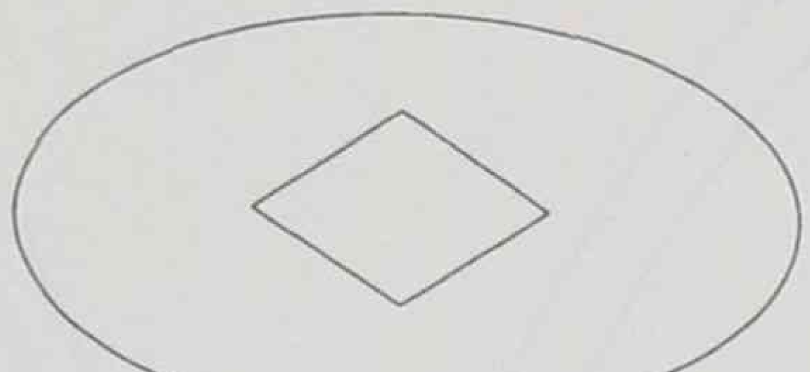


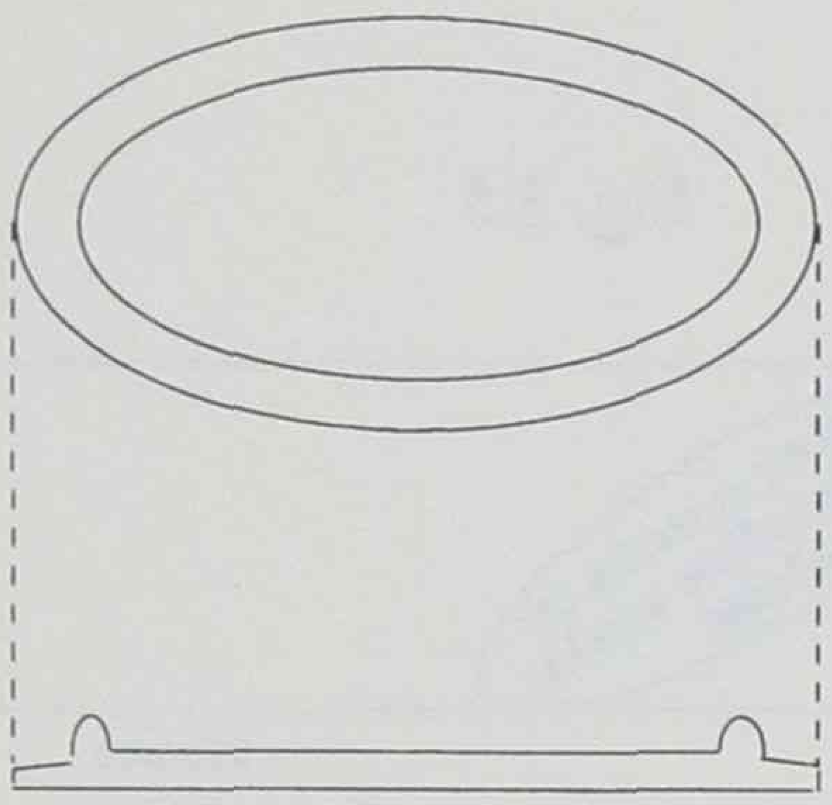
Fig. 3.4

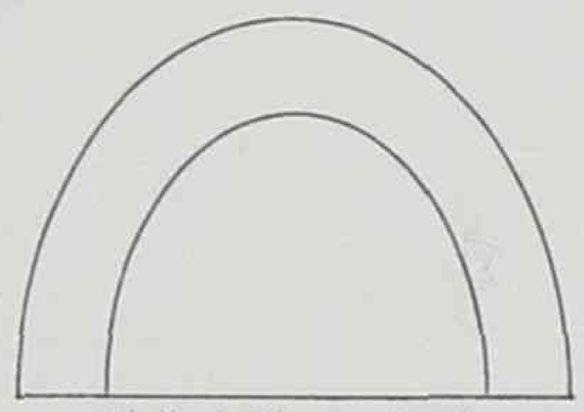
مسطرة لنصف القطع الناقص



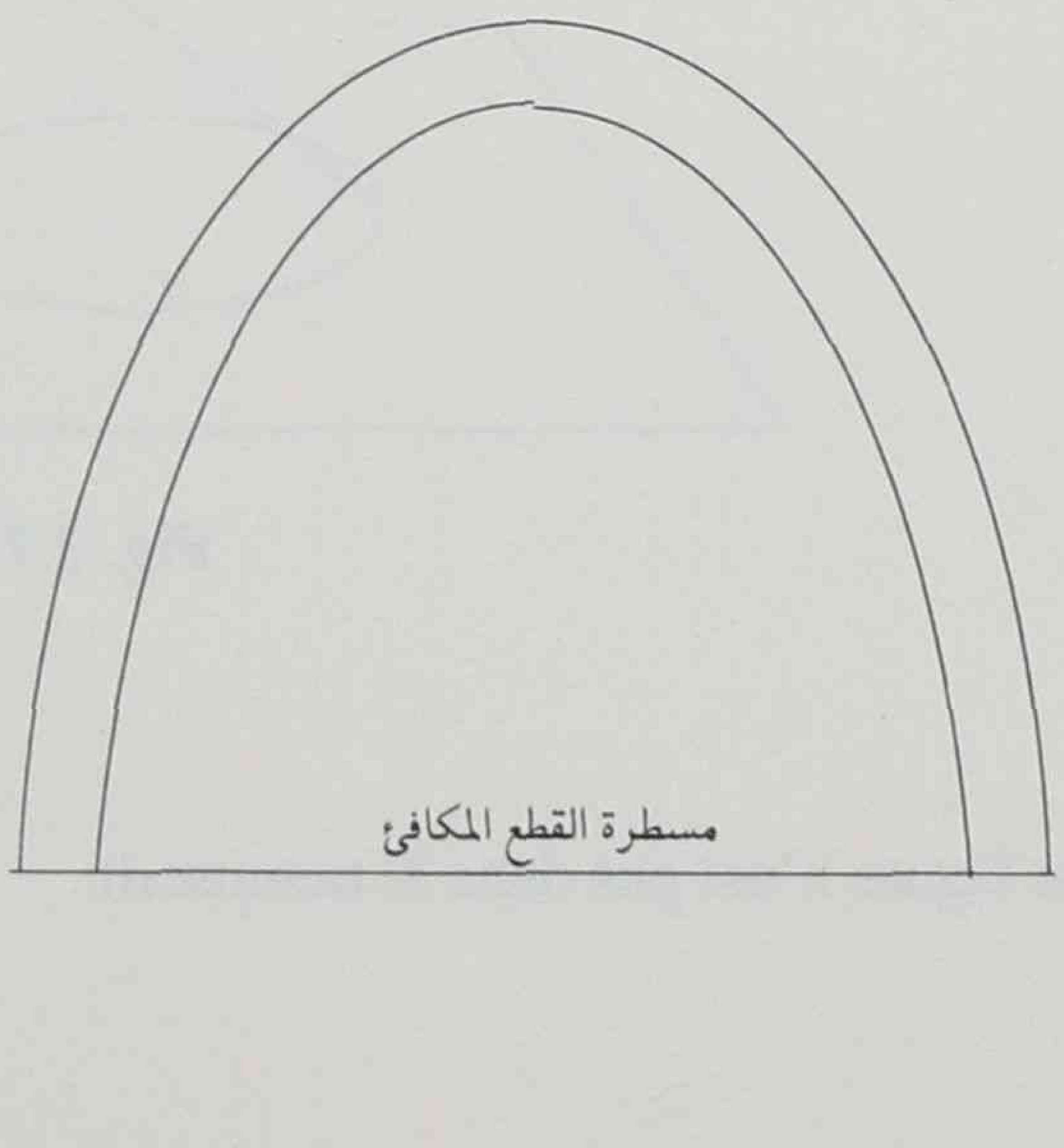


مسطرة القطع الناقص





مسطرة لنصف القطع الناقص



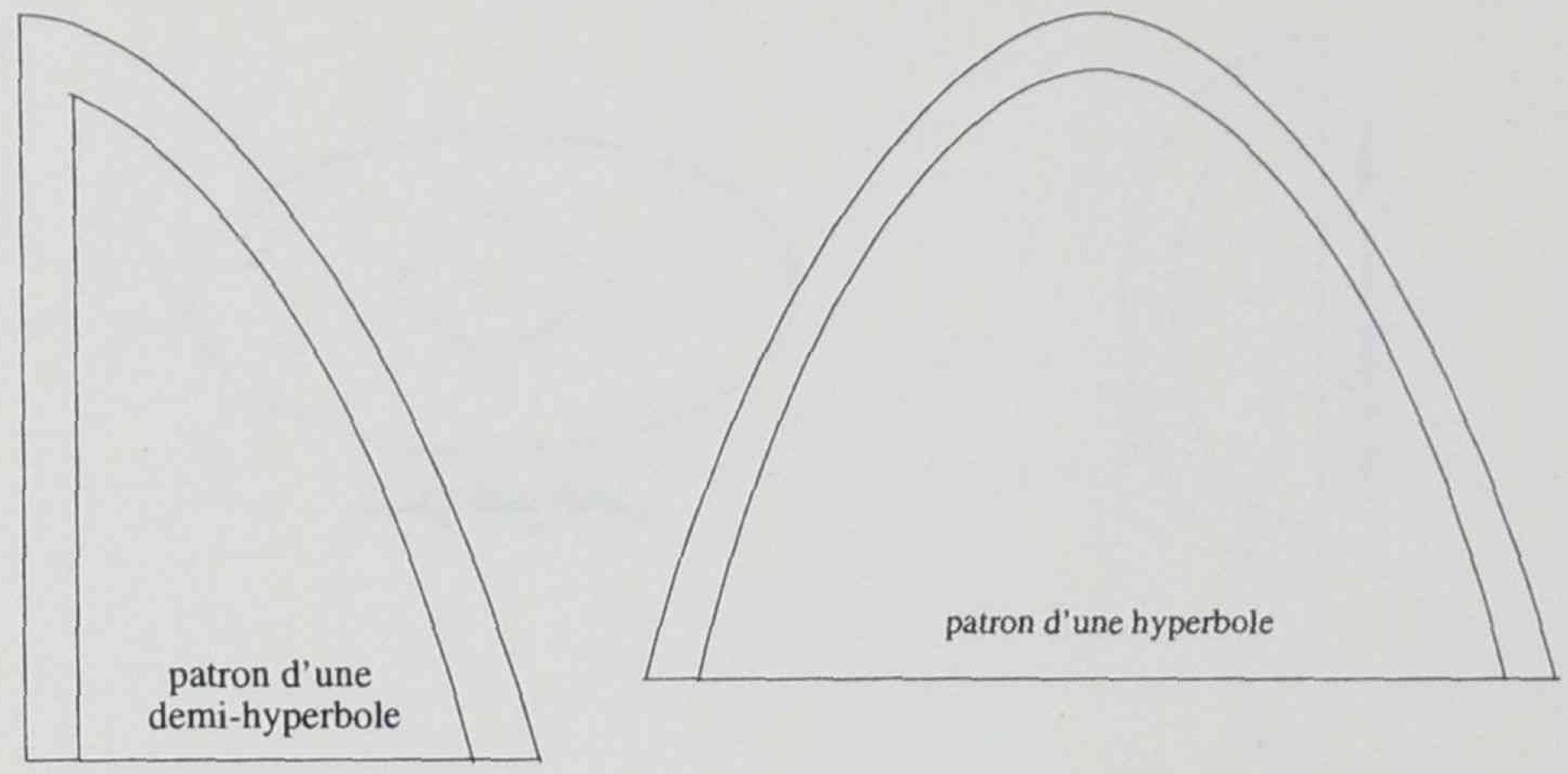


Fig. 3.5

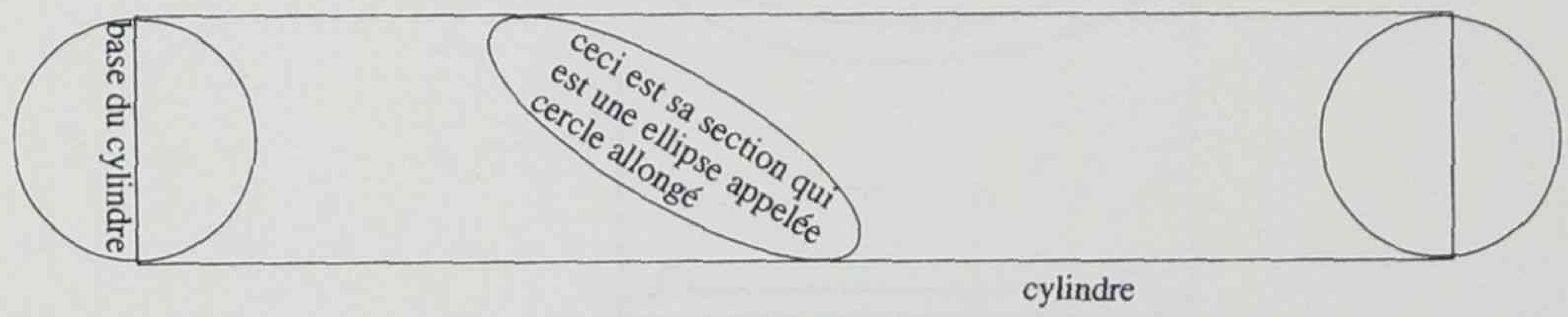


Fig. 3.6

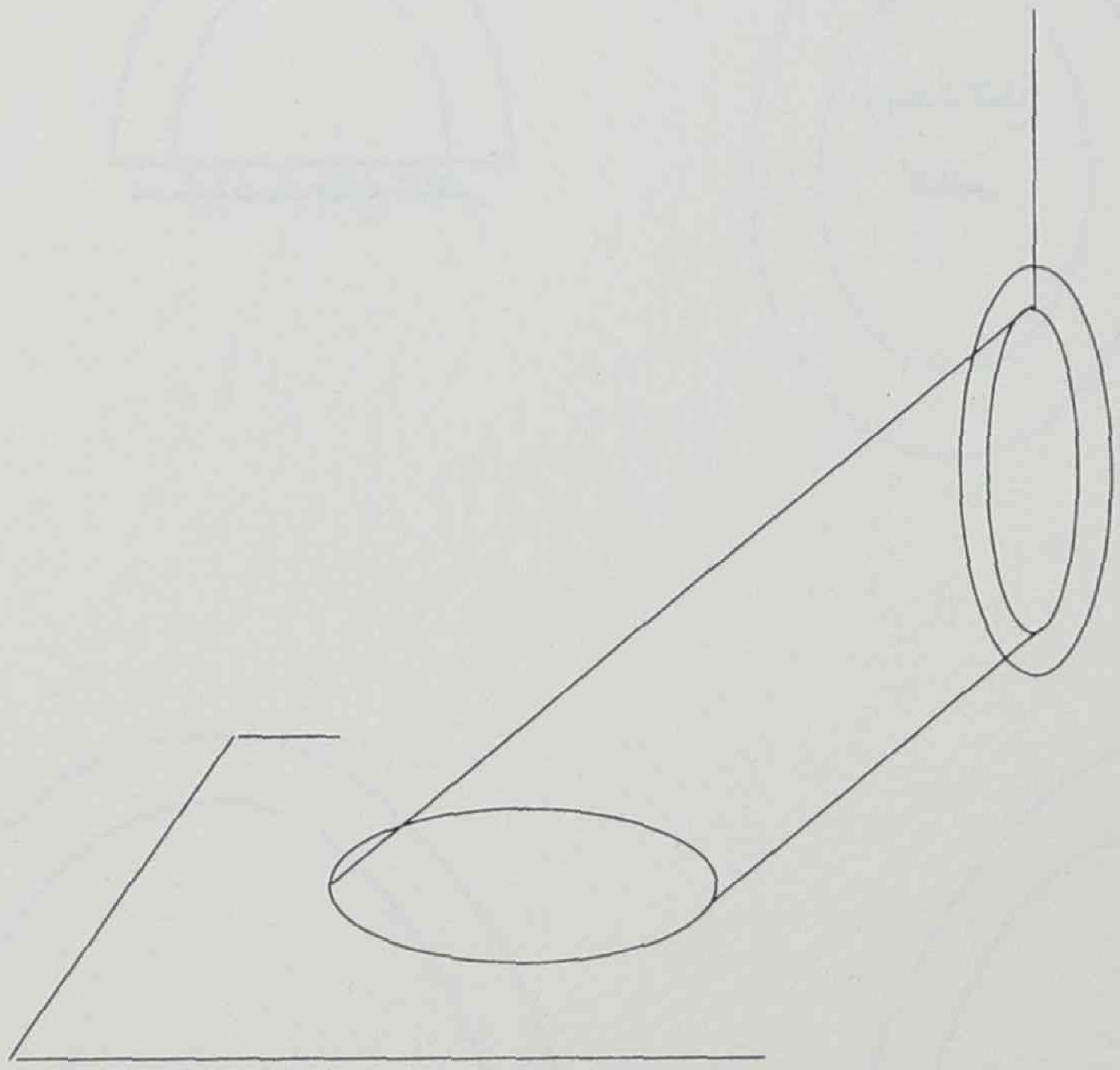
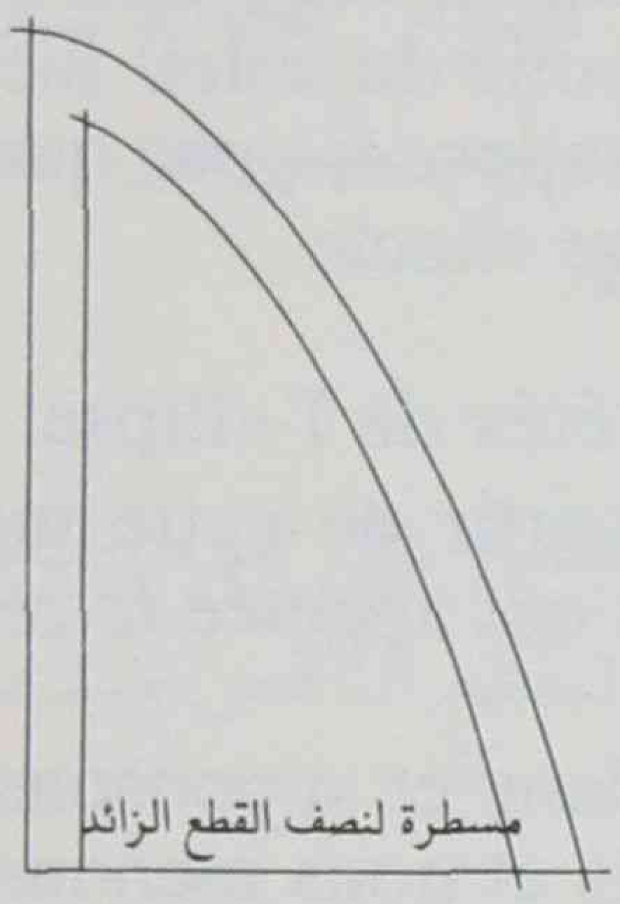
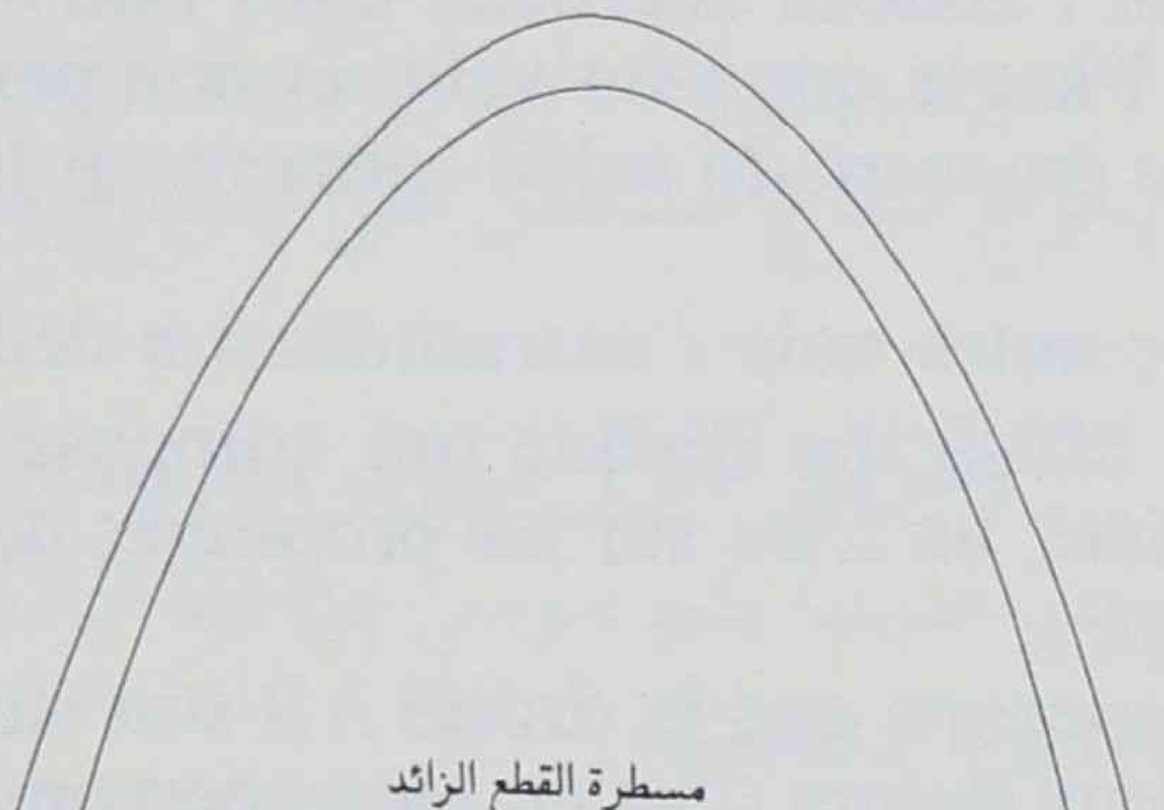
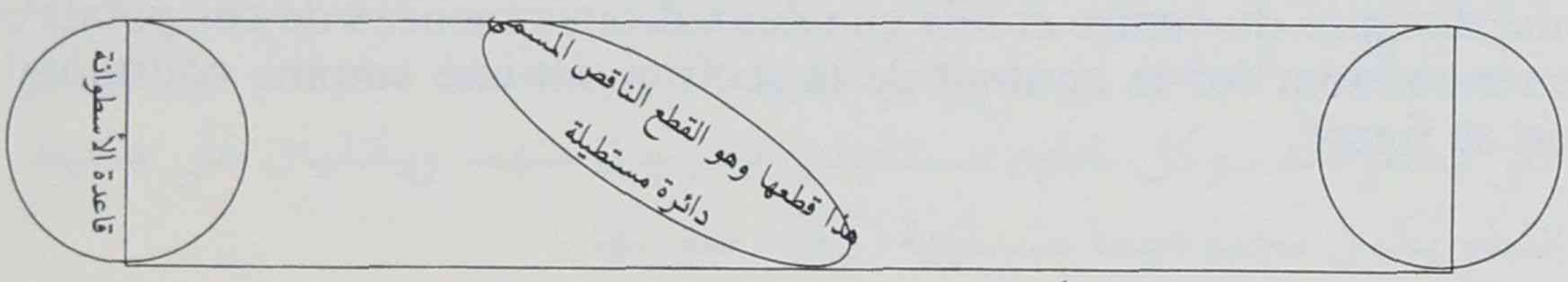


Fig. 3.7[1]

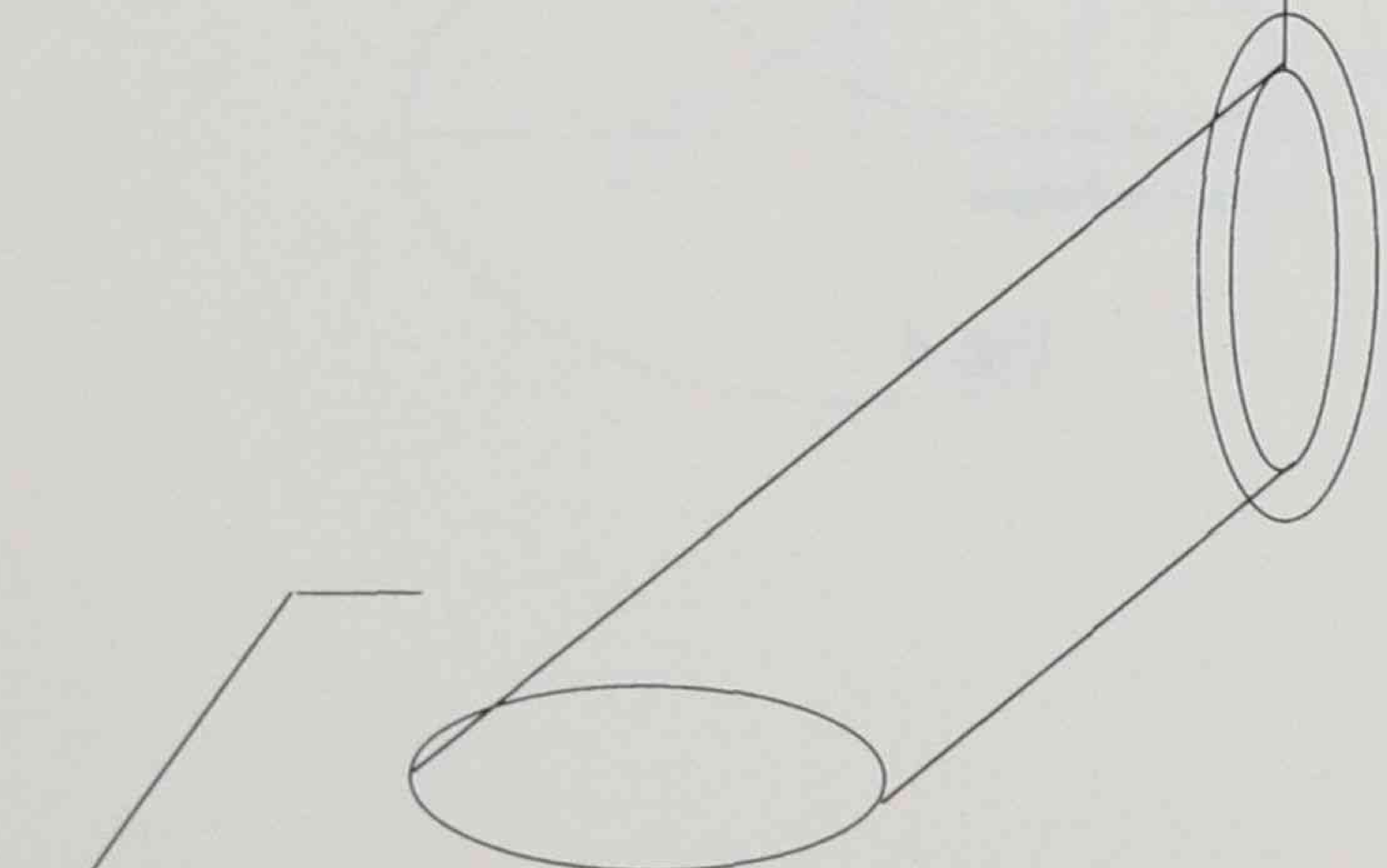
[1] Cette figure n'est pas dans le manuscrit.


مسطرة لنصف القطع الزائد


مسطرة القطع الزائد


قاعدة الأسطوانة
هذا قطعها وهو القطع الناقص المسمى
دائرة مستطيلة

الأسطوانة



On peut construire le patron d'une ellipse en construisant un anneau par tournage, en construisant une surface plane extrêmement régulière et en plaçant l'anneau accroché dans l'air vis-à-vis des rayons du soleil incliné selon l'angle que l'on veut, et non parallèle au plan supposé, pour que les rayons émanant du soleil forment sur le plan une ellipse exacte.

7v Une autre voie / extraordinaire déduite des propriétés de l'ellipse. Les Banū Mūsā ibn Shākir ont composé et élaboré, à partir de cette même propriété, un livre sur les propriétés de l'ellipse qu'ils ont appelée *le cercle allongé*.

Supposons que la droite AB soit sur une surface plane et supposons sur elle deux points C et D. Nous perçons ces deux points et nous menons par eux un fil de soie très fin d'une grandeur donnée, nous le passons dans le chas d'une aiguille, nous faisons tourner l'aiguille selon la tension du fil et nous traçons sur le plan à partir du sommet où se trouve le chas de l'aiguille une ligne convexe qui donne l'ellipse exacte, car l'une des propriétés de l'ellipse est que sur son plus grand diamètre il y a deux points à la même distance du centre et tels que deux droites menées de ces points et qui se rencontrent sur le contour de la section ont une somme constante[1]. Ceci est sa figure.

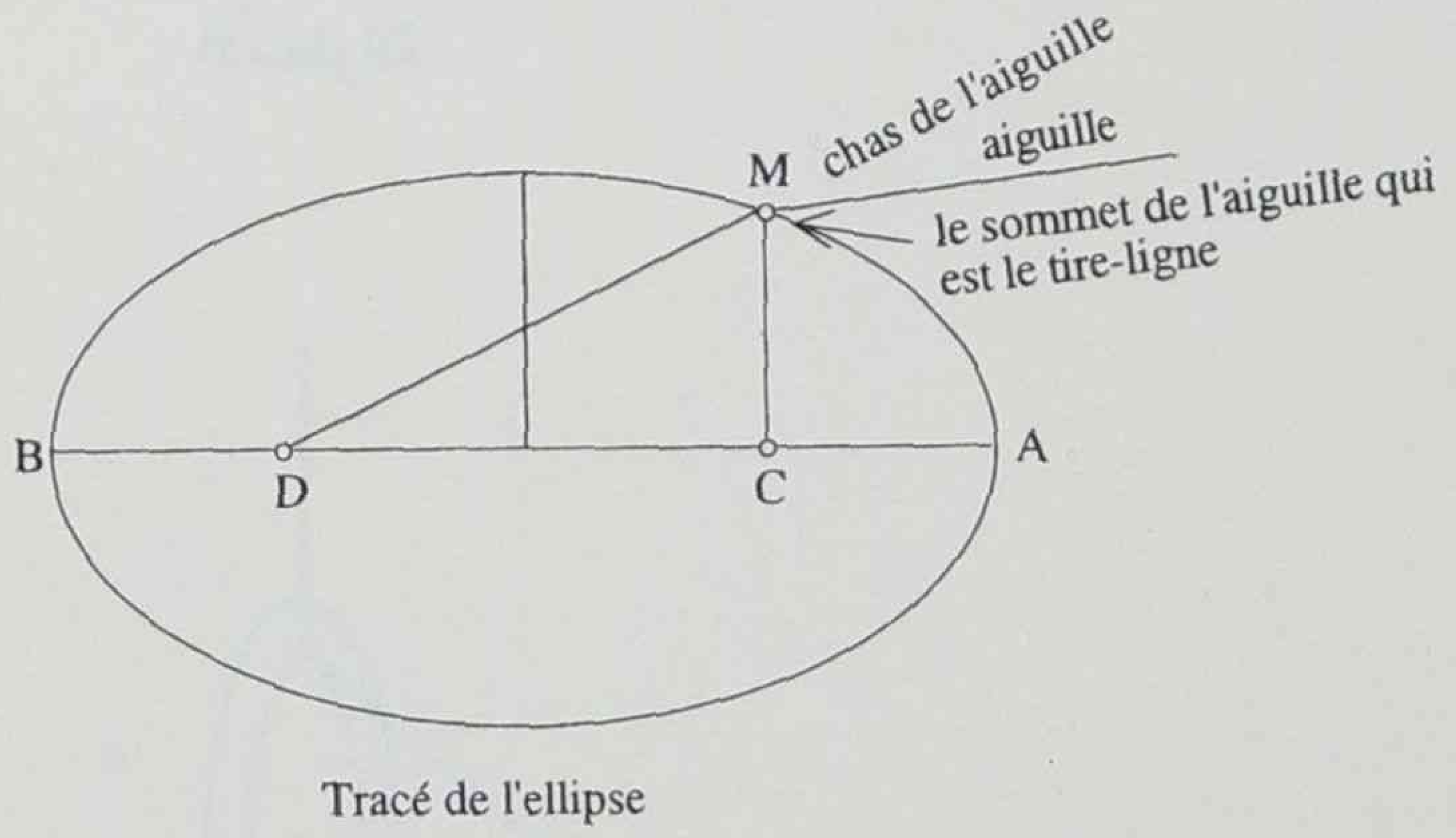


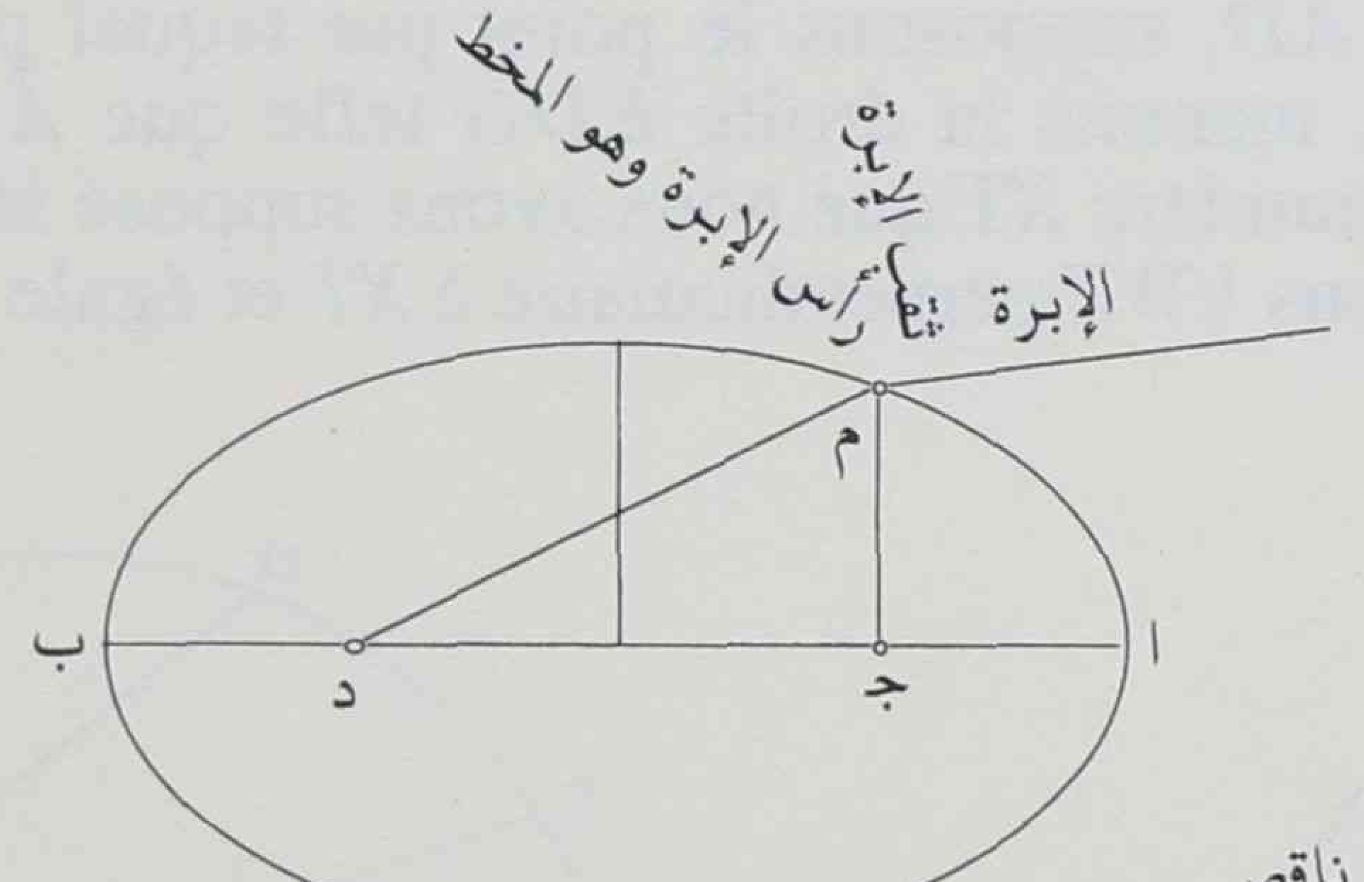
Fig. 4

[1] Litt. : égale.

وقد يمكن عمل المسطرة للقطع الناقص بأن نعمل حلقة بالخرط، وعملُ سطحًا مستويًا غاية الاستواء ونَضع الحلقة معلقة في الهواء بحذاء شعاع الشمس موربة على أي زاوية أردنا، غير موازية للسطح المفروض، حتى يخرج شعاع الشمس على السطح قطعًا ناقصًا بالحقيقة.

وطريق آخر/ غريب مستخرج من خواصه. وعمل على هذه الخاصة ٧-ظ وبنى عليها بنو موسى بن شاكر كتابًا في خواص القطع الناقص وسموه *الدائرة المستطيلة*.

وهو أنا نفرض خط $\overline{\text{اب}}$ على سطح مستوٍ، ونفرض عليه نقطتي $\overline{\text{جـ}}$ $\overline{\text{د}}$، ونثقبهما ونخرج منهما خيطًا من إبريسم دقيقًا جداً بمقدار مفروض، ونجعله في ثُقْبة الإبرة، وتدار الإبرة بامتداد الخيط، ونرسم من الرأس الذي فيه ثقبة الإبرة على السطح خطًا محدبًا يخرج القطع الناقص الحقيقي؛ وذلك لأن من خاصة القطع الناقص أن يقع على قطره الأطول نقطتان يكونان من المركز على بُعد واحد، وكل خطين مستقيمين يخرجان منهما ويلتقيان على محيط القطع يكون مجموعهما متساوية، وهذه صورتها.



رسم قطع ناقص

2 ونَضَع: ونوضع، لا يحتملها السياق، فهي مشتقة من وَضُعَ، يَوْضُعُ بمعنى الضِعَة – 6 بن: ابن – 8 نقطتي: نقطتا – 9 خيطًا: خرطًا / دقيقًا: دقيق – 10 من الرأس: مكررة – 12 نقطتان: نقطتين – 14 متساوية: هذا التعبير ركيك، والأصح أن يقال «ويكون مجموعهما مساويًا لمجموع كل خطين آخرين مثلهما».

Tracé des sections coniques par points

8r / Il reste maintenant à tracer les sections d'après leurs propriétés par une autre voie, c'est-à-dire en traçant des droites rapprochées et en joignant les points qui sont à leurs extrémités par des lignes qui engendrent donc la figure de la section. Les mathématiciens astronomes utilisent cette voie dans leurs constructions des cadrans solaires plans engendrés par le tracé du mouvement de l'ombre du stylet suivant les points des heures et de leurs parties et en procédant pour les deux sections opposées à partir de l'extrémité des directions des heures et de leurs ombres aux débuts des signes du zodiaque peut-être construisent-ils seulement pour les débuts des deux solstices et il faut préparer pour construire cela des patrons pour les latitudes données.

Certains anciens et certains modernes ont aussi poursuivi cette voie dans leurs constructions et également dans le tracé des *muqanṭarāt* et des directions à partir des ellipses dans la plaque de l'astrolabe plan. Abū ʿAbd Allāh Ḥabash a composé un livre utile sur l'art de l'astrolabe plan dans lequel il a montré comment cela est possible par des démonstrations géométriques. La voie pour déterminer le principe des lignes sur les extrémités desquelles les courbes sont tracées <à partir> du cercle.

Commençons d'abord par l'hyperbole qui ne rencontre pas deux droites données.

8v Supposons / les deux droites AB et AC. Partageons l'angle BAC en deux moitiés par la droite AD, supposons le point par lequel passe la section cherchée le point D, menons la droite EDG telle que AE égale AG et traçons un cercle de diamètre XT que nous avons supposé la base de la section[1] ; soit XFT. Menons VWZ perpendiculaire à XT et égale à la droite

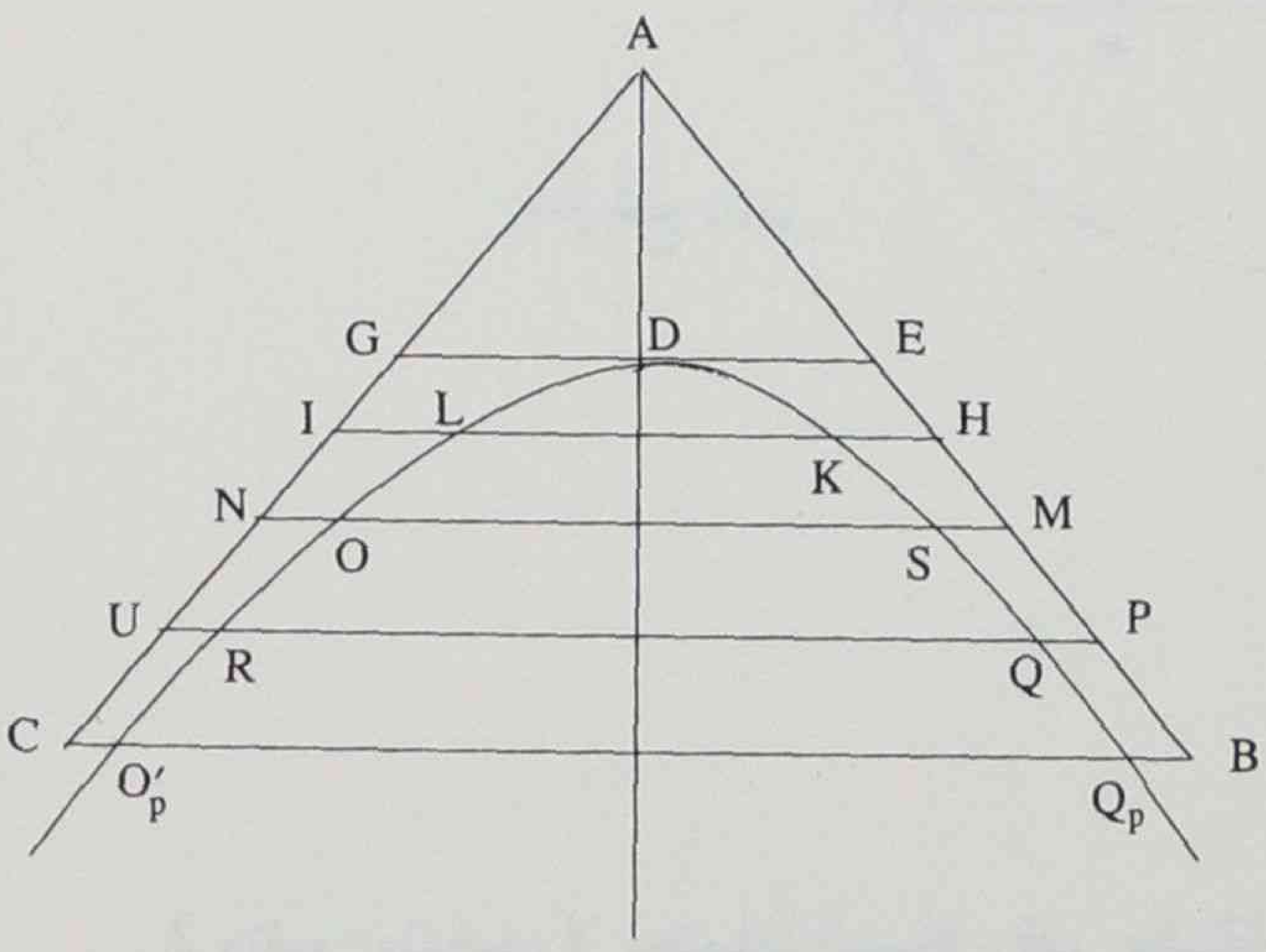


Fig. 5

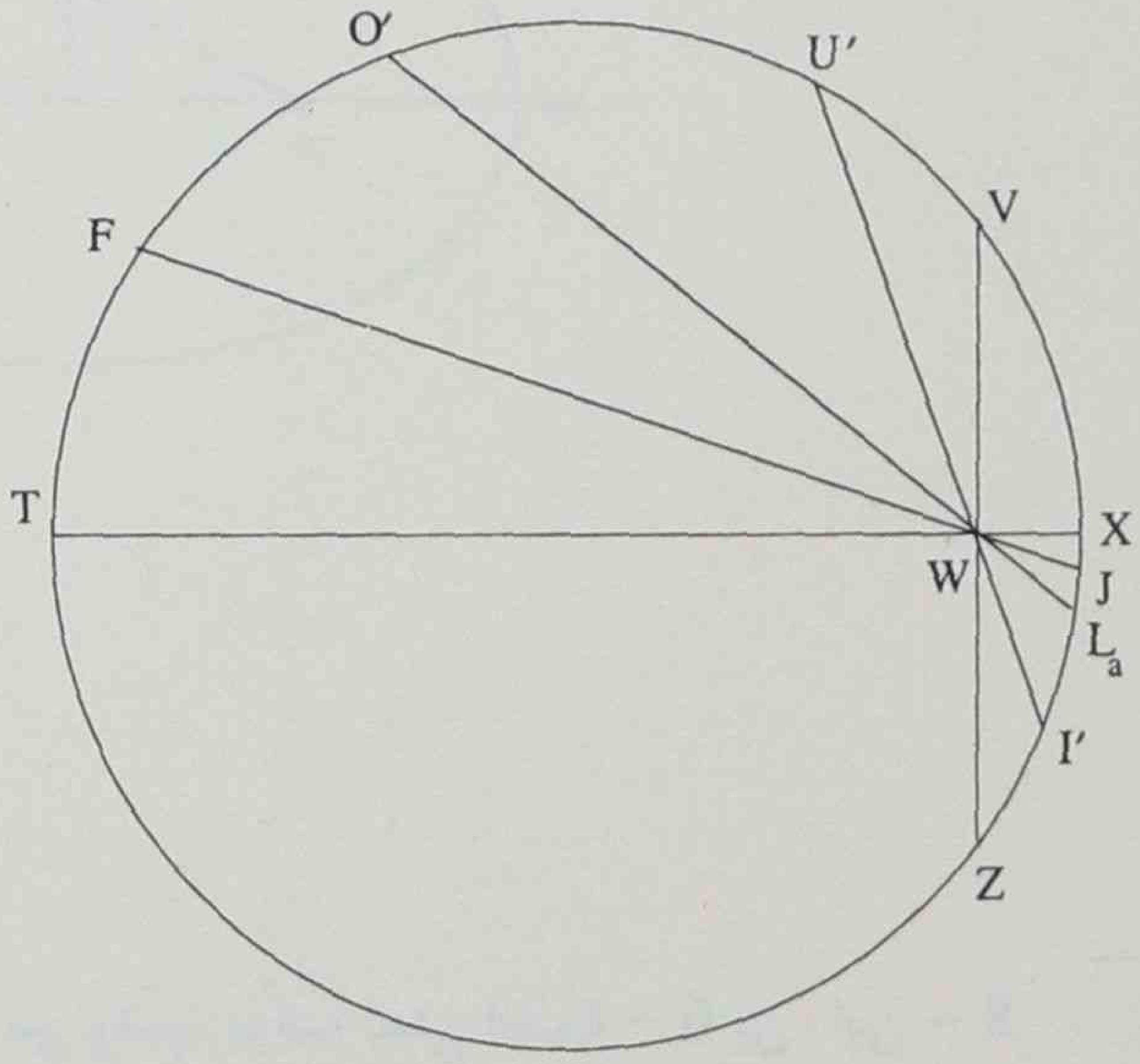


Fig. 6

[1] $XT = BC$, BC est la base du triangle ABC dans lequel se trouve l'arc d'hyperbole que l'on veut construire.

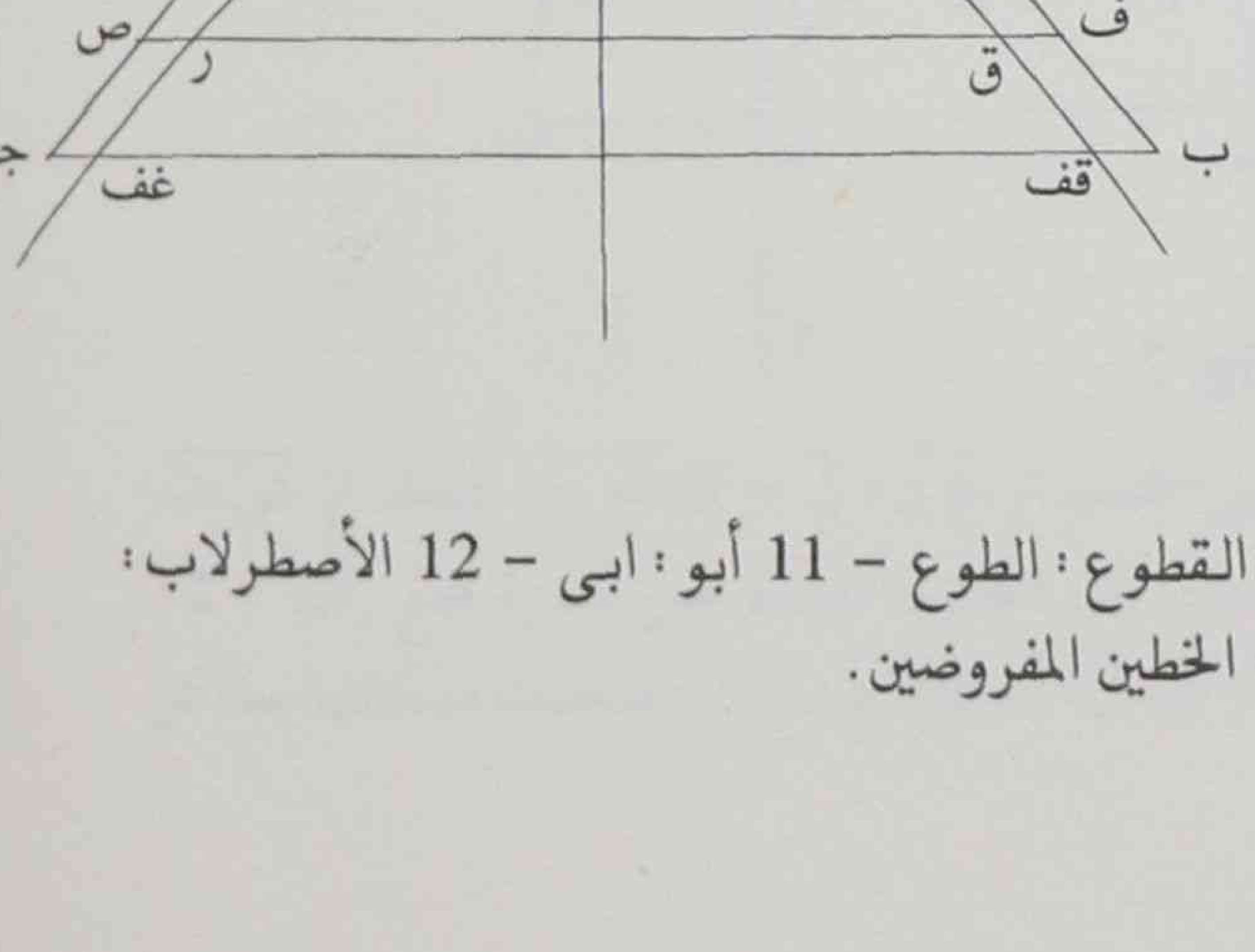
‹رسم القطوع بالنقط›

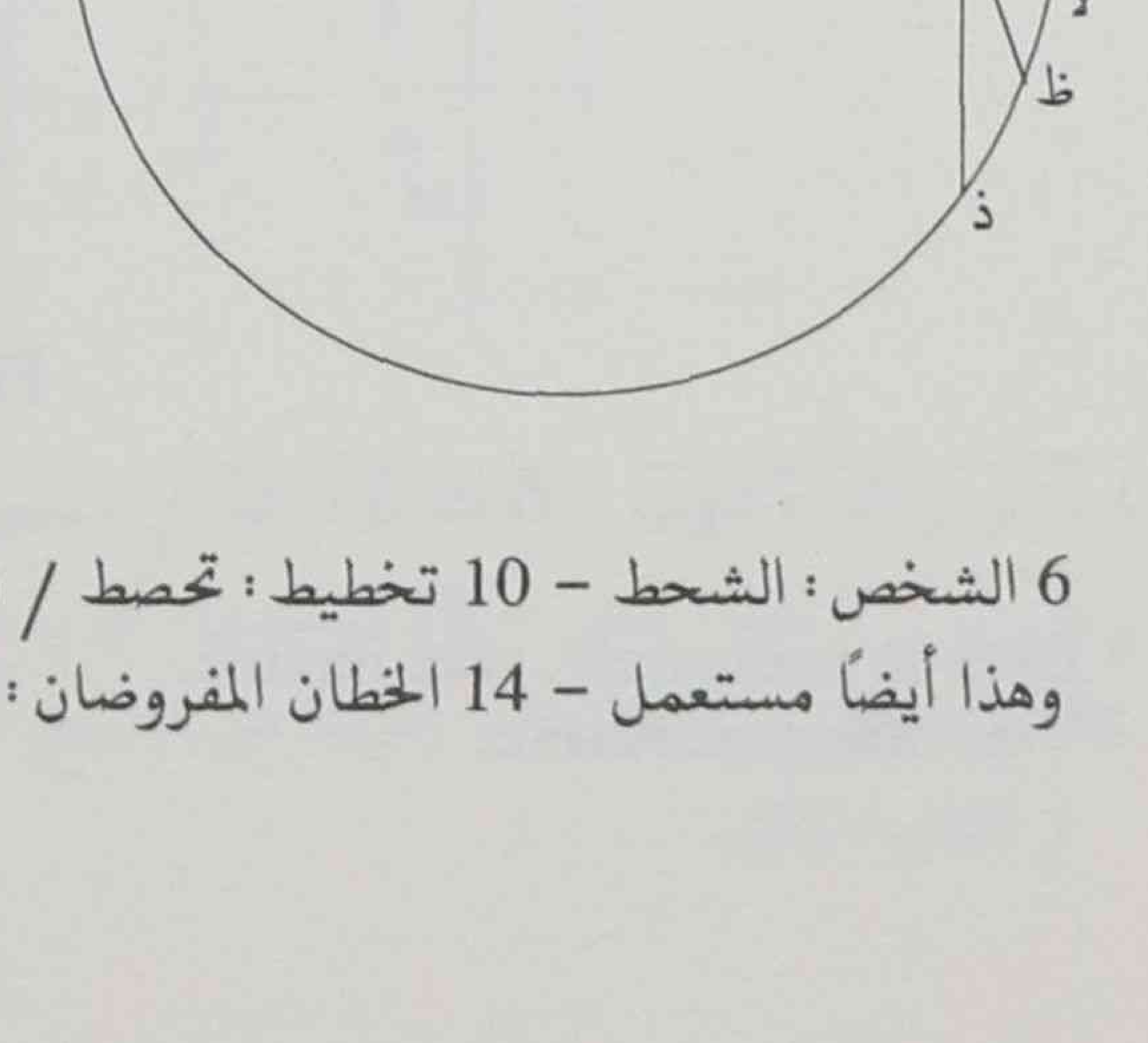
/ وقد بقي الآن رسم القطوع من جهة خواصها بطريق آخر: وهو أن ٨-و نخط خطوطًا متقاربة، ونوصل بالنقط التي على أطرافها بخطوط، فتحدث من ذلك صورة القطع. وأصحاب علم التعاليم من أهل التنجيم يستعملون هذا الطريق في أعمالهم في الرخامات المبسوطة التي تحدث من رسم حركة ظل الشخص على نقط الساعات وأجزائها في القطعين المتقابلين من طرف سموت الساعات وأظلالها في أوائل البروج، وربما يعملون أيضًا لأوائل المنقلبين فقط، ويتهيأ أن نعمل لذلك مساطر للعروض المفروضة.

وقد سلك هذا الطريق بعض القدماء والمحدثين أيضًا في أعمالهم، وكذلك تخطيط المقنطرات والسموت من القطوع الناقصة في صفيحة الأسطرلاب المسطح. وصنف أبو عبد الله حبش كتابًا مفيدًا في صنعة الأصطرلاب المسطح وبيّن فيه كيفية ذلك بالبراهين الهندسية. وطريق استخراج أصل الخطوط التي يُرسم على أطرافها هي الدائرة.

فلنبتدئ أولاً بالقطع الزائد الذي لا يلقاه الخطان المفروضان.

ولنفرض / الخطين المستقيمين عليهما ا ب ا جـ، ونقسم زاوية ب ا جـ ٨-ظ بنصفين بخط ا د، ونفرض النقطة التي يجوز عليها القطع المطلوب نقطة د، ونخرج خط ه د ز، يكون ا ه مثل ا ز، ونديـر دائرة على قطر ش ت الذي فرضناه قاعدة القطع، وهي ش و ت. ونخرج خ ث ذ عمودًا على ش ت





6 الشخص: الشحط – 10 تخطيط: تحصط / القطوع: الطوع – 11 أبو: ابى – 12 الأصطرلاب: وهذا أيضًا مستعمل – 14 الخطان المفروضان: الخطين المفروضين.

EDG, menons de nombreuses cordes sur l'arc *ZXFT*, qui passent toutes par le point *W* ; soit $U'WI'$, $O'WLa$, *FWJ*. Menons *HKLI* parallèle à *EDG* et égale à $U'WI'$, la droite *MSON* parallèle à *EG* et égale à $O'WLa$, et la droite *PQRU* parallèle à <la droite> *EG* et égale à *FWJ*, et partageons ces droites selon les mêmes parties que les cordes dans le cercle ont été partagées au point *W*, suivant *K* et *L*, *S* et *O*, *Q* et *R*, ainsi chacune des parties *HK* et *LI* est égale à la partie WI', chacune des parties *MS* et *ON* est égale à *WLa*, et chacune des parties *PQ* et *RU* est égale à *WJ*. Menons *BC* égale à *XT* et posons chacune des deux parties BQ_p et O'_oC égale à *XW*.

L'hyperbole que les deux droites *AB* et *AC* ne rencontrent pas, passe par
9r les points *D*, *K*, *S*, *Q*, Q_p, *D*, *L*, *O*, *R*, O'_o. Si on joint ces points / par des lignes, elles tracent une hyperbole que les deux droites *AB* et *AC* ne rencontrent pas ; ce qu'il fallait construire à partir d'une propriété du cercle.

Traçons maintenant la parabole. Posons la droite *AC* son axe et faisons son côté droit[1], la droite *CM*. Prolongeons *AC* jusqu'à *B*, posons *CB* égale à *CM* et traçons sur la droite *AB* des demi-cercles tels qu'ils soient tangents au point *B* ; soient les cercles *ADB*, *IEB*, *KGB*, *LHB*. Menons la perpendiculaire *CD* à la droite *AB* qui coupe les cercles en *E*, *G*, *H*. Menons des points *A*, *I*, *K*, *L* les perpendiculaires *AF*, *IN*, *KS*, *LO* et posons *AF* égale à *CD*, *IN* égale à *CE*, *KS* égale à *CG* et *LO* égale à *CH*. Joignons
9v *F*, *N*, *S*, *O*, *C* par des lignes ; il se forme / donc une parabole dont le côté droit[2] est la droite *CM*. Ce que nous voulions construire.

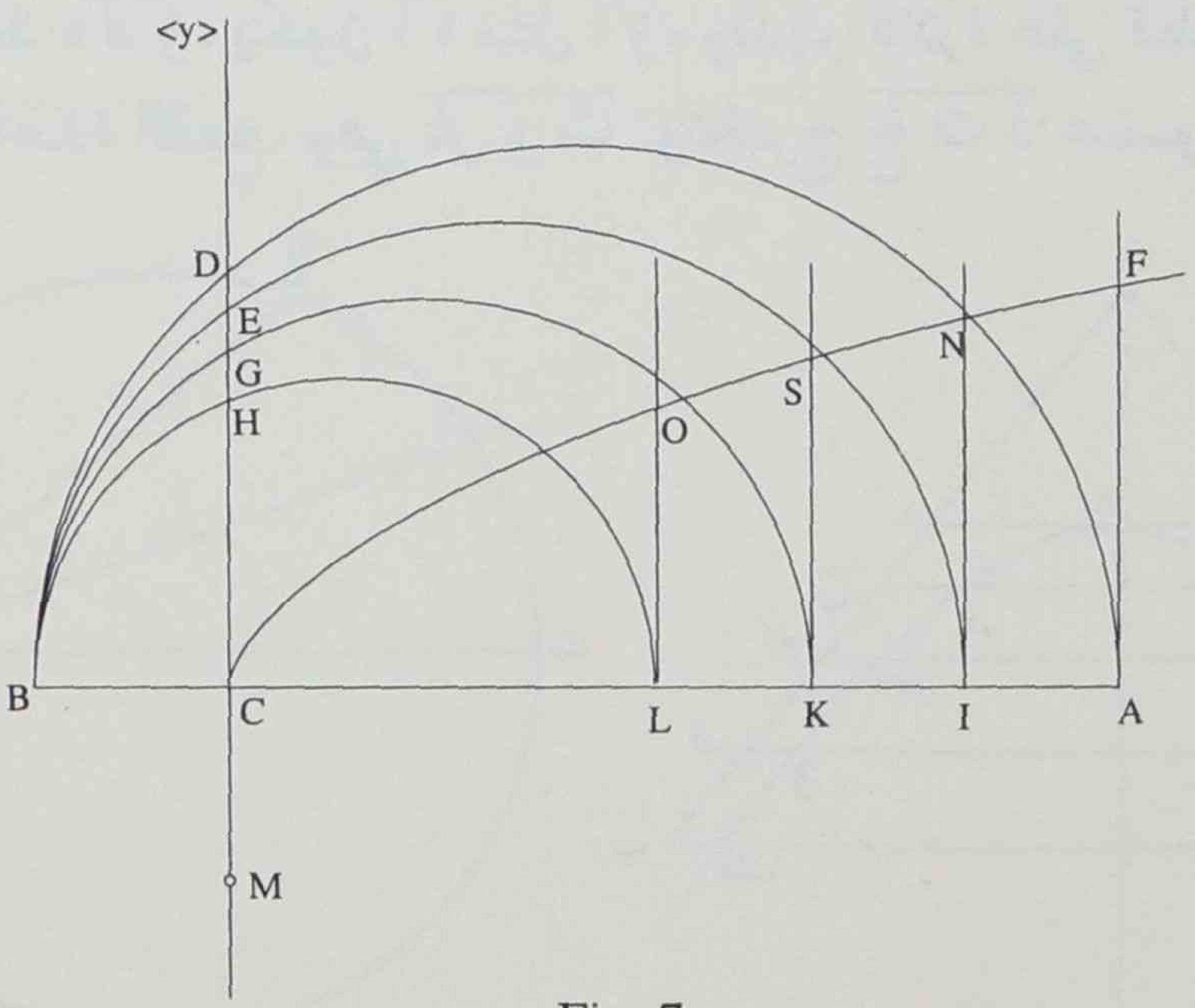


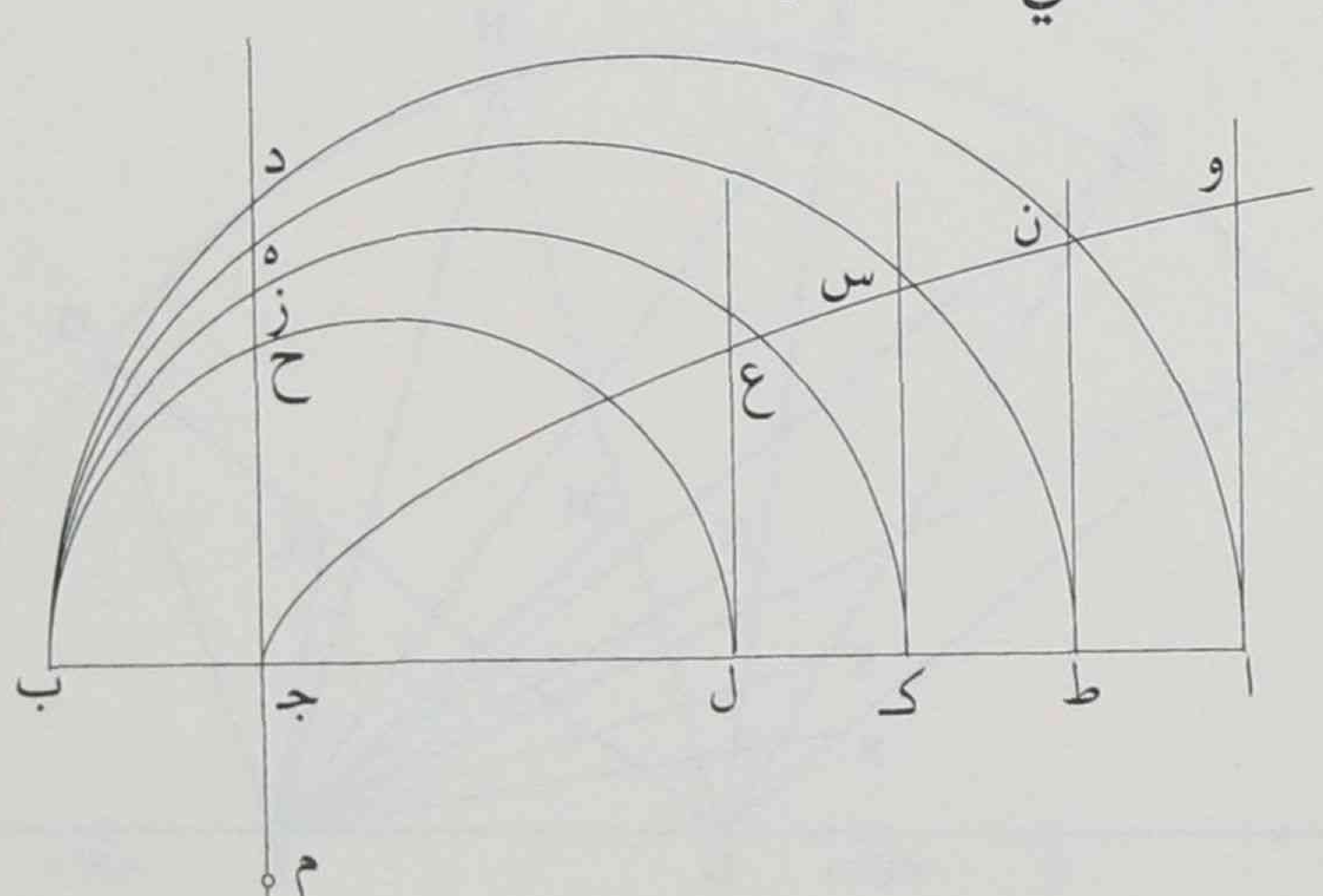
Fig. 7

[1] Dans le manuscrit : côté incliné.
[2] Voir note précédente.

ومساويًا لخط ه د ز، ونخرج أوتارًا كثيرة على قوس ذ ش و ت تجوز كلها على نقطة ث، وهي ض ث ظ غ ث لا و ث ي. ونخرج ح كـ ل ط يوازي ه د ز ويساوي ض ث ظ، وخطّ م س ع ن يوازي ه ز ويساوي غ ث لا، وخطّ ف ق ر ص يوازي ه ز ويساوي و ث ي، ونقسم هذه الخطوط كأقسام الأوتار التي في الدائرة التي تقسمها نقطة ث على كـ ل س ع ق ر، فيكون كل واحد من قسمي ح كـ ل ط مثل قسم ث ظ، ومن قسمي م س ع ن مثل ث لا، ومن قسمي ف ق ر ص مثل ث ي. ونخرج ب جـ مساويًا لـ ش ت، ونجعل قسمي ب قف غع جـ مثل ش ث.

فالقطع الزائد الذي لا يلقاه خطا ا ب ا جـ يجوز على نقط د كـ س ق قف د ل ع ر غع. فإذا وصل هذه النقط / بخطوط، ترسمها قطعًا زائدًا لا و-٩
يلقاه خطا ا ب ا جـ؛ وهذا ما كان ينبغي أن نعمل من خاصة ⟨الدائرة⟩.

ولنرسم القطع المكافئ: نضع خط ا جـ محوره ونجعل ضلعه القائم خط جـ م. ونخرج ا جـ على استقامة إلى ب، ونجعل جـ ب مثل جـ م، وندير على خط ا ب أنصاف الدوائر ويكون على نقطة ب تماسها، وهي دوائر ا د ب ط ه ب كـ ز ب ل ح ب. ونخرج عمود جـ د على خط ا ب يقطع الدوائر على ه ز ح، ونخرج من نقط ا ط كـ ل أعمدة ا و ط ن كـ س ل ع، ونجعل ا و مثل جـ د وط ن مثل جـ ه وكـ س مثل جـ ز ول ع مثل جـ ح، ونصل و ن س ع جـ بخطوط، فتحدث / تلك الخطوط قطعًا مكافئًا ضلعه القائم خط ظ-٩
جـ م؛ وهذا ما كان ينبغي أن نعمل.



1 ذ ش و ت: ذشوب – 6 ث ظ: تظ / قسمي: قسم / ع ن: ن – 8 غع جـ: غعخ / ش ث: ش ت – 9 خطا: خطي – 10 ترسمها: أي رسمت هذه الخطوط النقط على صورة قطع زائد – 12 القائم: المائل، وربما كان هذا تحريفًا من الناسخ – 16 ل: ا – 18 ع: ح / فتحدث: مكانها متآكل / القائم: المائل.

Traçons pour l'hyperbole la droite ABC, traçons sur le diamètre AB un demi-cercle AGB, supposons sur l'arc AGB du côté de B de nombreux points à volonté, soient les points G, H, I, prolongeons AB vers C à l'infini, menons les droites GC, HD, IE tangentes au cercle, menons les perpendiculaires EK, DL, CM à BC et faisons EK égale à EI, DL égale à DH et CM égale à CG. L'hyperbole dont le côté transverse est égal à son côté droit passe par les points B, K, L, M. Si donc on joint les points B, K, L, M par des lignes, il se forme une hyperbole. Ce qu'il fallait construire. /

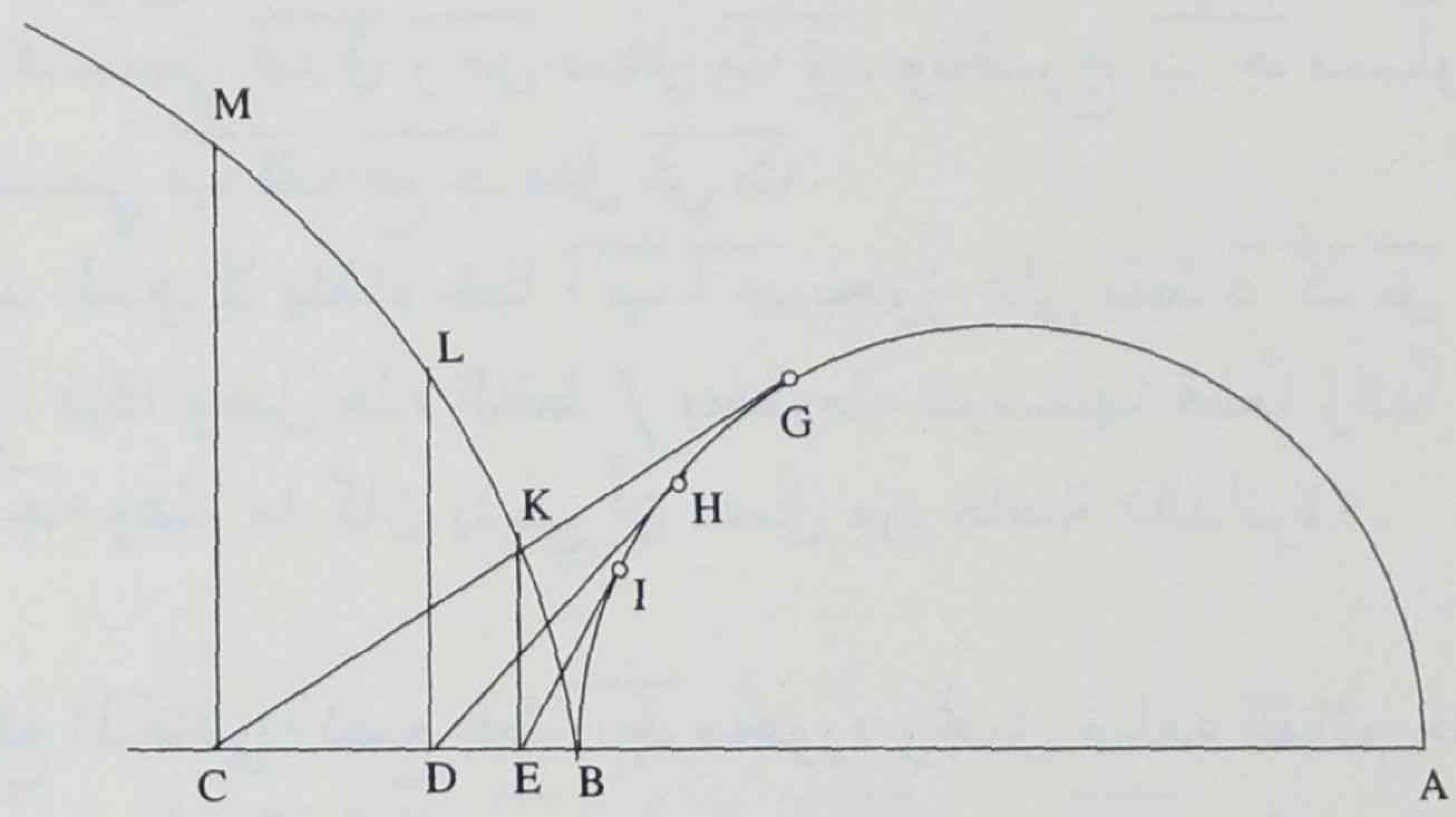


Fig. 8

10r Traçons maintenant l'ellipse. Posons la droite AB, traçons sur elle un demi-cercle AKB dont le centre est D, posons le point E sur la droite AB et faisons CD égale à AE. Si nous voulons construire une ellipse d'axe AC[1] telle que <la somme> des droites menées des points E et D au contour de la section soit égale à la droite AD, supposons alors sur la circonférence du cercle AKB de nombreux points ; soient les points G, H, I, K, O et menons

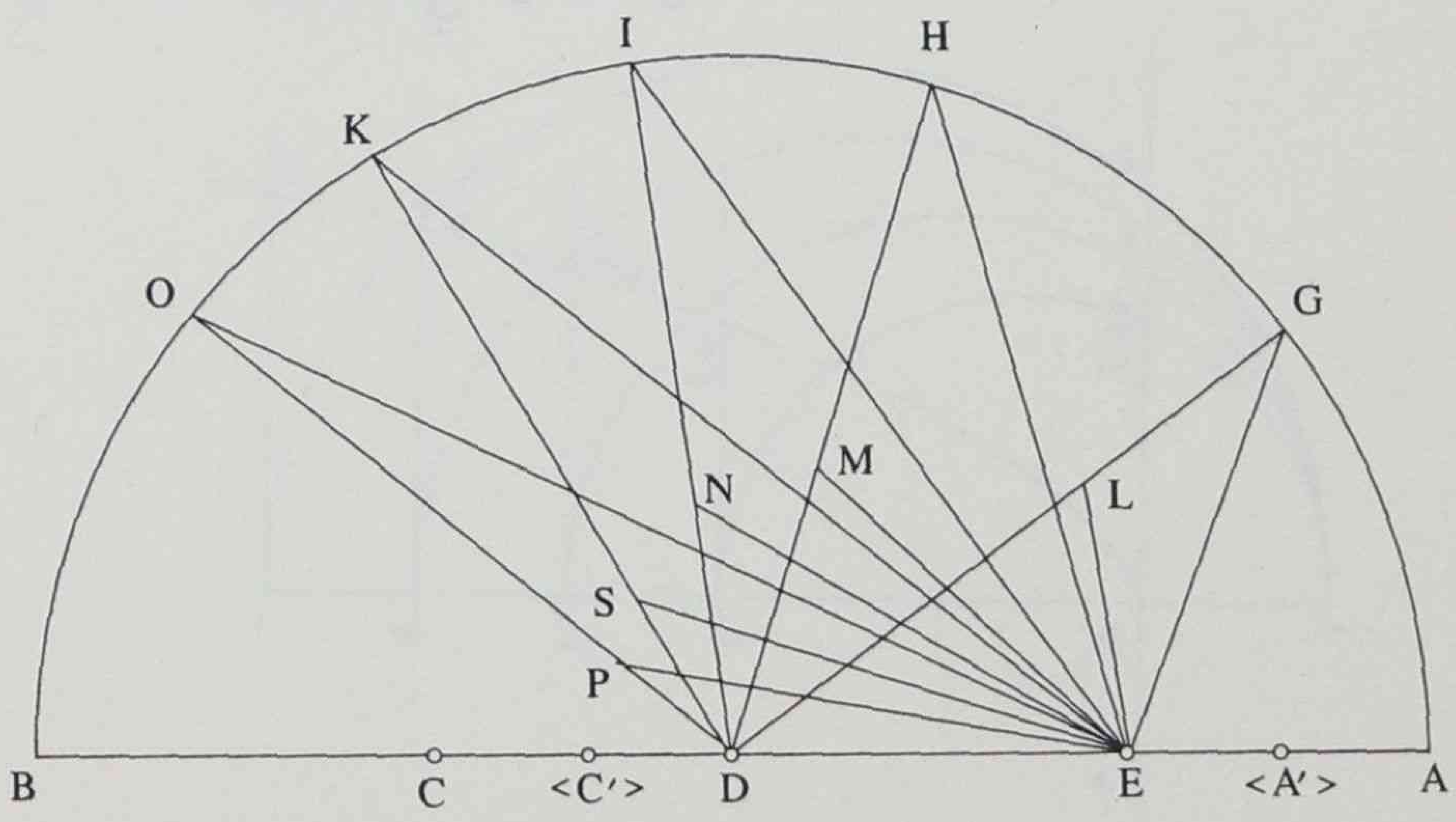
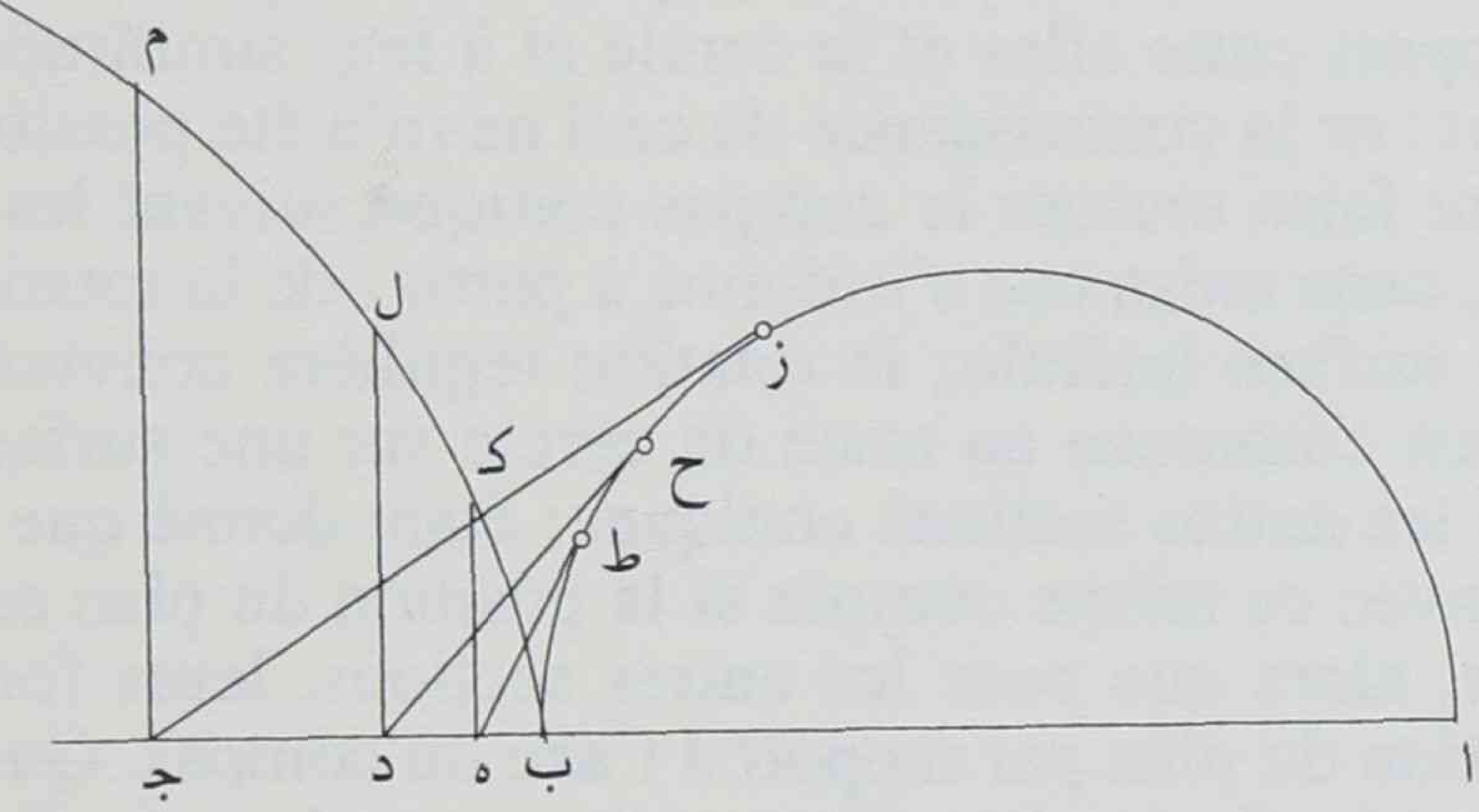


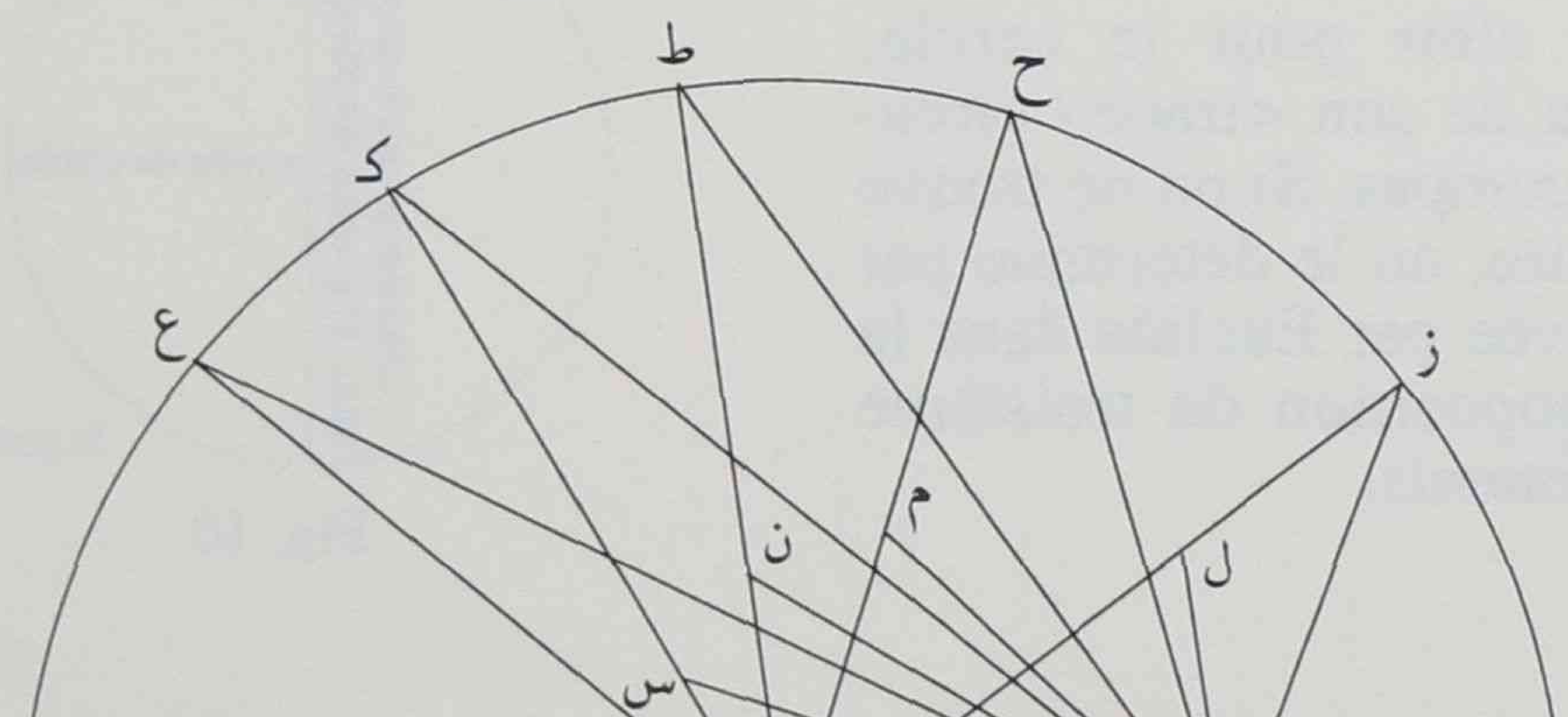
Fig. 9

[1] Axe porté par AC, les sommets seront A' et C' milieux respectifs de EA et CD.

ولنرسم للقطع الزائد خط ا ب جـ، وندير على قطر ا ب نصف دائرة ا ز ب، ونفرض على قوس ا ز ب من جهة ب نقطًا كثيرة كم شئنا، وهي نقط ز ح ط، ونخرج ا ب إلى جـ بلا نهاية، ونخرج خطوط ز جـ ح د ط ه تماس الدائرة، ونخرج أعمدة ه كـ د ل جـ م على ب جـ، ونجعل ه كـ مثل ه ط ود ل مثل د ح وجـ م مثل جـ ز. فالقطع الزائد الذي يكون ضلعه المائل مساويًا لضلعه المنتصب يجوز على نقط ب كـ ل م. فإذا وصل نقط ب كـ ل ‹م› بخطوط تحدث قطعًا زائدًا؛ وهذا ما كان ينبغي أن نعمل. /



ولنرسم القطع الناقص: نضع خط ا ب المستقيم، وندير عليه نصف دائرة ا كـ ب والمركز د، ونضع نقطة ه على خط ا ب ونجعل جـ د مثل ا ه. ‹فإذا› أردنا أن نعمل قطعًا ناقصًا على محور ا جـ وتكون الخطوط التي تخرج من نقطتي ه د إلى محيط القطع مثل خط ا د، فلنفرض على محيط دائرة ا كـ ب نقطًا كثيرة، وهي نقط ز ح ط كـ ع، ونخرج من نقطتي ه د خطوطًا ١٠-و



3 تماس: أولها متآكل، والكلمة مطموسة – 4 ه كـ: ه ل – 5 مساويًا: مساو – 6 المنتصب: المنتصف – 9 ه: د – 12 كـ: ل، ثم كتب عليها الصحيح.

des points *E* et *D* des droites jusqu'à ces points, ce sont *EG*, *EH*, *EI*, *EK*, *EO* et *DG*, *DH*, *DI*, *DK* et *DO*. Faisons l'angle *GEL* égal à l'angle *EGL*, l'angle *HEM* égal à l'angle *EHM*, l'angle *IEN* égal à l'angle *EIN*, l'angle *KES* égal à l'angle *EKS* et l'angle *OEP* égal à l'angle *EOP* ; joignons les points *A*, *L*, *M*, *N*, *S*, *P* et *C* par des lignes, elles tracent une ellipse dont l'axe est *AC*[1]. Ce / qu'il fallait construire.

10v Mais puisque les propriétés de l'hyperbole et de la parabole sont proches des propriétés du cercle et que les propriétés de toutes les autres figures composées de manière régulière à partir de droites et qui ne subissent ni révolution ni rotation sont éloignées des propriétés du cercle, il est donc nécessaire que ces deux figures aient un rapport au cercle et une similitude à celui-ci, comme il en était pour l'ellipse. J'ai toujours réfléchi à l'existence de ce rapport entre elles et le cercle et à leur similitude et cherché à saisir ce rapport ; or la connaissance de ceci ne m'a été possible qu'une fois appris comment faire tourner le compas conique suivant les positions des
11r plans. En effet, cette existence s'ordonne à partir / de la rotation du compas conique sur la surface latérale ; la rotation régulière convient au cercle et cette rotation est commune au tracé du cercle sur une surface plane et au tracé de toutes les autres sections coniques ; étant donné que le cercle provient du tracé avec ce même compas si la position du plan est perpendiculaire à son axe, alors que pour les autres sections, leurs formes diffèrent suivant la position du plan par rapport à l'axe du compas. Quant à l'ellipse, sa conception est facile de plusieurs manières, soit à partir d'une section du cylindre soit à partir de la projection des rayons traversant une ouverture circulaire sur un plan de position oblique qui tient lieu aussi d'une section du cylindre ou d'une section du cône. Ce que nous voulions montrer.

Il nous reste pour les sections et leurs tracés à trouver leurs diamètres et leurs centres étant donné que ces sections sont tracées par les patrons ou le compas.

Ceci est clair pour le cercle, compte tenu de son <tracé> circulaire par le compas. Si on ne trouve pas son centre, on le détermine par la voie trouvée par Euclide dans la première proposition du troisième livre des *Éléments*.

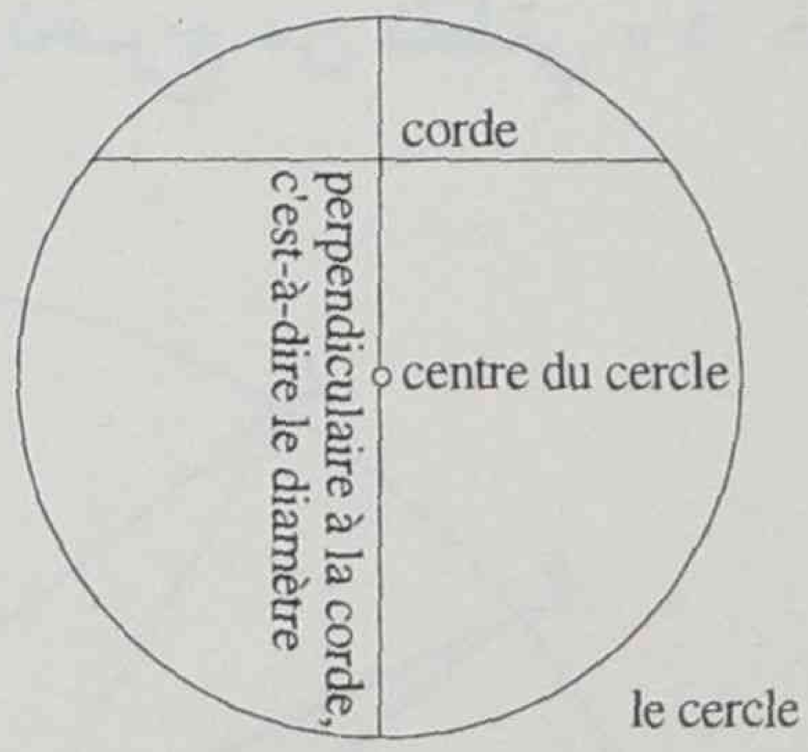


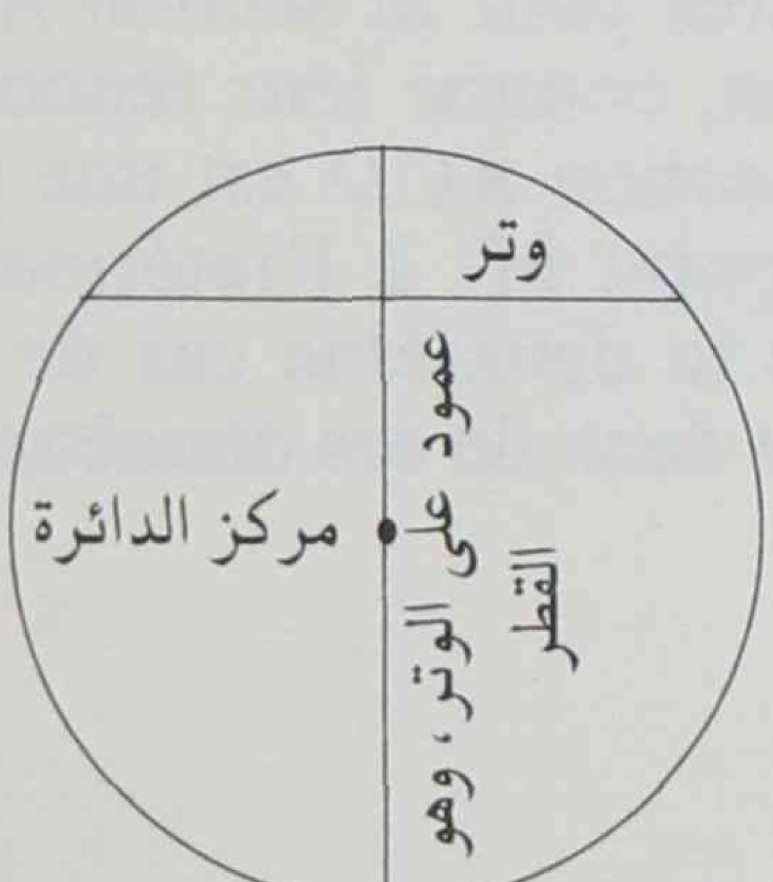
Fig. 10

[1] Voir note précédente, p. 252.

مستقيمة إلى تلك النقط، وهي ه ز ه ح ه ط ه كـ ه ع ود ز د ح د ط د كـ د ع. ونجعل زاوية ⟨ز ه ل مثل زاوية ه ز ل وزاوية⟩ ح ه م مثل زاوية ه ح م، وزاوية ط ه ن مثل زاوية ه ط ن، وزاوية كـ ه س مثل زاوية ه كـ س وزاوية ع ه ف مثل زاوية ه ع ف؛ ونصل نقط آ ل م ن س ف جـ بخطوط، فترسم قطعًا ناقصًا، يكون محوره آ جـ؛ وهذا / ما كان ينبغي أن نعمل. ١٠-ظ

ولأن خواص القطع الزائد والمكافئ قريبة من خواص الدائرة وخواص سائر الأشكال المنتظمة من الخطوط المستقيمة التي لا يشوبها دور ولا إدارة بعيدة من خواصها، فلا بد من أن يكون لهذين الشكلين نسبة إلى الدائرة ومشاكلة، كما كان للقطع الناقص. وكنت متفكراً دائمًا في وجود أمر النسبة بينهما وبين الدائرة ومشاكلتها وطالبًا للظفر بها، فما تهيأ لي معرفة ذلك إلا بَعد تحصيلي كيفية إدارة البركار المخروطي على أوضاع السطوح. وذلك أنه ينتظم على بسيط السطح / بإدارة البركار المخروطي عليه، ١١-و والإدارة المنتظمة تناسب الدائرة، وهذه الإدارة مشتركة لرسم الدائرة على بسيط مستوٍ ولرسم سائر القطوع المخروطية، إذ الدائرة هي من رسم هذا البركار بعينه، إذ كان وضع السطح على محوره على زاوية قائمة، وسائر القطوع تختلف أشكالها باختلاف وضع السطح من محور البركار. فأما القطع الناقص فتصوّره سهل من جهات كثيرة، إما من جهة قطع الأسطوانة وإما من جهة وقوع الشعاع النافذ من كوة مستديرة إلى بسيط مورب الوضع، وهو أيضًا بمنزلة قطع الأسطوانة وقطع المخروط؛ وذلك ما أردنا بيانه.

وقد بقي علينا من القطوع ورسومها وجود أقطارها ومراكزها، إذ كانت القطوع مرسومة بالمساطر والبركار.



الدائرة

أما الدائرة، فهو بيّنٌ من جهة إدارتها بالبركار. وإذا لم يوجد مركزها، فيستخرج بالطريق الذي وجده أقليدس في الشكل الأول من المقالة الثالثة من كتاب *الأصول*.

4 آ ل: لَ آ – 8 الشكلين: يعني القطع الزائد والقطع المكافئ – 10 وطالبًا: وطالب – 12 أنه: الضمير هنا يعود على «وجود أمر ...».

11v Quant / à l'ellipse, soit *AB* la section. Menons *CD* et *EG* deux ordonnées quelconques supposées parallèles ; partageons-les en deux moitiés en *H* et *I*. Joignons *HI* et prolongeons-la des deux côtés en *A* et *B*; *AB* est donc un diamètre de la section. Partageons-le en deux moitiés au point *K* qui est le centre. Menons *LKM* parallèle à *CD*; elle est donc le diamètre conjugué du diamètre *AB*. Traçons avec le centre *K* et à la distance *KL* un arc de cercle *LOA′*; partageons l'arc *LOA′* en deux moitiés au <point> *O* et menons *PKON*: elle sera son plus grand diamètre[1] qui est l'axe ; menons *SKU* perpendiculaire à *NP*: elle sera son plus petit diamètre. Tout cela s'établit à partir du livre d'Apollonius sur les *Coniques*.

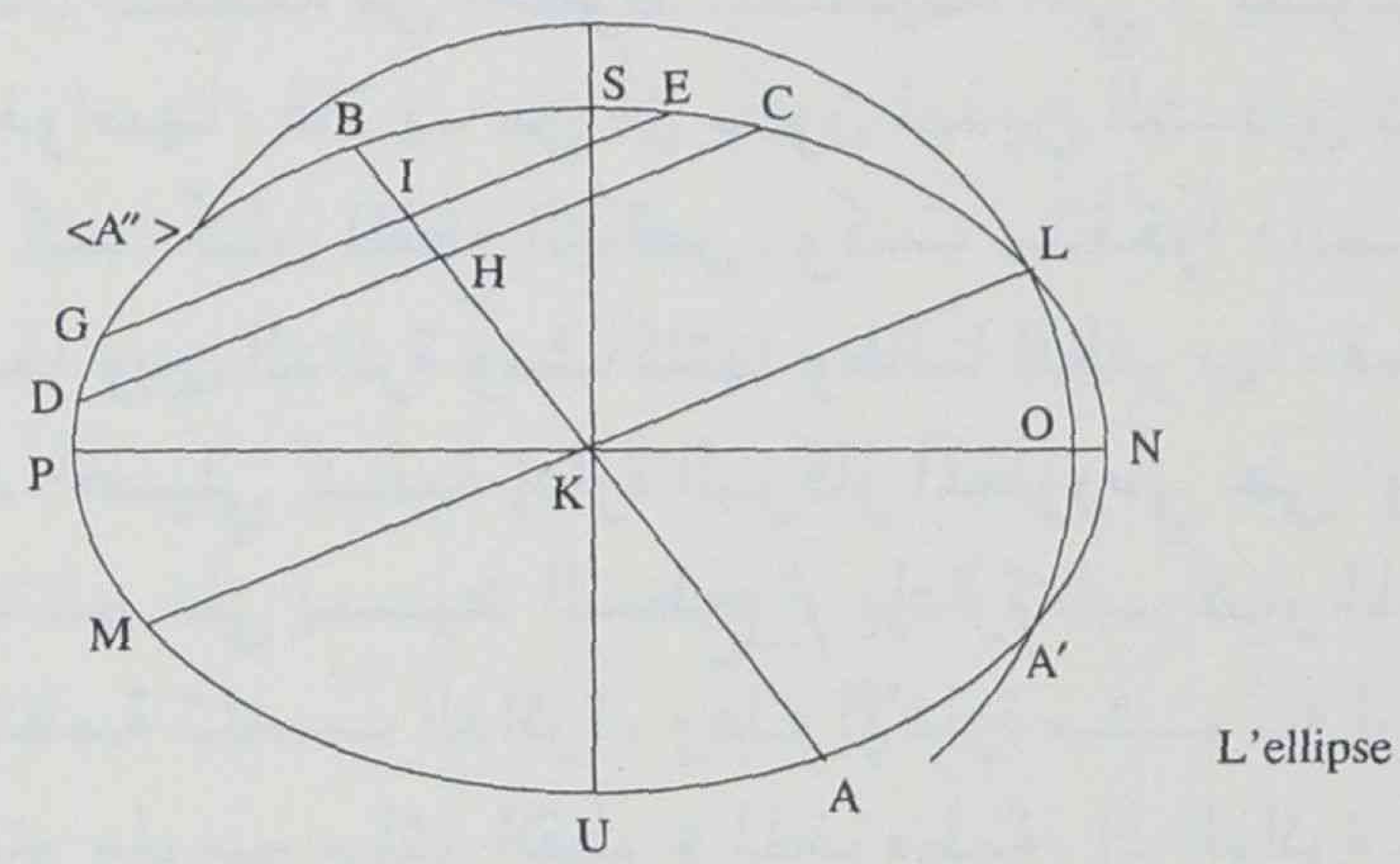


Fig. 11

Existence du diamètre et du centre pour l'hyperbole et <du diamètre> pour la parabole

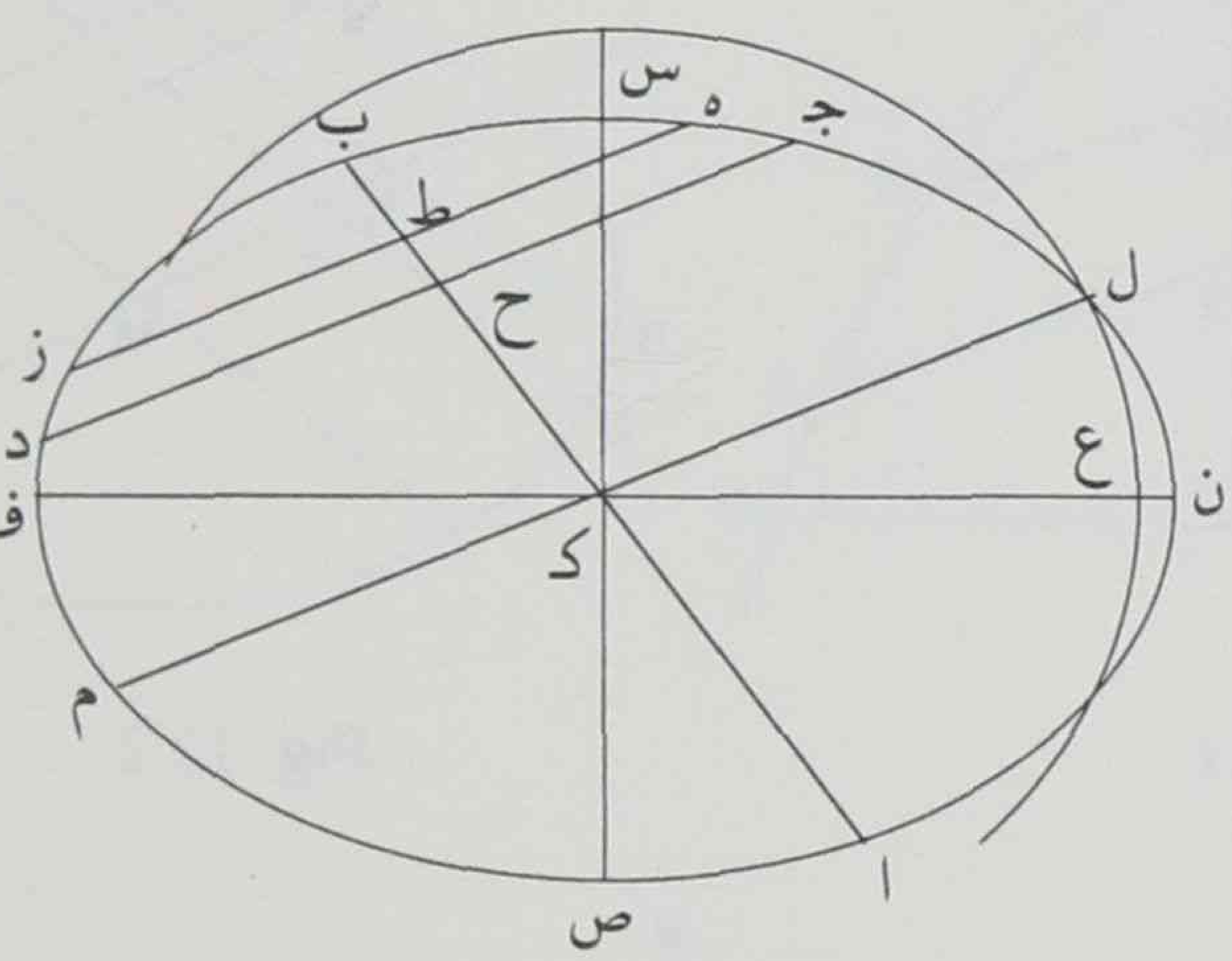
Menons les droites *CD* et *EB* parallèles dans la section *ACDB*, partageons-les en deux moitiés en *K* et *L*, menons les deux droites *AG* et *HI* également parallèles et partageons-les en deux moitiés en *N* et *S*; menons *LKM* et *SNM*, elles seront donc deux diamètres pour la section *ACB*; si elles se rencontrent à l'extérieur de la section, comme leur rencontre au
12r point *M*, alors c'est / une hyperbole. Si la section *ACD* est une portion d'une ellipse, alors leur rencontre sera au point *M*[2] à l'intérieur de la section. Si elles sont parallèles comme dans le deuxième cas de figure, alors c'est une parabole et les deux droites sont deux de ses diamètres[3].

1 *PN* sera un des axes, mais pas nécessairement le plus grand.

2 Litt. : aux points *L* et *S*.

3 Dans tout ce paragraphe, l'auteur utilise Apollonius, II.44 à 47.

وأما / في القطع الناقص، فليكن القطع عليه اب، ونخرج جـ د ه ز خطين من خطوط الترتيب كيفما اتفقا بعد أن يكونا متوازيين، ونقسمها نصفين نصفين على ح ط، ونصل ح ط ونخرجه من الجهتين إلى اب، فـ‹يكون› اب قطراً للقطع. ونقسمه بنصفين على ك وهو المركز. ونخرج ل ك م يوازي جـ د، فهو القطر المزدوج لقطر اب. وندير على مركز ك وببعد ك ل قوس دائرة ل ع ا، ونقسم قوس ل ع ا بنصفين على ع، ونخرج ف ك ع ن، فيكون قطره الأطول وهو السهم، ونخرج س ك ص على زاوية قائمة على ن ف، فيكون قطره الأصغر. وهذه كلها تُبيِّنُ من كتاب أبلونيوس في *المخروطات*. ١١-ظ



القطع الناقص

وجود القطر والمركز في القطع الزائد والمكافئ

فلنخرج خطي جـ د ه ب متوازيين في قطع ا جـ د ب، ونقسمهما بنصفين نصفين على كـ ل، ونخرج خطي ا ز ح ط أيضاً متوازيين، ونقسمهما بنصفين على ن س، ونخرج ل ك م س ن م، فيكونان قطرين لقطع ا جـ ب؛ فإن التقيا خارج القطع كالتقائهما على نقطة م، فهو / قطع زائد. ولو كان قطع ا جـ د قطعة من قطع ناقص، لكان التقاؤهما على نقطتي ل س داخل القطع. وإن كانا متوازيين على ما في الصورة الثانية، فهو قطع مكافئ، والخطان قطراه. ١٢-و

4 كـ: ل – 5 القطر: قطر / كـ: ل – 8 أبلونيوس: ابللونيوس – 15 على نقطتي ل س: كذا في المخطوطة والصواب «على نقطة م» – 17 والخطان قطراه: والخطين قطريه.

Nous voulons trouver l'axe, c'est-à-dire le diamètre principal.

Dans l'hyperbole, supposons un point quelconque sur la section, soit *V*, traçons avec *M* comme centre à la distance *VM* l'arc de cercle *VR*, partageons la portion *VI′R* en deux moitiés au <point> *I′* et menons *MI′Q*, elle est alors l'axe de la section.

Dans la parabole, menons d'un point quelconque, soit *R*, la perpendiculaire *RUO* à *M U*, partageons-la en deux moitiés au <point> *P* et menons *PM* perpendiculaire à *RUO*, alors *PM* est l'axe de la parabole *ACDB*. Voici leurs figures. /

12v

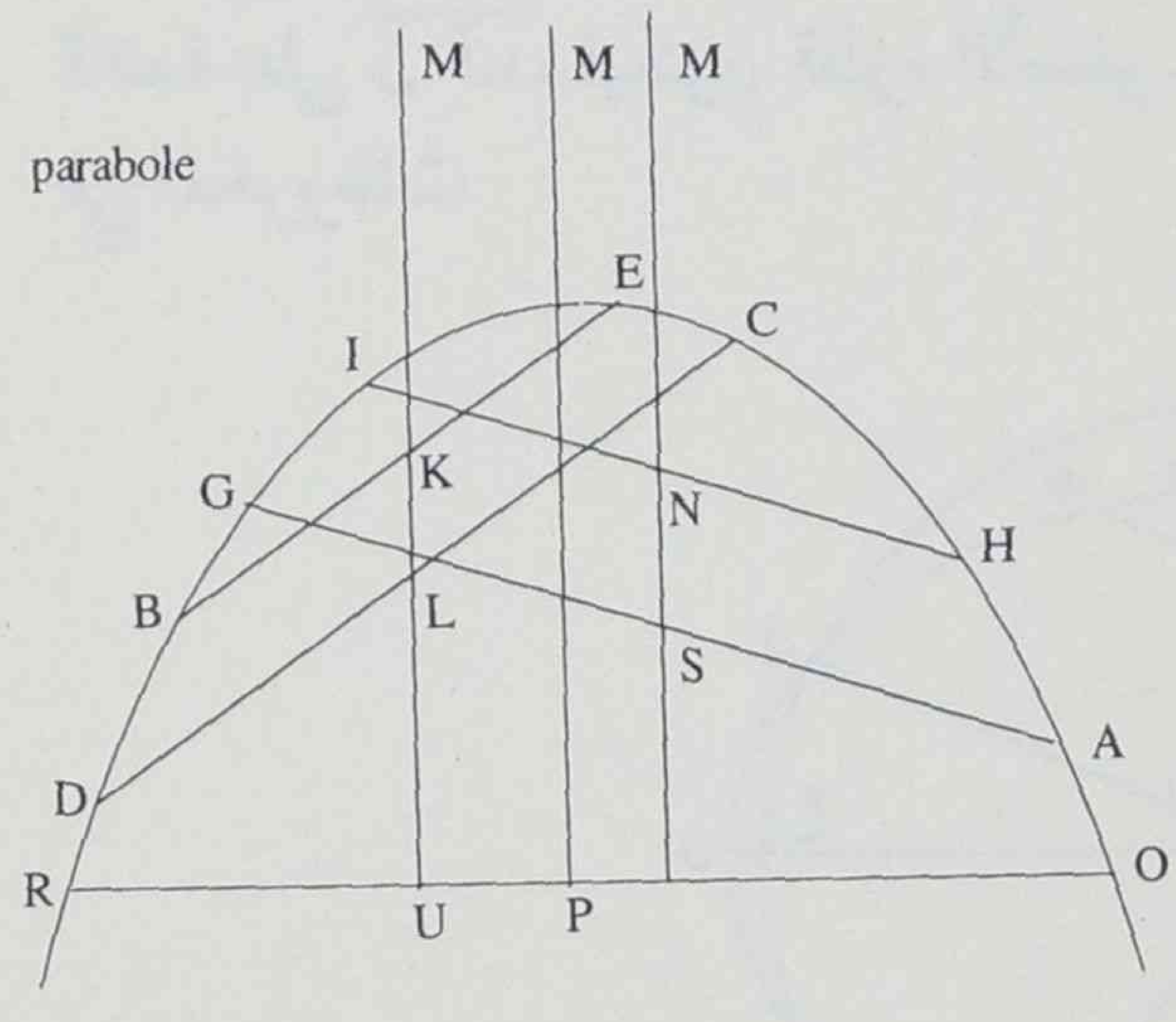


Fig. 12.1

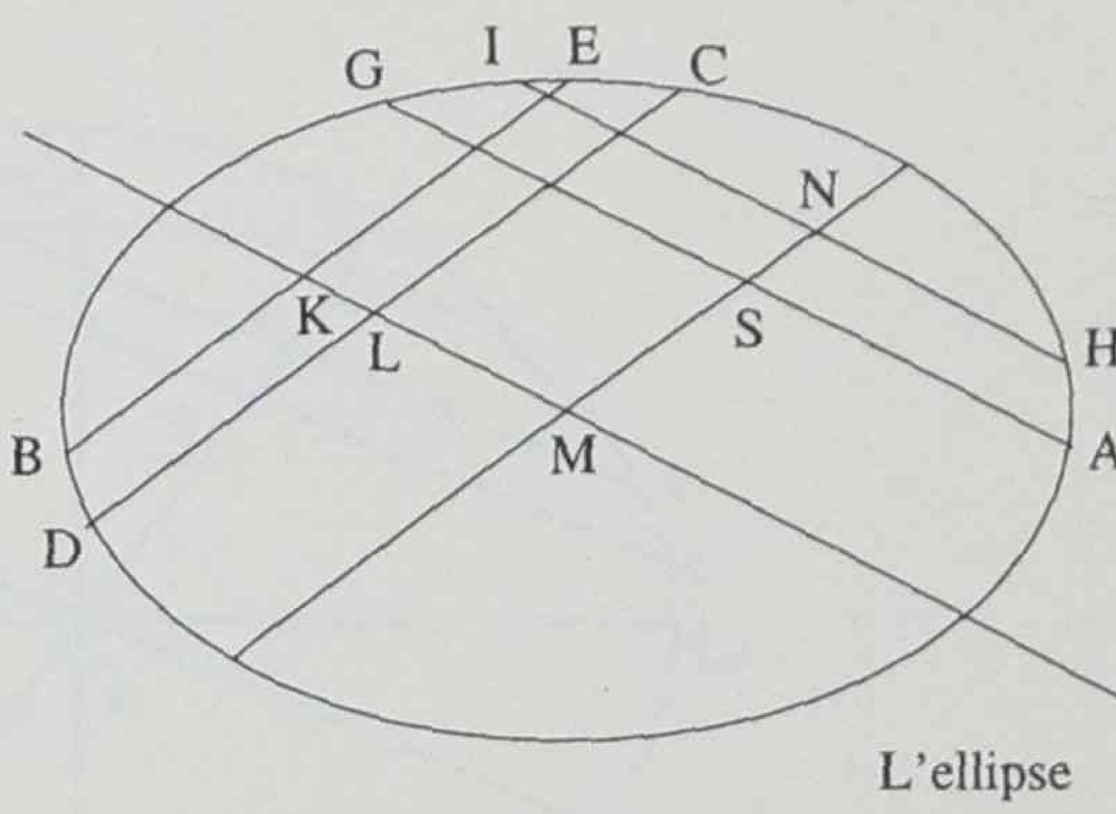


Fig. 12.2

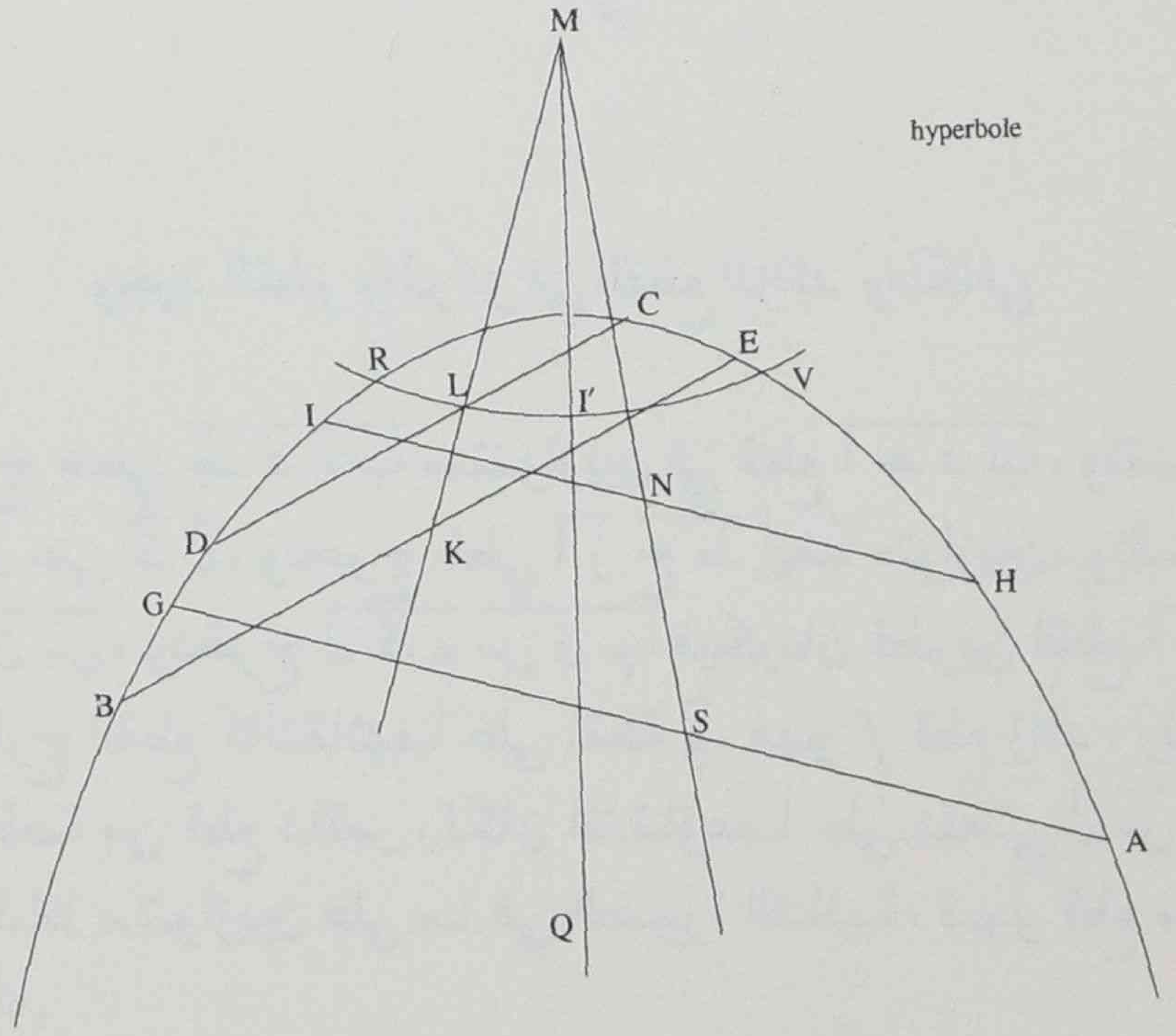


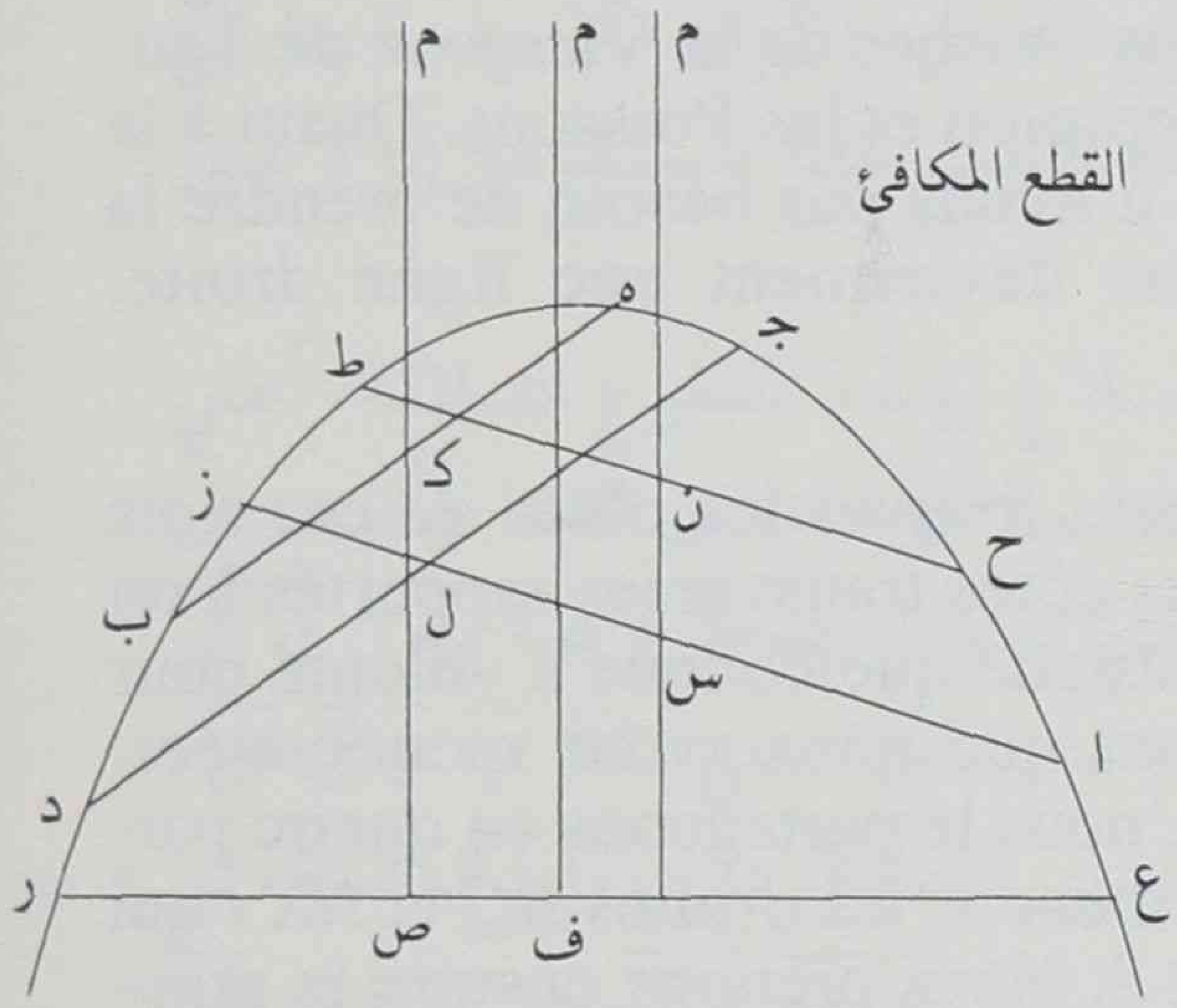
Fig. 12.3

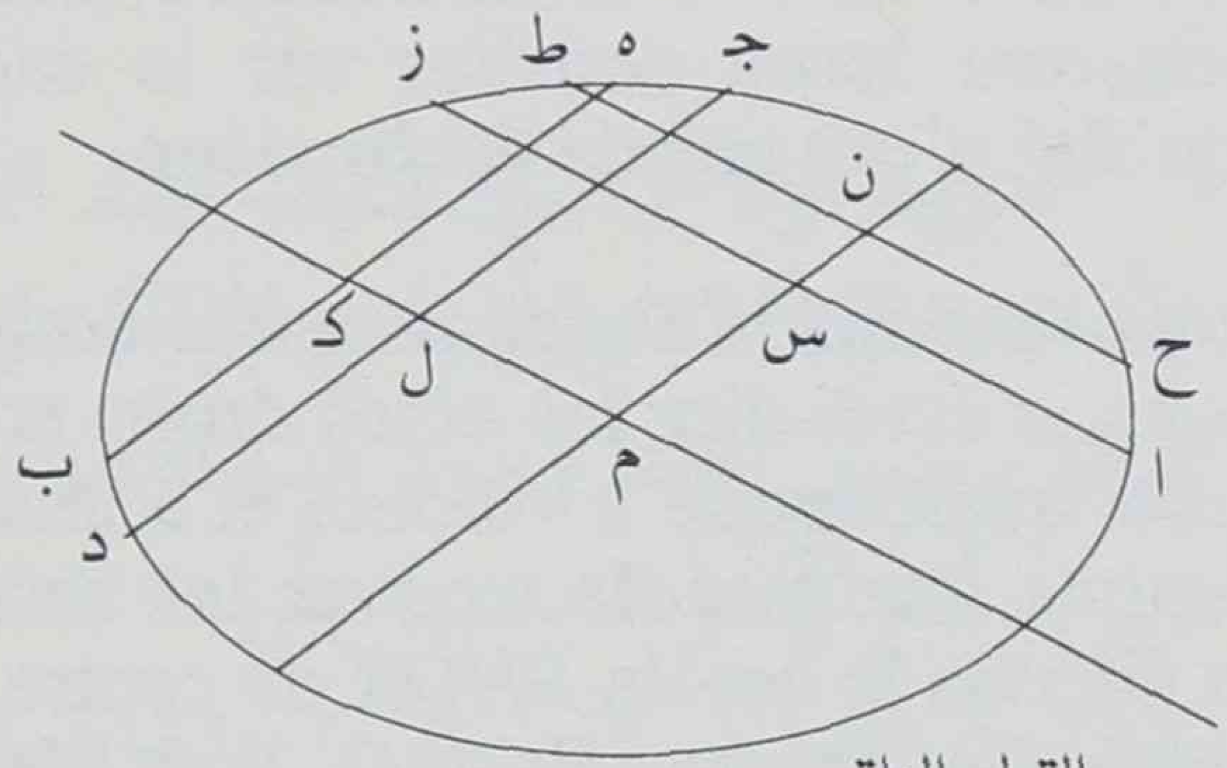
ونريد أن نجد السهم، أعني المحور.

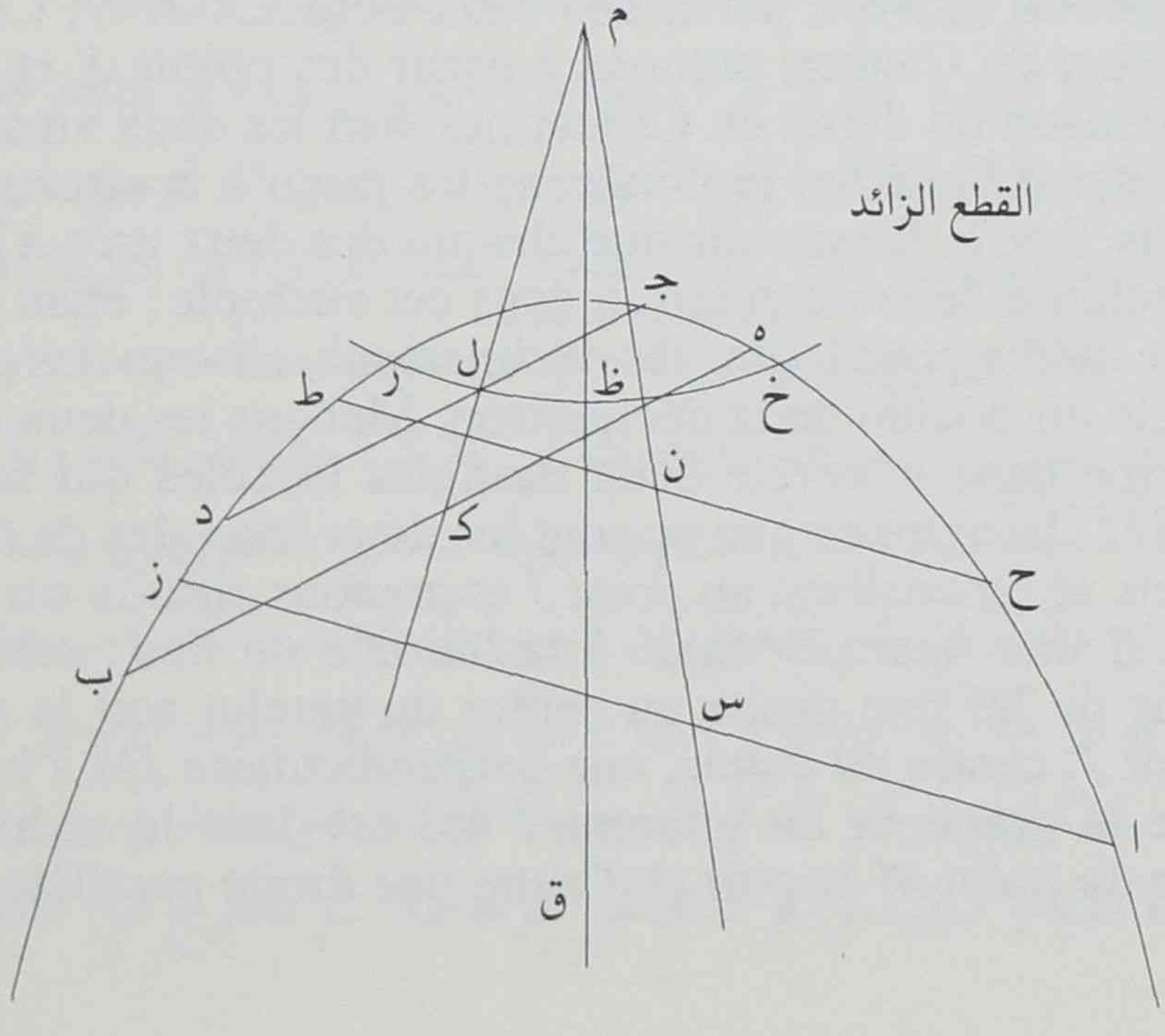
أما في القطع الزائد، فنفرض نقطة ما على القطع، وهي خ، وندير على مركز م وببعد خ م قوس دائرة خ ر، ونقسم قطعة خ ظ ر بنصفين على ظ، ونخرج م ظ ق، فهو سهم القطع.

وفي القطع المكافئ نخرج من نقطة ما، وهي ر، عمود ر ص ع على م ص، ونقسمه بنصفين على ف، ونخرج ف م عموداً عليه، فيكون ف م سهم قطع ا جـ د ب المكافئ؛ وهذه صورها: /

١٢-ظ


القطع المكافئ


القطع الناقص


القطع الزائد

2 وهي: وهو – 3 خ م: حـ / خ ر: جر – 5 وهي: وهو.

Patrons des hyperboles

13r Il nous reste à construire des patrons pour les hyperboles afin de construire les cadrans solaires que l'on place parallèlement au plan de l'horizon.

Nous disons : comment tracer des hyperboles — qui seront des patrons pour les courbes[1] des débuts des signes du zodiaque ou d'un point[2] quelconque que nous supposons sur l'écliptique — sur un cadran solaire pour le gnomon que nous voulons et la latitude que nous voulons ? Nous nous limitons à prendre trois hyperboles, l'une est pour la courbe au début du Cancer et la courbe du début du Capricorne, la seconde est pour les courbes des Gémeaux et du Lion et les courbes de leurs homologues qui sont le Sagittaire et le Verseau, la troisième est pour les courbes de la Vierge et du Taureau et de leurs homologues qui sont le Scorpion et les Poissons. Quant à la courbe du Bélier ou de la Balance, nous n'avons pas besoin de prendre la section, car leurs courbes sur le cadran deviennent une ligne droite, puisqu'ils[3] n'ont pas de déclinaison.

Nous voulons d'abord montrer comment trouver les côtés de ces trois sections, c'est-à-dire les côtés droits et les côtés transverses rapportés à un gnomon quelconque à volonté et à une latitude quelconque à volonté pour qu'il nous soit aisé de trouver les sections que nous avons mentionnées. Nous traçons le cercle *BNQX* de centre *J*, nous le partageons en quatre par-
13v ties égales aux points *B*, *N*, *Q*, *X*, et nous menons les droites *BQ* et *NX* / qui se coupent perpendiculairement au point *J*. Nous prenons ensuite la grandeur de la déclinaison du début de l'un quelconque des signes du Zodiaque sur les deux arcs *XB* et *NB* à partir des deux points *X* et *N*. Considérons l'exemple du début du Cancer, prenons à partir des points *X* et *N* la grandeur de la déclinaison du début du Cancer qui sont les deux arcs *XR* et *NE*, joignons les droites *RJ* et *EJ* et prolongeons-les jusqu'à la circonférence du cercle aux points *S* et *T*. Il est clair que chacun des deux arcs *XT* et *NS* est aussi égal à la totalité de la déclinaison dans cet exemple ; étant donné que le procédé est le même pour toutes les déclinaisons, chacun des angles *RJT* et *EJS* est l'angle du double de la déclinaison. Menons les deux droites *ER* et *ST*; il se forme dans le cercle deux triangles isocèles qui sont les triangles *EJR* et *SJT*. Imaginons que ce sont les deux triangles de deux cônes dont les sommets se rencontrent au point *J* et prenons ensuite sur l'arc *BX* à partir du point *B* une <partie> égale à la latitude du lieu ; soit l'arc *BC*. Menons à partir de lui une droite au centre du cercle, soit la droite *CJ* ; menons du point *J*, centre du cercle, une perpendiculaire *JM* à la droite *JC*
14r et posons-la de la grandeur du gnomon / qui est dans le cadran solaire. Menons ensuite du point *M* de part et d'autre une droite parallèle à la droite

[1] Courbe : trajectoire de l'extrémité de l'ombre du stylet du gnomon.
[2] Litt. : partie.
[3] Il s'agit des débuts du Bélier et de la Balance.

‹مساطر القطوع الزائدة›

وقد بقي علينا ‹عمل› مساطر للقطوع الزائدة لعمل الرخامات التي ١٣-و تنصب موازية لسطح الأفق.

فنقول: كيف نرسم قطوعًا زائدة - تكون مساطر المدارات رؤوس البروج أو أي جزء فرضنا من فلك البروج - على الرخامة على أي مقياس شئنا لأي عرض شئنا. ونقتصر على اتخاذ ثلاثة قطوع زائدة، أحدها لمدار رأس السرطان ولمدار رأس الجدي، والثاني لمداري الجوزاء والأسد ولمداري نظيريهما اللذين هما ‹القوس والدلو›، والثالث لمداري السنبلة والثور ولنظيريهما العقرب والحوت. فأما مداري الحمل والميزان فلا حاجة بنا إلى اتخاذ القطع، لأن مداريهما على الرخامة تقعان خطًا مستقيمًا إذ لا ميل لهما.

فنريد أولاً أن نبين كيف نجد الأضلاع لهذه القطوع الثلاثة، أعني الأضلاع القائمة والأضلاع المائلة على نسبة أي مقياس شئنا وأي عرض شئنا ليسهل علينا وجود هذه القطوع التي ذكرنا. فنخط دائرة ب ن ق ش على مركز ي، ونقسمها بأربعة أقسام متساوية على نقط ب ن ق ش، ونخرج خطي ب ق ن ش / يتقاطعان على نقطة ي على زوايا قائمة. ثم ١٣-ظ نأخذ مقدار ميل رأس أي برج شئنا من قوسي ش ب ن ب من نقطتي ش ن. ونجعل المثال لرأس السرطان، فنأخذ من نقطتي ش ن مقدار ميل رأس السرطان، وهما قوسا ش ر ن ه، ونصل خطي ر ي ه ي ونخرجهما على استقامتهما إلى محيط الدائرة إلى نقطتي س ت. فبيّن أن قوسي ش ت ن س أيضًا كل واحدة منهما مثل الميل كله في هذا المثال، إذ العمل في جميع الميول واحد، وتكون زاويتا ر ي ت ه ي س كل واحدة منهما زاوية ضعف الميل. ونخرج خطي ه ر س ت، فيحدث في الدائرة مثلثان متساويا الساقين، وهما مثلثا ه ي ر س ي ت. فنتوهمهما مثلثي مخروطين يلتقيان على رؤوسهما على نقطة ي، ثم نأخذ من قوس ب ش من نقطة ب مثل عرض البلد، وهي قوس ب جـ. ونخرج منها خطًا إلى مركز الدائرة، وهو خط جـ ي ونخرج من نقطة ي، مركز الدائرة، عمودًا قائمًا على خط ي جـ وهو عمود ي م، ونجعله مقدار المقياس / الذي في الرخامة. ثم نخرج من نقطة م خطًا ١٤-و

6 ثلاثة: ثلاث - 7 لمداري: لمدار - 9 العقرب والحوت: كتبها بدلاً من ‹القوس والدلو› في السطر السابق / مداري: مدار - 10 تقعان: تقع - 13 المائلة: القائمة - 14 ب ن ق ش: بنفش - 16 خطي: خط - 21 واحدة: واحد - 24 مثلثي: مثلثا - 26 منها: منه.

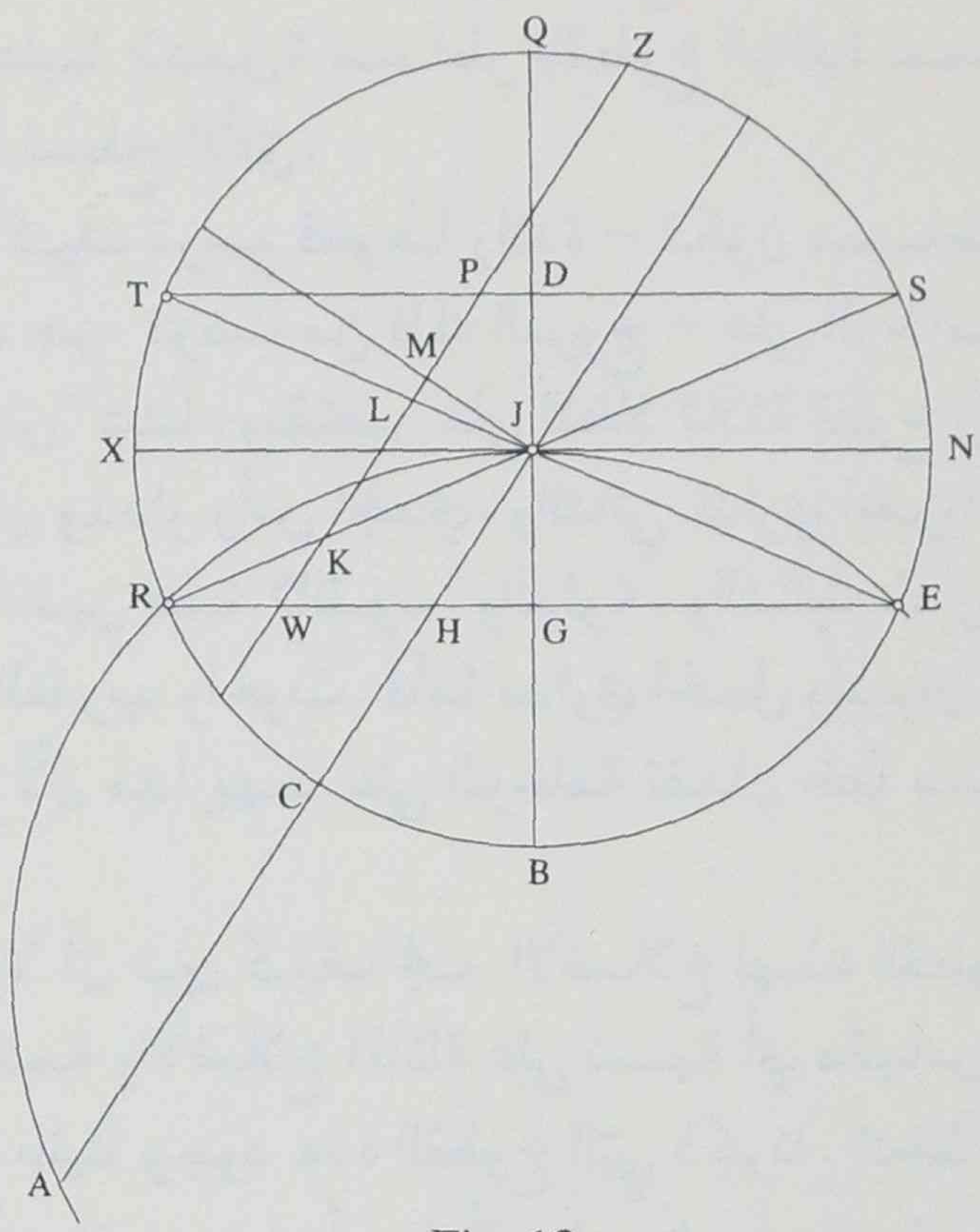
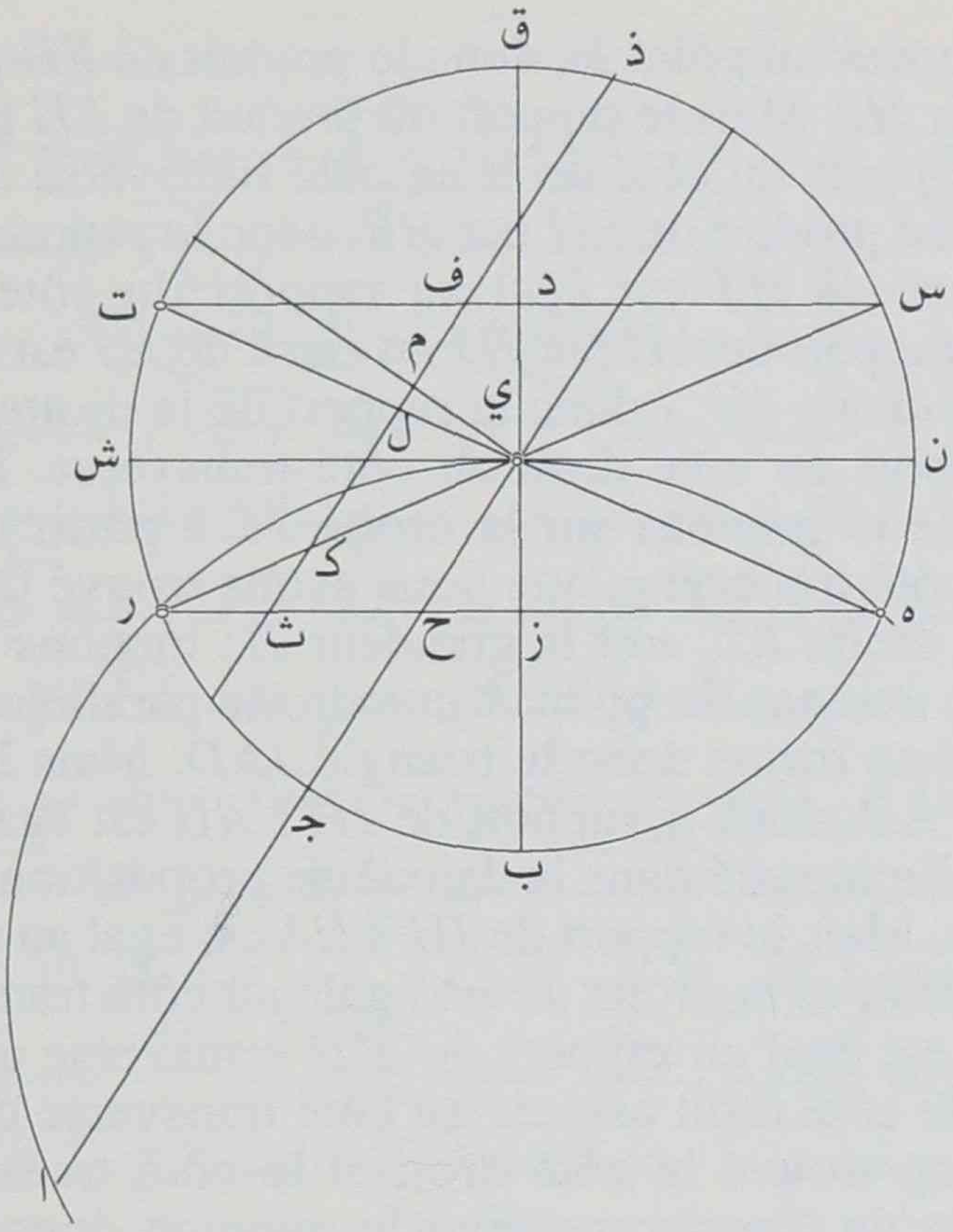


Fig. 13

JC ; soit la droite *PMW*. Cette droite a donc coupé les deux cônes qui se rencontrent par leur sommet — les deux cônes *EJR* et *SJT* — parallèlement à la droite qui passe par leur sommet et tombe à leur intérieur, il se forme dans les deux cônes deux sections opposées égales, qui sont les sections *KW* et *LP* ; et la droite *LK* sera le côté transverse pour les deux sections *KW* et *LP*. Nous avons donc trouvé dans la figure le côté transverse de la section qui se rapporte au début du Cancer et au début du Capricorne, pour cette latitude et pour ce gnomon. /

14v Nous voulons ensuite chercher le côté droit de cette section. Nous disons : on a montré dans la proposition seize[1] du premier livre de l'ouvrage d'Apollonius sur les *Coniques* que le rapport du produit de *EH* par *HR* au carré de *HJ* est égal au rapport du côté droit au côté transverse, qui est la droite *LK*. S'il en est ainsi, inscrivons le triangle *EJR* dans le cercle *EJRA* et menons la droite *JC* jusqu'à la circonférence du cercle *EJR* au point *A*. Or on a montré dans la proposition trente-quatre du troisième livre[2] de l'ouvrage d'Euclide que si deux cordes se coupent dans le cercle, alors <le produit> de l'une des parties par l'autre est égal au <produit> de l'une des parties par l'autre de l'autre corde. Or dans le cercle *EJRA*, les deux cordes

[1] Il s'agit de la proposition 12 de l'édition Ver Eecke.
[2] Voir la proposition 35 de la traduction de F. Peyrard.



موازياً لخط ي جـ من الجهتين جميعًا، وهو خط ف م ث. فهذا الخط قد قطع المخروطين الملتقيين على رؤوسهما – مخروطا ه ي ر س ي ت – على الموازاة لخط مرّ برؤوسهما ووقع داخلهما، وحدث في المخروطين قطعان متقابلان متساويان، وهما قطعا ك ث ل ف؛ وصار خط ل ك الضلع المائل لقطعي ك ث ل ف. فقد وجدنا في الشكل الضلع المائل للقطع الذي هو لرأس السرطان ولرأس الجدي لهذا العرض ولهذا المقياس./

١٤-ظ ثم نريد أن نطلب الضلع القائم لهذا القطع. فنقول: إنه قد تبين في الشكل السادس عشر من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في *المخروطات* أن نسبة مسطح ه ح في ح ر إلى مربع ح ي كنسبة الضلع القائم إلى الضلع المائل، الذي هو خط ل ك. وإذا كان ذلك كذلك، فإنا ندير على مثلث ه ي ر دائرة ه ي ر ا، ونخرج خط ي جـ إلى محيط دائرة ه ي ر إلى نقطة ا. وقد تبيّن في الشكل الرابع والثلاثين من المقالة الثالثة من كتاب أقليدس أنه إذا كان وتران يتقاطعان في الدائرة، فإن أحد القسمين في الآخر من أحدهما مثل أحد القسمين في الآخر من الوتر الآخر. وقد تقاطع في دائرة ه ي ر ا

ER et *JA* se sont coupées au point *H*, donc le produit de *EH* par *HR* est égal au produit de *AH* par *HJ*. Mais le rapport du produit de *EH* par *HR* au carré de *HJ* est égal au rapport du côté droit au côté transverse et le produit de *AH* par *HJ* est égal au produit de *EH* par *HR*, donc le rapport du produit de *AH* par *HJ* au carré de *HJ* est égal au rapport du côté droit au côté transverse. Mais le rapport de *AH* par *HJ* au carré de *HJ* est égal au rapport
15r de la droite *AH* à la droite *HJ*, / donc le rapport de la droite *AH* à la droite
HJ est égal au rapport du côté droit au côté transverse. Prolongeons la droite *JE* sans limite et prenons sur la droite *JE* à partir du point *J* une grandeur égale au côté transverse que nous avons trouvé dans la proposition, c'est-à-dire la droite *KL*, soit la grandeur *JI*; menons de *I* une droite jusqu'au point *H* et menons du point *A* une droite parallèle à la droite *IH*, soit la droite *AD*; il se forme donc le triangle *JAD*. Mais la droite *HI* est parallèle à la droite *AD*, donc le rapport de *JH* à *AH* est égal au rapport de *JI* à *DI*, comme on l'a montré dans la deuxième proposition du livre six de l'ouvrage d'Euclide. Mais le rapport de *JH* à *HA* est égal au rapport du côté transverse au côté droit et la droite *JI* est égale au côté transverse, donc le rapport de *JI* à *ID* est égal au rapport du côté transverse au côté droit, la droite *ID* est donc le côté droit associé au côté transverse qui est la droite *JI*. Nous avons donc trouvé le côté droit et le côté transverse pour les débuts du Cancer et du Capricorne pour le gnomon donné et la latitude donnée.

Pour les débuts des Gémeaux et du Lion et pour les débuts de leurs
15v homologues qui sont / les débuts du Sagittaire et du Verseau, nous faisons
les deux arcs *RX* et *EN* égaux à la déclinaison du début des Gémeaux. Pour les débuts du Taureau et de la Vierge et les débuts de leurs homologues qui sont les débuts du Scorpion et des Poissons, nous faisons les deux arcs *RX* et *EN* égaux à la déclinaison du début du Taureau et le reste du procédé est comme nous l'avons exposé, si ce n'est que le gnomon pour tout cela est le même.

Pour la position qui n'a pas de latitude nous prenons la grandeur du gnomon à partir de la droite *JX* qui est perpendiculaire à la droite *JB* et nous faisons passer par le sommet du gnomon une droite parallèle à la droite *JB*, comme nous avons fait passer par le point *M* extrémité du gnomon une droite parallèle à la droite *JC*. Le reste du procédé est <le même>, comme nous l'avons décrit. Ce qu'il fallait démontrer[1]. /

16v Nous allons résoudre ceci également par la voie du calcul pour confirmer[2] ce que nous avons résolu par les lignes géométriques.

[1] Le folio 16r contient la figure 14.

[2] Litt. : pour qu'il soit témoin.

وترا ه ر ي ا على نقطة ح، فضرب ه ح في ح ر مثل ضرب ا ح في ح ي. لكن نسبة مسطح ه ح في ح ر إلى مربع ح ي كنسبة الضلع القائم إلى الضلع المائل، ومسطح ا ح في ح ي مثل مسطح ه ح في ح ر، فنسبة مسطح ا ح في ح ي إلى مربع ح ي كنسبة الضلع القائم إلى الضلع المائل. ونسبة ا ح في ح ي إلى مربع ح ي كنسبة خط ا ح إلى خط ح ي، / فنسبة خط ا ح إلى ١٥-و خط ح ي كنسبة الضلع القائم إلى الضلع المائل. فنخرج خط ي ه على استقامته ولا نجعل له نهاية، ونأخذ من نقطة ي من خط ي ه مقداراً مثل الضلع المائل الذي كنا وجدناه في الشكل، أعني خط ك ل، وهو مقدار ي ط؛ ونخرج من ط خطاً إلى نقطة ح، ونخرج من نقطة آ خطاً موازياً لخط ط ح، وهو خط ا د، فحدث مثلث ي ا د. وخط ح ط مواز لخط ا د، فنسبة ي ح إلى ا ح كنسبة ي ط إلى د ط، كما بين في الشكل الثاني من المقالة السادسة من كتاب أقليدس. لكن نسبة ي ح إلى ح ا كنسبة الضلع المائل إلى الضلع القائم، وخط ي ط مثل الضلع المائل، فنسبة ي ط إلى ط د كنسبة الضلع المائل إلى الضلع القائم، فخط ط د الضلع القائم قرين الضلع المائل الذي هو خط ي ط. فقد وجدنا الضلع القائم والضلع المائل لرأسي السرطان والجدي للمقياس المفروض والعرض المفروض.

فأما لرأسي الجوزاء والأسد ولرأسي نظيريهما اللذين هما / رأسا ١٥-ظ القوس والدلو، فإنا نجعل قوسي ر ش ه ن مثل ميل رأس الجوزاء؛ و‹أما› لرأسي الثور والسنبلة ولرأسي نظيريهما اللذين هما رأسا العقرب والحوت، نجعل قوسي ر ش ه ن مثل ميل رأس الثور؛ وسائر العمل كما ذكرنا، إلا أن المقياس لجميع ذلك واحد بعينه.

فأما الموضع الذي لا يكون له عرض، فإنا نأخذ مقدار المقياس من خط ي ش، الذي هو قائم على خط ي ب، ونجيز على رأس المقياس خطاً موازياً لخط ي ب، كما أجزنا على نقطة م رأس المقياس، خطاً موازياً لخط ي ج، ثم باقي العمل كما وصفنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

ونخرجه أيضاً على سبيل الحساب ليكون شاهداً على ما أخرجناه ١٦-ظ بالخطوط الهندسية.

8 الضلع: ضلع / ي ط: ر ط – 10 ي ا د: ب ا د – 14 قرين: فزين.

Nous avons montré en effet que la droite parallèle à la droite menée du centre du cercle jusqu'au <point correspondant> à la grandeur de la latitude du lieu sur l'arc *BC* est la droite qui passe par le sommet du gnomon supposé perpendiculaire à la droite menée jusqu'au <point correspondant> à la grandeur de la latitude du lieu. La grandeur qui se trouve entre les deux droites menées pour les deux arcs de déclinaison, quelle que soit cette déclinaison, est appelée le côté transverse de ces deux sections engendrées dans les deux cônes qui se rencontrent par leur sommet. Il nous faut connaître le côté droit associé à ce côté que nous venons de nommer; nous disons : il a été établi à partir de ce que nous avons montré que le rapport du produit de *EH* par *HR* au carré de *HJ* est égal au rapport du côté droit au côté transverse. Il nous faut donc maintenant exhiber la grandeur de ces droites que nous avons nommées pour les multiplier les unes par les autres et les diviser les unes par les autres afin de déterminer le côté droit. Nous menons donc dans ce cas de figure la droite du gnomon jusqu'à la circonférence du cercle ; soit la droite *JD′*. Déterminons les sinus de *UJT*, *W′JR* et *UCT*, et disons ensuite que l'arc *CB* est connu et que son sinus qui
17r est / la droite *U′C* est connu ; or l'arc *RB* est également connu, donc son sinus qui est la droite *GR* est connu, les deux droites *BG* et *BU′* qui sont les deux sinus inverses pour les deux arcs *RB* et *CB*, sont connues, il reste les deux droites *U′J* et *GJ* connues. Mais le rapport de la droite *JU′* connue à la droite *U′C* connue est égal au rapport de la droite *GJ* connue à la droite *GH* inconnue. De cela, il vient la droite *GH* connue. Nous l'ajoutons donc à la droite *GE* connue et nous la soustrayons de la droite *RG* connue, il vient alors les deux droites *EH* et *HR* connues. Mais la droite *HJ* peut la somme des deux droites *HG* et *GJ*, donc la droite *HJ* est également connue. Nous prolongeons ensuite le gnomon <qui est> sur la droite *JM* jusqu'au point

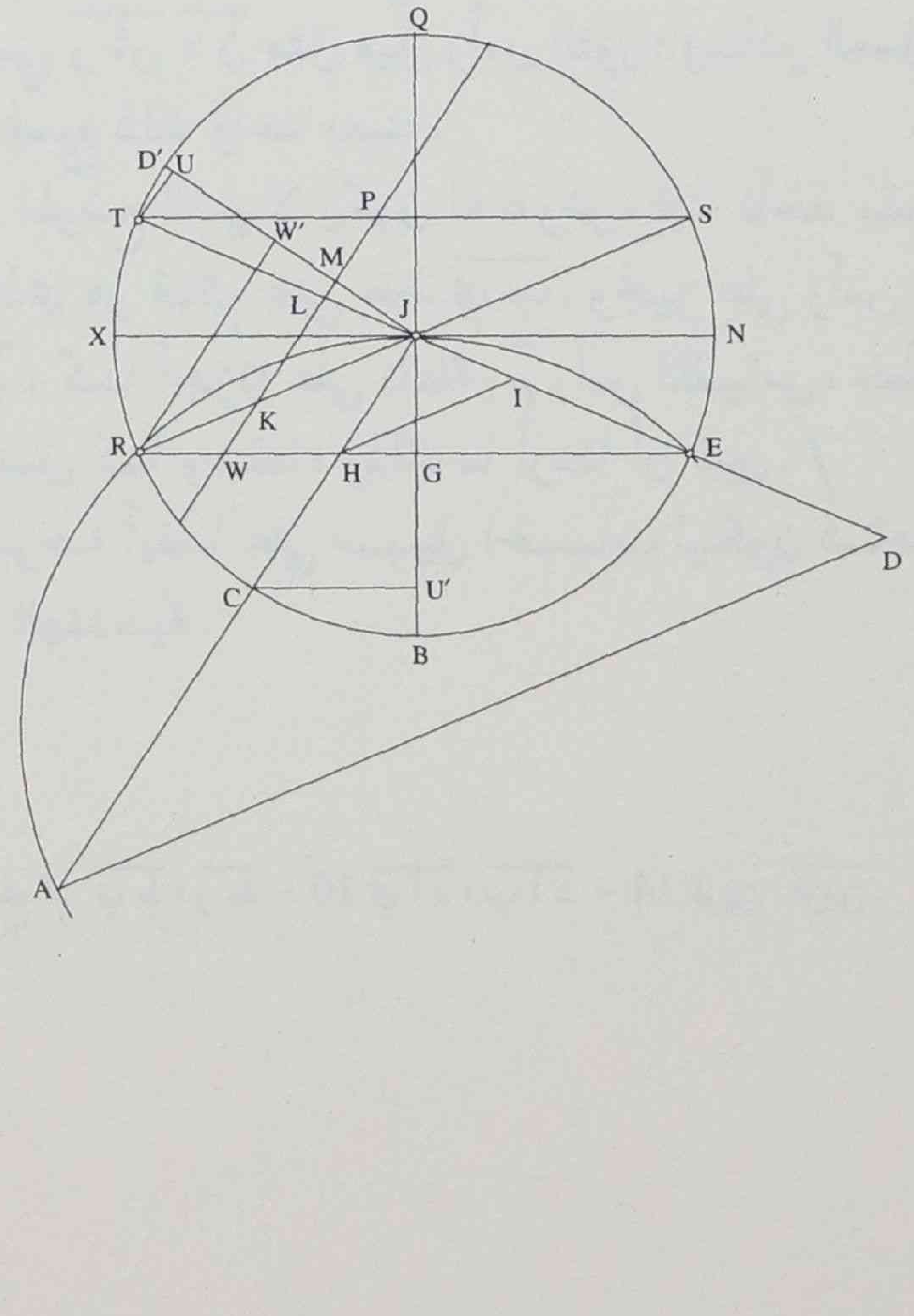
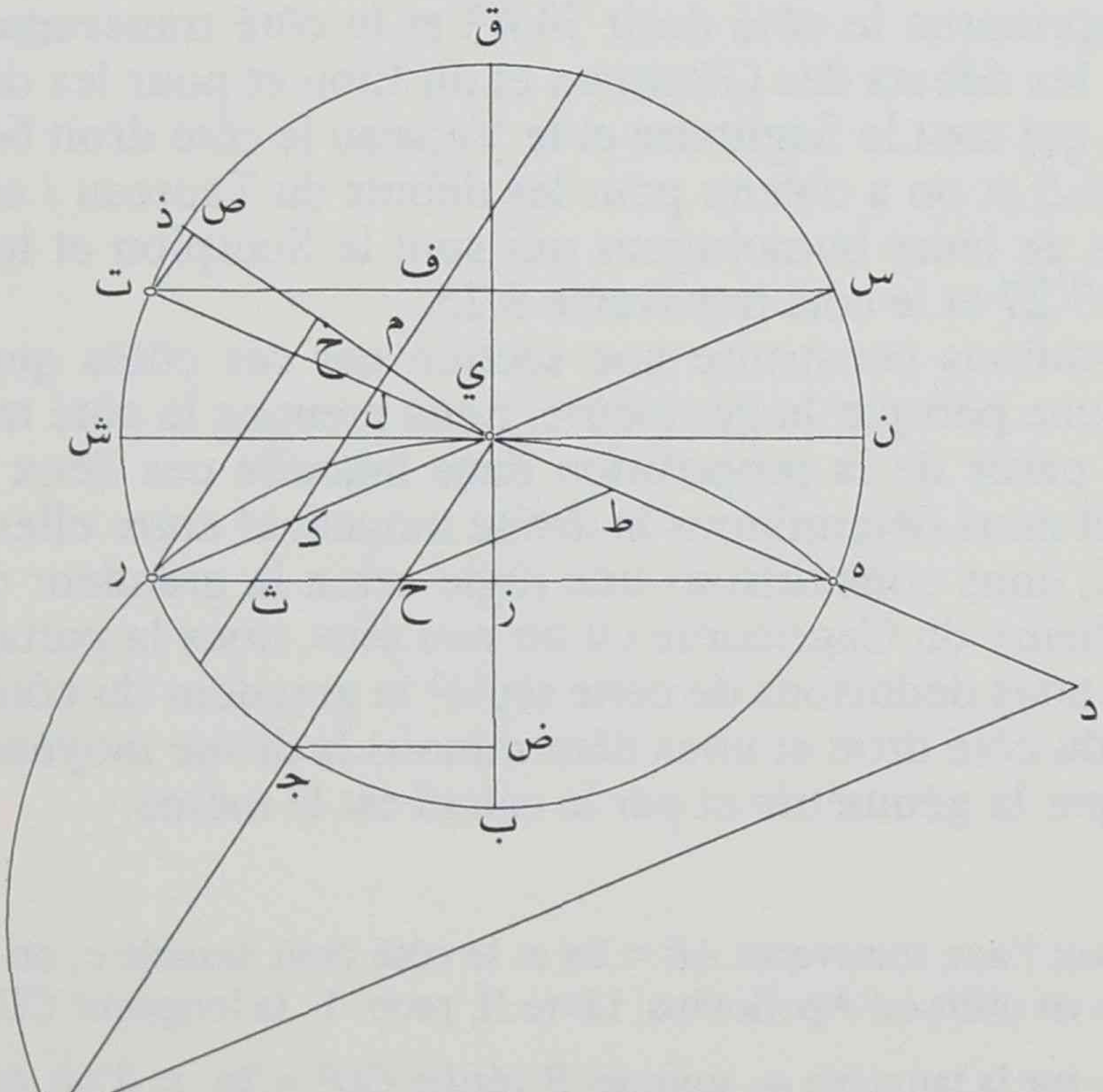


Fig. 14

فإنا قد بيّنا أن الخط الموازي للخط المخرج من مركز الدائرة إلى مقدار عرض البلد على قوس ب جـ، هو الخط الذي يمرّ على رأس المقياس المفروض القائم على الخط المخرج إلى مقدار عرض البلد. والمقدار الذي يقع ما بين الخطين المخرجين لقوسي الميل، أي ميل كان، فإنه يسمى الضلع المائل لهذين القطعين اللذين حدثا في المخروطين الملتقيين على رؤوسهما. ونحتاج أن نعلم الضلع القائم لهذا الضلع الذي سمينا. فنقول: إنه قد تبين مما بيّنا أن نسبة مسطح ه ح في ح ر إلى مربع ح ي كنسبة الضلع القائم إلى الضلع المائل. فنحتاج الآن أن نبين كمية هذه الخطوط التي سمينا، لنضرب بعضها في بعض ونقسمها على بعض ليخرج لنا الضلع القائم. فنخرج في هذه الصورة خط المقياس إلى محيط الدائرة، وهو خط ي ذ. ونخرج جيوب ص ي ت خ ي ر ص جـ ت. ثم نقول: إن قوس جـ ب معلومة، وجيبها الذي هو / خط ض جـ ١٧-ظ معلوم، وقوس ر ب أيضًا معلومة، فجيبها الذي هو خط ز ر معلوم، وخطا ب ز ب ض اللذان هما جيبان منكوسان لقوسي ر ب جـ ب معلومان؛ فيبقى خطا ض ي ز ي معلومين. ونسبة خط ي ض المعلوم إلى خط ض جـ المعلوم كنسبة خط ز ي المعلوم إلى خط ز ح المجهول. فيصير من ذلك خط ز ح



7 ح ر: ح – 8 بعضها: متآكلة – 9 خط: خطا – 12 ض جـ: صحب / فجيبها: كتب بعدها «معلوم»، ثم ضرب عليها بالقلم / ز ر: د ر – 13 ب ض: ر ص / اللذان: اللذين / فيبقى: فيبقا – 14 ي ض: بض.

D', il vient l'arc TD' connu, car l'angle TJD' est connu et l'angle $D'JR$ est connu, donc l'arc RD' est connu ; déterminons le sinus TU et le sinus RW', les deux droites $W'D'$ et UD' seront alors connues, car elles sont les sinus inverses pour les deux arcs RD' et TD', il reste donc la droite $W'J$ connue de laquelle on retranche le gnomon connu, il reste alors également la droite MW' connue. Mais le rapport de la droite JW' à la droite $W'R$ est égal au rapport de la droite JM à la droite MK, c'est pour cela que la droite MK
17v sera connue. / Mais le rapport de la droite JU à la droite UT est égal au rapport de la droite JM à la droite ML, la droite ML sera alors connue. Nous la retranchons de la droite MK connue, il reste la droite KL connue qui est le côté transverse dans le cas de figure. Nous multiplions la droite EH par la droite HR et nous multiplions ce produit par la droite KL, nous divisons ce produit par le carré de la droite HJ, ce qu'on obtient est alors le côté droit associé au côté transverse de cette section.

Le procédé est le même pour toutes les latitudes, toutes les déclinaisons et tous les gnomons à l'exception de la position qui n'a pas de latitude. Si donc on a une position qui n'a pas de latitude, il faut prendre le gnomon sur la droite JX qui est perpendiculaire à la droite JB; on fait passer par le sommet du gnomon une droite parallèle à la droite JB, comme on a fait passer par le point M une droite parallèle à la droite JC et le reste du procédé est comme nous l'avons exposé. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons déterminé pour la latitude 39°30 et pour les courbes du Cancer et du Capricorne le côté droit 54.43 et le côté transverse 19.15; on a obtenu pour les débuts des Gémeaux et du Lion et pour les débuts de leurs homologues qui sont le Sagittaire et le Verseau le côté droit 64.13 et le côté
18r transverse 16.5 et on a obtenu pour les débuts du Taureau / et de la Vierge et les débuts de leurs homologues qui sont le Scorpion et les Poissons le côté droit 117.27 et le côté transverse 8.25.

Si nous voulons construire une section sur ces côtés que nous avons nommés : d'une part par la géométrie, nous prenons le côté transverse et le côté droit à partir de la proposition dans laquelle ces deux côtés ont été déterminés et nous déterminons la droite moyenne[1] entre elles ; d'autre part par le calcul, nous construisons une règle selon la grandeur de l'ombre de la première heure du Capricorne ou un peu plus, nous la partageons en parties égales[2], nous déduisons de cette règle[3] la grandeur du côté transverse et la grandeur du côté droit et nous déterminons la droite moyenne entre elles. Le procédé par la géométrie et par le calcul est le même.

[1] Connaissant l'axe transverse $AB = 2a$ et le côté droit associé c, on peut déterminer les asymptotes en utilisant Apollonius, Livre II, prop. 1 : la longueur CD déterminée par les asymptotes sur la tangente au sommet B vérifie $CD^2 = 2a \cdot c$, d'où $BC = \frac{1}{2}\sqrt{2a \cdot c}$.

[2] Il semble d'après la suite que chacune de ces parties est égale à un douzième du gnomon, comme l'indique la dernière phrase de ce paragraphe.

[3] À l'aide de la règle ainsi graduée, l'auteur détermine les nombres qui mesurent l'axe transverse et le côté droit ; par le calcul, on obtient leur moyenne géométrique qui est la mesure de la droite cherchée.

معلومًا، فنزيده على خط ز ه المعلوم وننقصه من خط ر ز المعلوم، فيصير خطا ه ح ح ر معلومين. وخط ح ي يقوى على خطي ح ز ز ي، فخط ح ي أيضًا معلوم. ثم نخرج المقياس على خط ي م إلى نقطة ذ، فيصير قوس ت ذ معلومة، لأن زاوية ت ي ذ معلومة وزاوية ذ ي ر معلومة، فقوس ر ذ معلومة؛ ونخرج جيب ت ص وجيب ر خ، فيصير خطا خ ذ ص ذ معلومين، لأنهما جيبان منكوسان لقوسي ر ذ ت ذ، فيبقى خط خ ي معلومًا، فنلقي منه المقياس المعلوم، فيبقى أيضًا خط م خ معلومًا. ونسبة خط ي خ إلى خط خ ر كنسبة خط ي م إلى خط م ك، فيصير لذلك خط م ك معلومًا./ ونسبة خط ١٧-ظ ي ص إلى خط ص ت كنسبة خط ي م إلى ⟨خط⟩ م ل، فخط م ل يصير معلومًا؛ فنلقيه من خط م ك المعلوم، فيبقى خط ك ل، الذي هو الضلع المائل في الصورة، معلومًا. فنضرب خط ه ح في خط ح ر، ونضرب ما اجتمع في خط ك ل، فما اجتمع من ذلك نقسمه على مربع خط ح ي؛ فما خرج فهو الضلع القائم القرين للضلع المائل لهذا القطع.

والعمل لجميع العروض والميول والمقاييس واحد، إلا في موضع لا يكون له عرض. فإذا كان موضع لا عرض له، فينبغي أن يؤخذ المقياس من خط ي ش الذي هو قائم على خط ي ب، ويجاز على رأس المقياس خط موازٍ لخط ي ب، كما أجيز على نقطة م ⟨خط⟩ موازٍ لخط ي ج، وسائر العمل كما ذكرنا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وقد أخرجنا العرض لط ل، وخرج لمداري السرطان والجدي الضلع القائم ند مج والضلع المائل يط يه، وخرج لرأسي الجوزاء والأسد ولرأسي نظيريهما اللذين هما القوس والدلو الضلع القائم سد يج والضلع المائل يو ه، وخرج لرأسي الثور / والسنبلة ولرأسي نظيريهما اللذين هما العقرب ١٨-و والحوت الضلع القائم قيز كز والضلع المائل ح كه.

فإن أردنا أن نعمل قطعًا على هذه الأضلاع التي سمينا: أما بالهندسة، فنأخذ الضلع المائل والقائم من الشكل، الذي خرج لنا هذان الضلعان فيه ونخرج الخط الموسط بينهما؛ وأما بالحساب، فنعمل مسطرة ونقسمها بأقسام متساوية على مقدار ظل أول ساعة من الجدي أو أكثر قليلاً، ونرفع من هذه المسطرة مقدار الضلع المائل والضلع القائم، ونخرج الخط الموسط بينهما. والعمل بالهندسة والحساب واحد.

1 ر ز: ر ه – 4 ذ ي ر: ذ ي ز – 9 ي ص: ر ص – 11 فنضرب: فضرب – 17 موازٍ: موازيًا – 19 ل: ك، ثم كتب عليها الصحيح – 26 ونقسمها: ونقسمه.

Quant au gnomon qui procède par la géométrie, sa mesure est ce que nous avons supposé dans cette même proposition. Les parties de la règle sont égales aux parties du gnomon si on le prend comme douze parties ; si on procède par le calcul, sa mesure est douze des parties de la règle que nous avons construite.

Nous voulons montrer comment déterminer entre les deux côtés que nous avons nommés une droite moyenne, à partir de quels points nous
18v menons les deux droites qui ne rencontrent pas / la section et sur quels points nous construisons la section. Nous traçons une droite illimitée sur laquelle nous prenons <une grandeur> égale au côté droit, soit la droite *CB*, et la droite *BA* égale au côté transverse ; partageons la droite *AC* en deux moitiés au point *D*, traçons avec le centre *D* et à la distance *DC* un cercle *CGAH* et élevons au point *B*, de part et d'autre, deux perpendiculaires qui aboutissent à la circonférence du cercle, soit *BG* et *BH*.

Je dis que les deux droites *BG* et *BH* sont deux moyennes entre les deux droites *CB* et *BA*, d'après ce qui a été montré dans la proposition neuf du sixième livre de l'ouvrage d'Euclide[1].

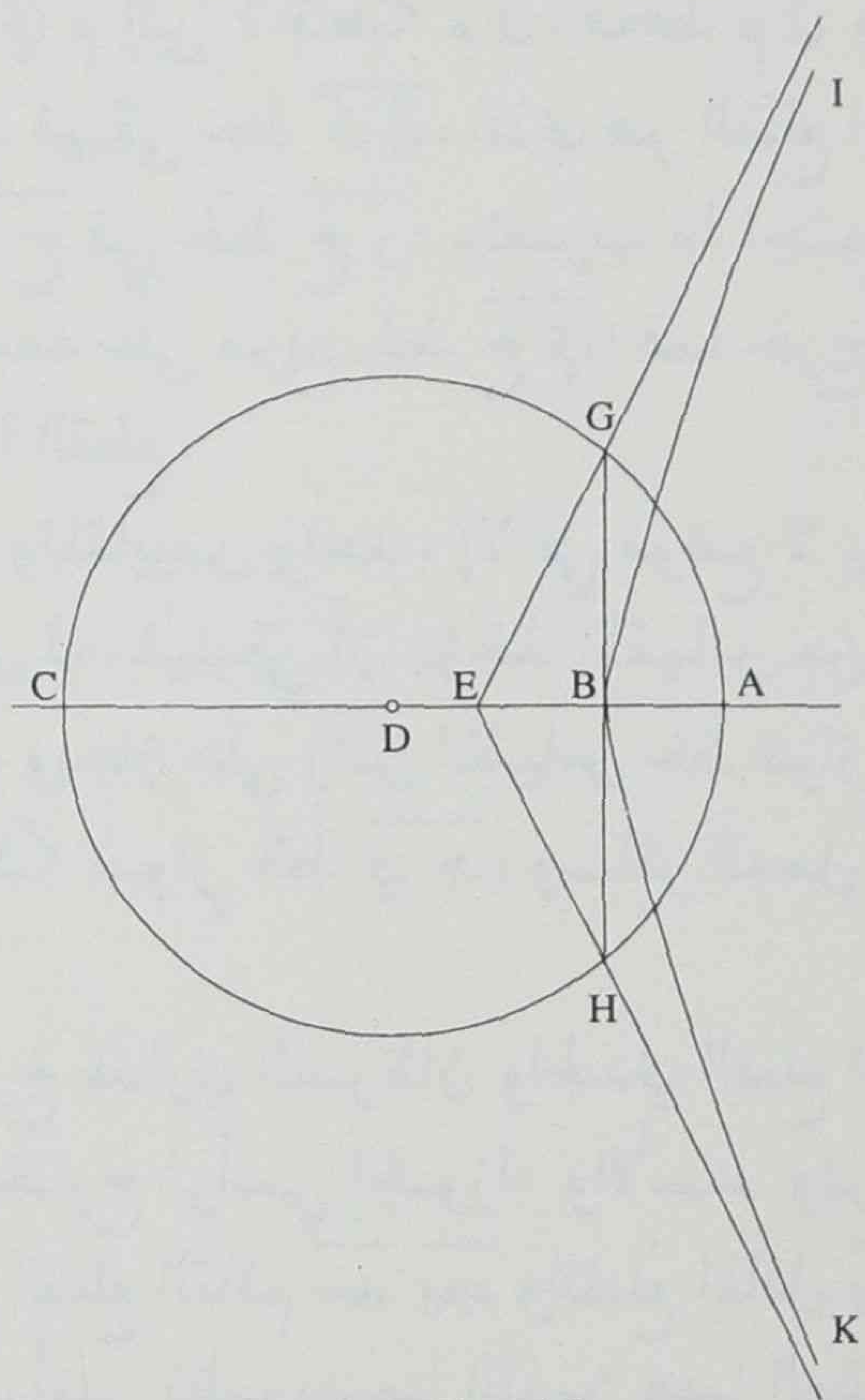


Fig. 15

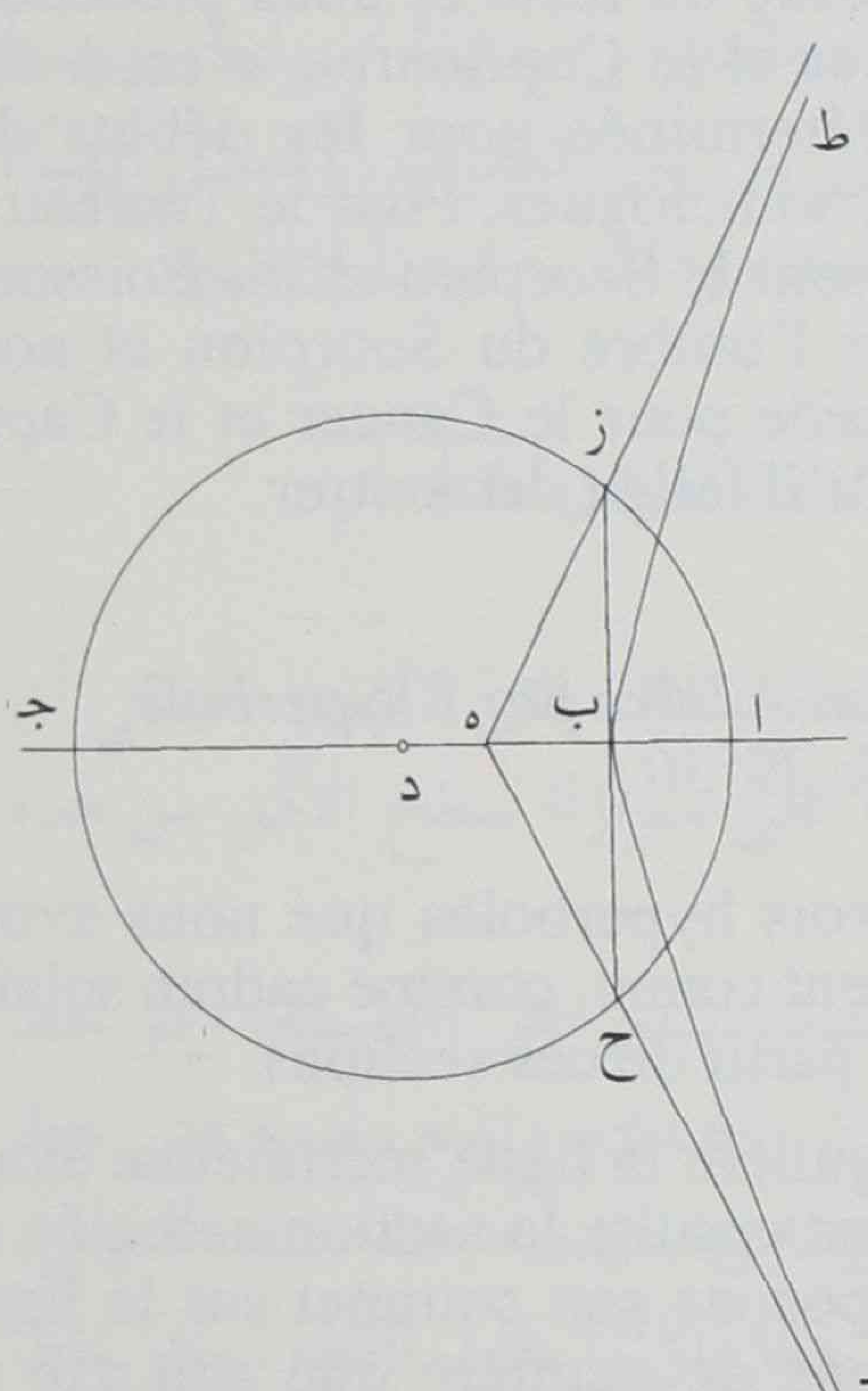
D'autre part, par le calcul, nous multiplions le côté transverse par le côté droit et nous prenons le produit ; ce produit est le carré de la droite moyenne entre eux, que nous élevons ensuite de part et d'autre, entre les deux côtés, comme nous l'avons élevée par la géométrie.

Puis nous soustrayons l'ombre du début du Cancer de l'ombre du début du Capricorne à la moitié de la journée si la latitude de notre lieu est plus grande que la déclinaison du Capricorne et nous additionnons les deux ombres si la latitude est plus petite que la déclinaison du Capricorne. Nous divisons ce que nous obtenons en deux moitiés et nous prenons par le com-
19r pas la grandeur de cette moitié sur le patron / que nous avons construit : ou bien nous procédons par la géométrie pour le patron que nous avons construit et dont le gnomon a été obtenu[2] par la géométrie, ou bien nous procédons par le calcul pour le patron que nous avons construit pour procéder par le calcul et à partir duquel nous avons évalué le gnomon.

[1] Proposition 13 de la traduction de Peyrard.
[2] Était donné géométriquement.

وأما المقياس الذي يعمل بالهندسة، فمقياسه ما كنا فرضناه في الشكل بعينه. وأجزاء المسطرة مساوية لأجزاء المقياس إذا قسمت على اثني عشر قسماً، والذي يعمل بالحساب فمقياسه اثنا عشر جزءاً من أجزاء المسطرة التي عملناها.

نريد أن نبين كيف نخرج فيما بين الضلعين اللذين سميناهما خطاً موسطاً، ومن أية نقطة أخرجنا الخطين اللذين لا يلقيان / القطع وعلى أية ١٨-ظ
نقطة نعمل القطع. فنخط خطاً مستقيماً ولا نجعل له نهاية، ونأخذ منه مثل الضلع القائم، وهو خط جـ ب، ومثل الضلع المائل، وهو خط ب ا؛ ونقسم خط ا جـ بنصفين على نقطة د، وندير على مركز د وببعد د جـ دائرة جـ ز ا ح، ونقيم على نقطة ب من الجهتين جميعاً عمودين قائمين ينتهيان إلى محيط الدائرة، عليهما ب ز ب ح.



فأقول: إن خطي ب ز ب ح موسطان فيما بين خطي جـ ب ب ا، كما تبين في الشكل التاسع من المقالة السادسة من كتاب أقليدس.

وأما بالحساب، فإنا نضرب الضلع المائل في الضلع القائم، ونأخذ ما اجتمع، فما اجتمع، فهو ⟨مربع⟩ الخط الموسط فيما بينهما، ثم نقيمه فيما بين الضلعين من الجهتين جميعاً كما أقمنا ذلك بالهندسة.

ثم ننقص ظل رأس السرطان من ظل رأس الجدي نصف النهار، إن كان عرض بلدنا أكثر من ميل الجدي، ونجمع الظلين إذا كان العرض أقل من ميل الجدي؛ فما حصل نقسمه بنصفين و⟨نأخذ⟩ بالبركار مقدار هذا النصف من المسطرة التي / عملناها. أما من التي عملناها للذي خرج لنا مقياسها ١٩-و
بالهندسة، فنعملها بالهندسة؛ وأما من المسطرة التي عملناها للعمل بالحساب وقدرنا المقياس منها، فنعملها بالحساب.

3 اثنا: اثني – 6 أية (الأولى والثانية): ايت – 26 التي عملناها: الذي عملنا – 27 فنعملها: فنعملنا – 28 فنعملها: فنعملنا.

Nous plaçons l'un de ses deux sommets au point *B* qui est le sommet de la section et l'autre sommet <au point> qu'il atteint sur la droite *BC*, que ce soit le point *E*, nous menons du point *E* les deux droites *EG* et *EH*[1] que nous prolongeons, il est clair qu'elles sont les deux droites qui ne rencontrent pas la section et que le point *B* est le sommet de la section, d'après ce qui a été montré dans la première proposition du second livre de l'ouvrage d'Apollonius sur les *Coniques*. Nous construisons donc sur l'angle *GEH* au point *B* une hyperbole, soit la section *IOK*; elle sera le patron pour les débuts du Cancer et du Capricorne.

Si nous voulons <le patron> pour les débuts des Gémeaux et du Lion et les débuts de leurs homologues, c'est-à-dire le Sagittaire et le Verseau, nous retranchons l'ombre des Gémeaux à la moitié de la journée de l'ombre du Sagittaire, nous prenons la moitié du reste et nous procédons comme nous avons procédé pour le Cancer et le Capricorne, c'est-à-dire sur la droite moyenne qui nous a été déterminée pour les débuts des Gémeaux et du Lion et les débuts de leurs homologues. Pour le Taureau et
19v la Vierge / et pour leurs homologues qui sont le Scorpion et les Poissons, nous retranchons l'ombre du Taureau de l'ombre du Scorpion et nous procédons aussi, comme nous avons procédé pour le Cancer et le Capricorne et pour les Gémeaux et le Lion. Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple de construction d'un cadran solaire par l'hyperbole pour une latitude de 39°30 /

20r Une fois achevée la construction des trois hyperboles que nous avons mentionnées, il reste à construire l'instrument connu, comme cadran solaire placé parallèlement au plan de l'horizon, à partir de ces sections.

Nous traçons dans une surface plane régulière la ligne méridienne exactement, soit la droite *AB*. Nous considérons ensuite la section associée au début du Cancer et du Capricorne, nous posons son sommet sur la ligne méridienne à la position que nous voulons de manière que son axe se superpose à la ligne méridienne et que la convexité de la section soit du côté du point *A* et nous gravons autour d'elle une ligne, soit la ligne courbe *EDG* — *D* étant sur la ligne méridienne ; c'est la courbe du Cancer. Nous plaçons cette même section dans la direction opposée à la première au point *W* — le point *W* étant sur la ligne méridienne — et telle que la convexité de la section soit du côté du point *B*. Posons ce qui est entre le point *D* et le point *W* égal à la différence entre l'ombre, à la moitié de la journée, du début du Cancer et l'ombre, à la moitié de la journée, du début du Capricorne pour la latitude 39°30, soit 20.9.27. Faisons en sorte que

[1] Ceci est inexact et la figure du manuscrit comporte les deux erreurs du texte : si *E* est un sommet, les asymptotes n'y passent pas et si *E* est le milieu de l'axe transverse, *EG* et *EH* ne sont pas les asymptotes (voir commentaire p. 67).

ونضع أحد رأسيه على نقطة ب، الذي هو رأس القطع، والرأس الآخر حيث بلغ من خط ب ج، فكأنه بلغ إلى نقطة ه؛ فنخرج من نقطة ه خطي ه ز ه ح، ونخرجهما على استقامتهما. فبيّنٌ أنهما الخطان اللذان لا يلقيان القطع، ونقطة ب رأس القطع، على ما تبين في الشكل الأول من المقالة الثانية من كتاب أبلونيوس في *المخروطات*. فنعمل على زاوية ز ه ح على نقطة ب قطعًا زائداً مثل قطع ط ع ك، يكون مسطرة لرأسي السرطان والجدي.

وإن أردنا لرأسي الجوزاء والأسد ولرأسي نظيريهما، أعني القوس والدلو، فنلقي ظل الجوزاء نصف النهار من ظل القوس ونأخذ نصف الباقي، ونعمل كما عملنا للسرطان والجدي، أعني على الخط الموسط الذي خرج لنا لرأسي الجوزاء والأسد ولرأسي نظيريهما. والثور والسنبلة / ولنظيريهما ١٩-ظ اللذين هما العقرب والحوت، نلقي ظل الثور من ظل العقرب، ونعمل أيضًا، كما عملنا للسرطان والجدي وللجوزاء والأسد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

مثال عمل الرخامة بالقطع الزائد لعرض لط ل /

فإذ قد فرغنا من عمل القطوع الزائدة الثلاثة التي ذكرنا، فبقي أن ٢٠-و نعمل الآلة المعروفة بالرخامة المنصوبة على موازاة سطح الأفق من هذه القطوع.

فنخط في بسيط مسطح مستوٍ خط نصف النهار على الحقيقة، وهو خط ا ب. ثم نأخذ القطع الذي لرأسي السرطان والجدي، ونضع رأسه على خط نصف النهار على أي موضع شئنا وضعًا يطابق سهمه خط نصف النهار، ويكون حدبة القطع مما يلي نقطة آ، ونخط خطًا مؤثراً حول القطع، وهو خط ه د ز المنحني – ود على خط نصف النهار –، وهو مدار السرطان. ونضع أيضًا هذا القطع بعينه على الجهة المقابلة الأولى على نقطة ث – ونقطة ث على خط نصف النهار – وتكون حدبة القطع مما يلي نقطة ب. ونجعل ما بين نقطة د إلى نقطة ث مثل فضل ما بين ظل نصف نهار رأس السرطان وبين ظل نصف نهار رأس الجدي الذي هو في عرض لط ل ك ط كز. ونجعل أن يكون

3 يلقيان: يلتقيان – 6 قطعًا: قطا / ط ع ك: طبك – 10 ولنظيريهما: ولنظيرهما – 14 فبقي: وبقي – 17 بسيط: مكررة في السطر التالي / مستوٍ: مستوي – 20 حول: احوال – 24 د: جـ – 25 نهار: النهار / ل: ك.

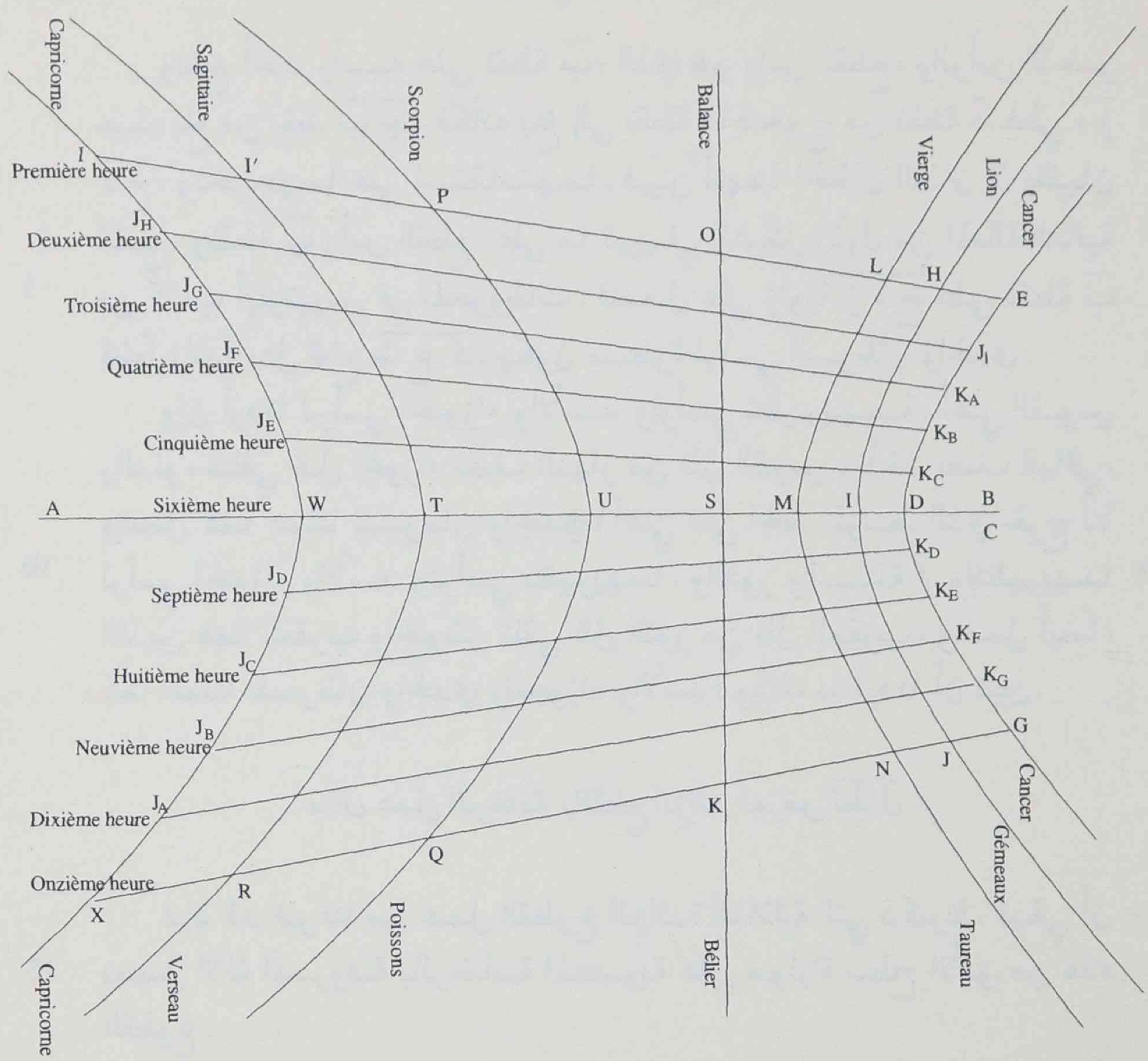
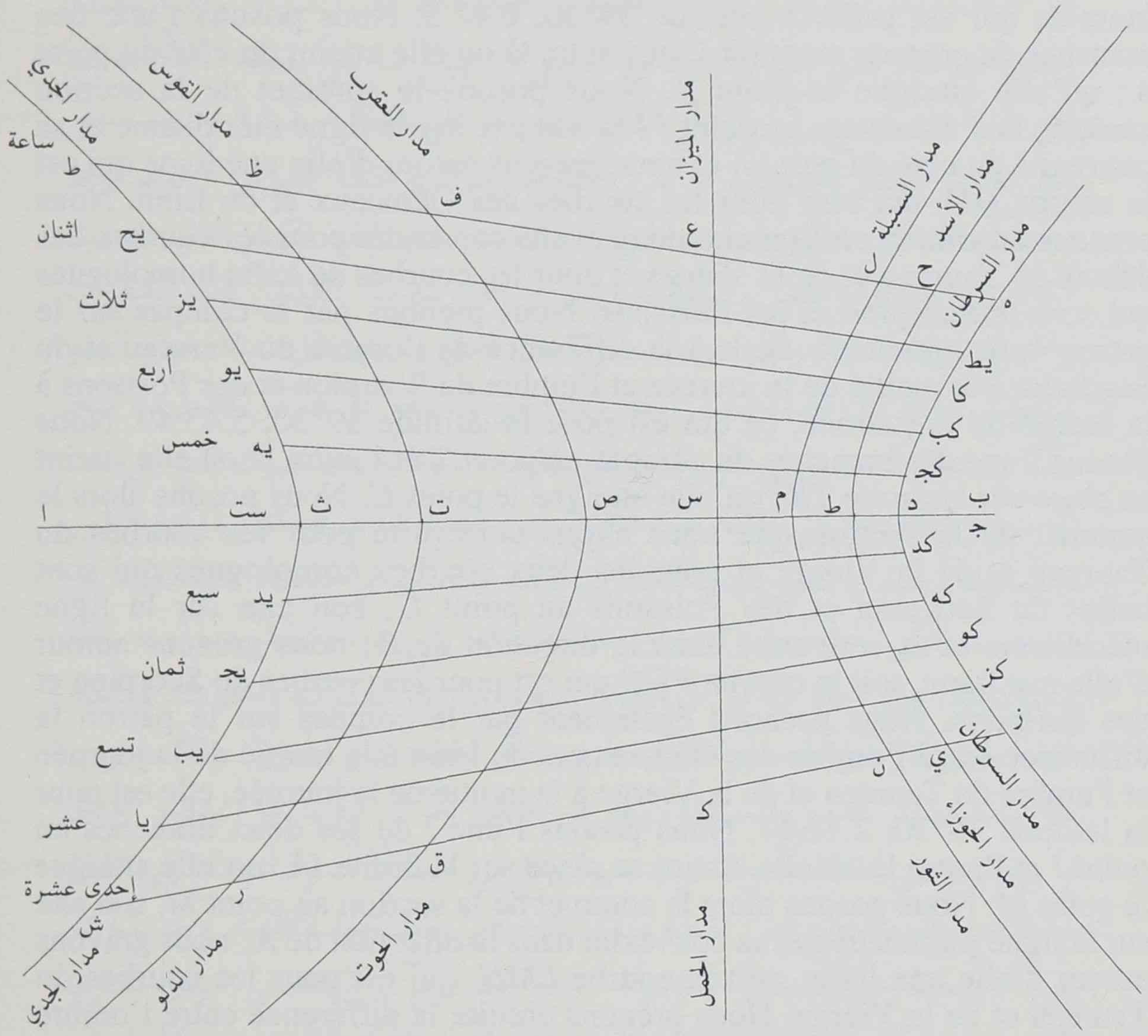


Fig. 16

l'axe de la section se superpose à la ligne méridienne et gravons également
20v autour d'elle une ligne, comme nous avons tracé / pour le début du Cancer, soit la courbe *IWX* qui est pour la courbe du Capricorne. Prenons ensuite la section que nous avons construite pour le début des Gémeaux et du Lion et pour les débuts de leurs homologues, c'est-à-dire le Sagittaire et le Verseau. Prenons ensuite par le compas sur le patron la grandeur de la différence entre l'ombre du Capricorne à la moitié de la journée et l'ombre du Verseau et du Sagittaire à la moitié de la journée, ce qui est pour la latitude 39°30, 3.1.42. Nous posons l'une des branches du compas au point *W* et l'autre branche là où elle atteint sa place du côté du point *B* ; qu'elle atteigne le point *T*. Nous posons le sommet de la section au point *T*, son axe sur la ligne méridienne et la convexité de la section du côté du point *B* ; et nous gravons autour d'elle une ligne ; soit la courbe *I′TR* qui est pour les courbes du Sagittaire et du Verseau. Nous prenons également par le



سهم القطع يطابق خط نصف النهار، ونخط أيضًا حواليه خطًا مؤثرًا كما خططنا / لرأس السرطان، وهو خط ط ث ش المنحني وهو لمدار الجدي. ثم نأخذ القطع الذي عملناه لرأسي الجوزاء والأسد ولرأسي نظيريهما، أعني القوس والدلو. ثم نأخذ بالبركار من المسطرة مقدار فضل ما بين ظل نصف نهار الجدي وبين ظل نصف نهار الدلو والقوس، وهو في عرض لط ل، جـ آ مب. ونضع إحدى رجلي البركار على نقطة ثَ والرجل الأخرى إلى أن يبلغ ⟨مما يلي نقطة بَ⟩، وكأنه بلغ إلى نقطة تَ. فنضع رأس القطع على نقطة تَ وسهمه على خط نصف النهار وحدبة القطع مما يلي نقطة بَ، ونخط حواليه خطًا مؤثرًا، وهو خط ظ ت ر المنحني وهو لمداري القوس والدلو. ونأخذ ٢٠-ظ

5 نهار: نها – 6 ثَ: تَ – 9 ظ ت ر: صتر.

compas sur le patron la grandeur de la différence entre l'ombre du Cancer à
la moitié de la journée et l'ombre des Gémeaux et du Lion à la moitié de la
journée, qui est pour la latitude 39°30, 0.47.5. Nous posons l'une des
branches du compas au point *D* et l'autre là où elle atteint du côté du point
A ; qu'elle atteigne le point *I*[1]. Nous posons le sommet de la section
21r associée aux Gémeaux au point / *I* et son axe sur la ligne méridienne et sa
convexité du côté du point *A* et nous gravons autour d'elle une ligne qui est
la courbe *HIJ*, qui sera pour les courbes des Gémeaux et du Lion. Nous
prenons ensuite la section que nous avons construite pour les courbes des
débuts du Taureau et de la Vierge et pour les courbes de leurs homologues
qui sont le Scorpion et les Poissons. Nous prenons par le compas sur le
patron <une grandeur> égale à la différence de l'ombre du Verseau et du
Sagittaire à la moitié de la journée et l'ombre du Scorpion et des Poissons à
la moitié de la journée, ce qui est pour la latitude 39°30, 5.43.49. Nous
posons l'une des branches du compas au point *T* et l'autre là où elle atteint
sa place sur la droite *TB* ; qu'elle atteigne le point *U*. Nous posons alors le
sommet de la section que nous avons construite pour les courbes du
Taureau et de la Vierge et pour les deux courbes homologues qui sont
celles du Scorpion et des Poissons au point *U*, son axe sur la ligne
méridienne et sa convexité dans la direction de *B* ; nous gravons autour
d'elle une ligne, soit la courbe *PUQ* qui est pour les courbes du Scorpion et
des Poissons. Nous prenons également par le compas sur le patron la
différence entre l'ombre des Gémeaux et du Lion à la moitié de la journée
et l'ombre du Taureau et de la Vierge à la moitié de la journée, elle est pour
21v la latitude 39°30, 2.11.47. Nous posons l'une / de ses deux branches au
point *I* et l'autre là où elle atteint sa place sur la droite *IA* ; qu'elle atteigne
le point *M*. Nous posons alors le sommet de la section au point *M*, son axe
sur la ligne méridienne et sa convexité dans la direction de *A* ; nous gravons
autour d'elle une ligne, soit la courbe *LMN*, qui est pour les courbes du
Taureau et de la Vierge. Nous prenons ensuite la différence entre l'ombre
du Taureau à la moitié de la journée et l'ombre du Bélier à la moitié de la
journée, ce qui est pour la latitude 39°30, 3.30.54. Nous plaçons l'une des
branches du compas au point *M* et l'autre là où elle atteint sa place sur la
droite *MA* ; qu'elle atteigne le point *S*, le point *S* est alors la position des
courbes du Bélier et de la Balance. Nous prenons ensuite la différence entre
l'ombre du Bélier à la moitié de la journée et l'ombre des Poissons à la
moitié de la journée, ce qui est pour la latitude 39°30, 4.55.35. Nous
posons l'une des branches du compas au point *U* sur la courbe des Poissons
et l'autre là où elle atteint sa place sur la droite *UB*, elle tombera
nécessairement au point *S*. Nous élevons au point *S*, de part et d'autre, deux
perpendiculaires *SO* et *SK*, la ligne *KSO* sera alors une droite pour les

[1] La lettre *I* est déjà utilisée dans ce chapitre, elle désigne ici un point de la droite *AB*.

أيضًا بالبركار من المسطرة مقدار فضل ما بين ظل نصف نهار السرطان وبين ظل نصف نهار الجوزاء والأسد، فهو في عرض لط ل، ٠ مز ه، ونضع إحدى رجلي البركار على نقطة د والآخرى إلى أن يبلغ مما يلي نقطة آ، وكأنه بلغ إلى نقطة ط. فنضع رأس القطع الذي للجوزاء على نقطة / ⟨ط⟩ وسهمه على ٢١-و
خط نصف النهار وحدبته مما يلي آ ونخط حواليه خطًا ⟨مؤثرًا⟩، وهو خط ح ط ي المنحني، فهو لمداري الجوزاء والأسد. ثم نأخذ القطع الذي عملناه ⟨لرأسي⟩ مداري الثور والسنبلة ولمداري نظيريهما، اللذين هما العقرب والحوت. ونأخذ بالبركار من المسطرة مثل فضل ما بين ظل نصف نهار الدلو والقوس وبين ظل نصف نهار العقرب والحوت، وهو في عرض لط ل، ه مج مط؛ ونضع إحدى رجلي البركار على نقطة ت والأخرى حيث بلغ من خط ت ب، وكأنه بلغ إلى نقطة ص. فنضع رأس القطع الذي عملناه لمداري الثور والسنبلة ولمداري نظيريهما، اللذين هما العقرب والحوت، على نقطة ص وسهمه على خط نصف النهار وحدبته مما يلي ب، ونخط حواليه خطًا ⟨مؤثرًا⟩، وهو خط ف ص ق المنحني وهو لمداري العقرب والحوت. ونأخذ أيضًا بالبركار من المسطرة فضل ما بين ظل نصف نهار الجوزاء والأسد وبين ظل نصف نهار الثور والسنبلة، وهو في عرض لط ل ب يا مز؛ ونضع إحدى رجليه على نقطة ط والأخرى حيث بلغ من خط ط آ، وكأنه بلغ إلى نقطة / ٢١-ظ
م. فنضع رأس القطع على نقطة م وسهمه على خط نصف النهار وحدبته مما يلي آ، ونخط حواليه خطًا ⟨مؤثرًا⟩، وهو خط ل م ن ⟨المنحني⟩ وهو لمداري الثور والسنبلة. ثم نأخذ فضل ما بين ظل نصف نهار الثور وبين ظل نصف نهار الحمل، وهو في عرض لط ل جـ ل ند؛ فنضع إحدى رجلي البركار على نقطة م والأخرى حيث بلغ من خط م آ، فكأنه بلغ إلى نقطة س، فنقطة س هي موضع مداري الحمل والميزان. ثم نأخذ فضل ما بين ظل نصف نهار الحمل وبين ظل نصف نهار الحوت، وهو في عرض لط ل د نه له؛ فنضع إحدى رجليه على نقطة ص ⟨على⟩ مدار الحوت والأخرى حيث بلغ من خط ص ب، فإنه لا محالة يقع على نقطة س. فنقيم على نقطة س من الجهتين جميعًا عمودين س ع س ك، فيصير خط ك س ع واحدًا مستقيمًا لمداري

1 مقدار: مقدا – 2 ٠: ه – 3 والآخرى: مكررة في السطر التالي – 7 مداري: لمداري، ثم ضرب على اللام بالقلم – 11 ص: متآكلة – 23 هي: هو – 27 س ع: أسع.

courbes du Bélier et de la Balance. Nous prenons ensuite par le compas sur le patron la grandeur de l'ombre du Bélier à la moitié de la journée, ce qui est dans la latitude 39°30, 3.43 et nous plaçons l'une des branches du
22r compas / au point *D* et l'autre dans la direction de *B* sur la ligne méridienne là où elle atteint sa place, c'est la position du gnomon. Nous y dressons le gnomon qui est douze des parties du patron, nous prenons ensuite par le compas sur le patron la grandeur de l'ombre de la première heure[1] pour le début du Capricorne, ce qui est pour la latitude 39°30, 8.33.50[2], nous plaçons l'une des branches du compas au point du gnomon et l'autre là où elle atteint sa place sur la section *IWX* de part et d'autre, c'est-à-dire du côté de *I* et du côté de *X*; qu'il atteigne les points *I* et *X*. Nous faisons de même de part et d'autre pour la deuxième, la troisième, la quatrième et la cinquième heures ; qu'elle tombe aux points I, J_H, J_G, J_F, J_E, J_D, J_C, J_B, J_A et X. Nous procédons de même aussi pour la courbe du Cancer de part et d'autre ; qu'elle tombe aux points E, J_I, K_A, K_B, K_C, K_D, K_E, K_F, K_G, G. Joignons ensuite chacun des points à l'autre par une ligne qui sont les lignes IE, J_HJ_I, J_GK_A, J_FK_B, J_EK_C, J_DK_D, J_CK_E, J_BK_F, J_AK_G, XG; ce sont les lignes des heures, et nous écrivons les nombres des heures au début de chaque droite[3] et les noms des signes du Zodiaque à leurs places.

Nous avons achevé cela ; voici la figure pour la latitude 39°30. Ce que nous voulions construire.

[1] Litt. : d'une seule heure.

[2] Ce nombre est une valeur approchée de la hauteur du Soleil au moment considéré. Le calcul de la longueur de l'ombre donne 77.9. L'auteur a-t-il voulu donner ici la valeur de la hauteur qui est nécessaire pour le calcul de la longueur de l'ombre ? Y a-t-il une omission dans le texte ?

[3] Litt. : point.

الحمل والميزان. ثم نأخذ بالبركار من المسطرة مقدار ظل نصف نهار الحمل، وهو في عرض لط ل ج مجـ؛ ونضع إحدى رجلي البركار / على نقطة د ٢٢-و والأخرى مما يلي ب على خط نصف النهار فحيث بلغ، فهو موضع المقياس. ثم نقيم عليه المقياس، وهو اثنا عشر جزءاً من أجزاء المسطرة. ثم نأخذ بالبركار من المسطرة مقدار ظل ساعة واحدة لرأس الجدي، وهو في عرض لط ل ح لجـ ن، ونضع إحدى رجلي البركار على نقطة المقياس والأخرى حيث بلغ من قطع ط ث ش من الناحيتين جميعًا، أعني من ناحيتي ط ش، وكأنه بلغ إلى نقطتي ط ش. ونفعل للساعة الثانية والثالثة والرابعة والخامسة كذلك من الجهتين جميعًا، وكأنها وقعت على نقط ط يح يز يو يه يد يجـ يب يا ش. ونعمل لمدار السرطان كذلك أيضًا من الجهتين جميعًا، وكأنها وقعت على نقط ه يط كا كب كجـ كد كه كو كز ز. ثم نصل من كل نقطة إلى نقطة خطًا، وهي خطوط طه يح يط يز كا يو كب يه كجـ يد كد يجـ كه يب كو يا كز ش ز، وهي خطوط الساعات، ونكتب عدد الساعات على رأس كل نقطة فيها وأسماء البروج في مواضعها.

وقد تممنا ذلك، وهذه الصورة لعرض لط ل؛ وذلك ما أردنا عمله.

2 د: س – 4 اثنا: اثني – 6 والأخرى: والاخر – 7 ط: ظ – 10 ش: يش – 11 نقط: نقطة – 12 طه: ظه / يح: يجـ.

TEXTE ET TRADUCTION

IV

Fī ʿamal al-birkār al-tāmm wa-huwa birkār al-makhrūṭ

Sur la construction du compas parfait qui est le compas du cône

103v

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

Traité sur la construction du compas parfait qui est le compas du cône

déterminé par

Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl

Nous voulons construire un compas à l'aide duquel nous tracerons les trois sections coniques mentionnées par Apollonius dans son livre des *Coniques*. Mais, comme nous avons besoin de ce compas pour tracer ces sections, il nous faut décrire ces trois sections, intersections d'un plan sécant au cône et de sa surface latérale, à l'exception du plan sécant passant par le sommet du cône, car, à partir d'un plan sécant au cône passant par son sommet, s'engendre un triangle rectiligne, comme cela a été montré dans ce livre.

La surface commune au plan sécant à la surface latérale du cône et au cône se présente de trois manières ; soit il[1] coupe le cône de sorte qu'il le partage en deux parties et que l'intersection soit ou un cercle ou une <surface> convexe, c'est-à-dire un cercle allongé[2] ; soit il le coupe de sorte que l'intersection dans la direction de la base se prolonge avec la surface latérale du cône vers l'infini. Cette section est de deux sortes, selon que son plan se prolonge suivant une ligne droite parallèle au côté[3] du cône ou suivant une droite qui ne lui est pas parallèle. Il ne peut se produire de l'intersection de la surface latérale du cône avec un plan quelconque qui le coupe d'autre section que celles que nous avons mentionnées. C'est pour cette raison qu'Apollonius a examiné les propriétés de ces sections.

Si on a une surface <plane> quelconque donnée, sur laquelle on trace une ligne à l'aide d'un compas dont la base ou bien est sur la surface ou bien n'est pas sur elle, alors on produira une certaine ligne en faisant tourner la droite du tire-ligne[4] en augmentant le côté du cône[5] ; et si on a besoin de l'augmenter, alors il (le tire-ligne) trace sur la surface une section conique.

[1] Le plan.

[2] Il s'agit de l'ellipse. C'est ainsi que les Banū Mūsā l'ont nommée ; voir *Les mathématiques infinitésimales du* IX^{e} *au* XI^{e} *siècle*, vol. I: *Fondateurs et commentateurs*, London, 1996.

[3] Droite parallèle à une génératrice quelconque.

[4] C'est-à-dire par la rotation de la branche du compas qui engendre une surface conique. Le tire-ligne qu'al-Qūhī appelle *al-mikhaṭṭ*, est nommé par al-Sijzī « la ligne conique » *al-khaṭṭ al-makhrūṭī* ; nous le rendons par tire-ligne.

[5] Voir commentaire (réglage de la longueur du tire-ligne porté par le bras du compas).

بسم الله الرحمن الرحيم ١٠٣–ظ

رسالة في عمل البركار التام وهو بركار المخروط

استخراج

أحمد بن محمد بن عبد الجليل

نريد أن نعمل بركاراً نعمل به القطوع الثلاثة التي ذكرها أبلونيوس في كتابه *في المخروطات*. ولأن البركار نحتاجُ أن نعملَ به هذه القطوع، فينبغي أن نَصِفَ القطوع الثلاثة المشتركة بين السطح القاطع للمخروط وبين بسيطه، سوى ⟨السطح القاطع⟩ الذي يجوزُ على رأس المخروط، لأن السطحَ القاطع لبسيط المخروط الجائزَ على رأسه، إنما يحدث عنه المثلثُ المستقيم الخطوط، كما بُين في ذلك الكتاب.

والسطح المشترك بين السطح القاطع لبسيط المخروط وبين [بسيط] المخروط على ثلاثة أوجه: إمّا أن يقطعَ المخروطَ قطعًا يقسمه بقسمين، ويكون الفصل المشترك إمّا دائرةً وإمّا محدباً، أعني دائرة مستطيلة؛ وإما أن يقطعه، ويجوز الفصل المشترك نحو القاعدة مع بسيط المخروط إلى غير نهاية؛ ويكون هذا القطع على وجهين: إما أن يكون سطحه جائزاً على خط مستقيم موازٍ لضلع المخروط، وإما على خط غير موازٍ له. ولا يقع من الفصل المشترك بين بسيط المخروط وبين سطح ما يفصله قطعٌ سوى ما ذكرناه. فلهذه العلة فحص أبلونيوس عن خواص هذه القطوع.

إذا كان سطح ما مفروضًا، ورُسم عليه خطٌ ببركار، قاعدتُه إما على السطح وإما ليست عليه، فإنه يقع خط ما بإدارة خط مخروطي بتزايد ضلع المخروط؛ وإذا احتاج إلى تزايده، فإنه يرسم على السطح قطعًا مخروطيًا.

19 مفروضًا : مفروض.

Mais, puisque Eutocius a mentionné dans son livre *Les Deux Moyennes* la construction d'un compas dont on a besoin pour les sections coniques d'après Isidore — selon ce qu'il a raconté à propos de celui-ci — et qu'il a construit cet instrument découvert par notre maître Isidore de Milet, auteur des *Mécaniques*, qui est le livre qu'Isidore de Milet a décrit dans son livre où il a commenté le livre de Héron sur *Les Lignes des voûtes*, il nous faut construire cet instrument en raison de son extrême difficulté et du besoin qu'on en a, particulièrement pour les constructions mentionnées dans le livre d'Apollonius sur les *Coniques*, et pour les instruments par lesquels on trace les ombres et les astrolabes plans.

Nous voulons construire un compas à l'aide duquel on obtient les trois sections du cône.

Supposons deux droites *AB* et *AC* qui entourent un angle *A* et supposons
104r / un cercle *DE* de centre *G*. Étant donné que, si nous imaginons que la droite *AC* — le point *A* étant fixé — se meut à partir de sa position initiale d'un mouvement de rotation[1] jusqu'à ce qu'elle revienne à sa position initiale, alors elle trace une surface conique. Si nous élevons une perpendiculaire, comme *AB*, alors il est possible que *AC* trace par son mouvement[2] une <surface> conique dont la base est un cercle.

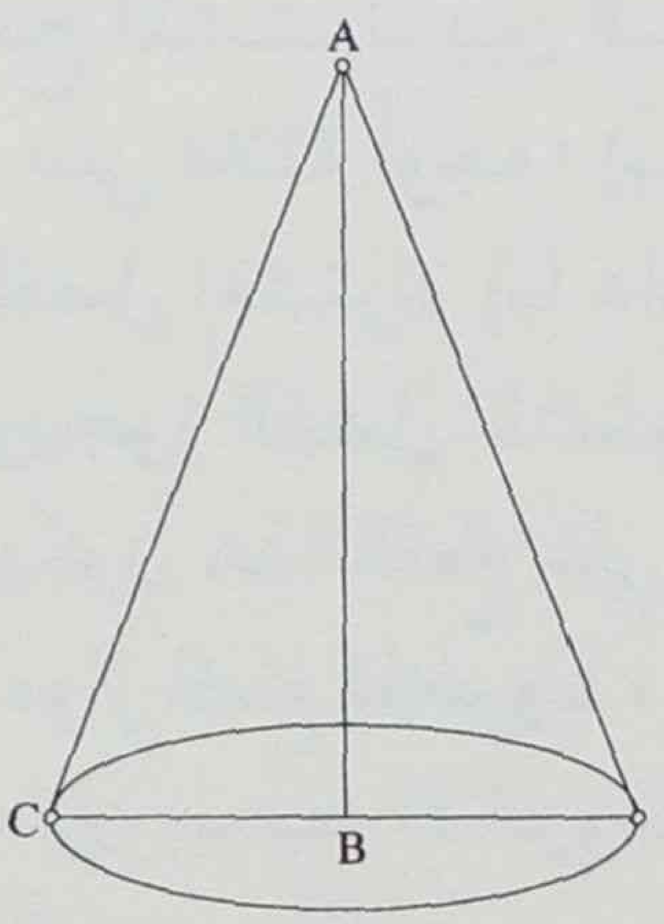


Fig. 1

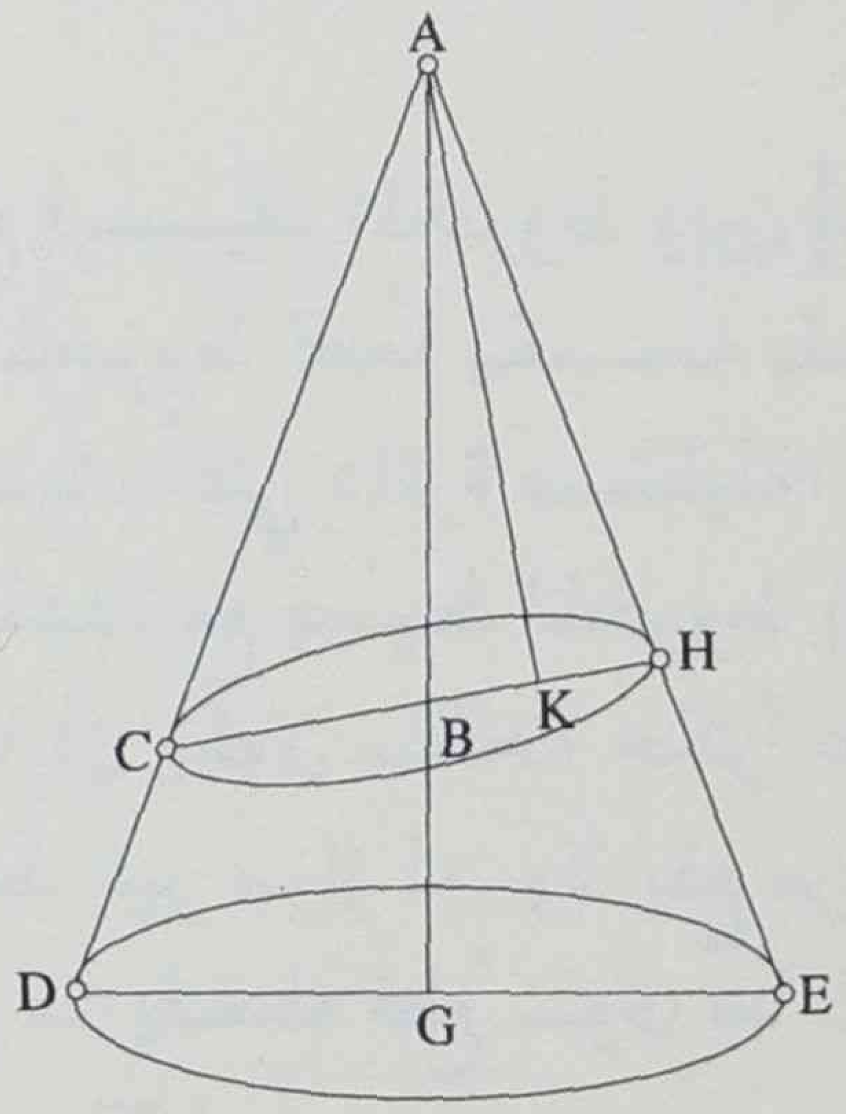


Fig. 2

Si nous imaginons que la droite *AC* — le point *A* étant fixé[3] — se meut autour du cercle *DE* et que son plan est incliné par rapport au plan *HC*, alors, par sa rotation, elle trace sur le plan *HC* une ligne qui entoure un cercle allongé qui est la figure[4] conique qu'Apollonius a appelée ellipse, c'est-à-dire « le déficient ».

[1] Rotation autour de la droite *AB* dont la position est fixe.

[2] Il s'agit du mouvement de *AC* ou du mouvement du triangle rectangle *ABC* autour de l'axe *AB*.

[3] Il faut supposer que l'on fixe, non seulement le point *A*, mais l'axe *AB* tout entier.

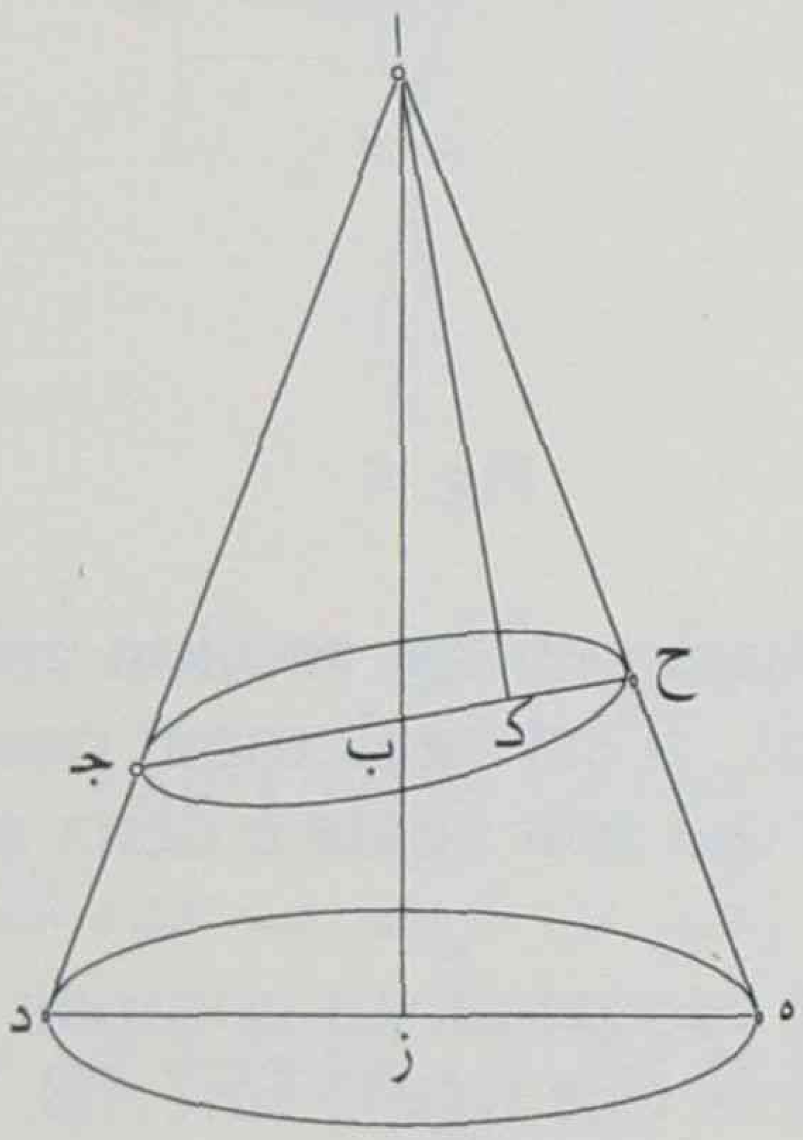
[4] Littéralement : surface.

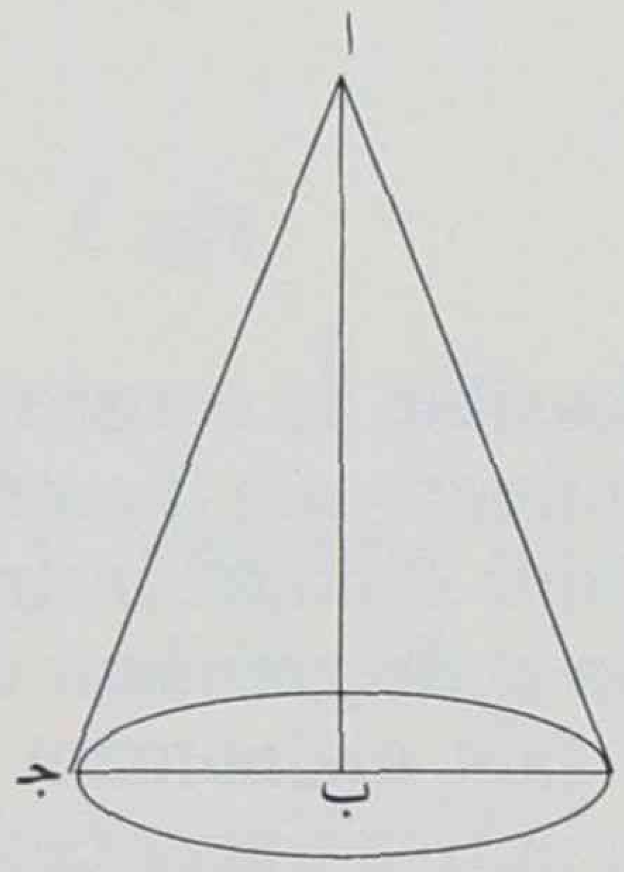
ولأن أوطوقيوس قد ذكرَ في كتابه *الموسطين* عملَ بركار تحتاج إليه قطعُ المخـروطي عن اسيـدورس، وحكاه عنه، ‹و›أنه عـمل هذه الآلة التي استخرجها اسيدورس معلمنا صاحب *المخانيقي* الذي هو ‹من أهل ملط›، وهو الكتاب الذي وصفه في كتابه الذي فسر فيه كتاب إيرن في *الخطوط الطاقية*، فينبغي أن نعمل هذه الآلة لشدة المشقة والحاجة إليها، وخاصة للأعمال المذكورة في كتاب أبلونيوس في *المخروطات*، وفي الآلات التي ترسم الأظلال والأسطرلابات المسطحة.

نريد أن نعمل بركاراً يمكن عنه قطوع المخروط الثلاثة.

فلنفرض خطي اب اجـ يحيطان بزاوية آ، ولنفرض / دائرة د ه على مركز ١٠٤-و
ز. فـمن أجل أنا إذا توهمنا خط اجـ يتحرك، بثبات نقطة آ من موضعه، حركةً دوريةً إلى أن يعود إلى موضعه، فإنه يرسم بسيطاً مخروطياً.

فإنا إذا عملنا عموداً مثل اب، ‹فـ›اجـ أمكن لنا بحركته أن يرسم مخروطاً [يكن] قاعدته تكون دائرة.





وإذا توهمنا أن خط اجـ يتحرك، بثبات نقطة آ، حول دائرة د ه، وسطحه مـائلٌ عن سطح ح جـ، فـإنه يرسم بدورانه في سطح ح جـ ‹خطاً يحيط بدائرة مستطيلة› وهو السطح المخروطي الذي سماه أبلونيوس إلِيبسيس، أي الناقص.

1 إليه: الى – 2 اسيدورس: السندورس – 3 اسيدورس: السندورس – 5 إليها: اليه – 10 من: فى – 12 عموداً: عمودين – 14 أن: كـان – 15-16 ‹خطاً ... مستطيلة›: نجد مكان هذه العبارة كلمات غير مقروءة.

Si on a un plan, tel *IJ*, dont on obtient l'extension en le prolongeant dans toutes les directions, le côté conique *AC* n'étant pas dans la direction de *C*[1] ; et si l'on fait tourner *AC* suivant l'angle *A*, le point *A* étant fixé, jusqu'à ce qu'elle soit coupée par exemple par le plan *IJ* suivant une ligne *IDM*, alors, si la perpendiculaire au plan *IJ* menée à partir du point *A* de la droite *AC* est perpendiculaire à *AC*, c'est une parabole, et si elle ne lui est pas perpendiculaire, c'est une hyperbole.

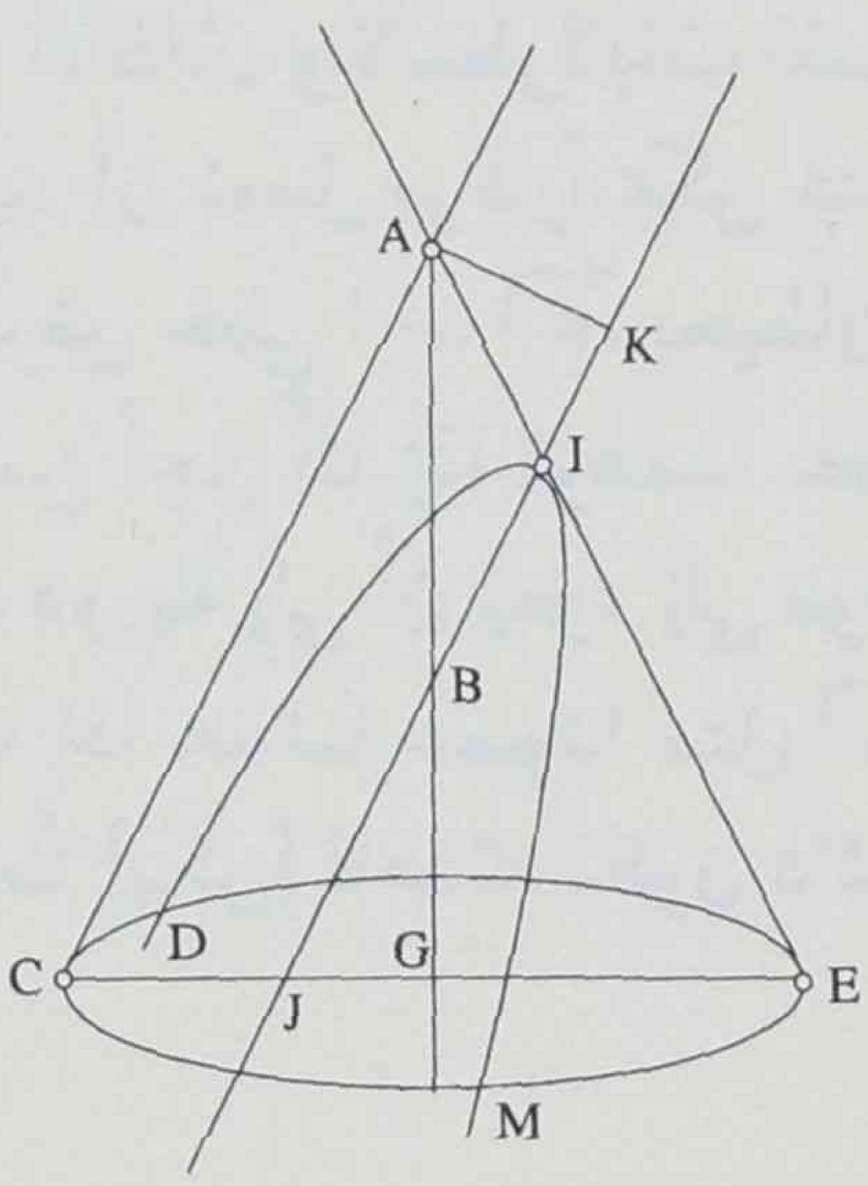


Fig. 3

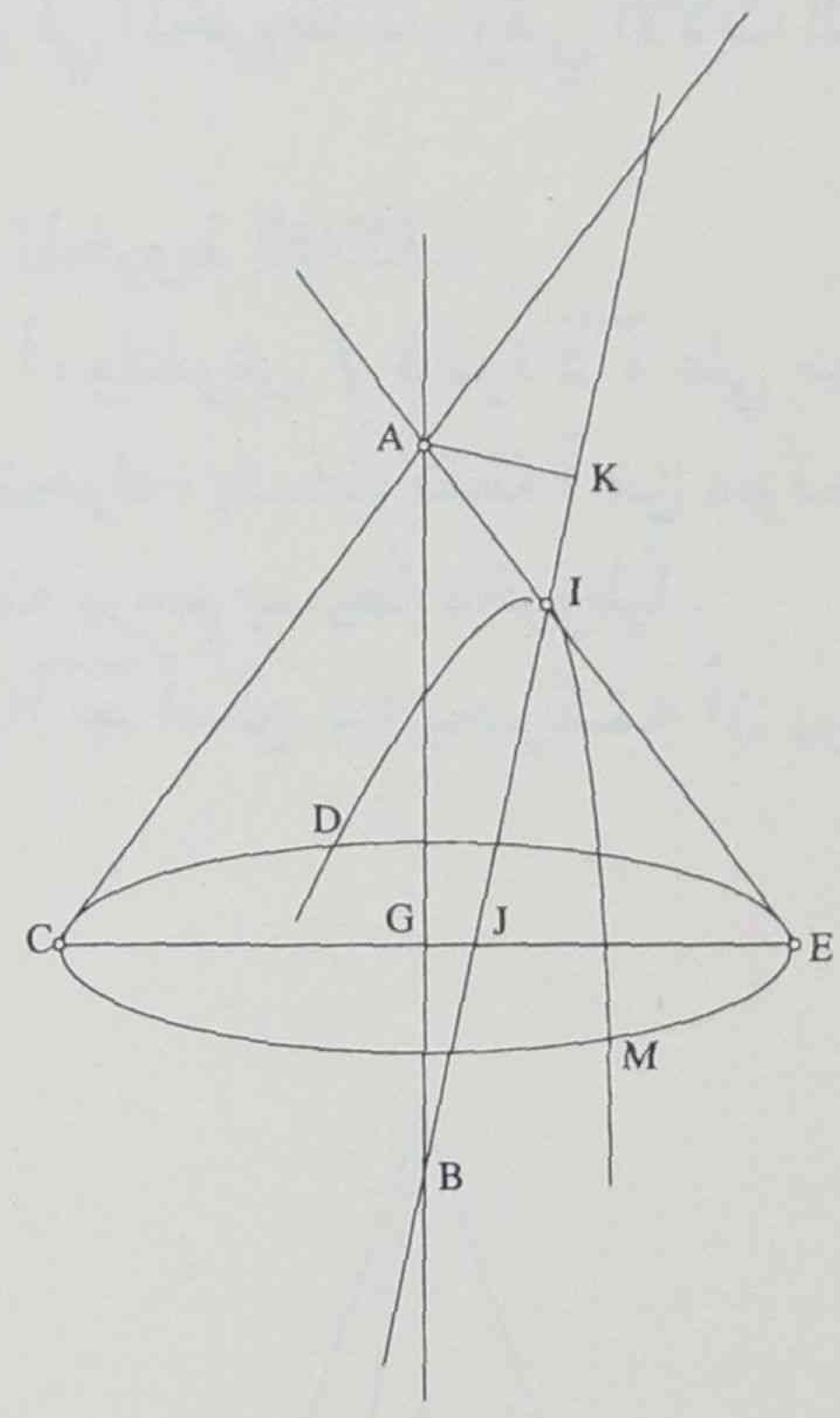


Fig. 4

Il est possible de construire avec un tel instrument une section conique et <de déterminer> son diamètre et son côté droit ; il est également possible de tracer à l'aide d'un tel instrument une section qui soit égale à deux sections[2] de position et de grandeur connues.

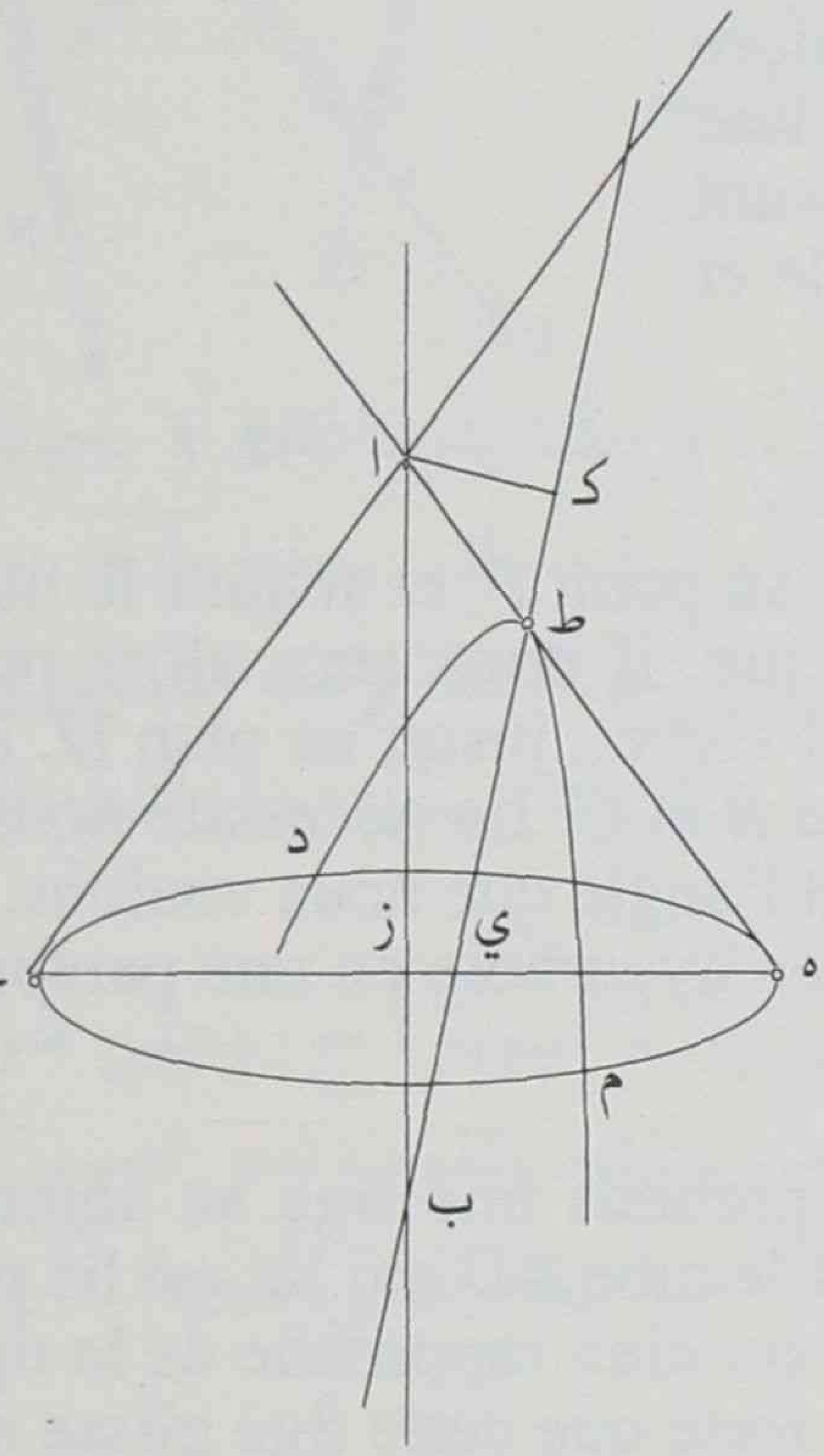
Il nous faut maintenant montrer comment façonner un compas à l'aide duquel on puisse tracer ces sections. Façonnons une tige[3] ; soit *AB*. Plaçons à son sommet un tube ; soit *AN*. Lions à l'extrémité de celui-ci un autre tube ; soit *AS*. Il nous est possible de réaliser cela à l'aide d'une cheville, ou de tout autre chose, de sorte que le tube *AN* tourne autour de la tige *AB* et que le tube *AS* tourne avec lui ; et cela pour faire une tige qui glisse à l'intérieur du tube *AS* et sur laquelle se trouve <le point> *C*. Il nous est possible de faire cela ; en effet cette tige facilite la rotation du compas sur la surface latérale, selon les distances des différents points au sommet du cône.

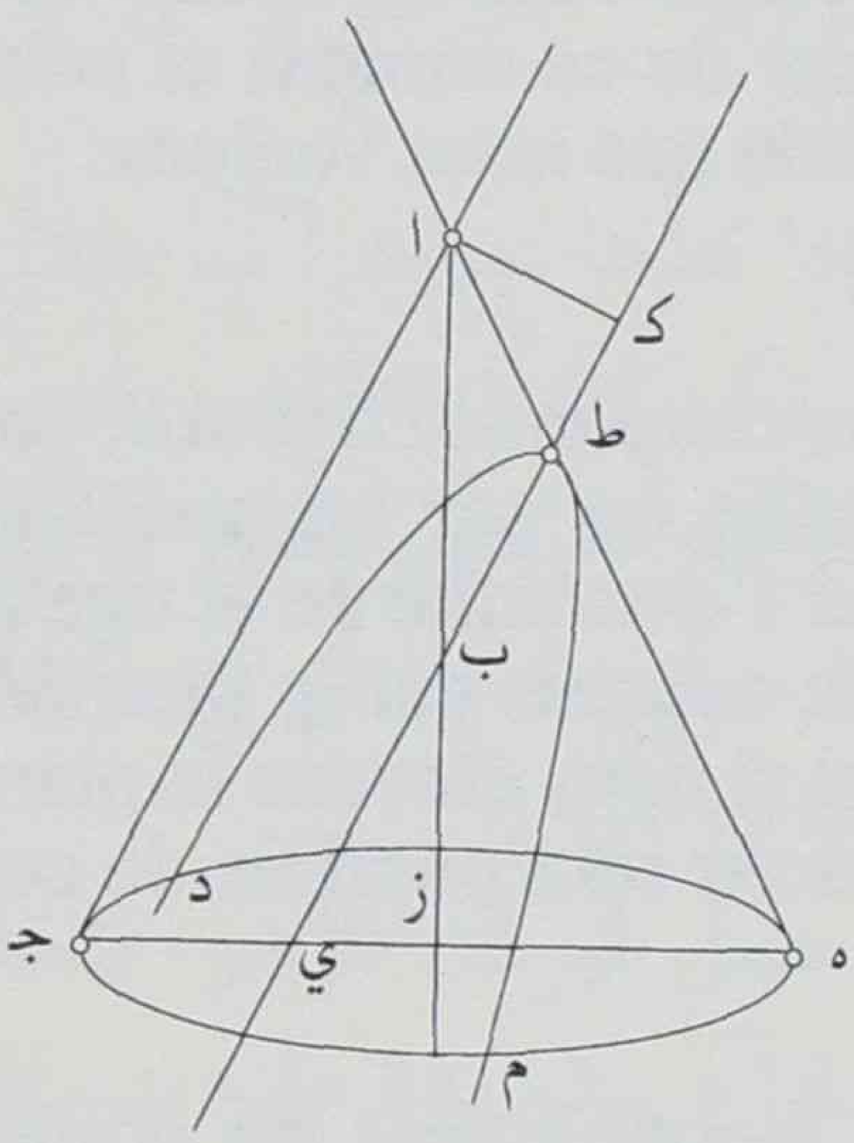
[1] On considère la génératrice *AC* ; on a par conséquent la demi-droite [*AC*) et son prolongement au-delà de *A*.

[2] Il s'agit ici des deux branches d'hyperbole obtenues dans le plan défini par la droite *IJ* de la figure 4.

[3] Litt. : perpendiculaire.

وإذا كان سطح مثل ط ي، ومدّه يكون إذا خرج من كل جهة، ‹و›لم يكن ضلع ا جـ المخروطي نحو جهة جـ، وأدير ا جـ على زاوية ا، بثبات نقطة ا، حتى يقطعه سطح ط ي مثلاً على ‹خط› ط د م، فإنه إن كان العمود المخرج من ‹نقطة ا من› خط ا جـ على سطح ط ي عموداً على ا جـ، فهو القطع المكافئ، وإن لم يكن عموداً عليه فهو زائد.





وقد يمكن أن يعمل بهذه الآلة قطعٌ مخروطي وقطرُه ومنتصبُ ضلعه. ويمكن أن يُرسم بهذه الآلة قطعٌ يساوي قطعين معلومي الوضع والقدر.

فينبغي الآن أن نبين كيفية عمل بركار يمكن أن نرسم به هذه القطوع: نعمل عموداً مثل ا ب، ونجعل في رأسه أنبوبة مثل ا ن، ونشد في طرفها أنبوبة أخرى مثل ا س. يمكن لنا عملُ ذلك بنرماذجة أو غيرها، بعد أن تدور أنبوبة ا ن حول عمود ا ب، وتُدير معه أنبوبة ا س لكي نعمل عموداً يجري في جوف أنبوبة ا س عليه جـ. ويمكن لنا عمل ذلك؛ وإنما يكون هذا العمود يسهّل إدارة البركار على البسيط بأبعاد النقط المختلفة من رأس المخروط.

1 جهة: الجهة – 3 على: مثل / ط د م: ل د م – 4 من: فى – 6 ومنتصب: قد تقرأ المنتصب – 9 رأسه: راس – 11 حول: فى – 13 من: على.

Nous construisons ensuite un arc tel que *GE* sur la tige *AB*, dont un point est sur un appui par lequel les côtés *G* et *E* s'élèvent et s'abaissent vers le sommet et la base ; on le construit facilement, soit par un ressort, soit en faisant glisser une règle dans une encoche ou par tout autre procédé facile qui nous convienne.

Si nous façonnons cela, il nous est alors possible d'obtenir à l'aide de ce compas une ellipse à la distance que nous voulons, suivant la grandeur de ce compas et suivant l'angle et l'inclinaison que nous voulons.

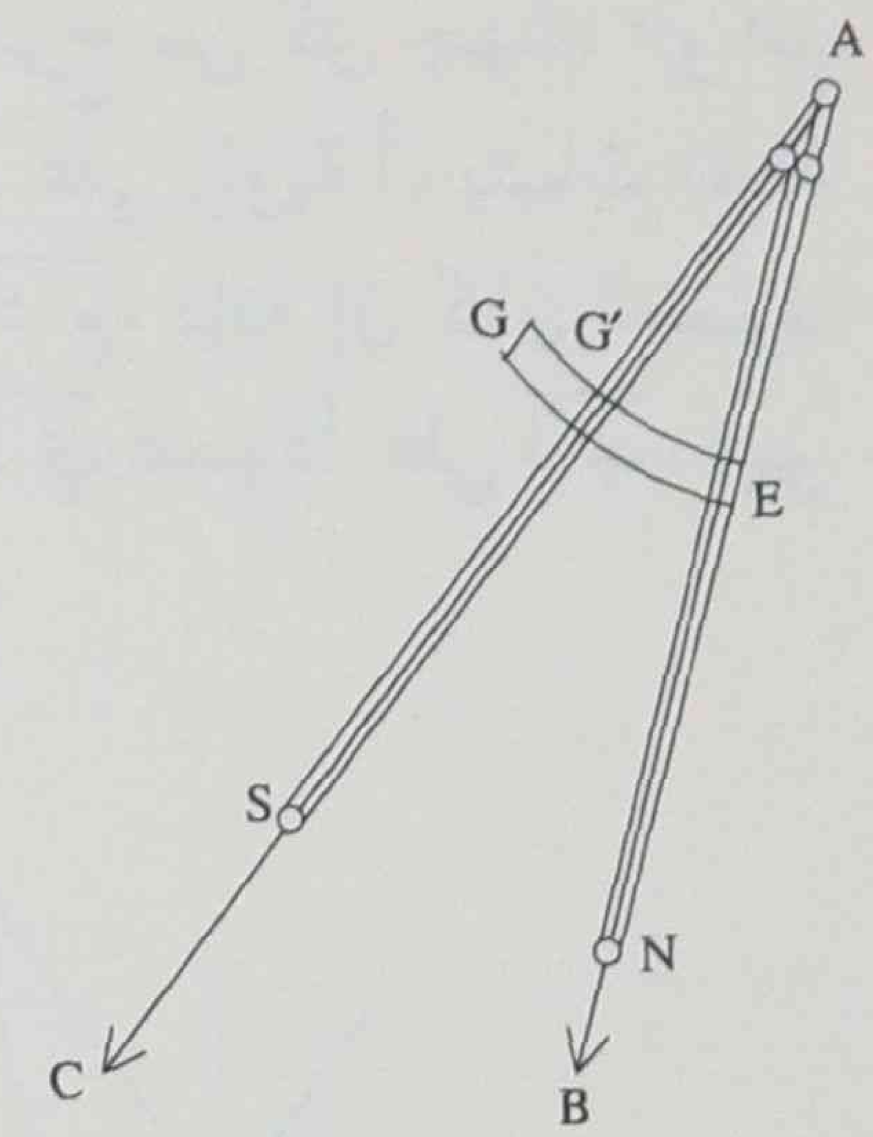


Fig. 5

Si nous coupons la tige *AB*, par exemple au point *P*, et si nous le lions par une cheville ou par un procédé quelconque, il nous sera alors possible d'abaisser l'extrémité de la tige *AB*, ou de l'élever, jusqu'au plan *IJ*. Posons la base du compas sur le plan *IJ*, soit entre *B* et *C*. La nécessité nous l'impose ainsi si nous élevons le plan *IJ* suivant l'angle que nous voulons. Grâce à cela il nous sera possible de construire une hyperbole ou une parabole sur ce plan.

Autre façonnement du compas : nous prenons une tige au sommet de laquelle il y a le tube *AH*, et à l'extrémité *A* le tube *AD* qui lui est lié par une cheville ou par autre chose, qui <l'>écarte ou <le> rapproche de la tige *AB*. Nous faisons une tige régulière, soit *E*, de sorte que cette tige glisse dans le tube *AD*.

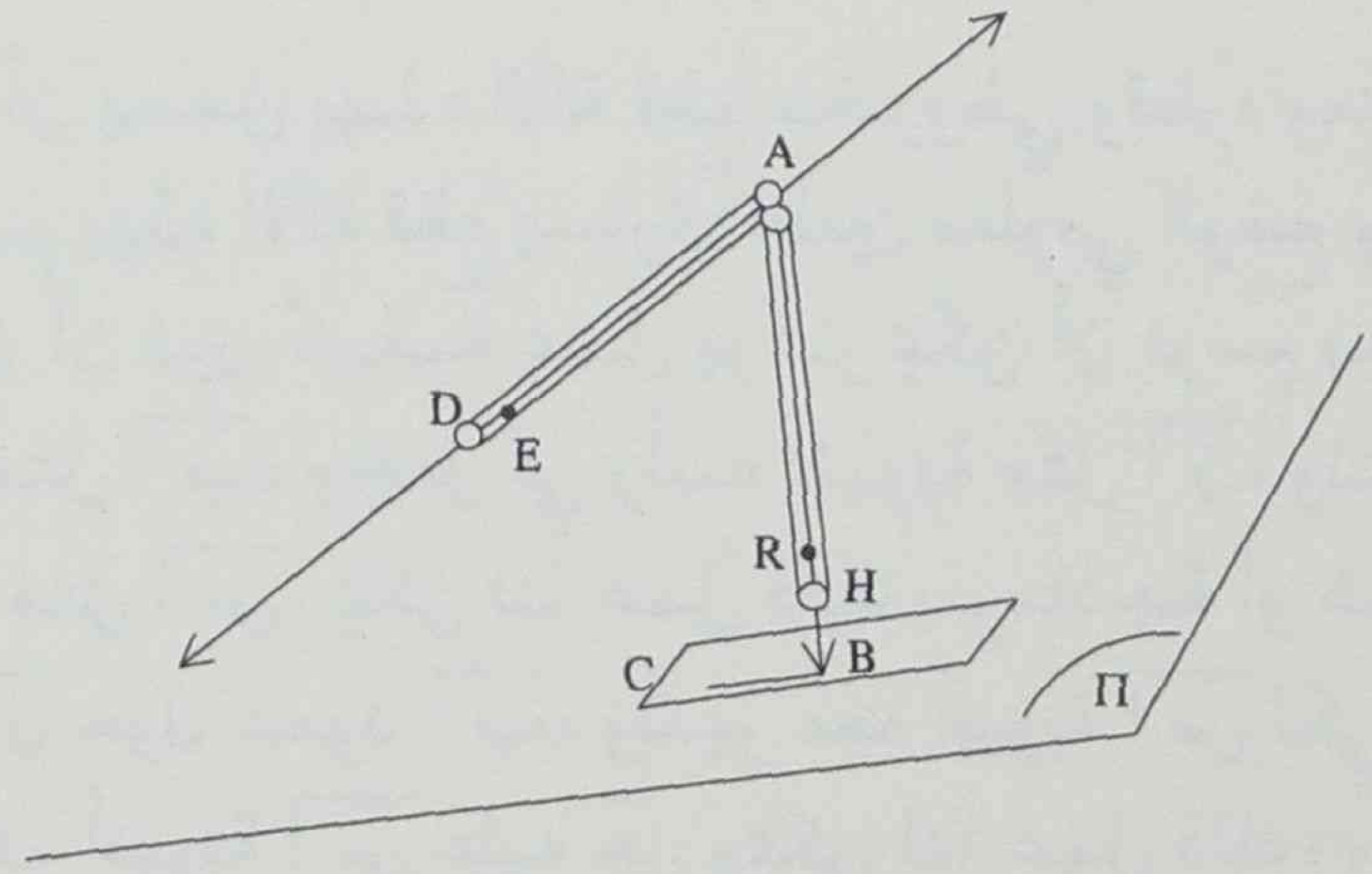
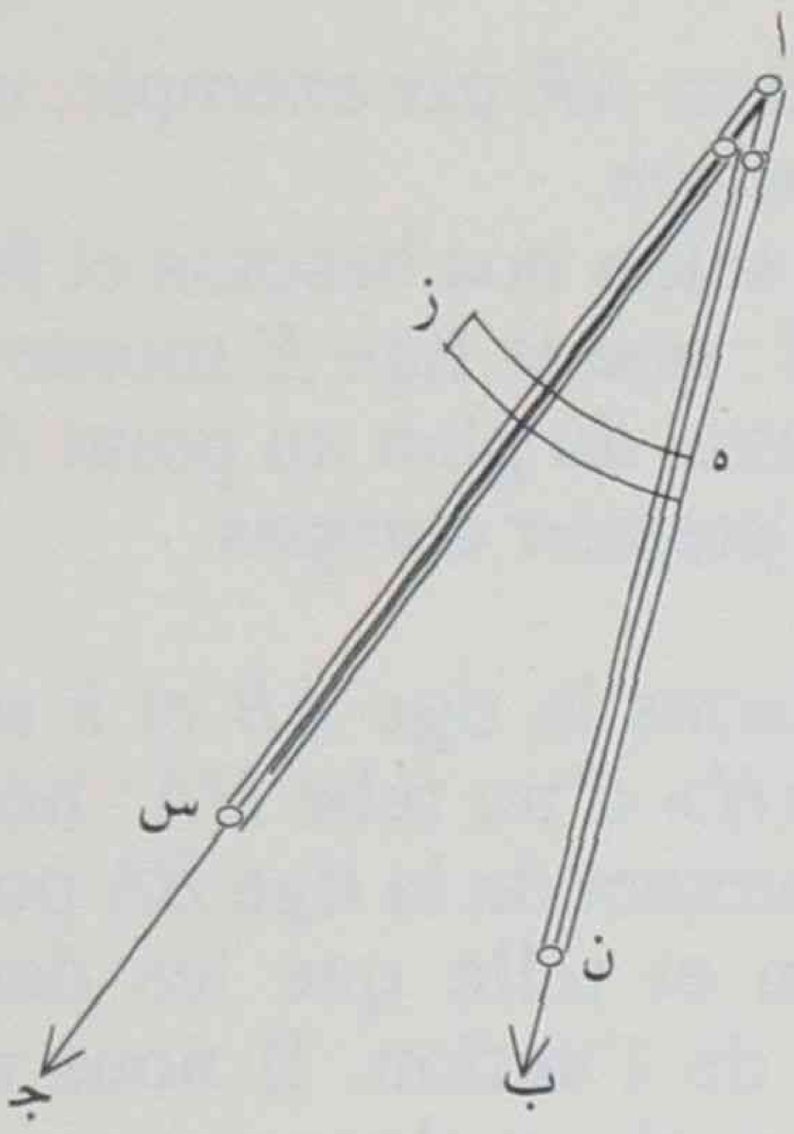


Fig. 6

Si tu veux construire une section avec ce compas, tu écartes le tube *AD* pour qu'il entoure avec le tube *AH* un angle et tu introduis la tige *E* dans le tube *AD*. Tu fais *BR* lié à *CB* par une cheville ou par autre chose ; *AR* s'élève ou s'abaisse, au moment de l'action.

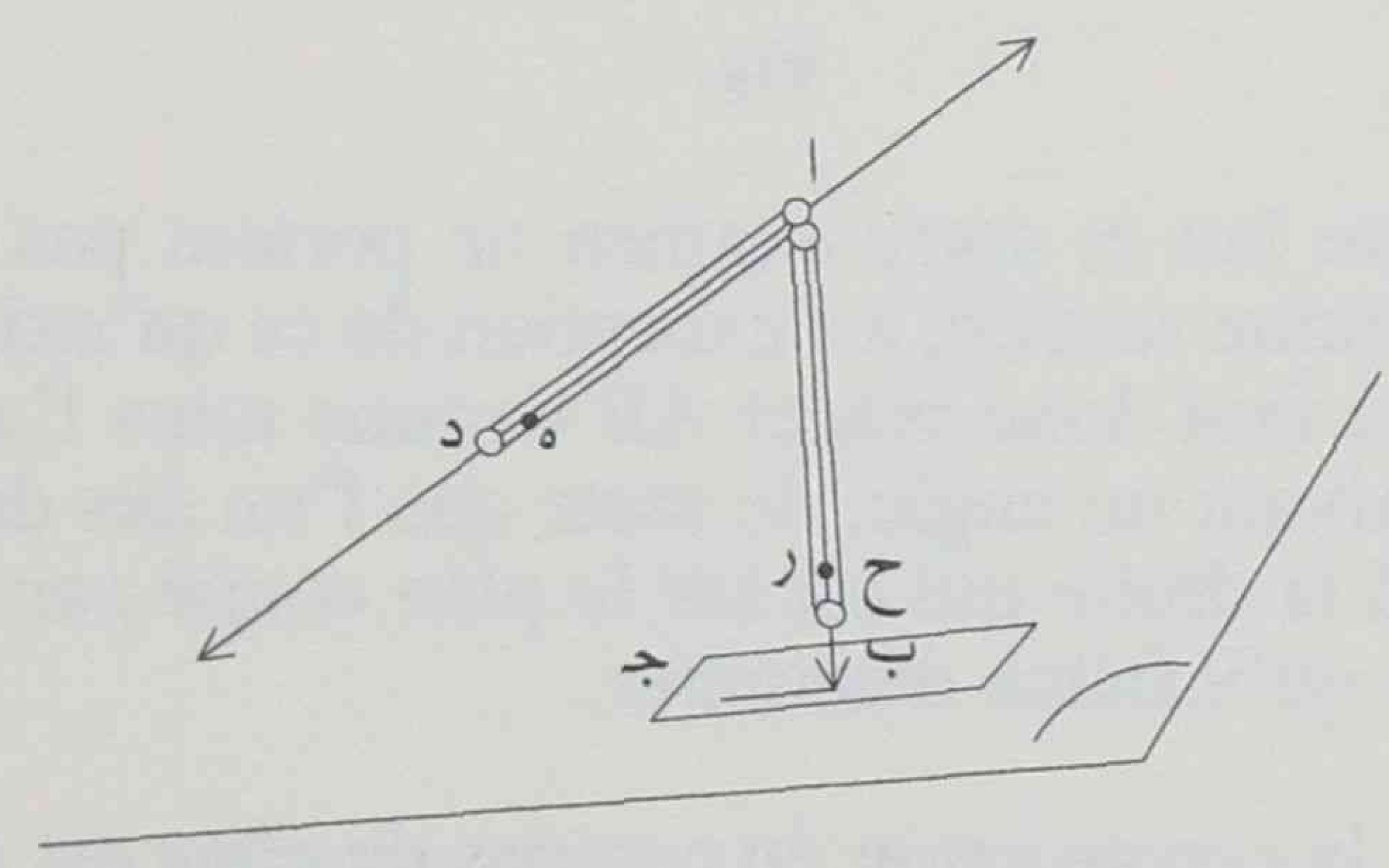


ثم نعمل قوساً مثل ز ه على عمود ا ب منه نقطة هي على مركز به ترتفع وتنخفض جهتا ز ه نحو الرأس والقاعدة، وعملها سهلٌ إما بلولب وإما بجري مسطرة في خرق أو بأي عمل أردناً سهل.

فإذا فعلنا ذلك، فقد يمكن لنا من هذا البركار قطع ناقص على أي بعد أردنا، بمقدار ما يمكن بهذا البركار وعلى أي زاوية أو انحراف أردنا.

فإذا قطعنا عمود ا ب مثلاً على نقطة ف، وربطنا بنرماذجة أو بحيلة ما، فقد يمكن لنا أن نخفض رأس عمود ا ب أو نرفعه إلى سطح ط ي. ونضع قاعدة البركار على سطح ط ي، مثل بين ب ⟨وجـ⟩؛ هذا وقت الضرورة، إذا رفعنا سطح ط ي على أي زاوية أردنا. فقد يمكن لنا بهذا عمل القطع الزائد والمكافئ عليه.

عمل البركار الآخر: نتخذ عموداً في رأسه أنبوبة ا ح، وعلى طرف آ أنبوبة ا د مشدودة عليه بنرماذجة أو غيرها، تنفتح وتقرب نحو عمود ا ب، ونجعل عموداً مستوياً عليه ه، ويكون هذا العمود يتحرك في أنبوبة ا د.



فإذا أردت أن تعمل قطعًا بهذا البركار، فلتفتح أنبوبة ا د لتحيط مع أنبوبة ا ح ⟨بزاوية⟩، ولتُدخِل عمود ه في أنبوبة ا د وتعمل ب ر مشدودة على جـ ب بنرماذجة أو غيرها، فيُرفع ا ر ويُخفض وقتَ العمل.

1 قوساً: قيسا / منه: فيه – 2 به: ر ه / جهتا: جهتى / ز: د – 7 قطع ناقص: قطعا ناقصا – 8 زاوية: غير مقروءة والمعنى يثبت ذلك – 15 ا ح: ا حـ – 16 مشدودة: مسددة / غيرها: غيره – 19 ا ح: ا حـ – 20 غيرها: غيره / فيُرفع: ارتفع.

Il faut que l'on fasse sortir à partir du point *B* le tiers *AR* par exemple, car l'extrémité *B* n'est pas sur le plan au moment de l'action.

L'action : posons <sur ce plan> autant de points selon nos besoins et faisons tourner le tube *AD* dans lequel il y a la tige *E* ; que la tige *E* monte et descende selon la variation des distances <des points> du plan au point *A*[1] ; ceci est évident, comme nous l'avons décrit pour le premier compas.

Troisième manière de façonner le compas : faisons la tige *AB* et à son extrémité plaçons un cercle *HJ*[2] lié à l'extrémité <*H*> d'un tube *HA* ; nous construisons une tige *AD* liée par une cheville au sommet de la tige *BA* pour qu'elle s'appuie sur elle au moment de l'action et telle que les deux extrémités *B* et *D* soient sur le plan au moment de l'action. Il nous est possible de construire la section conique selon un angle quelconque qui se forme lorsqu'on élève le point *J* ou qu'on l'abaisse par le mouvement de la tige *DA* sur le plan *BAD*, et sur ce plan nous élevons le plan sur lequel nous
104^{v} avons besoin de tracer la section, / selon l'angle d'une quelconque section parmi ces sections. Nous effectuons la construction par le compas dont la tige n'est pas divisée en deux parties.

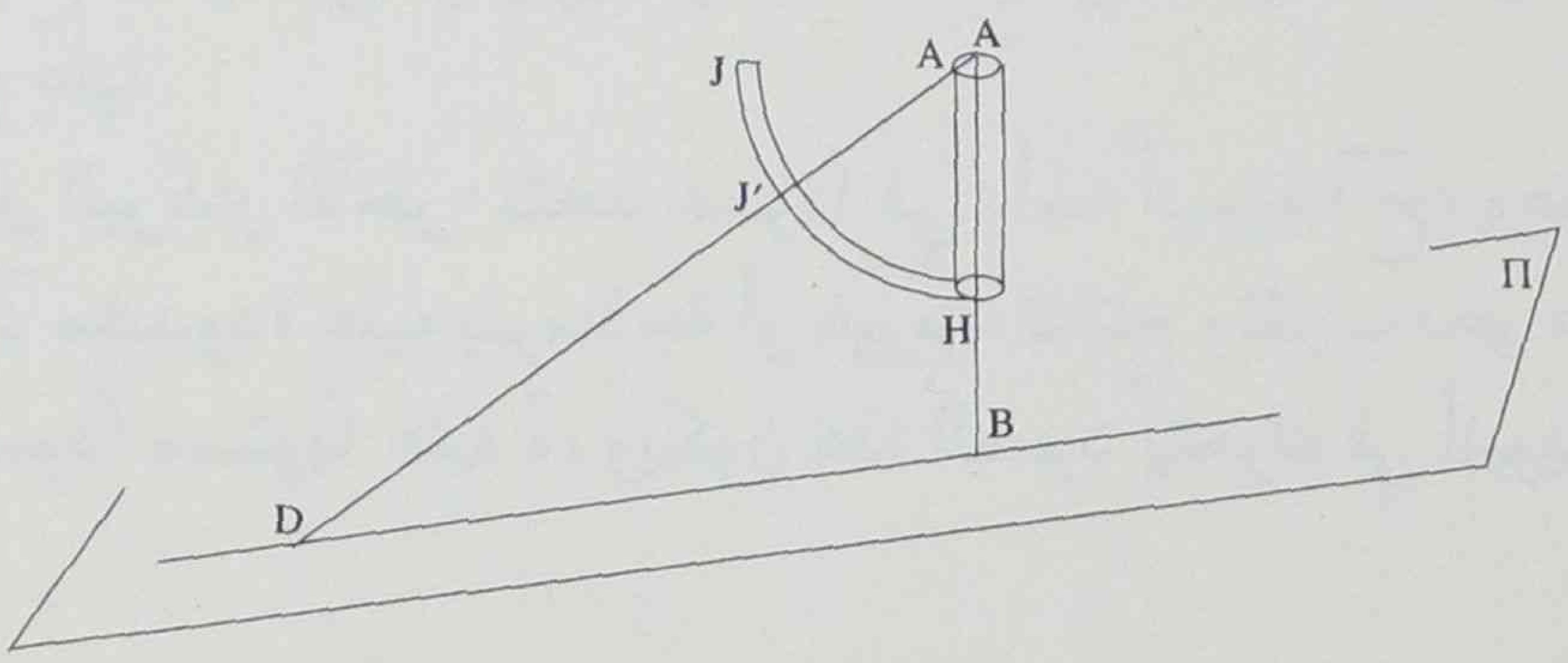


Fig. 7

Mais puisque notre but et notre examen ne portent pas sur les sections semblables à une certaine section, à l'exception de ce qu'exigent les sections paraboliques, il nous faut donc placer *AB* comme nous l'avons indiqué et écarter la tige *AD* suivant un angle, de sorte que l'un des deux côtés du triangle soit parallèle à la droite qui est sur le plan coupé par le triangle. Cela nous est possible. Ce qu'il fallait démontrer.

Le traité de la construction du compas du cône est achevé.

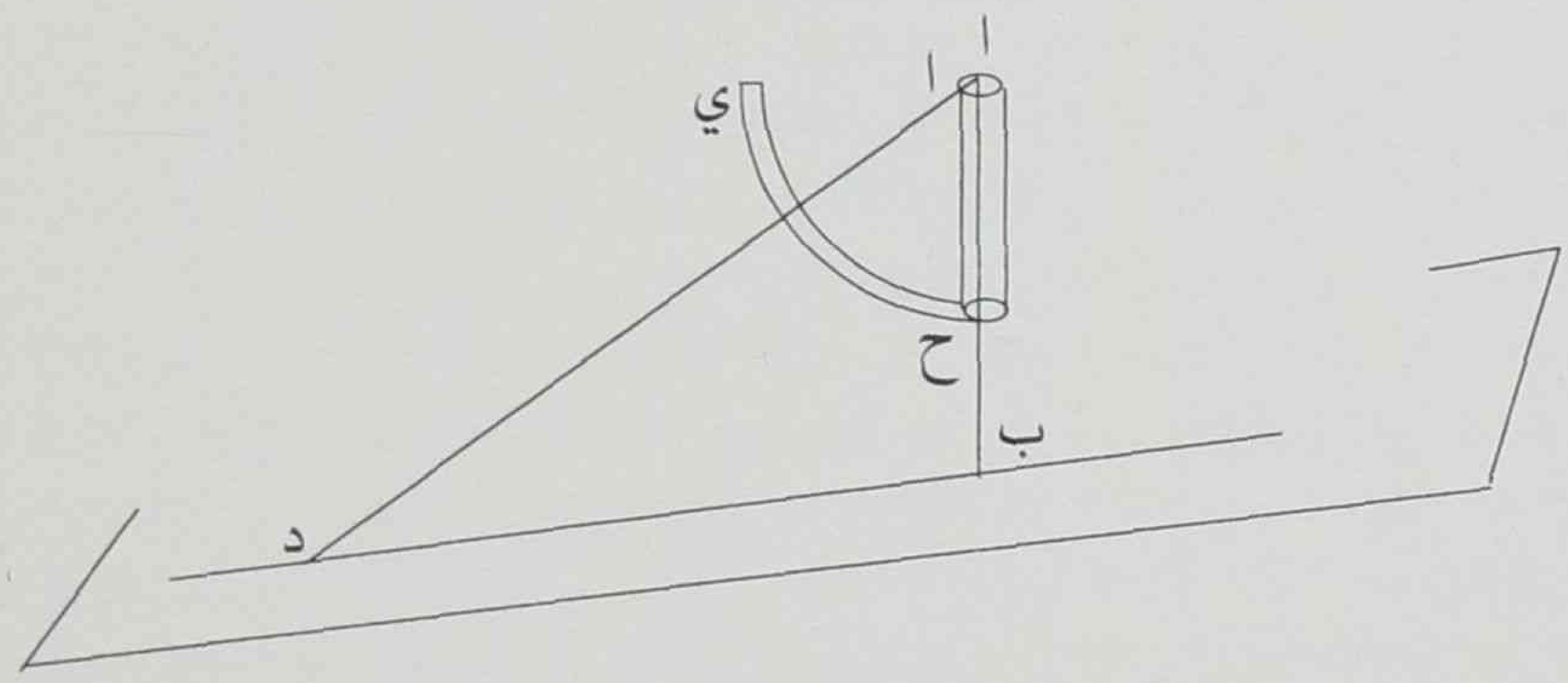
[1] La tige *E* glisse dans le tube *AD* de sorte que la distance du point *A* à son extrémité qui doit rester dans le plan puisse varier.

[2] de centre *A*.

وينبغي أن يخرج من نقطة ب ثلث ا ر مثلاً، لأن ليس طرف ب على السطح وقتَ العمل.

والعمل: ولنضع نقطاً بمقدار ما نحتاج، ولندر أنبوبة ا د وفيها عمود ‹ه› وليصعد عمود ه ويهبط باختلاف بعد السطح عن نقطة ا، وذلك ظاهر كما وصفنا في البركار الأول.

وجه ثالث من عمل البركار: وهو أن نعمل عمود ا ب وفي رأسه نضع دائرة ح ي [في رأسه] مشدودة في طرف أنبوبة ح ا، ونعمل عمود ا د مشدوداً بنرماذجة في رأس عمود ب ا ليكون معتمداً عليه وقتَ العمل، ويكون طرفا ب د على السطح وقتَ العمل، ويمكن لنا عمل القطع على أي زاوية تكون بأن تُرفع نقطة ي وتخفض بحركة عمود د ا على سطح ب ا د، ونرفع السطح الذي نحتاج إلى أن نرسم القطع عليه على ذلك السطح / بزاوية أي قطع شئنا من هذه القطوع، ونعمل بالبركار الذي يكون عموده ١٠٤-ظ غير مقسوم بقسمين.



ولما لم يكن غرضنا وفحصنا على القطع الشبيهة بقطع ما عدا ‹ما› يحتاج إلى هذه القطوع المكافئة، فينبغي أن يوضع ا ب على ما بيناه ونفتح عمود ا د على زاوية، يكون ضلعا المثلث الذي يكون أحد ضلعيه موازياً للخط المستقيم على السطح الذي يقطعه المثلث، ويمكن لنا ذلك؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت رسالة عمل بركار المخروط.

3 نقطاً: نقطه / وفيها: وفيه – 7 ا د: ا ل – 9 طرفا: طرفى – 10 ي: ار / د ا: ط ا – 15 المكافئة: لمكافى – 16 ا د: ا ه / المثلث: للمثلث.

TEXTE ET TRADUCTION

V

Fī kayfiyyat taṣawwur al-khaṭṭayn alladhayni yaqrubāni wa-lā yaltaqiyāni bi-ikhrājihimā dā'iman ilā mā lā nihāya

Comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent et qui ne se rencontrent pas

R-73r
I-51r
K-231
M-11r

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

Opuscule de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī :

Comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent et qui ne se rencontrent pas, si on les prolonge toujours à l'infini, qui ont été mentionnées par l'éminent Apollonius dans son deuxième livre de son ouvrage des *Coniques* ?

Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī a dit : j'ai médité la question des deux lignes dont l'une est une droite, et l'autre le pourtour de l'hyperbole ; qu'elles se rapprochent toujours si on les prolonge à l'infini,
M-11v sans que l'une rencontre / l'autre. Ceci est loin de la conception et de la pensée ; et si c'est décrit devant l'un des hommes de science qui pénètrent les subtilités des questions, cela le rend perplexe, et sa raison n'accepterait pas cela, même s'il est philosophe, sans qu'il soit instruit par la preuve géométrique produite par Apollonius. Moi aussi j'étais perplexe au sujet de leur conception, si ce n'est que la vérité de leur démonstration réfute l'erreur et dissipe le trouble de l'âme en la connaissance de cela. Mais, puisque certaines propositions, et leurs principes, sont faciles à concevoir sans qu'on s'arrête à leur démonstration ; que pour d'autres propositions la conception ne se forme que si l'on s'arrête à leur démonstration ; que d'autres sont difficiles à concevoir même si elles sont démontrées ; que pour d'autres la conception ne se forme pas, même si la démonstration les contrôle et les vérifie, comme cette proposition ; et que d'autres sont prêtes

بسم الله الرحمن الرحيم

ر-٧٣-و
ط-٥١-و
ك-٢٣١
م-١١-و

قول أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في كيفية تصور الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان بإخراجهما دائماً إلى ما لا نهاية، اللذين ذكرهما أبلونيوس الفاضل في المقالة الثانية من كتاب المخروطات

قال أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي: إني كنت متفكراً في أمر الخطين، اللذين أحدهما خط مستقيم والآخر محيط القطع الزائد، بأنهما يقربان دائماً بإخراجهما إلى غير النهاية، ولا يمكن أن يلقى أحدهما/ الآخر. م-١١-ظ وهذا شيء بعيد من التصور والفكر، ولو وُصفَ بين يدي أحد من أهل العلم والغوْر في دقائق الأمور لتحيّر في ذلك وما قَبِل عقله – وإن كان متفلسفاً – دون ما يستدل بالبرهان الهندسي الذي أتى به أبلونيوس. وأنا أيضًا كنت متحيراً في أمر تصورهما، غير أن صحة البرهان عليهما تَنفي الغلط واضطراب النفس في معرفة ذلك. ولأن بعض الأشكال ومبادئها سَهْلُ التصور دون الوقوف على البرهان عليه، وبعضَها لا يتهيأ تصوره حتى يُوقف على البرهان عليه، وبعضَها عَسِرٌ تصوّره وإن قام البرهان عليه، وبعضَها لا يتهيأ تصوره وإن كان البرهان يضبطه ويحققه مثل هذا الشكل، وبعضَها يتهيأ

1 البسملة: ناقصة [ر] كتب بعدها «وبه الهداية» [ط] – 2 بن محمد: ناقصة [ر] / السجزي: ناقصة [ر] كتب بعدها «رحمة الله» [ط] – 5-2 قول ... المخروطات: ناقصة [ك] – 4-3 اللذين ... نهاية: ناقصة [م] – 4 أبلونيوس: ابللونيوس [ر] – 5 من كتاب المخروطات: من كتابه في المخروط [ط، م] – 6 بن محمد: ناقصة [ر] / السجزي: يعقبه «رحمة الله» [ك] – 7 اللذين: الذين [ك] – 8 النهاية: نهاية [ر، ط] / الآخر: بالآخر [ك] – 11 يستدل: يستند [ك، م] / أتى: اتا [ر، ط] / أبلونيوس: ابللونيوس [ر] / أيضًا: ناقصة [ك] – 12 أمر: أمور [م] / تنفي: ينفي [ر] – 14 تصوره: تصور [ك] التصور عليها [ر، ط] / يوقف: توقف [ر] نقف [ط] – 14-16 حتى يوقف ... تصوره: ناقصة [م] – 15 تصوره: تصورها [ر، ط] / قام: أقام [ر، ط] / عليه: ناقصة [ط] – 16 تصوره: تصورها [ر، ط] تصور [ك] / ويحققه: وتحققه [ر] / وبعضها: في الهامش [ك] / يتهيأ: يتهىء [ر] ناقصة [ك].

à être saisies et conçues par la voie des principes philosophiques, comme par exemple : les choses continues se divisent en des choses, toujours à l'infini ; nous avons alors besoin de voies philosophiques, comme l'a montré Proclus dans les Définitions des *Éléments de physique*. S'il en est
I-51v ainsi, la ligne est en effet parmi les choses continues, / et se divise par conséquent en des choses toujours à l'infini. Comme exemple de choses concevables sans démonstration : le cercle coupe le cercle en deux positions seulement ; et : <la somme> des deux côtés d'un triangle est plus grande que le côté qui reste ; et comme : si on augmente la base du triangle
K-232 isocèle, / on augmente l'angle sous-tendu par la base. Pour les choses dont on ne forme la conception qu'en s'arrêtant à leur démonstration, par exemple : si un parallélogramme est égal à un parallélogramme, et si la longueur de l'un excède la longueur de l'autre, alors la largeur de l'un est moindre que la largeur de l'autre, par la voie de la réciprocité. De même, dans les solides, d'après ce que nous voyons dans la cire, si nous en prenons deux quantités égales, si nous prenons l'une que nous étendons, alors sa largeur sera moindre que la largeur de l'autre, par réciprocité. Quant à la chose dont la conception se forme après sa démonstration,
R-73v comme l'égalité des trois angles d'un triangle / à deux droits, nous avons montré comment le concevoir par la voie de l'analyse dans notre livre *Pour aplanir les voies en vue de déterminer des propositions géométriques*.

Quant aux choses difficilement concevables, une fois connue la vérité de leur démonstration, ce sont les propriétés des propositions éloignées et difficiles, sans que la nature les rejette ni que la raison les refuse, comme la propriété mentionnée ; jusqu'à ce que se fût trouvé un moment où j'ai recherché les propriétés des deux lignes qui se rapprochent et ne se rencontrent pas, si on les prolonge ; et que j'eusse pénétré le recherché lui-même, c'est-à-dire : comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent et ne
M-12r se rencontrent pas, / si on les prolonge toujours à l'infini.

Donnons d'abord un lemme, que voici.

دَرْكُه وتصوره بطريق المبادئ الفلسفية، وذلك مثل: الأشياء المتصلة، فإنها تنقسم إلى أشياء دائمًا بلا نهاية، فنحتاج إلى طرق فلسفية على ما بيّنه برقلس في حدود *أوائل الطبيعيات*. وإذا كان الأمر على هذا، فإن الخط من الأشياء المتصلة، فالخط / إذاً ينقسم إلى أشياء دائمًا بلا نهاية. وأما الشيء ط-٥١-ظ الذي يتهيأ تصوره بلا برهان، فمثل: الدائرة تقطع الدائرة في موضعين فقط؛ والضلعان من كل مثلث أطول من الضلع الباقي، ومثل: المثلث المتساوي الساقين / إذا زيد في قاعدته فيزيد في الزاوية التي توترها القاعدة. وأما ك-٢٣٢ الأشياء التي لا يتهيأ تصورها إلا مع الوقوف على البرهان عليها، فمثل: السطح المساوي للسطح إذا زاد طول أحدهما على الآخر ينقص عرض أحدهما عن الآخر على طريق التكافؤ؛ وكذلك في الأجسام على ما نرى في الشمع إذا أخذنا مقدارين منه متساويين، فإن أخذنا أحدهما ومددناه ينقص عرضه عن عرض الآخر بالتكافؤ. وأما الشيء الذي يتهيأ تصوره بعد البرهان عليه، فمثل: مساواة زوايا المثلث الثلاث / لقائمتين، على ما بيّنا ر-٧٣-ظ كيفية تصوره بطريق التحليل في كتابنا في *تسهيل السبل لاستخراج الأشكال الهندسية*.

وأما الأشياء التي يكون عسراً تصورها بعد الوقوف على صحة البرهان عليها، فخواص الأشكال البعيدة الصعبة، غير أنه لا ينفر عنه الطبع ولا ينكر له العقل: مثل هذه الخاصية المذكورة؛ حتى اتفق لي – وقتا من الأوقات – ‹أن› أفحص عن خواص الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان بإخراجهما، فاطلعت على عَيْن المطلوب وهو كيفية تصور الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان / بإخراجهما دائمًا إلى ما لا نهاية. م-١٢-و

ولنأت أولاً بمقدمة هي هذه.

1 الفلسفية: المفلسفية [ر] / فإنها: فانما [م] – 2 تنقسم: ينقسم [ر] / ما: ناقصة [ط] – 4 فالخط: والخط [م] – 5 تصوره: تصورها [ر، ط] / فمثل: مثل [م] / تقطع: يقطع [ر] – 6 والضلعان: والضلعين [ر، ط، ك، م] – 7 إذا: اذ [ك] / توترها: يوترها [ر] / وأما: وانما [م] – 8 التي: التي بها [ر] / لا: ناقصة [ر، ط، ك] / إلا: ناقصة [ر، ط، ك] – 9 ينقص: منقص [ر] – 10 طريق: كتب ناسخ [ك] في الهامش كلمة «سبيل» ومعها حرف الخاء مع الإشارة إلى كلمة «طريق»، ومن المحتمل أنه يقصد بهذه العلامة أن هذا ما وجده في نسخة أخرى / نرى: ترى [ط، ر] – 11 أخذنا مقدارين: أخذ مقداران [م] اخذ مقدارين [ر، ط] / متساويين: متساويان [م] – 12 تصوره: تصورها [ر، ط] – 13 عليه: عليها [ر، ط] / لقائمتين: قائمتين [ر، ط] – 14 تصوره: تصورها [ر، ط، م] / التحليل: القليل، ثم أثبت الصواب في الهامش [ط] – 16 وأما: فأما [ط، ك، م] / عسراً: عسرة [ر، ط، ك، م] – 17-18 ينكر له: ينكره [م] – 18 الخاصية: الخاصة [ر، ط] – 19 بإخراجهما: ناقصة [ر، ط] – 20 عين: عن [ك] – 21-19 بإخراجهما ... يلتقيان: ناقصة [م] – 21 نهاية: نهاية له [م، ك] – 22 ولنأت: ولنأتى [ر، ط].

Lemme : parmi les parallélogrammes appliqués à des droites données,
I-52r égaux à un parallélogramme donné, dont les angles opposés / sont égaux aux deux angles opposés de ces parallélogrammes, ceux dont les longueurs sont les plus courtes ont les largeurs les plus longues, et ceux qui ont les longueurs les plus longues ont les largeurs les plus courtes. Et ainsi de suite
K-233 selon ce / mode, à l'infini.

Soit le parallélogramme *ABED* ; le côté *BE* est prolongé à l'infini. Séparons de la droite *BE*, qui n'est pas limitée du côté de *E*, les droites *BH*, *BK*, *BM*, *BS*, *BC* ; et appliquons à chacune de ces droites des parallélogrammes sur l'angle *B*, dont chacun est égal au parallélogramme *ABED*, à l'aide de la démonstration de la proposition quarante-trois du premier livre de l'ouvrage des *Éléments*, et tels que leurs largeurs soient *GH*, *IK*, *LM*, *NS*, *OC*.

Je dis que *GH* est plus courte que *DE*, *IK* est plus courte que *GH*, *LM* est plus courte que *IK*, *NS* est plus courte que *LM*, et *OC* est plus courte que *NS*.

Démonstration : puisque l'angle *B* des deux parallélogrammes *BD* et *BG* est le même, et que leurs côtés sont inversement proportionnels, alors le rapport de *BE*, le plus court, à *BH*, le plus long, est égal au rapport de *GH* à *ED* ; *GH* est donc plus courte que *ED*. C'est pour la même raison que *IK* est plus courte que *GH*, que *LM* est plus courte que *IK*, que *NS* est plus

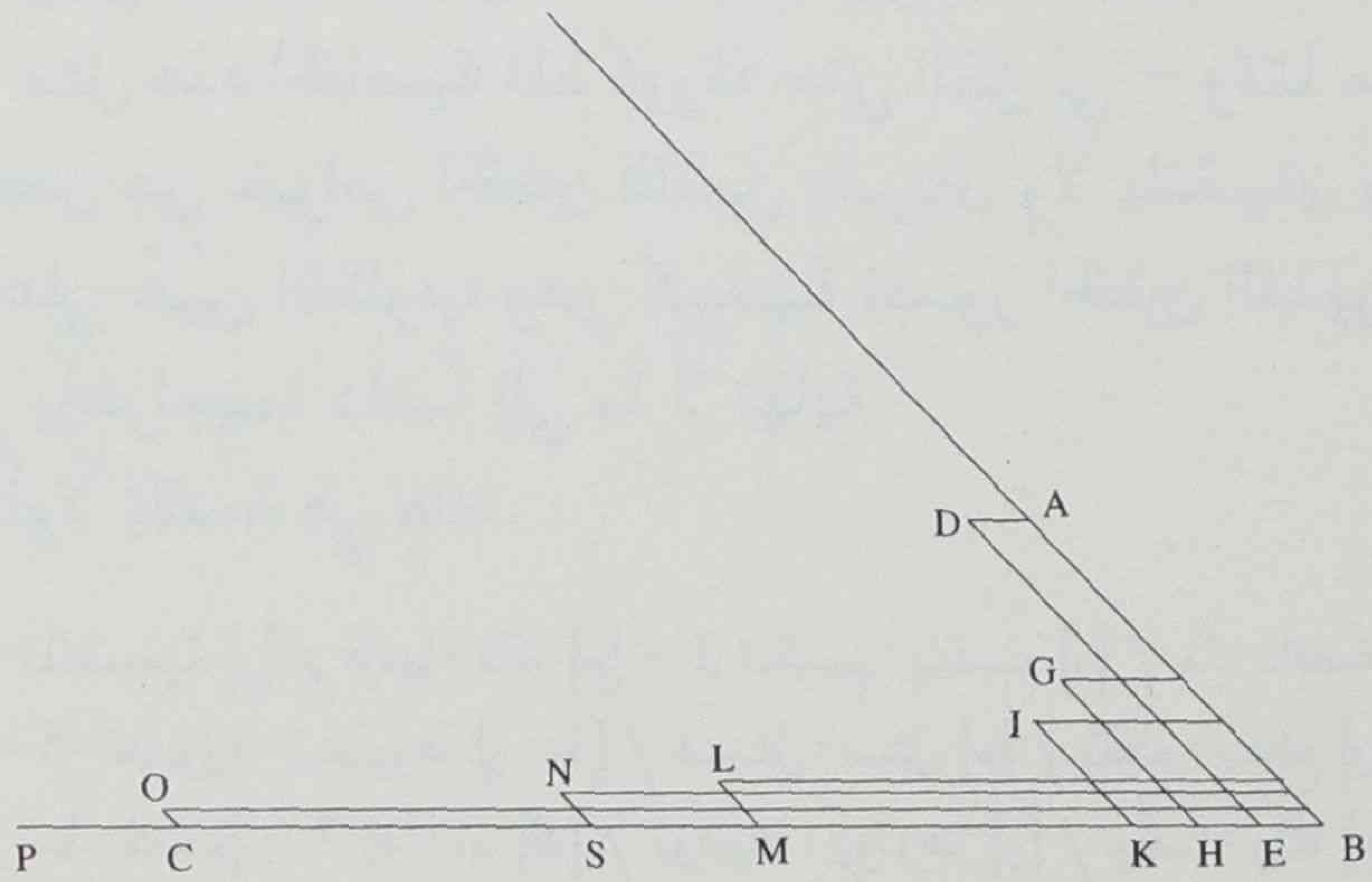


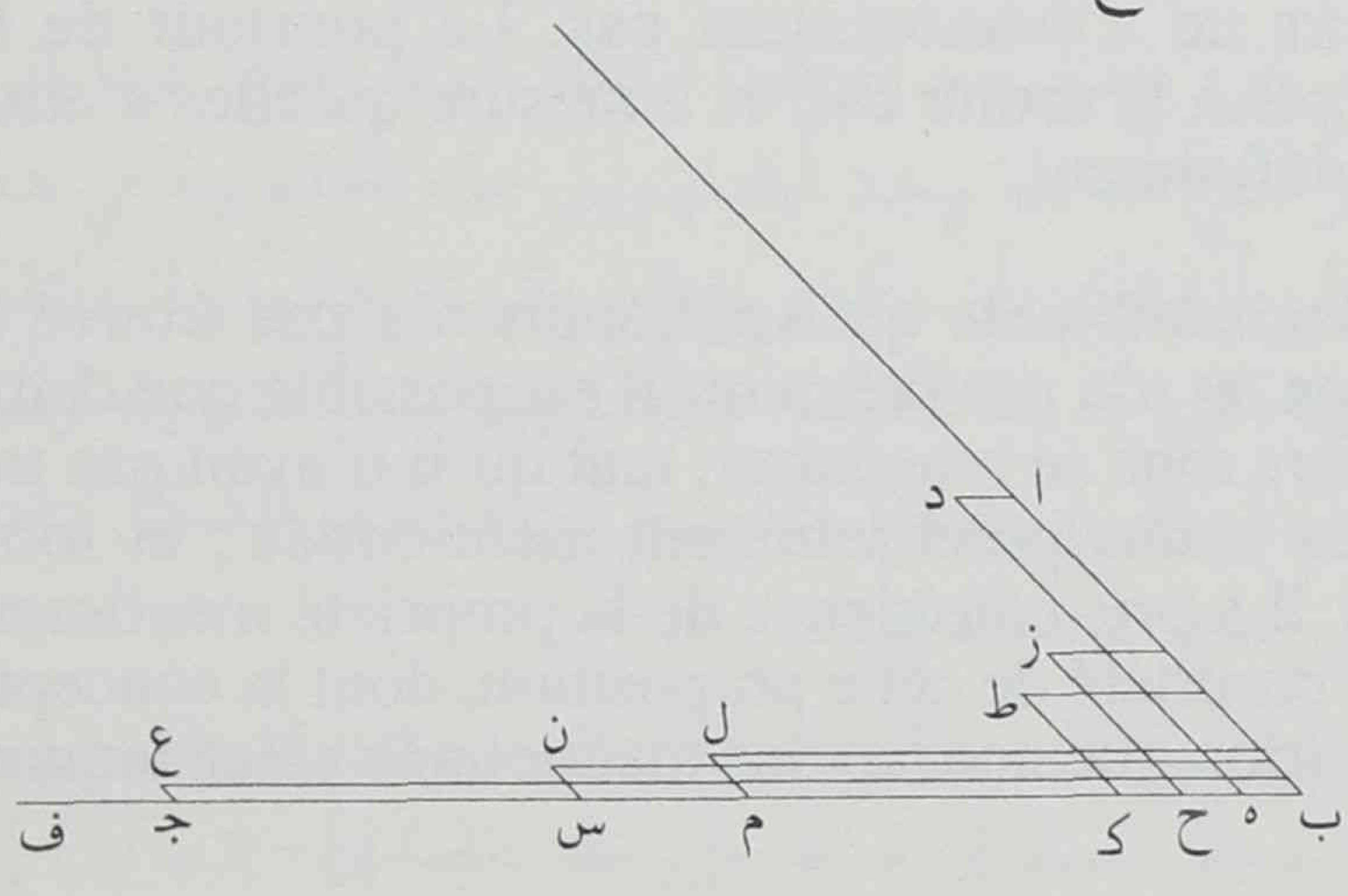
Fig. 1

مقدمة: السطوح المتوازية الأضلاع المضافة إلى خطوط مستقيمة مفروضة، المساويةُ لسطح ما مفروض متوازي الأضلاع، تكون زواياها المتقابلة / مساوية لزاويتي ذلك السطح المتقابلتين، فأقصرها طولاً أطولها ط-٥٢-و عرضًا وأطولها طولاً أقصرها عرضًا، وكذلك على هذا / النمط إلى غير ك-٢٣٣ النهاية.

فليكن سطح ا ب ه د متوازي الأضلاع، وقد خرج ضلع ب ه إلى غير نهاية، ونفصل من خط ب ه الذي من جهة ه غير محدود خطوط ب ح ب ك ب م ب س ب ج، ونضيف إلى كل واحد من هذه الخطوط سطوحًا متوازية الأضلاع على زاوية ب مساويًا كلٌ واحد منها لسطح ا ب ه د المتوازي الأضلاع ببرهان الشكل الثالث والأربعين من المقالة الأولى من كتاب *الأصول*، وتكون عروضها ز ح ط ك ل م ن س ع ج.

أقول: إن ز ح أقصر من د ه وط ك أقصر من ز ح ول م أقصر من ط ك ون س أقصر من ل م وع ج أقصر من ن س.

برهان ذلك: لأن زاوية ب من سطحي ب د ب ز المتوازيي الأضلاع واحدة، وأضلاعهما متكافئة، فنسبة ب ه الأقصر إلى ب ح الأطول كنسبة ز ح إلى ه د، فـ ز ح أقصر من ه د، ولهذا ط ك أقصر من ز ح ول م أقصر



1 مقدمة: ناقصة [ط، ك، م] – 2 المساوية: مساوية [ر، ط، ك، م] – 3 المتقابلتين: المتقابلين [ر] – 5 النهاية: نهاية [ر، م] – 5 النهاية: نهاية [ر] – 7 ب ه: ب [ر، ك، م] / خطوط: وخطوط [ر] / ب ك: ب ل [ر] – 9 مساويًا: مساوية [ر] – 11-10 ببرهان ... *الأصول*: ببرهان شكل مجـ من آ [ك] – 10 الأربعين: الأربعون [م] – 11 وتكون: وقد يكون [ر] / ط ك: ط ل [ر] / ل م: ر م [م] – 12 ط ك (الأولى والثانية): ط ل [ر] – 14 سطحي: سطح [م] كتبها «سطح»، ثم صححها عليها [ر] / ب د ب ز: ناقصة [ك] / المتوازيي: المتوازي [ر، ك، م] – 15 وأضلاعهما: فأضلاعهما [ر، م] / فنسبة: نسبة [ر، ط، م] – 16 ط ك: ط ل [ر] – ترك ناسخ [م] فراغًا للرسم ثم نساه، في [ر، ك] نجد رسمًا لا يوافق النص علاوة على أنه غير صحيح.

courte que LM, et OC plus courte que NS. Donc, le point O, par rapport à la droite BC, est plus proche que le point N ; le point N est plus proche que le point L ; le point L est plus proche que le point I ; le point I est plus proche que le point G ; et le point G est plus proche que le point D. Il est clair que
R-74r / la largeur d'un parallélogramme égal / au parallélogramme BD ne s'éva-
I-52v nouit pas, même si sa longueur, par rapport à la droite BC, est la droite la plus longue que l'on suppose ; ceci ne peut pas avoir lieu.

Si c'est possible, que le parallélogramme égal au parallélogramme BD s'identifie à la droite BP ; la droite BP a donc la même mesure que le parallélogramme BD ; le parallélogramme BD est donc composé des parties de la droite BP ; mais on a montré que la surface ne se compose pas de la
K-234 droite, / ni la droite du point. Par conséquent, la largeur d'un parallélogramme égal au parallélogramme BD, même si sa longueur s'étend, ne s'anéantit pas. Ce qu'il fallait démontrer.

M-12v Après avoir préparé cela, supposons / les deux droites AB et BE, sur l'angle B. Soit le point D sur le pourtour de l'hyperbole qui ne rencontre pas les deux droites BE et BA ; alors le pourtour de cette section passe par les points D, G, I, L, N, O. Il se rapproche toujours de la droite BC, à l'infini, en raison de la propriété de ces parallélogrammes dont les côtés sont inversement proportionnels, sans aboutir à la droite BP ; car, s'il rencontre la droite BP, alors la largeur du parallélogramme égal au parallélogramme BD s'identifie à la droite BP. Mais nous avons montré que les largeurs ne s'évanouissent pas. Le pourtour de l'hyperbole ne parvient donc pas à la droite BC, et à mesure qu'elles s'allongent, elles se rapprochent indéfiniment.

Il est bien vraisemblable qu'Apollonius n'a pas trouvé la propriété de cette proposition, et n'a pas prévu qu'il est possible que deux lignes se rapprochent toujours sans se rencontrer, tant qu'il n'avait pas trouvé cette propriété que nous avons précédemment mentionnée ; et lorsqu'il a trouvé
K-235 cette propriété, il a pris conscience de la propriété mentionnée. / De même pour une autre propriété de cette proposition, dont la conception mène là où mène la proposition que nous avons mentionnée précédemment.

من ط ك، ون س أقصر من ل م، وع ج أقصر من ن س، فنقطة ع إلى خط ب ج أقرب من نقطة ن إليه، ونقطة ن أقرب من نقطة ل، ونقطة ل أقرب من نقطة ط، ونقطة ط أقرب من نقطة ز، ونقطة ز أقرب من نقطة د، وبيّنٌ أنه / لا يتلاشى عرض سطح مساوٍ / لسطح ب د، وإن كان طوله من خط ر-٧٤-و ط-٥٢-ظ ب ج أطول خط فُرض، ولا يمكن ذلك.

فإن أمكن، فليقع السطح المساوي لسطح ب د على خط ب ف، فخط ب ف في مساحة سطح ب د، فسطح ب د مركب من أقسام خط ب ف، وقد تبين أن السطح لا يتركب من الخط / ولا الخط من النقطة، فليس يُعدم ك-٢٣٤ عرض سطح مساوٍ لسطح ب د وإن طال طوله؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإذ قد وطّأنا ما وطّأنا، فلنفرض / خطي ا ب ب ه على زاوية ب، م-١٢-ظ ولتكن نقطة د على محيط القطع الزائد الذي لا يلقى خطي ب ه ب ا، فيجوز محيط ذلك القطع على نقط د ز ط ل ن ع، فيقرب دائماً من خط ب ج إلى ما لا نهاية لخاصية هذه السطوح المتساوية المتكافئة الأضلاع، ولا ينتهي إلى خط ب ف، لأنه لو لقي خط ب ف لوقع عرض السطح المساوي لسطح ب د على خط ب ف، وقد بينا أنه لا تتلاشى عروضها، فلا ينتهي إذاً محيط القطع الزائد إلى خط ب ج، وكلما ازدادا طولاً ازدادا قرباً إلى ما لا نهاية.

وأكثر ظني أنه ما وجد أبلونيوس هذه الخاصية في هذا الشكل، ولا سبق ظنه إلى أنه يمكن أن يكون خطان يقربان دائماً ولا يلتقيان، حتى وجد هذه الخاصية التي قدمنا ذكرها؛ فلما وجد هذه الخاصية تَيَقَّظ من أمر هذه الخاصية المذكورة. / وأيضًا خاصية أخرى لهذا الشكل يؤدي تصورها ما ك-٢٣٥ أدى الشكل الذي قدمنا ذكره.

1 ط ك: ن س [ر] / ون س ... ل م: ناقصة [ر، ط] – 2 ونقطة ل: ناقصة [م] – 3 نقطة (الثالثة): ناقصة [ر] – 4 مساوٍ: مسايا [ر، ك، ط، م] / خط: ناقصة [ر] – 6 ب د: د [ر، م] – 6-7 فخط ب ف: ناقصة [ط] – 7 خط: بخطه [ر] – 8 تبيّن: بيّن [ر، ط] / الخط من النقطة: الخطان النقط [ر] الخط من النقط [ط] – 9 عرض: غرض [ط] / مساوٍ: مساويا [ر، ط، م، ك] / أردنا أن نبين: أردناه [ر] – 10 وإذ: فإذ [ر، ط] / وطّأنا: وطينا [ر، ط، م] فرضنا [ك] / وطأنا (الثانية): وطينا [ر، ط، م، ك] – 11 ولتكن: وليكن [ر] – 12 محيط: محور [ط] / ل: ك ل [ط] – 13 لخاصية: لخاصة [ر] – 14 لوقع: لوقوع [ر] – 15 تتلاشى: يتلاشا [ر] / فلا: ولا [م] – 16 ازدادا: ازداد [ط، ك] / ازدادا: ازداد [ط، ك] – 17 أبلونيوس: ابللونيوس [ر] / الخاصية: الخاصة [ر، ط، م] / ولا: وما [ر، ط] – 18 ولا يلتقيان: فلا يلتقيان [ك] – 19 الخاصية (الأولى والثانية): الخاصة [ر، ط، م] / قدمنا: قد مر [ط] / تيقّظ: بنقط [ر، ط]، كتب قبلها «التي قدمنا ذكرها» [ك] – 20 الخاصية: الخاصة [ر، ط، م] / خاصية : خاصة [ر، ط، م] / تصورها: تصورهما [ر، م] – 21 أدى: اذا [ر].

Que les droites *BA* et *BC* qui ne rencontrent pas la section embrassent un angle *B*. La droite *EDA* a été menée telle que *BE* soit égale à *BA*. *AE* a été divisée en deux moitiés au point *D*. Menons les droites *HN*, *KM*, *CL* et posons le produit de *NG* par *GH*, de *MI* par *IK*, de *LS* par *SC*, égal à *AD* par
I-53r *DE*. Il est clair / que la droite *CS* est plus petite que la droite *KI*, que *KI* est plus petite que *HG*, et que *HG* est plus petite que *ED*, car *SL* est plus longue que *IM*, *IM* est plus longue que *GN* et *GN* est plus longue que *DA* ; il est clair également que les droites menées au-dessous des deux points *C* et *L*, parallèles à la droite *AE*, à l'infini, se partagent toujours en deux parties, telles que le produit de chacune d'elles par l'autre soit égal à la droite *AD* par *DE*. La droite la plus éloignée du point *E* est telle que sa partie sur la droite *BC* soit plus petite que la droite la plus proche. Le pourtour de l'hyperbole que la droite *BC* ne rencontre pas, passe par les
R-74v points / *D*, *G*, *I*, *S* ; et à mesure qu'ils s'allongent, ils s'en rapprochent. Et le pourtour de la section ne rencontre pas la droite *BC*.

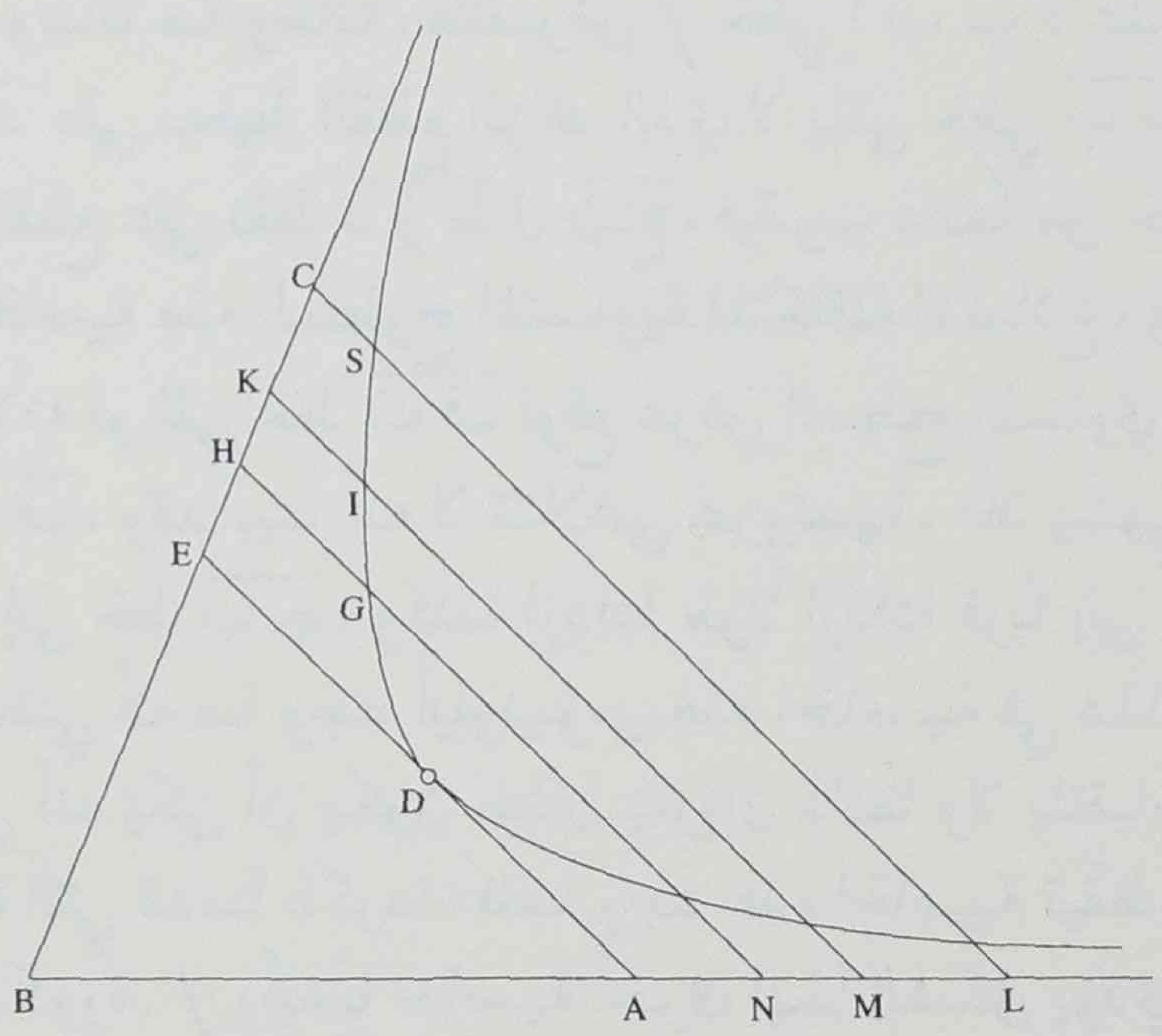
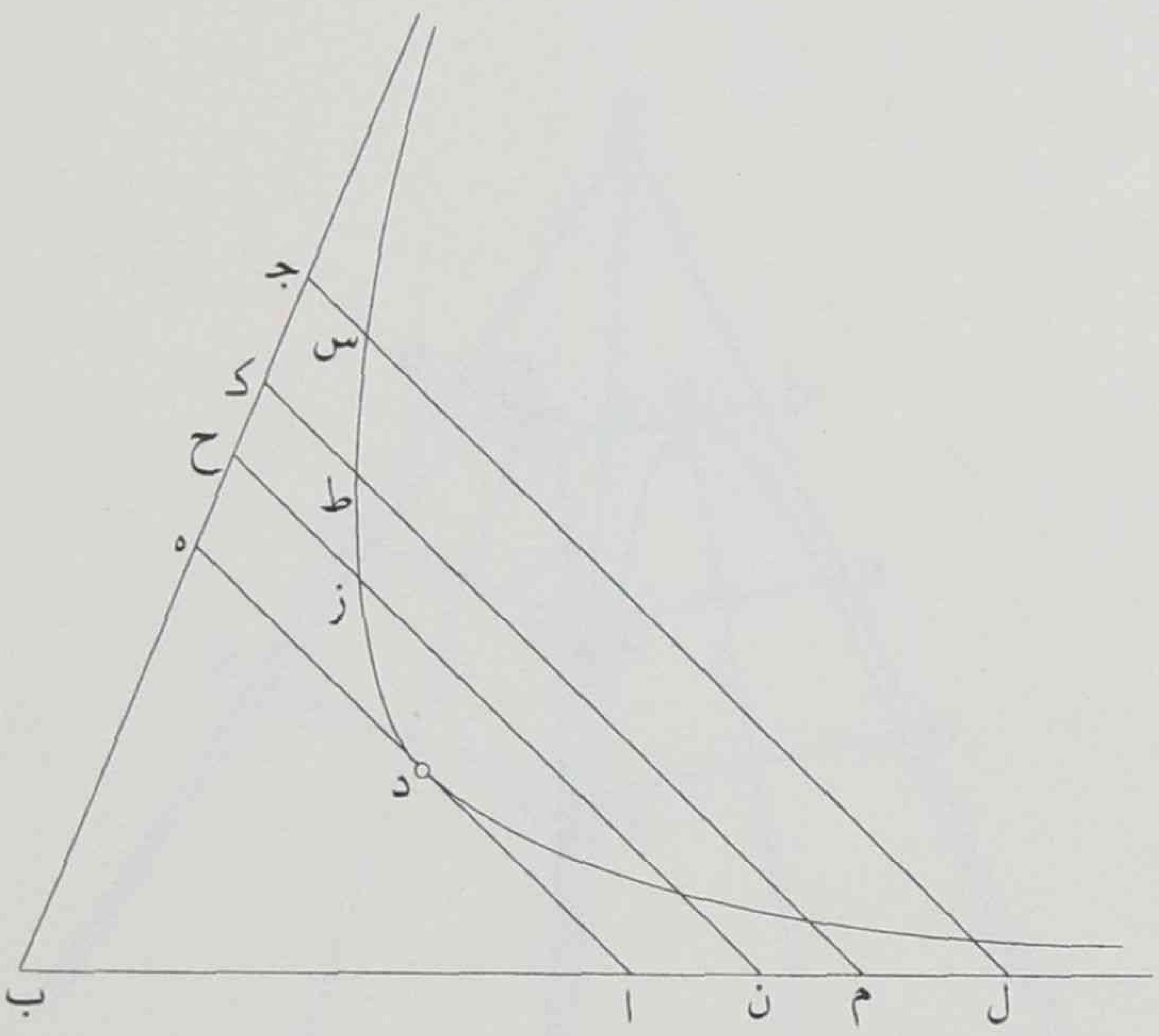


Fig. 2

Il peut exister deux courbes qui se rapprochent toujours et ne se rencontrent pas.

فليكن الخطان اللذان لا يلقيان القطع ب ا ب جـ يحيطان بزاوية ب. وقد خرج خط ه د ا يكون ب ه مثل ب ا، وقسم ا ه بنصفين على نقطة د؛ ونخرج خطوط ح ن كـ م جـ ل، ونجعل ضرب كل واحد من ن ز في ز ح وم ط في ط كـ ول س في س جـ مساوياً لـ ا د في د ه، فبيّن / أن خط جـ س ط-٥٣-و أصغر من خط كـ ط وكـ ط أصغر من ح ز، وح ز أصغر من ه د لأن س ل أطول من ط م، وط م أطول من ز ن وز ن أطول من د ا، وبيّن أيضًا أن الخطوط المخرجة تحت نقطتي جـ ل الموازية لخط ا ه إلى ما لا نهاية، تنقسم دائمًا بقسمين يكون ضرب كل واحد من أحد القسمين في الآخر مساوياً لخط ا د في د ه. والأبعد من نقطة ه يكون القسم منه الذي على خط ب جـ أصغر من الأقرب، ومحيط القطع الزائد الذي لا يلقاه خط ب جـ يجوز على نقط / د ز ط س، وكلما ازدادا طولاً ازدادا قرباً، ولا يلقى محيط القطع ر-٧٤-ظ خط ب جـ.



وقد يوجد خطان منحنيان يقربان دائمًا ولا يلتقيان.

1 يلقيان: يلتقيان [ر، م] / القطع: للقطع [ك] – 2 مثل: مثلث [ر] – 3 ح ن: ح ر [ر] / ضرب: ناقصة [ك] / ن ز: ب ز [ر] – 4 ط كـ: ط ل [ر] – 5 ح ز (الأولى والثانية): ج ز [ر] – 7 تنقسم: ينقسم [ر] – 8 مساوياً: متساويا [ط] – 9 على: يلي [ر، ط، م] فوق السطر [ك] – 10 يلقاه: يلتقيه [ر] يلقيه [ط] – 11 نقط: نقطة [م] / يلقى: يلقا [م] – 12 خط ب جـ: ناقصة [ط] – 13 خطان: خطين [ر، ط] / منحنيان: منحنيين [ر، ط] / يلتقيان: يلقيان [ر].

M-13r K-236 Que les deux droites *BC* et *BD* entourent un angle *B*. / Menons la droite *BA* et faisons *BC*, *BA* et *BD* égales ; / joignons *AC*, *AD* ; partageons chacune d'elles en deux moitiés en *E* et *G* ; faisons passer par les deux points *E* et *G* deux hyperboles qui ne rencontrent pas la droite *BA*. Soit les deux sections *EQ*, *GU*.

Je dis qu'elles ne se rencontrent pas. Et si on les prolonge toujours, elles se rapprochent.

Démonstration : menons *HI*, *HK*, *LN* et *LM* parallèles à *AC*, *AD* et qui coupent les deux sections aux points *O*, *U′*, *S* et *P*. Joignons *SO*, *PU′*. Puisque les deux angles *OHS*, *U′LP* sont égaux et que les deux droites *OH*, *HS* sont plus longues que les deux droites *U′L*, *LP*, alors la droite *SO* sera plus longue que la droite *PU′*. Et de même, pour toutes les droites menées du pourtour des sections et parallèles à la droite *SO* : celle qui s′éloigne de *SO* est plus petite que celle qui s'en rapproche. Mais nous avons montré que les deux pourtours de la section ne rencontrent pas la droite *BA*[1]. Donc
I-53v ils ne se rencontrent pas. / Ce qu'il fallait démontrer.

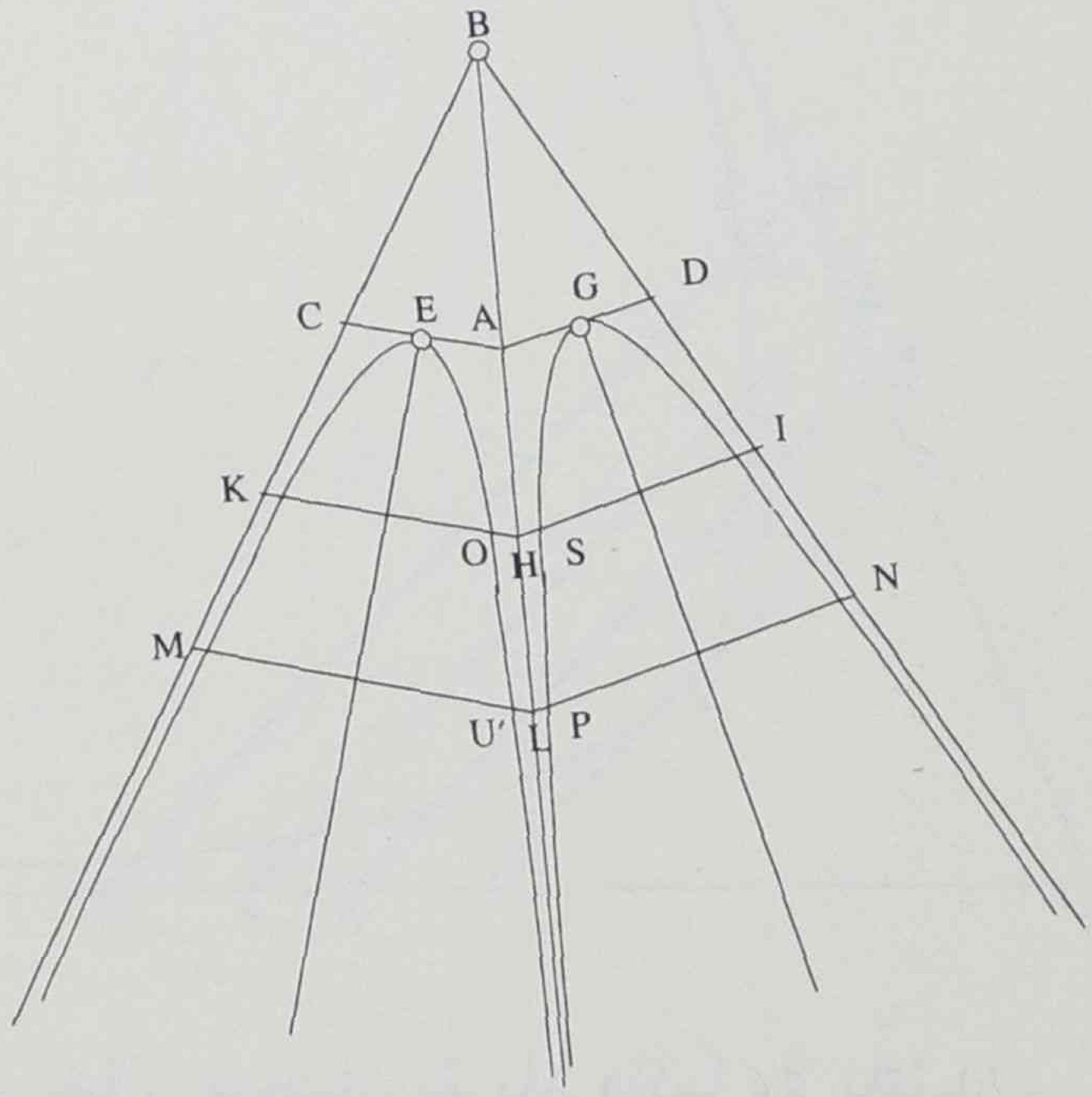


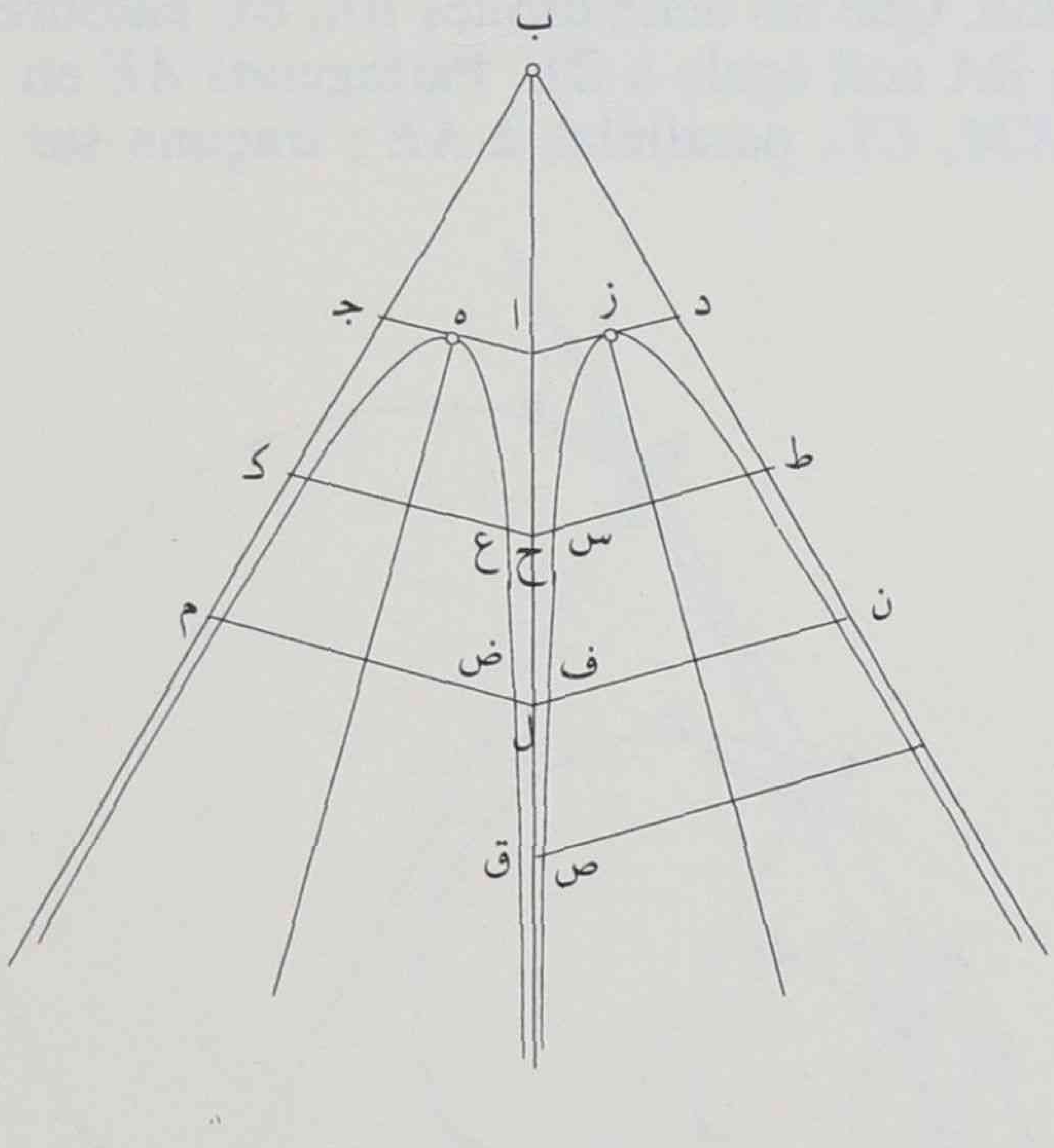
Fig. 3

[1] Puisqu'elles se placent par hypothèse de part et d'autre de l'asymptote *BA*.

فليكن خطّا ب جـ ب د يحيطان بزاوية ب، / ونخرج خط ب ا، ونجعل م-١٣-و
ب جـ ب ا ب د متساوية / ونصل ا جـ ا د، ونقسم كل واحد منهما بنصفين ك-٢٣٦
على ه ز، ونجيز على نقطتي ه ز قطعين زائدين لا يلقيان خط ب ا المستقيم، وهما قطعا ه ق ز ص.

فأقول: إنهما لا يلتقيان، وإن أخرجا إخراجًا دائمًا يقربان.

برهان ذلك: أن نخرج ح ط ح كـ ل ن ل م موازيين لـ ا جـ ا د تقطع القطعين على نقط ع ض س ف، ونصل س ع ف ض. فلأن زاويتي ع ح س ض ل ف متساويتان وخطي ع ح ح س أطول من خطي ض ل ل ف، يكون خط س ع أطول من خط ف ض، وكذلك الخطوط المخرجة من محيطي القطعين، الموازية لخط س ع: كلُّ ما بعد منه فهو أصغر مما قرب منه، وقد بيّنا أنهما لا يلقيان خط ب ا، فهما لا يلتقيان؛ / وذلك ما أردنا أن نبين. ط-٥٣-ظ



1 خطّا: خطى [ر، ط، م] – 2 ونصل ... منهما: ناقصة [ك] – 3 قطعين: قطع، ثم صححها عليها [ر] / يلقيان: يلتقيان [ر، ك، م]، وهذا جائز أيضًا / المستقيم: المنقسم [م] – 4 قطعا: قطعي [ر، ط، ك، م] – 5 إخراجًا: ناقصة [ر، ط، ك] / يقربان: فيقربان [ر، ط، م] – 6 أن نخرج ... ا د: المقصود «أن نخرج ح ط موازيًا لـ ا د وح كـ موازيًا لـ ا جـ، ول ن موازيًا لـ ا د، ول م موازيًا لـ ا جـ» / ح كـ: ح ل [ر] / ل ن: ل م [ر، ط، م] / ل م: ل ن [ر، ط، م] / ا جـ ا د: لا د ه ا د [ر] / تقطع: يقطع [ر] – 7 ف ض: و ص [م] – 8 متساويتان: متساويين [ر، م] متساويتين [ك، ط] – 10 القطعين: القطعى [ر] / كلُّ ما: كلما [ر، ط، ك، م] قد فصلناهما حتى يتضح المعنى – 11 يلقيان: يلتقيان [ر، ط، م] / فهما: مهما [ك] / أن نبيّن: بيانه [ر، ط، م] في [م] ترك الناسخ فراغًا للرسم، وفي [ك] نجد رسمًا لا يوافق النص.

Il nous est également possible de tracer cette section, si nous posons deux droites quelconques formant[1] un angle quelconque ; alors l'hyperbole passe par un point quelconque, en vertu de la construction que nous avons mentionnée précédemment, comme si par exemple nous posons les deux droites *AB*, *BE* de la première proposition formant[2] l'angle *B* ; et nous voulons tracer une hyperbole que les deux droites *AB*, *BE* ne rencontrent pas, et qui passe par le point *D*.

Complétons le parallélogramme *DB* et appliquons aux parties de la droite *BP*, qui se rapprochent, des parallélogrammes égaux au parallélo-
K-237 gramme *BD*. Alors un angle leur / sera commun, qui est l'angle *B*. Appli-
C-68r quons / au prolongement de la droite *BA* des parallélogrammes dont l'un des angles soit égal à l'angle *B*, et traçons la section sur les angles opposés à l'angle *B*, dans chacun des parallélogrammes mentionnés. Nous traçons ainsi l'hyperbole qui ne rencontre pas les deux droites *AB*, *BE*. Ce qu'il fallait démontrer[3].

Il nous est également possible de tracer l'hyperbole par la voie de la deuxième proposition. Que les deux droites *BA*, *BC* entourent l'angle *B*. On mène *AE* telle que *BA* soit égale à *BE*. Partageons *AE* en deux moitiés en *D* ; menons *HN*, *KM*, *CL*, parallèles à *AE* ; traçons sur elles des demi-

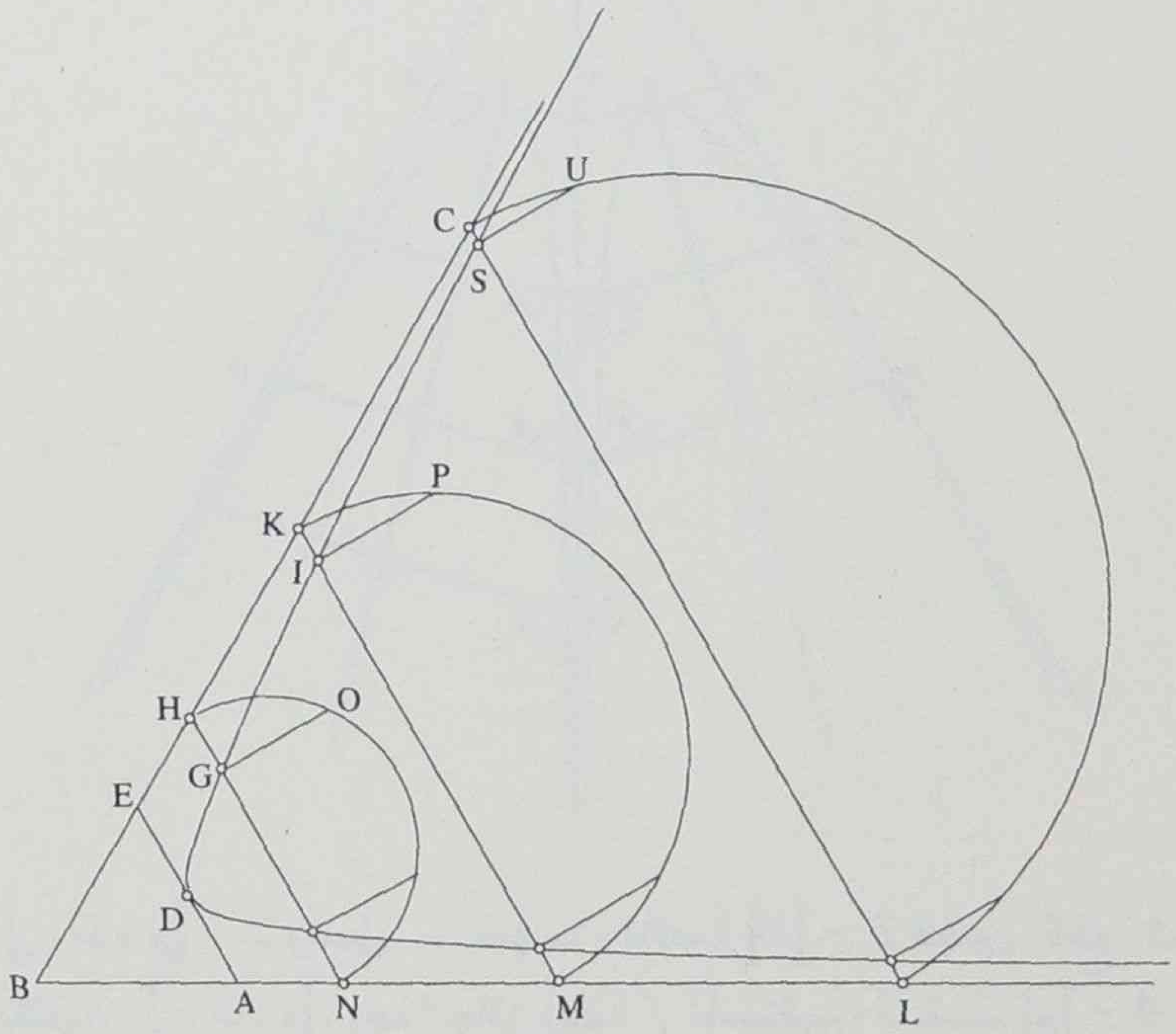


Fig. 4

[1] Litt. : selon.

[2] *Ibid.*

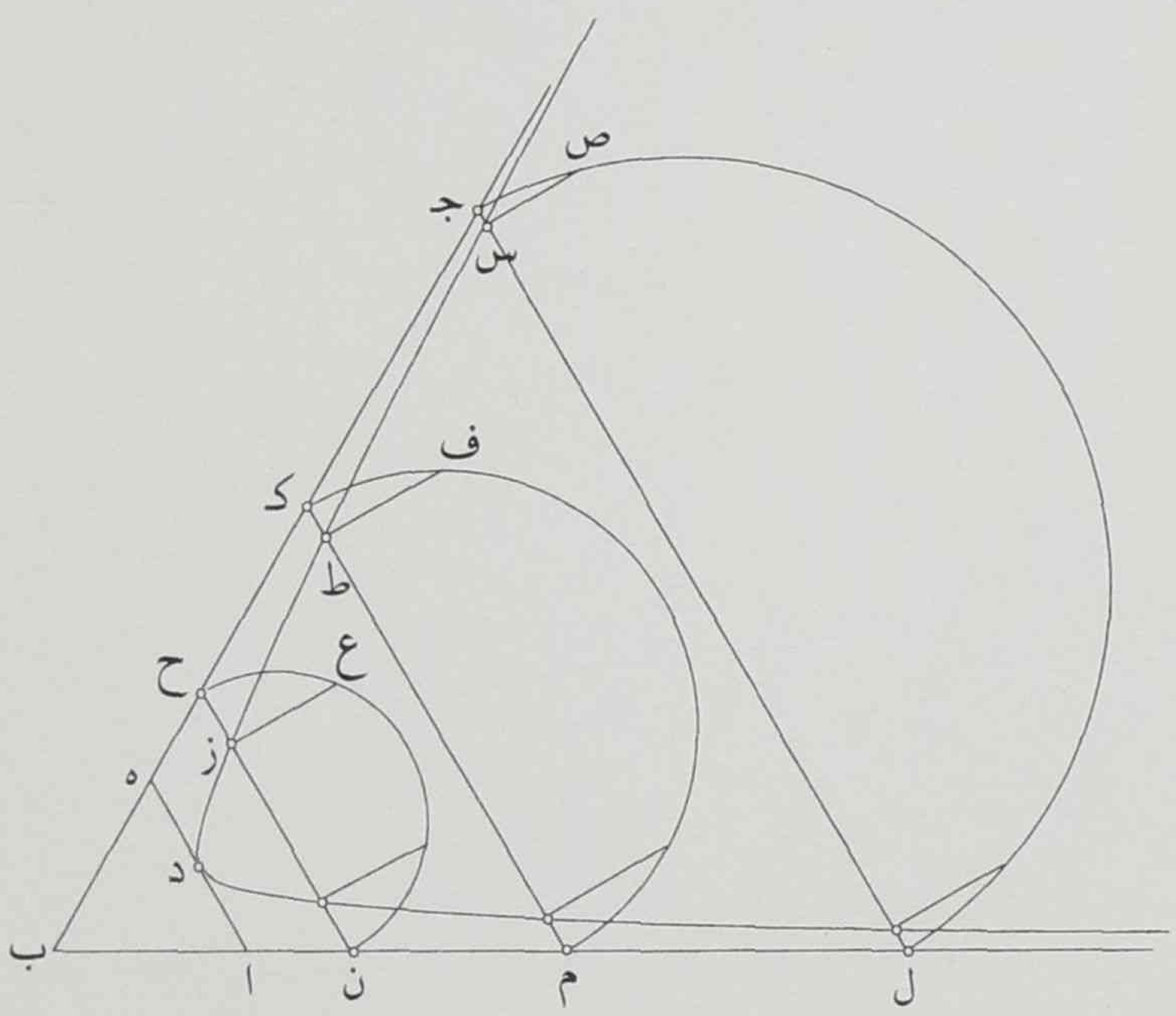
[3] Notons qu'il s'agit d'une construction par points de l'hyperbole, conséquence de la proposition 43 du livre I des *Éléments*. Cette conséquence a déjà été donnée dans l'étude du lemme.

وقد يتهيأ أيضًا أن نرسم هذا القطع، إذا وضعنا أي خطين أردنا على أي زاوية تكون؛ فعلى أي نقطة أردنا، يجوز القطع الزائد من العمل الذي قدمنا ذكره؛ كأن نضع خطي ا ب ب ه من الشكل الأول على زاوية ب وأردنا أن نرسم قطعًا زائدًا لا يلقاه خطا ا ب ب ه ويجوز على نقطة د.

فلنتمم متوازي الأضلاع د ب، ونضيف إلى أقسام خط ب ف المتقاربة سطوحًا مساوية لسطح ب د متوازية الأضلاع، فتكون زاوية منها / مشتركة، وهي زاوية ب؛ ونضيف / إلى استقامة خط ب ا سطوحًا متوازية الأضلاع، مساويةً زاوية منها لزاوية ب، ونرسم القطع على الزوايا المقابلة لزاوية ب من كل واحد من السطوح المذكورة، فنرسم القطع الزائد الذي لا يلقى خطي ا ب ب ه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ك-٢٣٧
جـ-٦٨-و

وقد يتهيأ أيضًا أن نرسم القطع الزائد من طريق الشكل الثاني: فليكن خطا ب ا ب جـ يحيطان بزاوية ب، وقد خرج ا ه، يكون ب ا مساويًا لـ ب ه، ونقسم ا ه بنصفين على د؛ ونخرج ح ن كـ م جـ ل موازية لـ ا ه



1 يتهيأ: تهيأ [ر] / أيضًا: ناقصة [ك] / نرسم: يرسم [ر] / أي: ناقص [ط] – 2 تكون: يكون [ر] / فعلى: وعلى [ر، ط، م] على [ك] / يجوز: لجواز [ر] – 3 كأن: كأنا [ر، ط، ك، م] – 4 يلقاه: يلقيانه [ر، ط، ك] يلتقيانه [م] – 5 الأضلاع: ناقصة [ر، ط، ك، م] – 6 مساوية: متساوية [م] / فتكون: ويكون [ر، ط] – 7 مشتركة: مشتركا [ك] – 8 زاوية: ناقصة [ك] – 9 لزاوية: للزاوية، أضافها الناسخ في الهامش [ك] – 9 ب: ناقصة، وترك فراغًا لها [ط] / فنرسم: ونرسم [م] / الذي: ناقصة [ك، م] – 10 خطي: خط [ك] / وذلك ما أردنا أن نبين: وذلك ما أردناه [ر] – 11 يتهيأ: تهيأ [ر] – 12 ب: ناقصة [ط] / يكون: فيكون [م] – 13 كـ م جـ ل: وكـ م وجـ ل [م] / لـ ا ه: لها [ر، ط، م].

M-13v cercles, et menons *GO*, *IP*, *SU* / perpendiculaires aux droites parallèles, chacune d'elles étant égale à la droite *AD*. Alors les points *D*, *G*, *I*, *S* sont ceux sur lesquels on trace l'hyperbole.

R-75r *Démonstration* : *AD* par *DE* / est égale à *NG* par *GH*, c'est-à-dire au carré de *GO*, et à *MI* par *IK*, et à *LS* par *SU*. Ce qu'il fallait démontrer.

L'opuscule est achevé.

وندير عليها أنصاف الدوائر، ونخرج ز ع ط ف س ص / أعمدةً على م-١٣-ظ الخطوط المتوازية، ويكون كل واحد منها مساوياً لخط ا د، فتكون نقط د ز ط س هي التي يجوز عليها رسم القطع الزائد.

برهانه: أن ا د في د ه / مساوٍ لـ ن ز في ز ح، أعني لمربع ز ع، ولـ م ط ر-٧٥-و في ط ک ولـ ل س في س ص؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تم القول.

1 ط ف: وط ف [م] – 2 ويكون: فيكون [ك، م] / واحد: ناقصة [م] / فتكون: وتكون [م] – 4 ا د: ا ه [جـ، ر، ط، م] / مساوٍ: متساويا [ط] / ن ز: ف ز [م] / ز ع: ز ح [ط] / ولـ م ط: ول ط [ك] – 5 ط ک: ط ل [جـ، ر] / س ص: سح [جـ، ر، ط] س ض [ك]، الحرف الثاني غير واضح [م] / ما أردنا أن نبيّن: ما أردناه [ر] ما أردنا بيانه [جـ، ط، م] – 6 تم القول: نجد مكانها «تمت الرسالة» [ر] يعقبها في [ك] «والحمد لله وصلواته على محمد وآله الطاهرين»؛ في [م]: «والحمد لله وحده وصلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه أجمعين وسلم تسليمًا»؛ في [ط]: «تم قول أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي رحمه الله في تصور كيفية (كذا) الخطين اللذين لا يلقيان القطع /٥٤-و/ ويقربان دائمًا بإخراجهما إلى ما لا نهاية ولله الحمد والمنة والصلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه. فرغ من تعليقه [تمناه بها للس ان الفحر عسى ل ا ه ٤ (كذا)]، صحح نقله من خط فخر الدين المراغي من نسخه تاريخها جمادى الأولى سنة ٦٤٣ بالموصل. تمت الرسالة بعون الله تعالى»؛ في [جـ]: «تم قول أحمد بن محمد عبد الجليل السجزي في كيفية تصور الخطين اللذين لا يلقيان القطع ويقربان دائمًا بإخراجهما إلى ما لا نهاية ولله الحمد والصلوة على النبي محمد وآله أجمعين عملت في يه شمط يزدجردية».

TEXTE ET TRADUCTION

VI

Fī anna al-ashkāl kullahā min al-dāʾira

Toutes les figures sont à partir du cercle

280r *Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux*

Épître à Naṣr ibn ʿAbd Allāh sur toutes les figures sont à partir du cercle

Il a dit : Nous avons montré dans le livre que nous avons composé pour la bibliothèque du Roi Victorieux, *Toutes les figures sont à partir du cercle*, par la voie du résumé et de l'abrégé, en les regroupant dans deux propositions seulement, que le cercle est la raison des figures et que toutes les figures se trouvent en lui. Nous avons montré dans notre livre *Pour aplanir les voies <en vue de déterminer> les propositions géométriques* ce qu'il a en commun avec les figures, et ses propriétés ; puis la voie pour connaître les propriétés des figures et leurs sections. Et la voie qui mène à leurs propres sources est conclue d'une manière générale de l'essence du cercle et de la connaissance de la qualité des propriétés des figures relativement[1] au cercle ; et d'une manière particulière elles se séparent les unes des autres comme elles sont séparées de manières différentes relativement[1] au cercle. Maintenant nous indiquons certaines d'entre ces choses et nous rassemblons nos propos selon la méthode de l'inverse, et nous expliquons une partie de ce que nous avons mentionné selon une voie facile.

Il faut en effet que tu saches que les figures, avec leurs propriétés, sont toutes à partir du cercle. La preuve en est que le cercle est composé des figures et de leurs termes premiers, c'est-à-dire le point, la droite et le plan ;
280v étant donné que le point est son centre ; / et de la droite elle-même par son mouvement – l'une des deux extrémités étant fixe et l'autre extrémité en mouvement sur un plan jusqu'à ce qu'elle revienne à sa position initiale – se forme[2] le cercle, ainsi que la surface[3]. Il n'existe qu'en tant qu'il est posé sur une surface plane ; et ainsi une figure plane sera cernée. Quant au corps, il se forme par le mouvement du cercle sur lui-même – si on fixe le diamètre jusqu'à ce que le cercle revienne à sa position initiale – et trace une figure sphérique, laquelle est la plus parfaite des figures solides, et la plus grande dans le plus petit lieu, et la meilleure. C'est pourquoi les corps célestes se sont approprié cette figure, en raison de leur beauté, de leur simplicité et de leur supériorité. La figure conique se forme à partir du cercle, étant donné que le cône est à partir du tracé du mouvement d'une droite dont l'une des extrémités tourne sur la circonférence du cercle, si on fixe l'autre extrémité

[1] Litt. : dans.

[2] Litt. : se referme.

[3] Il sous-entend très vraisemblablement la surface limitée par la circonférence.

بسم الله الرحمن الرحيم ٢٨٠-و

رسالة لنصر بن عبد الله
في أن الأشكال كلها من الدائرة

قال: قد بيّنا في كتابنا الذي عملناه لخزانة الملك المنصور في *أن الأشكال كلها من الدائرة* على طريق الإجمال والاختصار، وجمعناها في شكلين فقط: أن الدائرة سبب الأشكال والأشكال كلها موجودة فيها. وقد بيّنا في كتابنا في *تسهيل سبل الأشكال الهندسية* بعض اشتراكها للأشكال وخواصها، ثم الطريق إلى معرفة خواص الأشكال وفصولها؛ و‹الطريق› إلى ذوات عيونها يُستَدل: أما من جهة العموم فمن ذات الدائرة ومن معرفة كيفية خواص الأشكال في الدائرة، وأما من جهة الخصوص فينفصل بعضها عن بعض كما هي مفصلة من جهات مختلفة في الدائرة. ونحن الآن نومئ إلى بعض ذلك ونجمل القول على طريق العكس، ونشرح بعض ما ذكرنا بطريق سهل.

وذلك أنه ينبغي أن تعرف أن الأشكال بخواصها كلها من الدائرة. والدليل على ذلك أن الدائرة مؤلفة من الأشكال ومن مقدماتها، أعني النقطة والخط والسطح، إذ النقطة مركزها، / ٢٨٠-ظ والخط هو بعينه بحركته – بثبات أحد طرفيه وبحركة الطرف الآخر على سطح إلى أن يعود إلى موضعه – تلتئم ‹فيه› الدائرة والسطح. فليس وجودها إلا وأنها موضوعة على بسيط مسطح، وينحصر شكلٌ مسطح. وأما الجسم فهو يلتئم بحركة الدائرة على نفسها، بثبات القطر حتى تعود الدائرة إلى موضعها وترسم شكلاً كرياً، أتم الأشكال المجسمة، وأعظمها في أصغر موضع، وأفضلها. ولذلك قد اختصت الأجرام العالية بهذا الشكل لجمالها وبسيطها وفضلها. وأما الشكل المخروطي فهو يلتئم بالدائرة، إذ المخروط هو من ارتسام حركة خط مستقيم يدور أحد رأسيه على محيط الدائرة بثبات الرأس الآخر على نقطة

17 فليس: فليست – 21 لجمالها: اجمالها.

en un point sur un autre plan que celui du cercle. De même la figure cylindrique est formée par la rotation d'une droite sur les circonférences de deux cercles parallèles. Les hyperboles, les ellipses et les paraboles se forment si on forme les cônes et les cylindres engendrés à partir du cercle, étant donné que l'ellipse a la forme d'un cercle sur un plan incliné et que le cercle est engendré par la séparation du cylindre par des plans parallèles à sa base, comme le cylindre a été engendré à partir de la composition de cercles, c'est-à-dire à partir du mouvement du cercle suivant une droite ; et il est équivalent de dire : le mouvement d'une droite autour d'un cercle, ou le mouvement d'un cercle le long[1] d'une droite.

On engendre l'ellipse en coupant le cylindre par des plans inclinés, c'est-à-dire non parallèles à sa base.

On l'obtient aussi en coupant le cône par des plans qui ne sont ni parallèles à sa base, ni sécants à celle-ci.

On engendre l'hyperbole et la parabole en coupant le cône par un plan sécant à sa base ; quand ce plan est parallèle au côté du cône, c'est-à-dire la droite menée du sommet du cône à la circonférence du cercle de sa base, alors la section est appelée parabole ; et quand il ne lui est pas parallèle, elle est appelée hyperbole.

Les figures solide ovale et lenticulaire se forment par le mouvement de l'ellipse suivant les deux diamètres, comme nous l'avons montré dans notre livre *Sur les propriétés de la figure ovale et de la figure lenticulaire*[2]. De même, on engendre la coupole hyperbolique et la coupole parabolique[3] par la rotation de l'hyperbole et de la parabole.

Il est donc clair que le cercle se trouve dans toute partie supposée sur les pourtours des solides mentionnés. De même ses arcs, car la rotation a eu lieu pour toutes les parties du solide. C'est pourquoi le cercle se trouve dans tous les solides mentionnés. Quant à la sphère, puisqu'on l'a engendrée par la rotation de la circonférence du cercle, alors toutes ses sections sont des cercles.

Quant aux polygones réguliers, il est clair et évident que si nous imaginons la circonférence du cercle divisée en parties égales en nombre quelconque, et si nous joignons ces points par des droites, alors les polygones réguliers se forment et ils sont en puissance dans le mouvement du demi-diamètre relativement à la circonférence du cercle selon un point quelconque.

Poursuivons ce que nous avons mentionné par l'exemple de deux cas pour expliquer ce que nous avons évoqué relativement aux figures, et qu'elles sont à partir de l'être du cercle. Expliquons la propriété nécessaire au triangle, parmi ces figures, pour que celui qui examine notre livre[4] et celui qui le lit, une aide pour une partie de ce que nous avons indiqué et

[1] Litt. : autour.
[2] Voir *supra*, p. 10.
[3] Voir *supra*, texte I.
[4] Il entend le livre qui porte le même titre que cette épître.

على غير سطح الدائرة. وكذلك الشكل الأسطواني فإنه يكون بدوران خط مستقيم على محيطي دائرتين متوازيتين. والقطوع الزائدة والناقصة والمكافئة، فإنها تلتئم بالتئام المخروطات والأساطين الكائنة من الدائرة، إذ القطع الناقص بشكل دائرة على سطح مورب، وذلك أن الدائرة تحدث من تفصيل الأسطوانة بسطوح موازية لقاعدتها، كما أن الأسطوانة قد حدثت من تركيب الدوائر، أعني من حركة الدائرة على خط مستقيم؛ وسواء قولنا: حركة خط مستقيم حول دائرة أو حركة الدائرة حول خط مستقيم.

والقطع الناقص يحدث من تفصيل الأسطوانة بسطوح موربة، أعني غير موازية لقاعدتها.

وكذلك أيضًا يحصل من تفصيل المخروط بسطوح غير موازية لقاعدته ولا مقاطعة لها.

والقطع الزائد والمكافئ يحدث من انفصال المخروط بسطح مقاطع لقاعدته، فإن كان السطح موازيًا لضلع المخروط، أعني للخط المخرج من رأس المخروط إلى محيط دائرة قاعدته، فهو يسمى المكافئ؛ وإن كان غير موازٍ له، يسمى القطع الزائد. والشكل المجسم البيضي والعدسي، فهما يلتئمان بحركة القطع الناقص على القطرين، على ما بيّنا في كتابنا في *خواص الشكل البيضي والعدسي*. وكذلك القبة الزائدة والمكافئة، فإنهما قد حدثتا من إدارة القطع الزائد والمكافئ.

فقد تبّين أن الدائرة موجودة في أي جزء فرض على محيطات المجسمات المذكورة؛ وكذلك قسيها لأن الإدارة وقعت على أجزاء المجسم بأسرها؛ ولذلك يوجد في المجسمات المذكورة كلها الدائرة. فأما الكرة فلأنها قد حدثت من إدارة محيط الدائرة، فإن جميع قطوعها هي الدائرة.

وأما الأشكال ذوات الأضلاع المتساوية، فإنه بيّنٌ ظاهرٌ أنّا إذا توهمنا محيط الدائرة مقسومًا بأقسام متساوية على أي عدد يكون، ووصلنا النقط بالخطوط المستقيمة، فتلتئم المضلعات المتساوية الأضلاع وهي كالقوة في حركة نصف القطر على محيط الدائرة على أي نقطة تكون.

ولنتبع ما ذكرنا بمثال صورتين لكيفية ما ذكرنا من أمر الأشكال وأنها من كون الدائرة. ولنشرح الخاصة اللازمة للمثلث منها، ليكون للفاحص من كتابنا ولقارئه عونًا على بعض ما أومأنا إليه فيه وعلى سائر ما يتبعه. ثم

2 محيطي: محيط – 10 بسطوح: بسطح – 13 كان: أثبتها في الهامش مع «صح» – 21 ولذلك: وكذلك – 23 فإنه: فانها – 24 مقسومًا: مقسوم – 26 على (الأولى): عن.

pour tout ce qui va suivre. Puis nous poursuivons notre propos à l'inverse de ce que nous avons mentionné des attributs des figures <qui sont> à partir du cercle, étant donné que celui qui les médite y trouvera un exercice complet. C'est Dieu qui accorde le succès.

Nous disons : nous avons mentionné dans notre livre *Toutes les figures sont à partir du cercle* les propriétés des figures à partir du cercle d'une manière générale et brièvement, et non pas selon la voie du particulier — cela à l'exemple de ce que nous avons mentionné concernant les perpendiculaires menées des milieux des côtés du triangle, qui ont la particularité de
281r se rencontrer en un seul point. / Certains géomètres ont cru que la cause en est la propriété de rencontre des droites au centre du cercle et c'est la propriété de ce qui est entre elles et le cercle, la plus proche ; mais il n'en est pas ainsi, cette propriété est assurément pour le cercle seulement, et elle est pour le triangle comme une chose accidentelle ; et il n'y en a pas de raison dans le triangle, si ce n'est l'existence du cercle circonscrit et sa position.

<I> Soit le triangle *ABC* inscrit dans le cercle *ABC*. Je dis que la propriété des perpendiculaires menées des milieux de ses côtés — qui sont *DG*, *EG*, *FG* — et de leur rencontre au point *G*, n'appartient pas au triangle mais au cercle. Partageons chacun des arcs *AB*, *BC*, *CA* en deux moitiés et menons de leurs milieux les droites au centre du cercle ; elles se superposent aux perpendiculaires mentionnées.

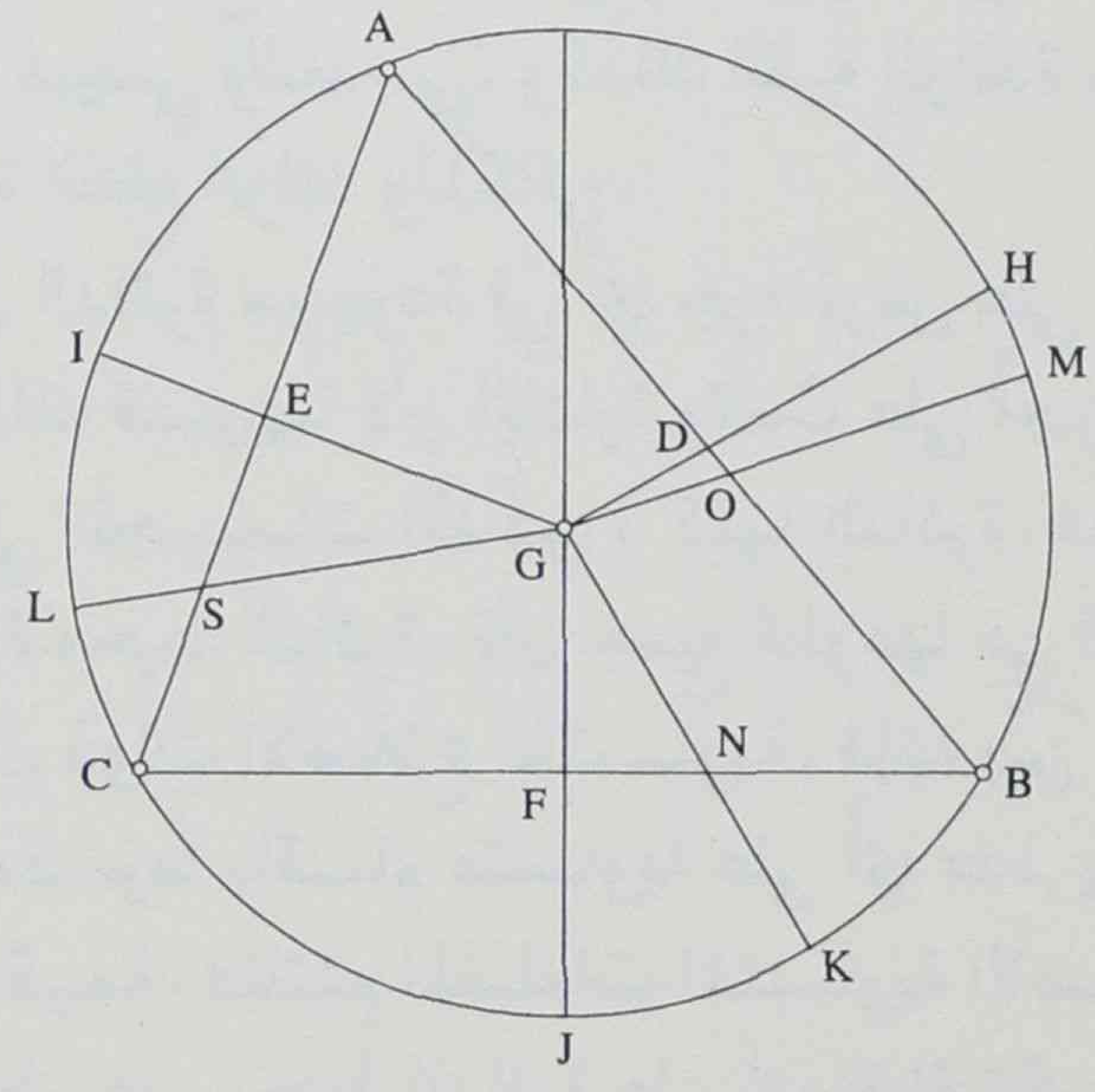


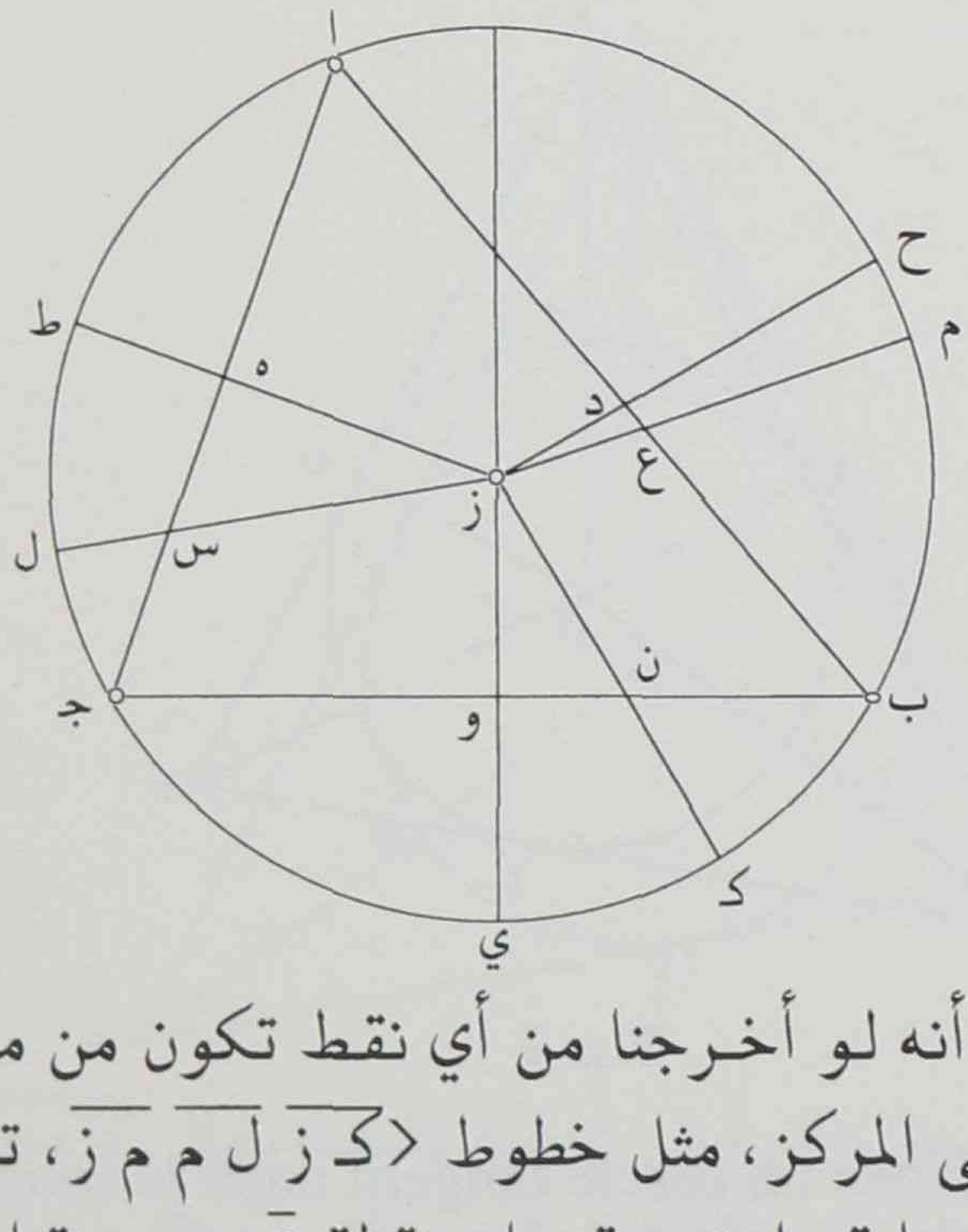
Fig. 1

La preuve en est que si nous menons de points quelconques de la circonférence du cercle trois droites, ou plus, jusqu'au centre, comme les droites *KG*, *LG*, *MG*, on a les droites *NG*, *SG*, *OG* dont la propriété est de se rencontrer au point *G* ; non pas du tout en raison du triangle, mais en raison du cercle, car si nous supposons sur le pourtour du triangle trois points

نتلو القول على عكس ما ذكرنا من أعراض الأشكال من خواص الدائرة، إذ بها رياضة كاملة لمتأملها – والله الموفق.

فنقول: إنا قد ذكرنا في كتابنا في *أن الأشكال كلها من الدائرة* خواص الأشكال من الدائرة على سبيل العموم والإيجاز <لا> على سبيل الخصوص وذلك مثل ما ذكرنا من أمر الأعمدة المخرجة من أنصاف أضلاع المثلث مختصة باجتماعها على نقطة واحدة. / وقد ظنّ بعض المهندسين أن سببها ٢٨١-و خصوصية مجمع الخطوط على مركز الدائرة وهي خاصةُ – الأقرب – ما بينها وبين الدائرة، وليس الأمر كذلك، بل هذه الخاصة للدائرة فقط؛ وللمثلث هي كالشيء العرضي، بل ليس للمثلث سبب في ذلك إلا وجود الدائرة المحيطة بها ووضعها.

فليكن مثلث ا ب جـ أحاط به دائرة ا ب جـ؛ أقول: إن خصوصية الأعمدة التي خرجت من أنصاف أضلاعه، وهي د ز ه ز و ز، واجتماعها على نقطة ز ليس للمثلث بل للدائرة. فلنقسم كل واحدة من قسي ا ب ب جـ جـ ا أنصافًا، ونخرج منها خطوطًا إلى مركز الدائرة، فتنطبق على الأعمدة المذكورة.



والدليل على ذلك: أنه لو أخرجنا من أي نقط تكون من محيط الدائرة ثلاثة خطوط وأكثر إلى المركز، مثل خطوط <كـ ز ل م م ز، تكون خطوط> ن ز س ز ع ز خاصة بها قد اجتمعت على نقطة ز من جهة المثلث البتة بل من جهة الدائرة، لأنا إذا فرضنا على محيط المثلث ثلاث نقط، ونطلب

8-9 وللمثلث هي كالشيء العرضي: المثلث هو كالشيء العرض، كذا في المخطوط ولا يستقيم المعنى بها.

et si nous cherchons une propriété par laquelle les droites menées de ces points se rencontrent en un seul point, nous ne trouvons aucune voie autre que le cercle. La propriété de rencontre de ces droites en un seul point est à partir du cercle seulement, et la division de ses arcs en deux moitiés.

D'autre part nous supposons le cercle *ABC* ; nous marquons sur sa circonférence trois points *A*, *B*, *C* et nous partageons les arcs *AB*, *BC*, *CA* en deux moitiés aux points *H*, *I*, *J* ; nous menons du centre jusqu'à ceux-ci les droites *IG*, *HG*, *JG* et joignons *AB*, *BC*, *CA*. Nous engendrons donc un triangle et le fait que les perpendiculaires à partir des milieux de ses côtés précèdent la génération du triangle, est, en puissance, en nature et aussi en imagination ; ce que nous voulions.

Autre preuve : Dans tout polygone inscrit dans le cercle on trouve cette propriété ; et pour celui qui n'est pas inscrit dans un cercle, on ne la trouve absolument pas.

S'il était possible qu'il y ait un triangle qui ne soit pas inscrit dans un cercle, alors cette propriété ne serait pas uniformément dans tous les triangles, étant donné que la propriété n'est pas en raison de l'essence du triangle. Ce que nous voulions.

Autre exemple : Supposons un triangle *ABC* ; partageons ses angles en deux moitiés et menons à partir d'eux les droites comme *AG*, *BG*, *CG* ; elles se rencontrent en un seul point et nous avons mentionné[1] que c'est en raison du cercle.

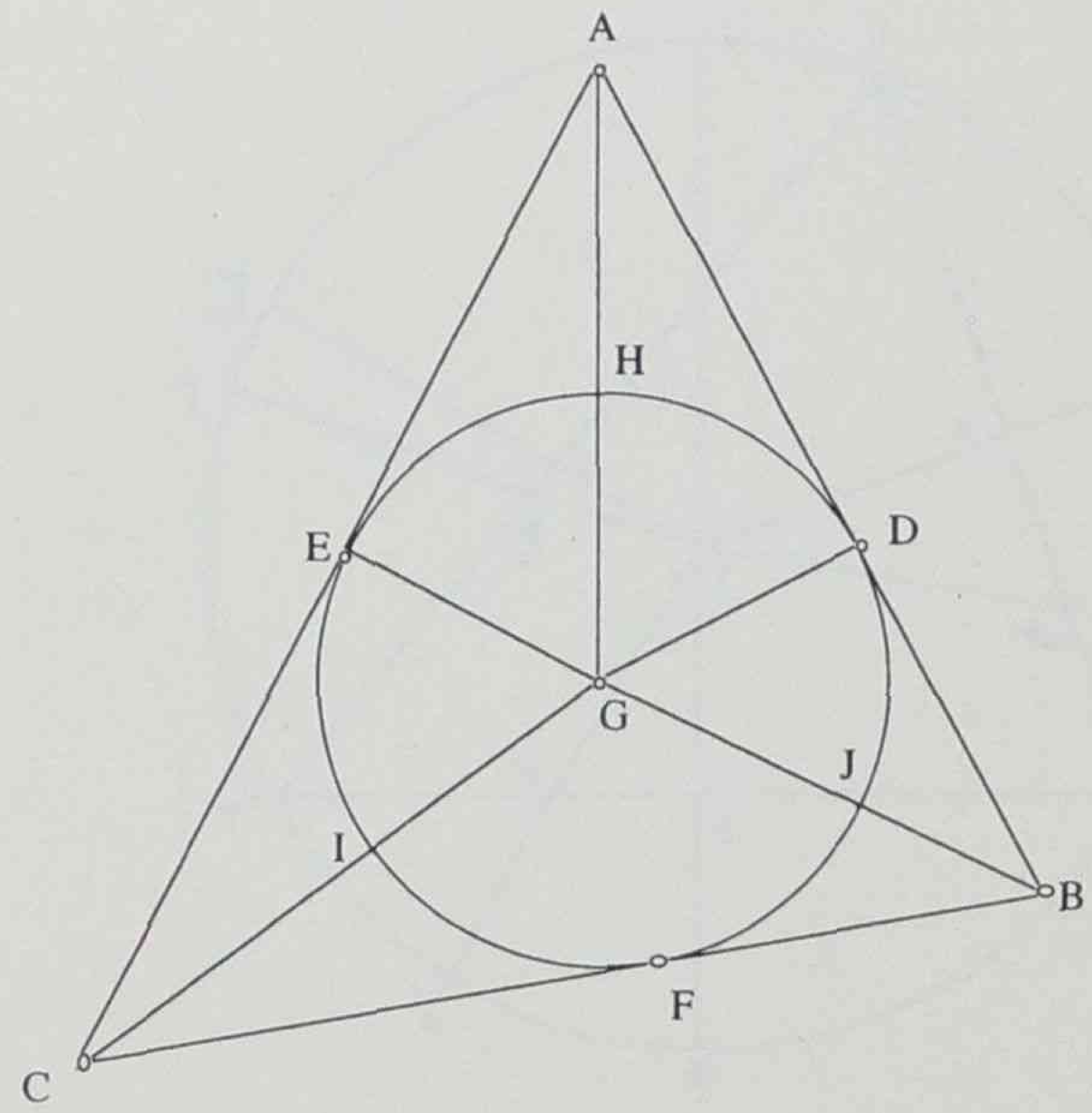


Fig. 2

Démonstration : Inscrivons un cercle tangent dans le triangle ; soit *DEF*. Puisque la droite menée du point *A* au centre du cercle partage l'arc <*DE*>

[1] Al-Sijzī rappelle, dans son *Anthologie de problèmes*, qu'il a établi ce résultat dans son livre *Sur les triangles*, ms. Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 37r.

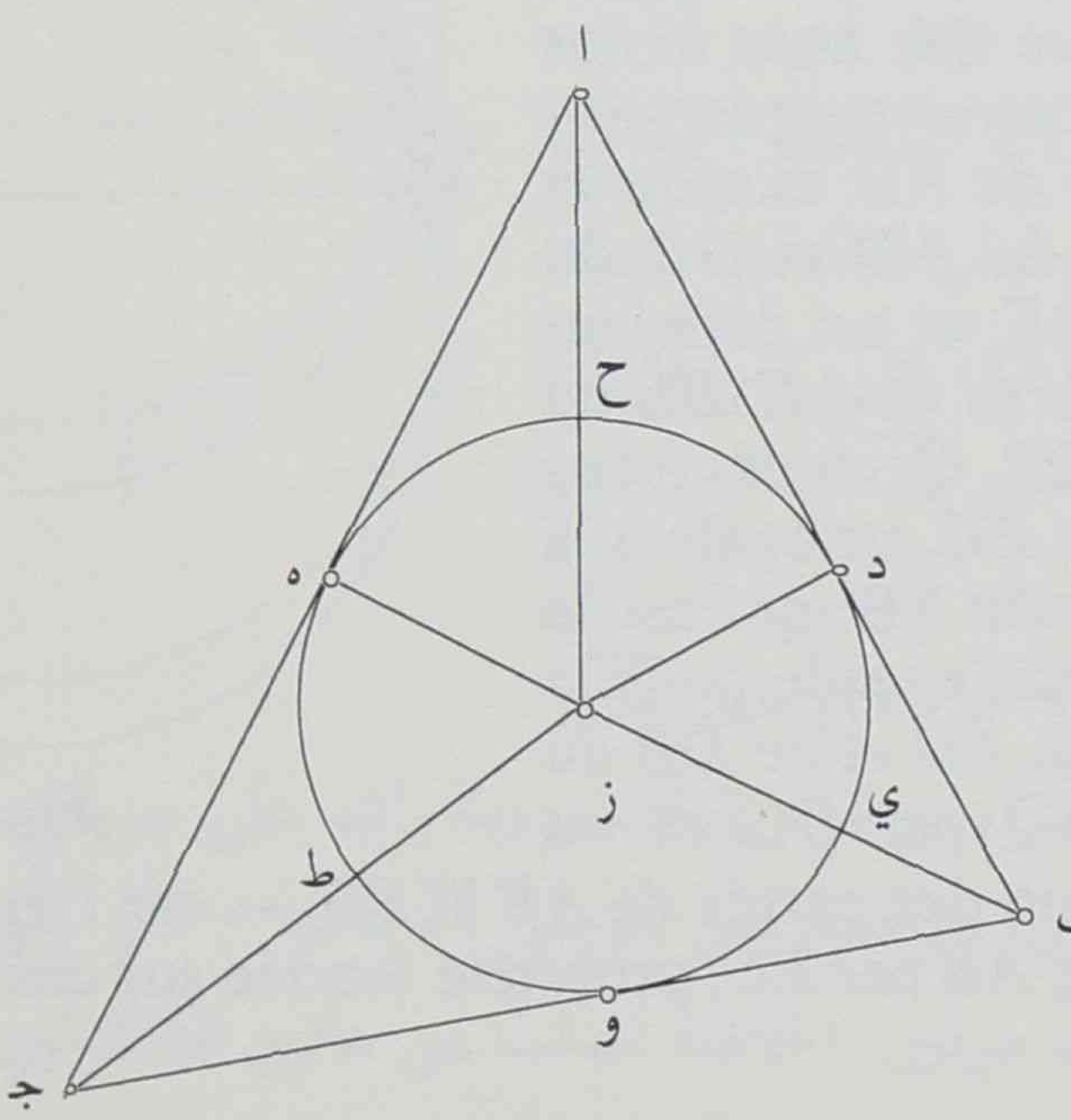
خاصة بها تجتمع ⟨الخطوط الخارجة من تلك النقط⟩ على نقطة واحدة، فلا نجد السبيل إليها سوى الدائرة. فخاصة اجتماع هذه الخطوط على نقطة واحدة هي ⟨من⟩ الدائرة فقط وانقسام قسيها بنصفين نصفين.

وأيضًا، نفرض دائرة ا ب جـ، فنعلم على محيطها ثلاث نقط عليها آ ب جـ، ونقسم قسي ا ب ب جـ جـ ا أنصافًا على ح ط ي، ونخرج من المركز إليها خطوط ط ز ح ز ي ز ونصل ا ب ب جـ جـ ا. فنحدث مثلثًا، وكون الأعمدة من أنصاف أضلاعه قبل حدوث المثلث بالقوة وبالطبع وأيضًا بالوهم؛ وذلك ما أردنا.

ودليل آخر: وذلك أن كل مضلع تحيط به الدائرة توجد فيه هذه الخاصة، وما لم تحط به الدائرة فلا توجد فيه البتّة.

ولو أمكن أن يكون مثلث لا تحيط به الدائرة، لما اطّردت هذه الخاصة في كل المثلثات، من أجل أن الخاصة ليست لذات المثلث، وذلك ما أردنا.

مثال آخر: نفرض مثلث ا ب جـ، ونقسم زواياه بنصفين نصفين، ونخرج الخطوط منها فتجتمع على نقطة واحدة مثل ا ز ب ز جـ ز، فقد ذكرنا أنها من جهة الدائرة.



برهان ذلك: أن نعمل دائرة في داخله تماسه، وهي د ه و. فلأن الخط المخرج من نقطة آ إلى مركز الدائرة يقسم القوس التي يتجاورها الخطان

3 وانقسام: واقسام – 11 مثلث: مثلثا / اطّردت: طردت – 16 د ه و: د ه ر – 17 يتجاورها: يتجارها / الخطان: الخطين.

auquel les droites menées du point *A*, tangentes au cercle *DEF*, sont adjacentes, partageons les arcs *DE*, *EF* et *FD* en deux moitiés aux points *H*, *I* et *J* ; menons à partir d'eux des droites jusqu'au centre et prolongeons-les jusqu'au triangle ; alors elles rencontrent ses angles et se superposent à *AG*, *CG*, *BG*. C'est la propriété du cercle.

Autre preuve : Tout polygone circonscrit à un cercle a cette propriété, et celui qui n'est pas circonscrit à un cercle n'a absolument pas cette propriété. Par conséquent cette propriété est seulement pour le cercle et non pas pour le triangle, si ce n'est que par la voie de l'accident. Ce que nous voulions.

<II> Certains géomètres, parmi ceux qui ont lu ce livre évoqué, ont mentionné qu'ils n'ont pas trouvé de voie vers la propriété, relativement au cercle, du triangle à angles aigus ou de celui à angle obtus, comme ils l'ont trouvée dans le triangle à angle droit, car nous ne l'avons pas exposée là-bas en raison de ce qu'elle contient de secrets subtils. Maintenant il nous faut l'expliquer, en raison du grand profit qu'elle contient et de son éloignement
281v de / l'imagination de certains géomètres, et cela parce qu'en effet la propriété du triangle est composée de la propriété de deux cercles.

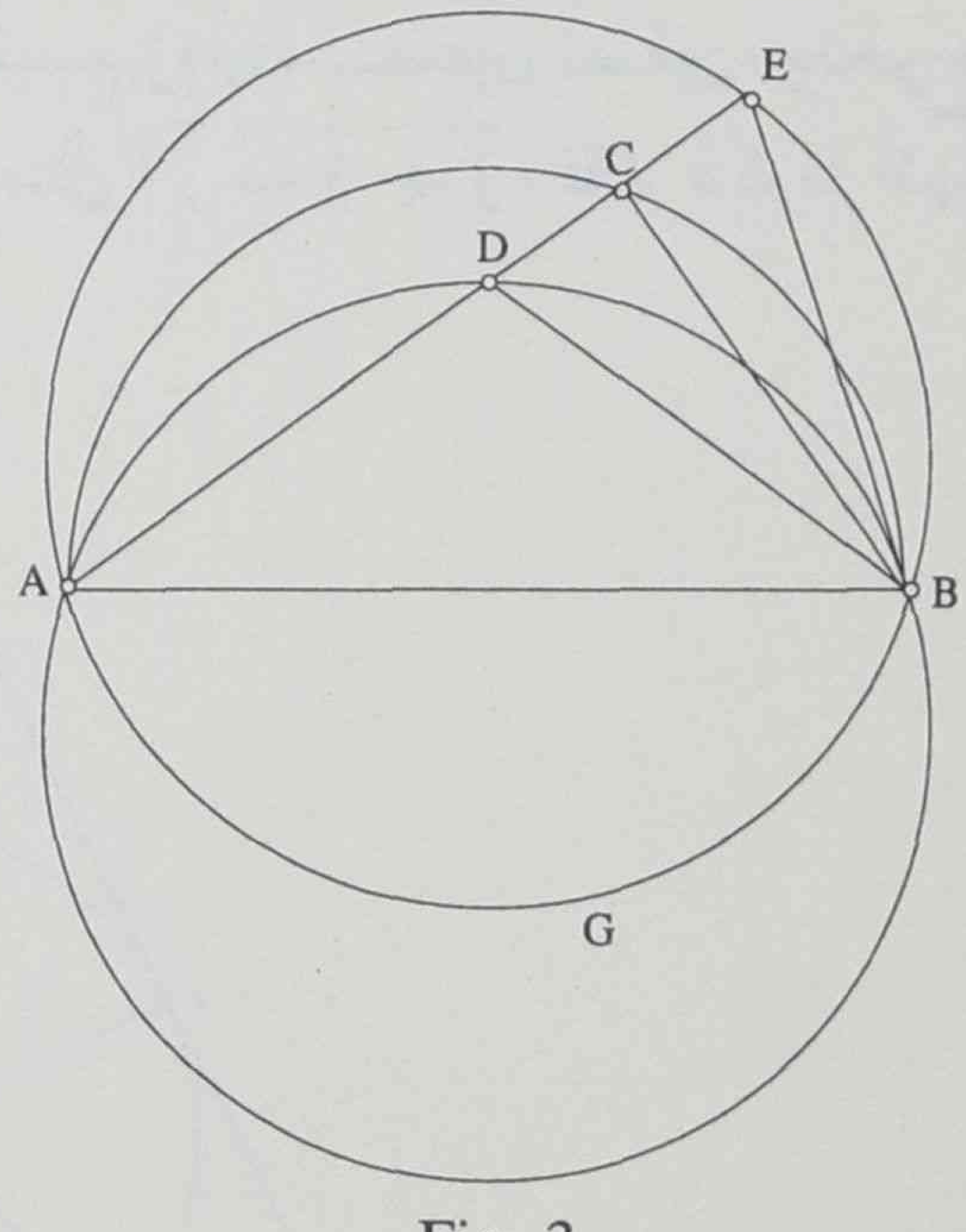


Fig. 3

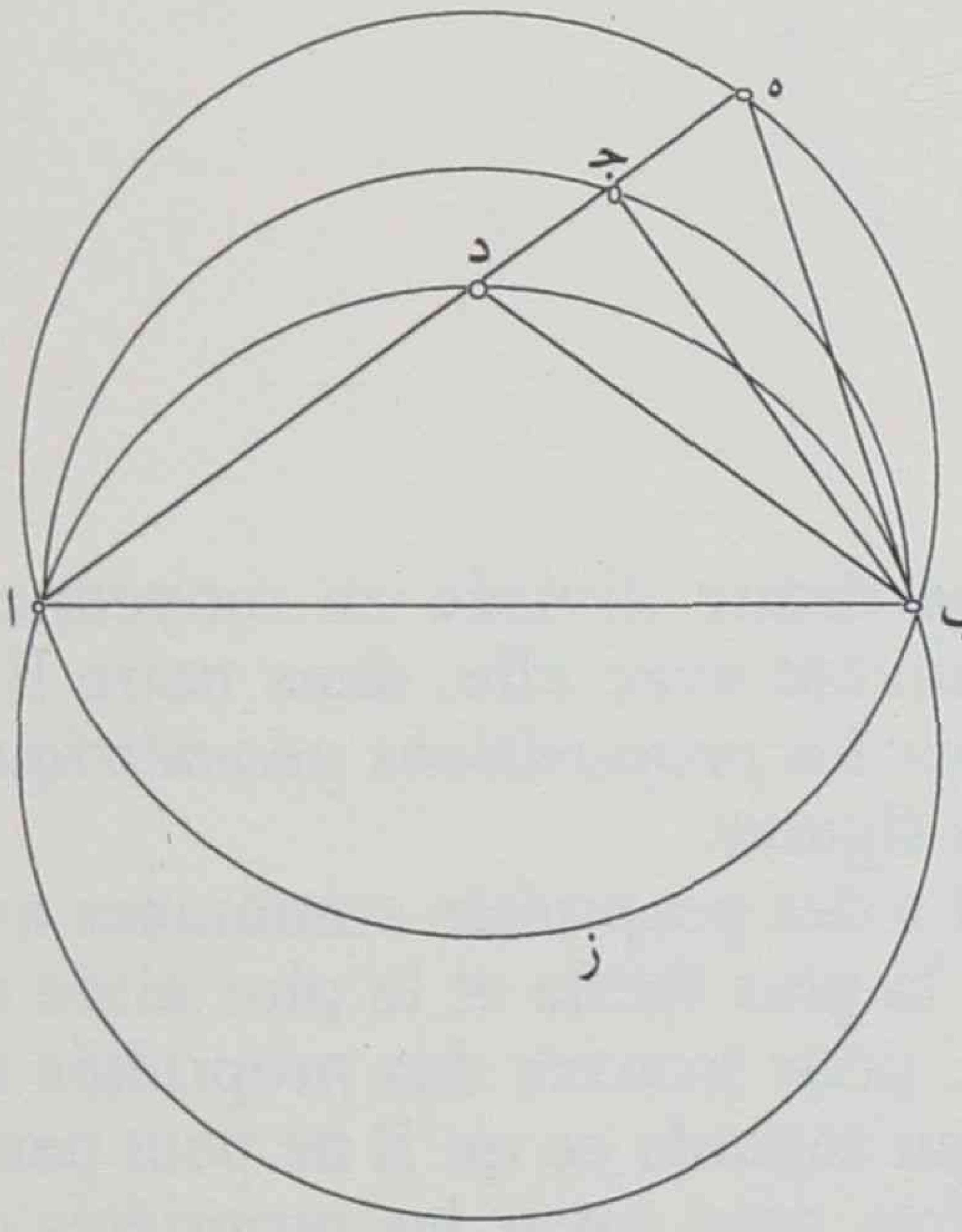
Supposons le demi-cercle *ABC*, traçons sur la corde *AB* un cercle *AEB* et posons l'arc *ADB* égal à l'arc *AGB* ; menons les droites *BE*, *BD*, *AD*, *AC*, *AE*. Alors, d'après ce que nous avons montré dans nos *Commentaires géométriques*, le carré de *AB* excède la somme des carrés de *AD* et *DB* du produit de *AD* par *DE*, et est déficient de la somme des carrés de *AE*, *BE* du produit de *AE* par *ED*. Or nous avons montré que la droite *EC* est égale à la droite *CD* ; le carré de *AB*, qui est la corde de l'angle obtus, excède donc la somme des carrés de *AD* et de *DB* du double-produit de *AD* par *DC*, et est déficient de la somme des carrés de *AE* et *EB* — car l'angle *E* est aigu — du double-produit de *AE* par *EC*, propriété fondée sur ces deux cercles seulement.

Je ne crois pas que quiconque, parmi les gens de cet art, m'ait précédé dans cette voie pour trouver la propriété de l'angle aigu ou obtus.

المخرجان من نقطة ا المماسان لدائرة د ه و، فلنقسم قسي د ه ه و و د أنصافًا على نقط ح ط ي، ونخرج منها خطوطاً إلى المركز ونخرجها إلى المثلث، فتلقى زواياه فينطبق ا ز ج ز ب ز؛ فهذه الخاصة للدائرة.

دليل آخر: وذلك أن كل مضلع يحيط بالدائرة توجد فيه هذه الخاصة، وما لم يحط بالدائرة فلا توجد فيه هذه الخاصة البتّة، فإذاً هذه الخاصة للدائرة فقط لا للمثلث إلا على طريق العرض؛ وذلك ما أردنا.

وقد ذكر بعض المهندسين، ممن قرأ هذا الكتاب المذكور، 〈أنه〉 لم يجد السبيل إلى خاصة المثلث الحاد الزاوية والمنفرج الزاوية مثل ما وجد في القائمة من جهة الدائرة، لأنا قد تركنا ذكرها هناك لما فيه من الأسرار اللطيفة. وأما الآن فينبغي أن نشرحها لكثرة الفائدة فيها وبُعدها عن / وهم ٢٨١-ظ بعض المهندسين، وذلك لأن خاصة المثلث مؤلفة من خاصة الدائرتين.



فلنفرض 〈نصف〉 دائرة ا ب ج وندير على وتر ا ب دائرة ا ه ب ونجعل قوس ا د ب مثل قوس ا ز ب، ونخرج خطوط ب ه 〈ب د〉 ا د ا ج ا ه، فبما بيّنا في *تعليقاتنا الهندسية*، يكون مربع ا ب زائداً على مربعي ا د د ب بضرب ا د في د ه وناقصًا عن مربعي ا ه ب ه بضرب ا ه في ه د. لكن قد بيّنا أن خط ه ج مثل خط ج د، فمربع ا ب الذي هو وتر الزاوية المنفرجة زائد على مربعي ا د د ب بضرب ا د في د ج مرتين، وناقص عن مربعي ا ه ه ب – لأن زاوية ه حادة – بضرب ا ه في ه ج مرتين، الخاصة أصلت من هاتين الدائرتين فقط.

وما أظن أنه سبقني أحد من أهل الصناعة إلى هذا الطريق لوجود الخاصة للزاوية الحادة والمنفرجة.

1 المخرجان: المخرجين / المماسان: المماسين – 7 لم يجد: ولم يوجد – 17 فبما: فيما – 19 ا د: ب د / وناقصًا: ناقص – 20 ا ه (الأولى): ا د / ا ه (الثانية): ب ه – 23 ا د: ب د / ا ه: ا ب – 24 ا ه: ب ه – 26 للزاوية: الزاوية.

Pour la génération des angles à partir de l'extrémité de la tangente au cercle, il y a aussi un secret extraordinaire que les gens, à l'exception des mathématiciens, peuvent à peine concevoir. En effet le diamètre et la circonférence entourent un angle qui n'est ni plus petit ni plus grand qu'un angle droit rectiligne. Menons *DB* tangente au cercle *ABC* et le diamètre *AB*. Puisque l'état d'égalité en puissance des angles *ABD*, *ABC* est tel que nous avons mentionné, il s'ensuit nécessairement la propriété de l'égalité de l'angle qu'on engendre en menant n'importe quelle droite à partir du point *B*, jusqu'au demi-cercle *ACB*; par exemple *BE*, angle entre la droite *BD* et la droite *BE*; et l'angle inscrit qui intercepte l'arc *EAB*. Ceci est facile à concevoir si on mène de nombreuses droites à partir du point *B* jusqu'à la circonférence du demi-cercle *ACB*.

On dit la même chose pour l'autre côté dans la direction du point *F*.

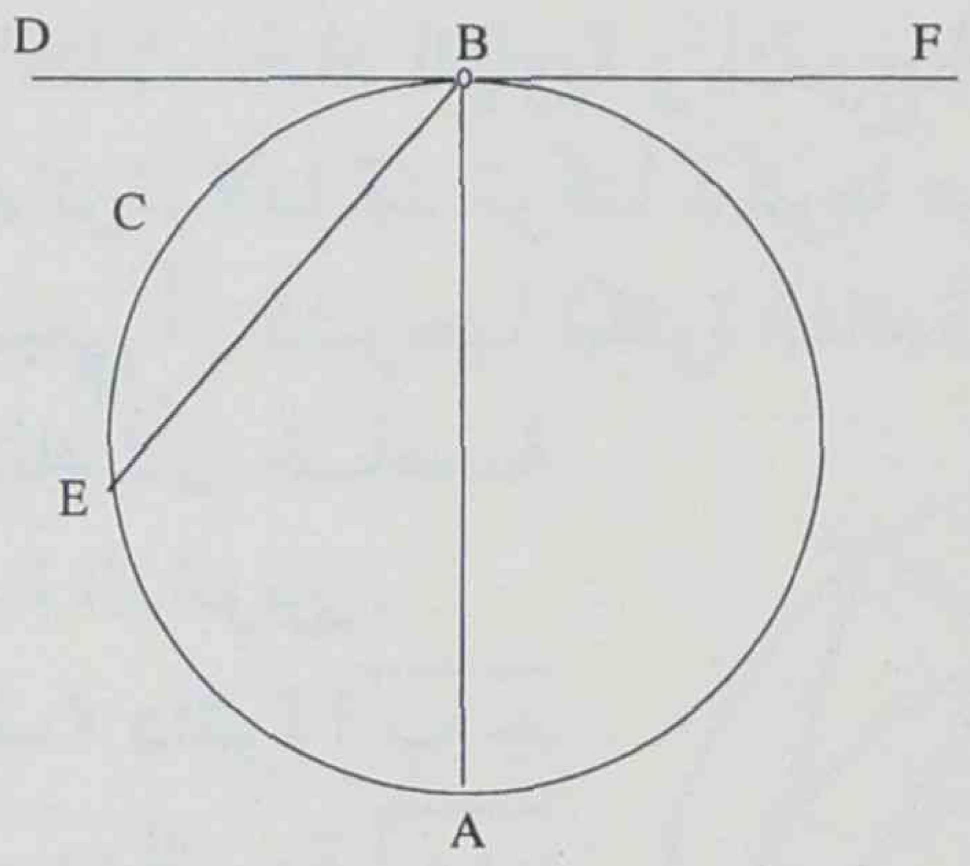


Fig. 4

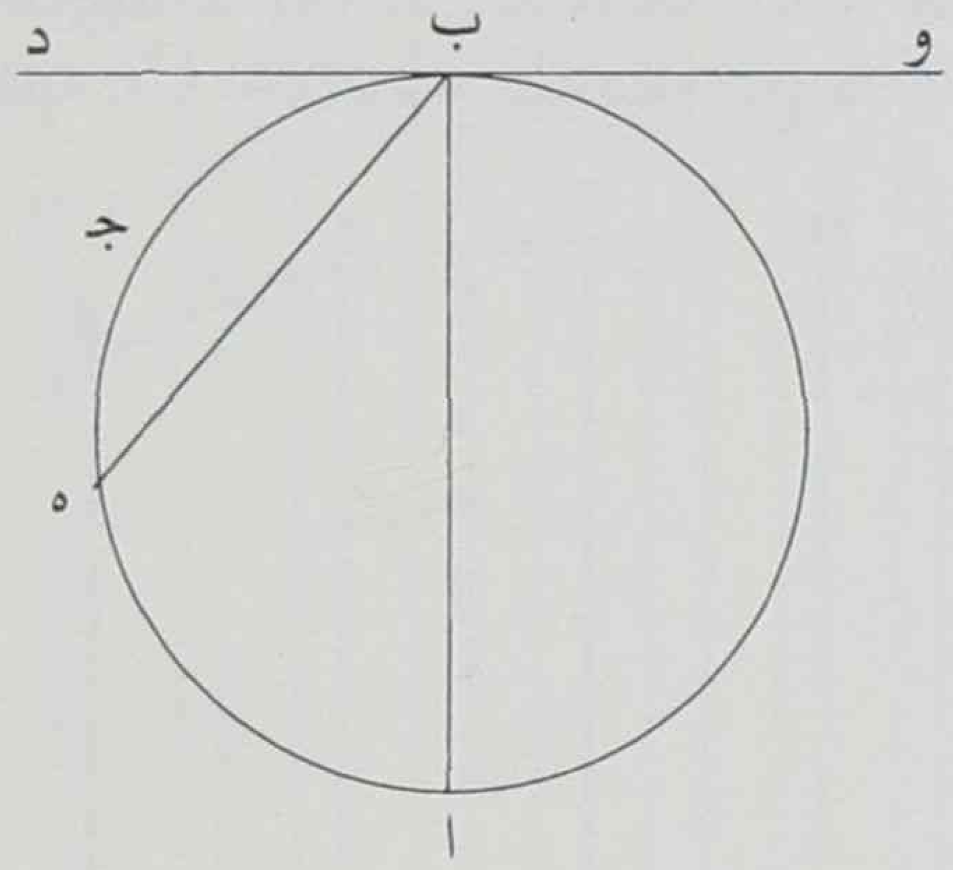
Nous avons indiqué la propriété de la droite divisée en moyenne et extrême raison, parmi les cinq qui se trouvent avec elle, dans notre livre *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*, afin de connaître les choses communes aux figures.

Si on examine le cercle, on trouve qu'il a des propriétés communes avec les figures, ainsi que des différences, par la plus facile et la plus aisée des démarches, étant donné que le cercle est, pour trouver des propriétés des figures, comme le miroir poli pour celui qui regarde ce qu'il ne peut percevoir que par lui. L'écart entre les géomètres pour saisir les propriétés des figures au moyen du cercle est comme l'écart entre ceux qui perçoivent les images par le miroir qui fait face à leurs yeux. S'il en est ainsi, nous devons examiner à partir du cercle les choses communes entre les figures, ainsi que leurs propriétés.

Nous présentons maintenant des figures proposées, desquelles le cercle s'ensuit nécessairement, qui sont des points, des angles, les extrémités des lignes par lesquelles passe l'arc de cercle, ce qui est la réciproque de ce que nous avons exposé dans notre livre *Toutes les figures sont à partir du cercle*; et nous achevons notre propos en mentionnant les sections suivant cette voie pour compléter ce que nous voulions.

وفي حدوث الزوايا من طرف الخط المماس للدائرة أيضاً سرٌّ بليغ لا يكاد يتصوره الناس إلا الرياضي. وذلك أن القطر والمحيط يحيطان بزاوية ليست بأصغر ولا أعظم من قائمة مستقيمة الخطين. فلنخرج د ب يماس دائرة ا ب جـ والقطر ا ب. فلأن حال زاويتي ا ب د ا ب جـ من التساوي بالقوة ما ذكرنا، يلزم خاصة مساواة – بالقوة – الزاوية الحادثة من إخراج أي خط يكون من نقطة ب إلى نصف دائرة ا جـ ب، مثل ب ه، بين خطي ب د ب ه، وما تقبل قوس ه ا ب. وذلك سهل التصور بإخراج خطوط كثيرة من نقطة ب إلى محيط نصف دائرة ا جـ ب.

وكذلك القول في الجانب الذي يلي نقطة و.



وقد أومأنا إلى خاصة الخط المقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين بين الخمسة الموجودة معه في كتابنا في *تسهيل السبيل لاستخراج الأشكال الهندسية* لمعرفة اشتراكات الأشكال.

ولو فحص فاحص من الدائرة، لوجد فيها اشتراكات خواص من الأشكال وتباينها بأهون سعي وأسهل مأخذ، إذ الدائرة لوجود خواص من الأشكال كالمرآة المصقولة للناظر إلى ما لا يدركه إلا بها؛ وتفاوت المهندسين في إدراك خواص الأشكال بالدائرة كتفاوت مدركي الصور بالقابلة لها في أبصارهم. فإذ كان هذا هكذا، فينبغي أن نفحص من الدائرة اشتراكات الأشكال وخواصها.

ونحن الآن نأتي بأشكال موضوعة، تلزم عنها الدائرة وهي نقط وزوايا أو أطراف خطوط تجوز بها قوس الدائرة، وهو عكس ما ذكرنا في كتابنا *في أن الأشكال كلها من الدائرة*، ونتم القول بذكر القطوع على هذا السبيل ليكون أكمل لمرادنا.

2 يتصوره: تصور – 5 بالقوة: في الهامش بنفس الخط ولم يشر إلى موضعها – 11 الخمسة: خمسة / في تسهيل السبيل: انظر السفر الرابع من الرياضيات التحليلية، ص. ٧٩٧.

Supposons une droite AB et partageons-la en des parties aux points G, X, T, V, W, Z, U', I', O', L_a, L_b, L_c, L_d, L_e, L_f, L_g, L_h ; menons des points de division des perpendiculaires dont chacune peut le rectangle obtenu de la division de la droite AB[1] et qui sont GC, XD, TE, VF, WR, ZH, $U'I$, $I'J$, $O'K$, L_aL, L_bM, L_cN, L_dS, L_eO, L_fP, L_gU, L_hQ ; menons de nombreuses perpendiculaires <des points> de la droite AB selon les conditions mentionnées. Si nous joignons les extrémités des perpendiculaires par des droites, on engendre un polygone inscrit dans un cercle. Si en effet nous partageons AB en deux moitiés par exemple au point O' et qu'on trace au centre O' et à la distance $O'A$ un cercle, alors il passe par les extrémités des perpendiculaires ; par conséquent par la réciproque de ce que nous avons mentionné il s'ensuit nécessairement la formation d'un cercle, si on imagine une ligne courbée /
282r qui passe par les extrémités des perpendiculaires. Ce que nous voulions.

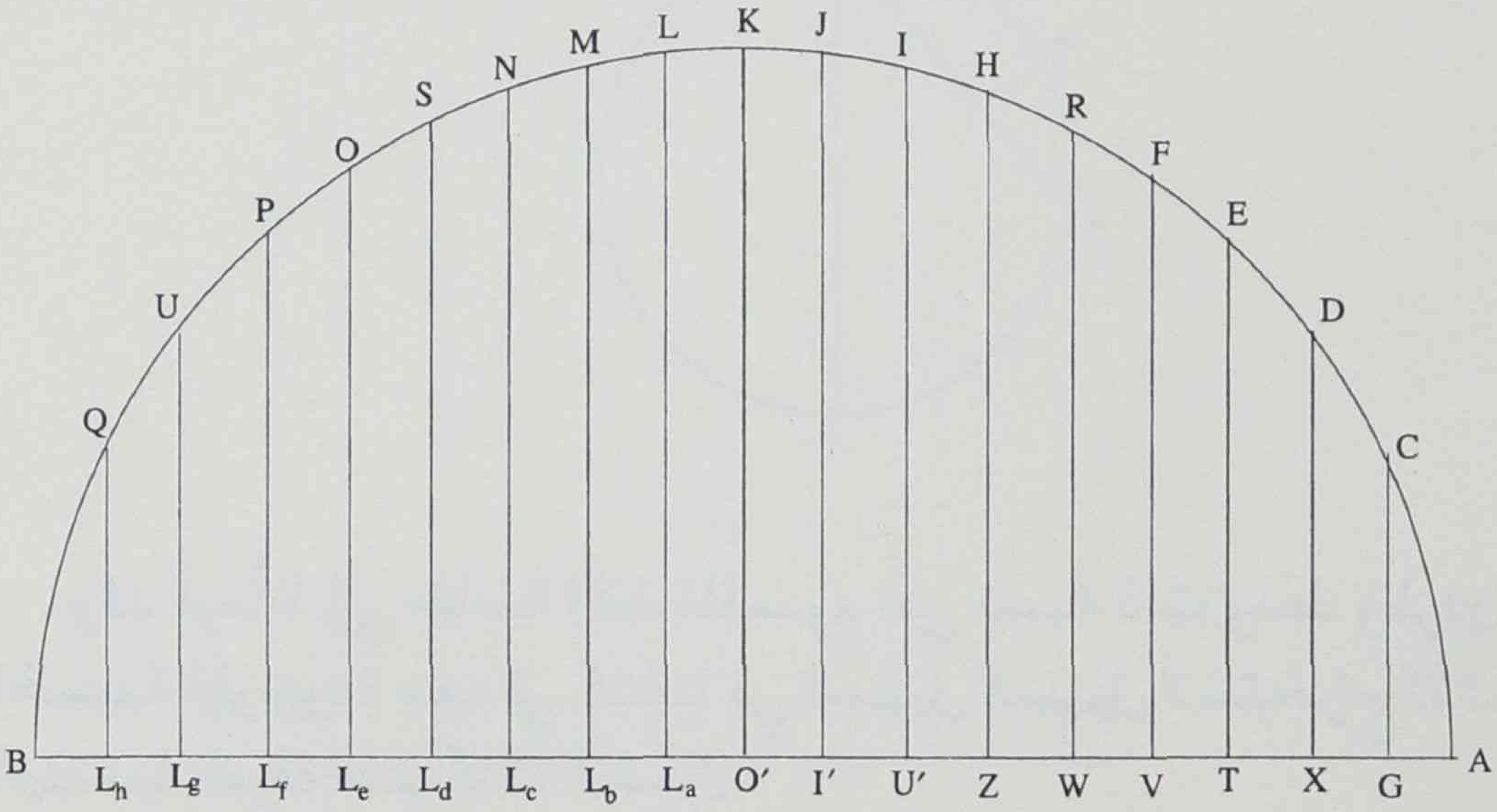


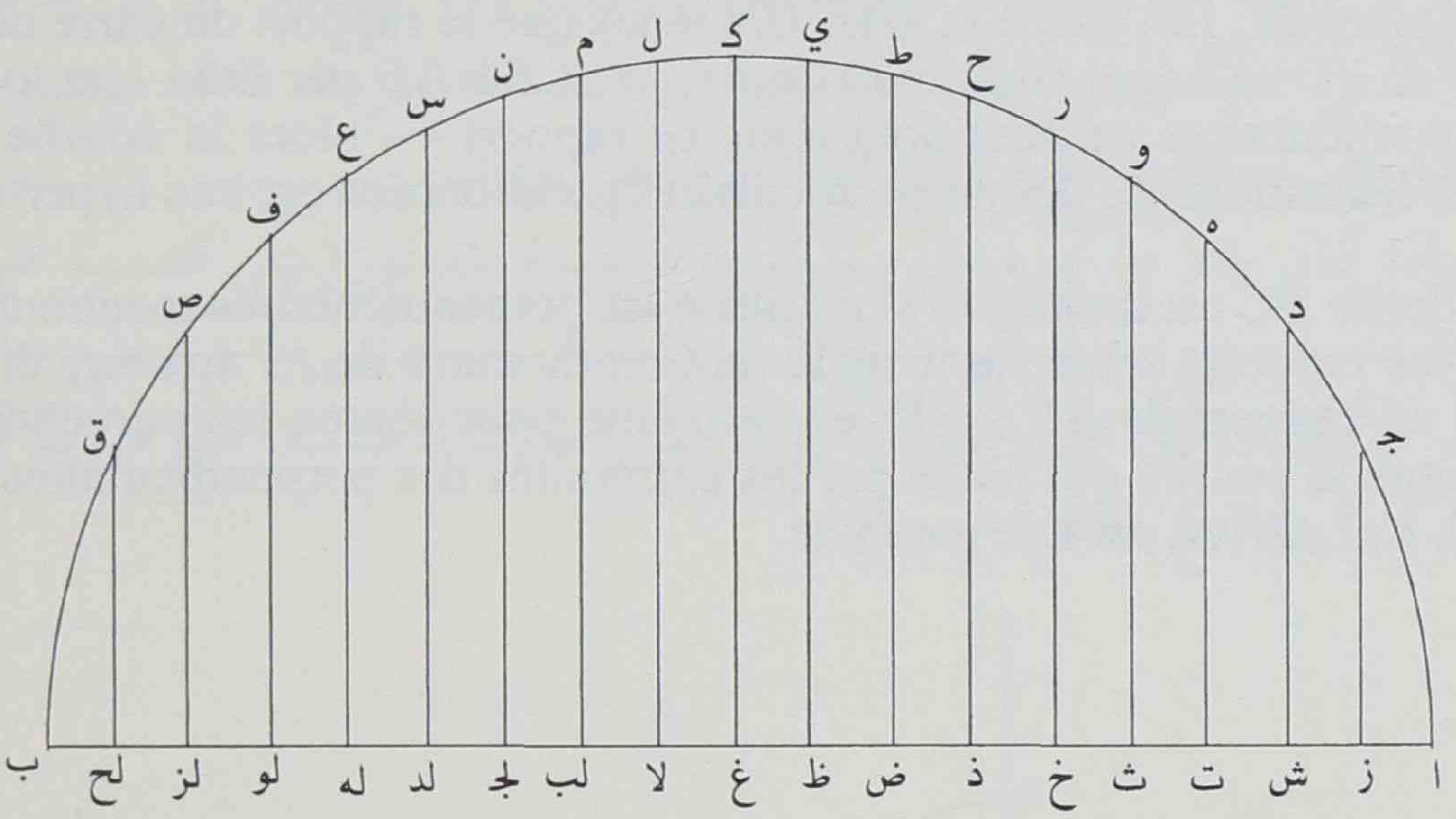
Fig. 5

Son homologue pour une section est ainsi :

Nous supposons la droite AB et nous la partageons en deux moitiés au <point> C ; nous menons la perpendiculaire CD et nous posons le rapport de AE par EB au carré de ES égal au rapport de AC par CB au carré de CD ; et de même, le rapport de AF par FB au carré de FO égal à ce même rapport, et pour toutes les perpendiculaires menées à partir de la droite AB ; ainsi la courbe qui passe par les extrémités des perpendiculaires S, O, P, U, Q, D, Z, X, T, V, W est une ellipse. Si AC est égal à CD, alors la section est la circonférence d'un cercle ; si AC est plus grand que CD, alors AC est le plus grand diamètre de la section ; et s'il est plus petit que lui, alors il est son petit diamètre, comme nous le présentons dans les deux figures.

[1] Litt. : le rectangle que AB divise.

نفرض خط ا ب، ونقسمه بأقسام على ز ش ت ث خ ‹ذ› ض ظ غ لا لب لج لد له ‹لو› لز لح، ونخرج من نقط أقسامه أعمدة يقوى كل واحد منها على السطح الذي يقسمه ا ب وهي ز جـ ش د ت ه ث و خ ر ذ ح ض ط ظ ي غ ك لا ل لب م لج ن لد س له ع لو ف لز ص لح ق، ونخرج ‹أعمدة› كثيرة من خط ا ب على الشرائط المذكورة. فإذا وصلنا بين أطراف الأعمدة بخطوط مستقيمة، يحدث مضلعًا تحيط بأضلاعه دائرة. وذلك أنا إذا قسمنا ا ب بنصفين مثلاً على غ، وأدرنا على مركز غ وببعد غ ا دائرة، فتجوز على أطراف الأعمدة؛ فإذاً، بعكس ما ذكرنا، يلزم كون الدائرة بتوهم خط مقوس / يجوز على أطراف الأعمدة؛ وذلك ما أردنا. ٢٨٢-و



ونظيره في القطع هكذا:

نفرض خط ا ب، ونقسمه بنصفين على جـ، ونخرج عمود جـ د، ونجعل نسبة ا ه في ه ب إلى مربع ه س كنسبة ا جـ في جـ ب إلى مربع جـ د، وكذلك نسبة ا و في و ب إلى مربع و ع مثل هذه النسبة، ‹وكذلك› جميع الأعمدة المخرجة من خط ا ب. فالخط المحدب الجائز على أطراف الأعمدة التي عليها س ع ف ص ق د ‹ذ› ش ت ث خ، هو قطع ناقص، فإن كان ا جـ مثل جـ د، فالقطع محيط الدائرة؛ وإن كان ا جـ أطول من جـ د، فـ ا جـ هو قطر القطع الأطول؛ وإن كان أصغر منه، فهو قطره الأصغر، على ما مثّلنا في صورتين.

12 ا ه: ا جـ / ه س: جـ د / جـ ب: جـ د – 13 ا و: ا د / و ب: د ب / و ع: د ع.

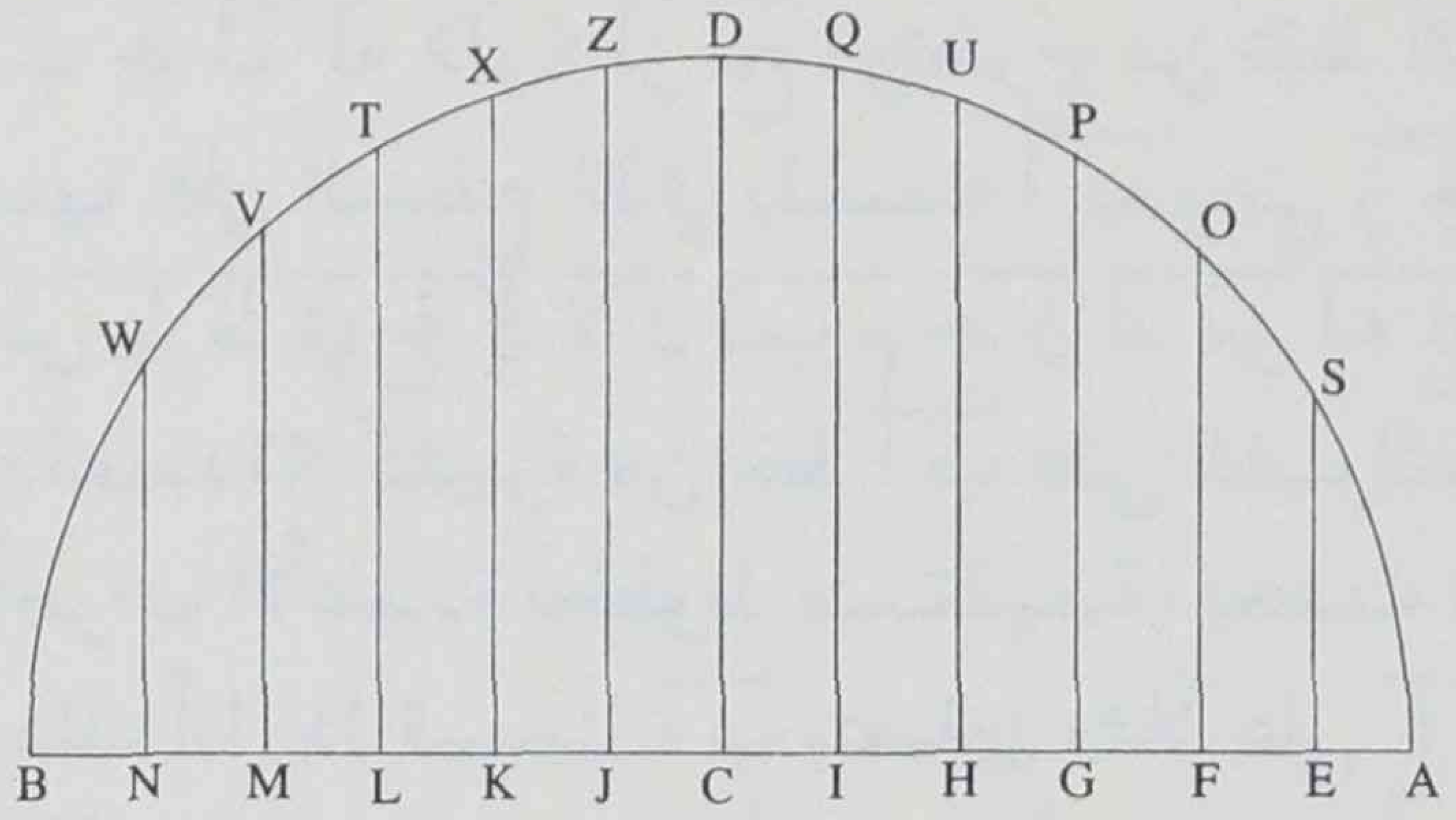


Fig. 6

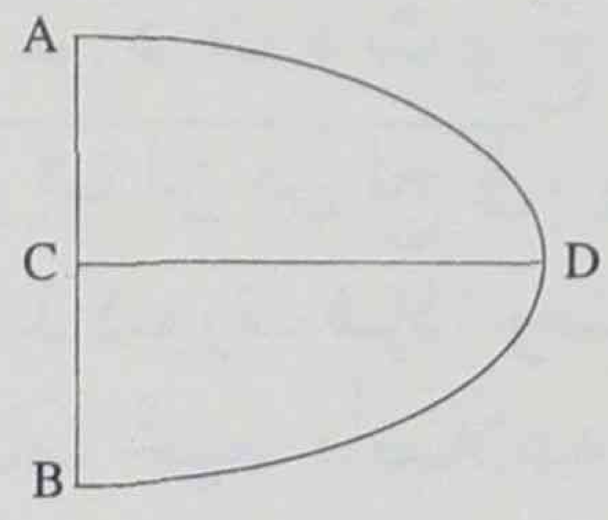


Fig. 7

Si la droite AC est donnée, qu'on la divise en B et qu'on mène les perpendiculaires CI, DJ, EK, FL, GM, HN telles que le rapport du carré de IC au carré de JD soit égal au rapport de AC par CB à AD par DB — et toutes les perpendiculaires menées sont dans ce rapport — alors la courbe qui passe par les extrémités des perpendiculaires mentionnées est une hyperbole.

Si la droite BC est donnée et si on mène les perpendiculaires mentionnées suivant les rapports selon lesquels le rapport du carré de IC au carré de ID est égal au rapport de BC à BD, et de même pour toutes les perpendiculaires, alors la courbe qui passe par les extrémités des perpendiculaires qui sont I, J, K, L, M, N, est une parabole.

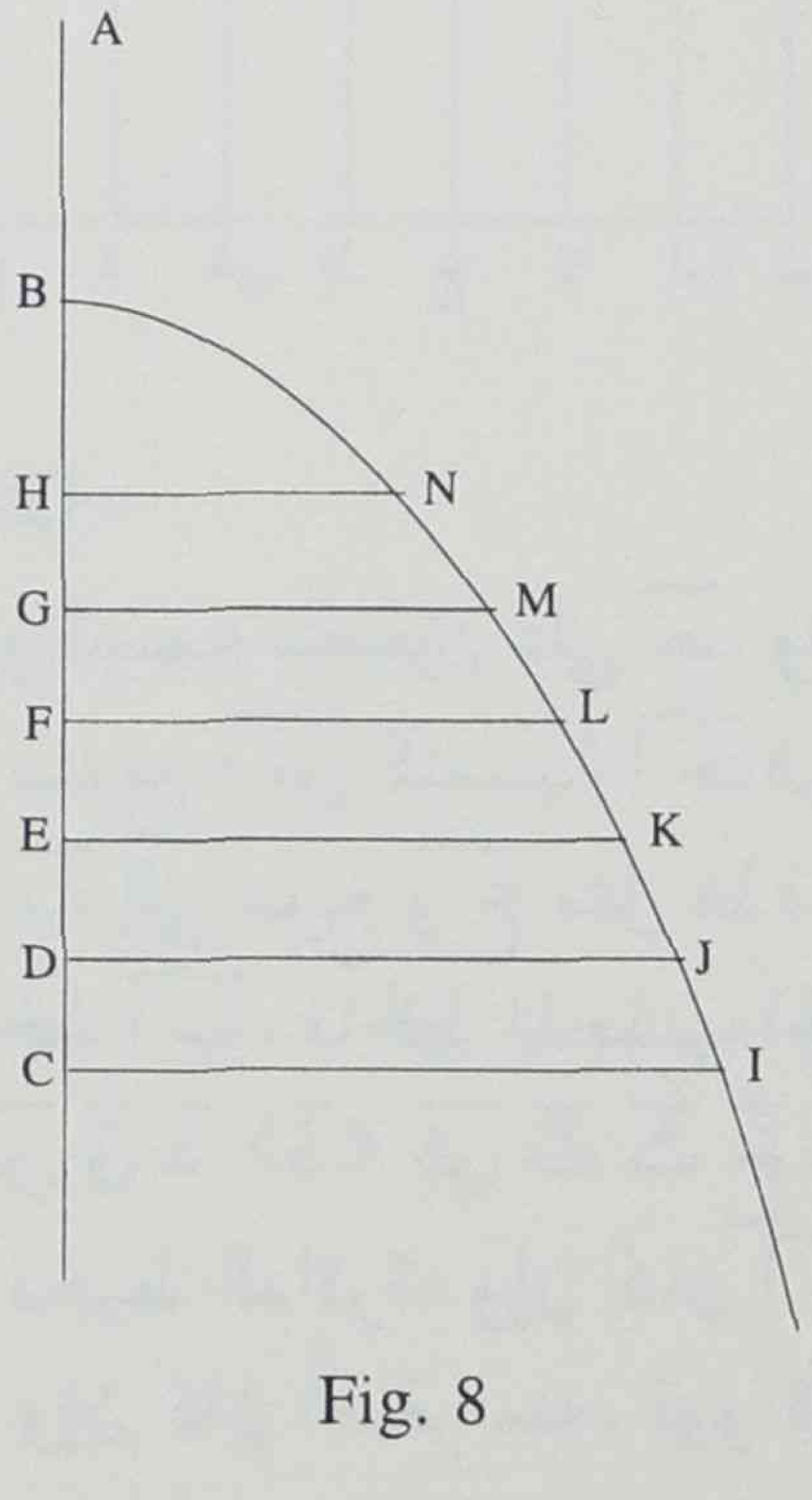
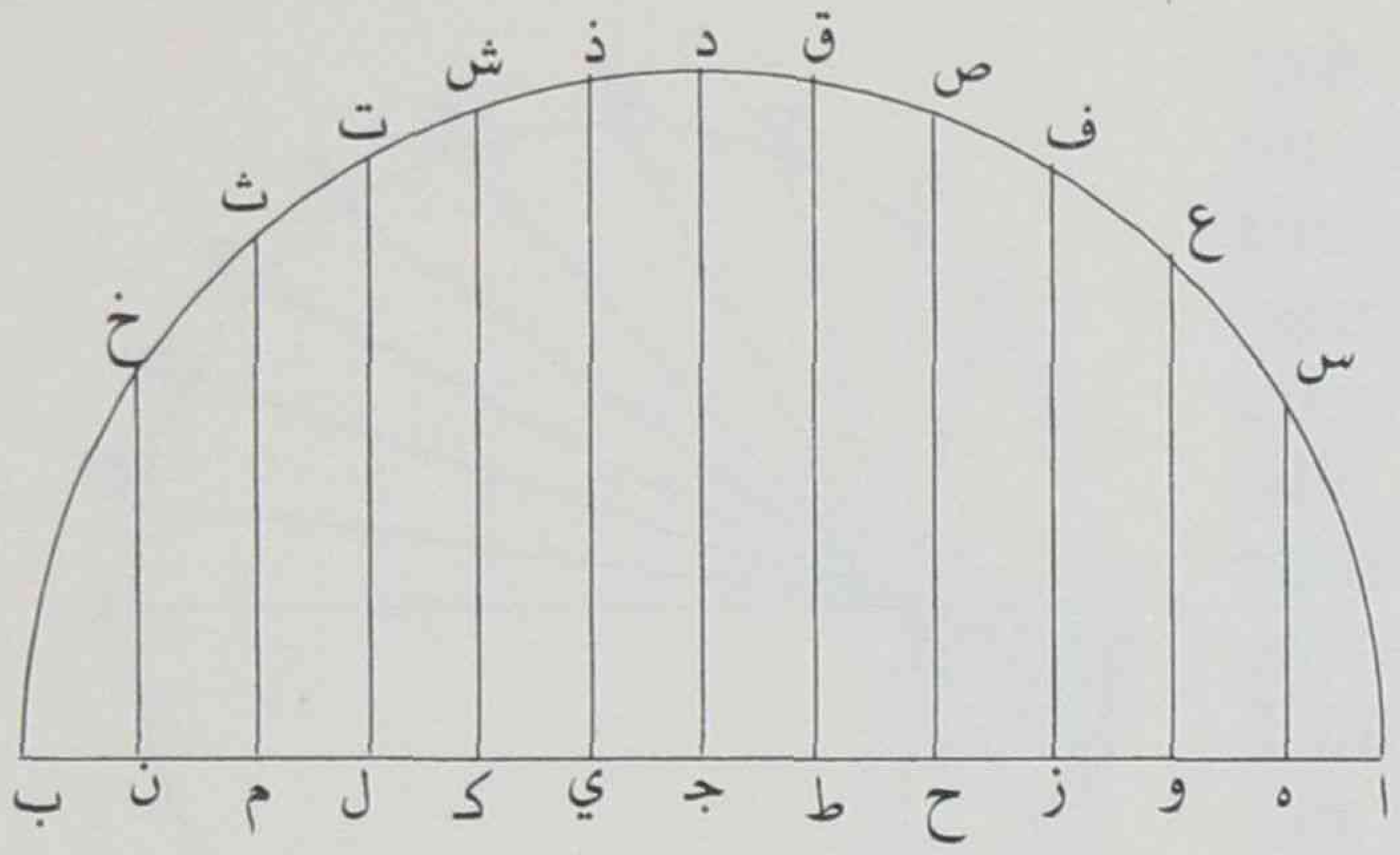
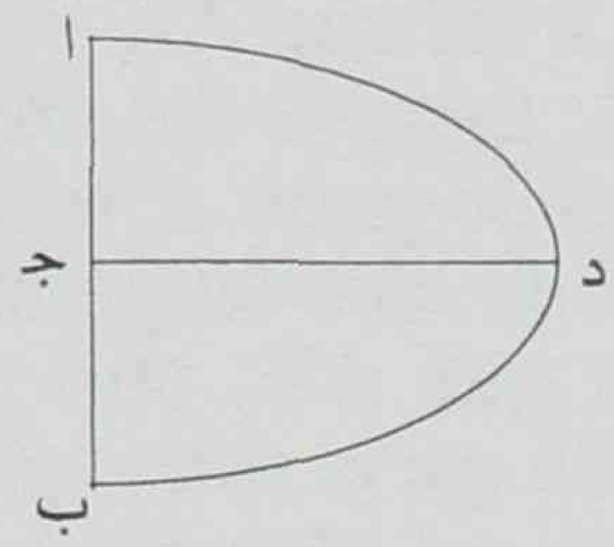


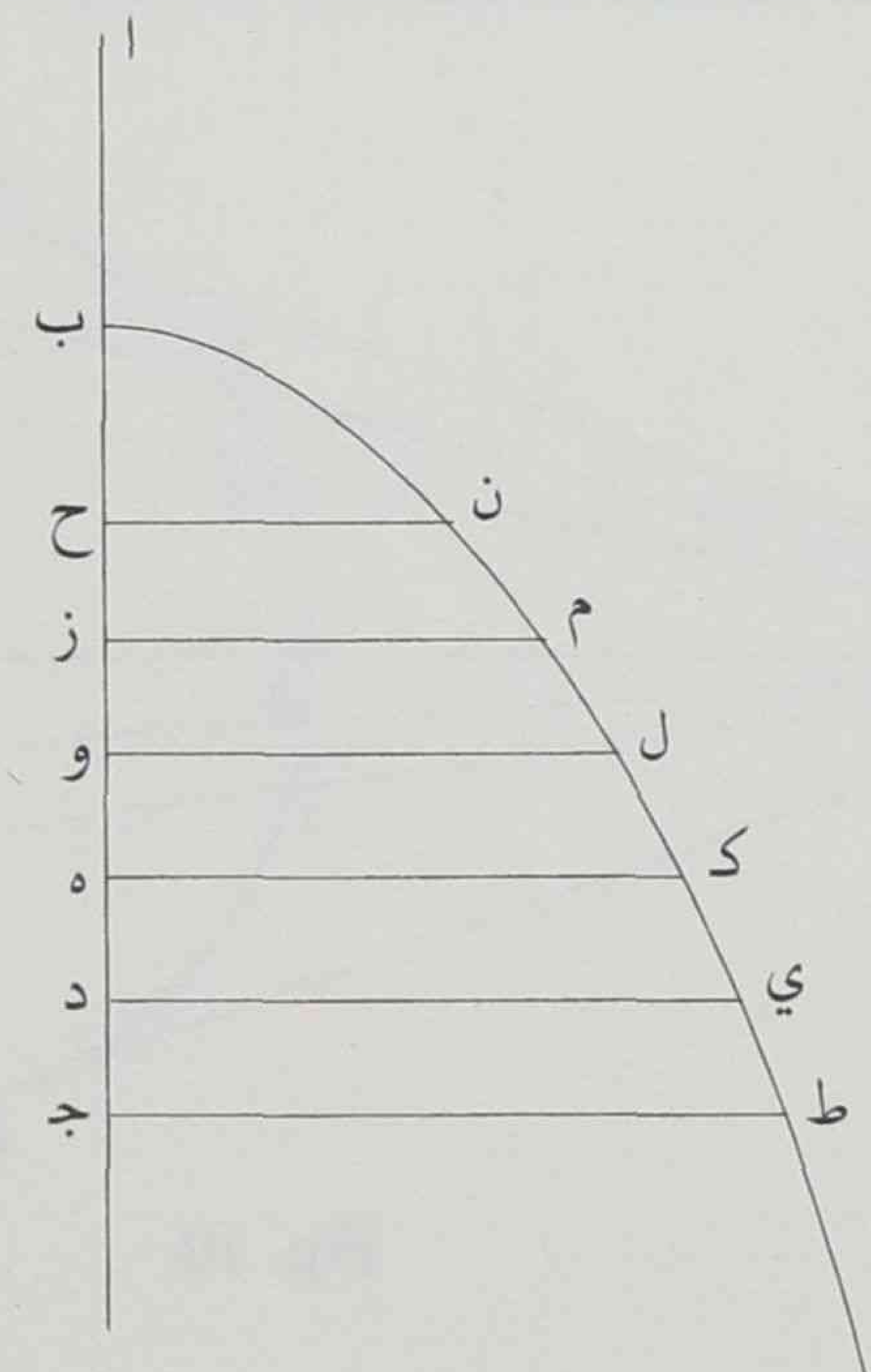
Fig. 8





وإذا كان خط ا جـ معطى، وقسم على ب، وأخرج أعمدة جـ ط د ي ه كـ و ل ز م ح ن، تكون نسبة مربع ط جـ إلى مربع ي د كنسبة ا جـ في جـ ب إلى ا د في د ب، وعلى هذه النسبة صارت الأعمدة المخرجة، فالخطُ المحدب الجائز على أطراف الأعمدة المذكورة هو القطع الزائد.

وإذا كان خط ب جـ معطى، وأخرج الأعمدة المذكورة على النسبة التي تكون نسبة مربع ط جـ إلى مربع ط د كنسبة ب جـ إلى ب د وعلى هذا سائر الأعمدة، فإن الخط المحدب الجائز على أطراف الأعمدة، التي هي ط ي كـ ل م ن هو قطع مكافئ.



1 معطى: معطاة – 2 ا جـ: ا ب – 3 فالخط: والخط – 4 هو: وهو – 5 معطى: معطاه – 6 ط د: بد.

<III> Supposons une droite *AL*[1] et partageons-la en deux parties au point *X* tel que *AX* soit plus petit que *XL* ; menons des droites qui passent par le point *X* telles que celle qui est du côté du point *A* soit plus grande que *AX*, puis plus grande que celle qui la suit et plus petite que celle qui est plus proche du point *L* de la droite *XL* et telle que *X* les partage en deux parties telles que le produit de l'une des parties par l'autre soit égal à *AX* par *XL*, on aura donc *CXM*, *DXN*, *EXS*, *FXO*, *GXP*, *HXU*, *U'XQ*, *JXR*, *IXK* et *XK* est plus grande que *RX*, *JX* plus grande que *IX* ; et ainsi systématiquement selon l'ordre de mener les extrémités des perpendiculaires à la droite *AL* qui peuvent les parties de *AL*, d'après ce que nous avons mentionné. La courbe qui passe par les extrémités de ces droites est donc un cercle.

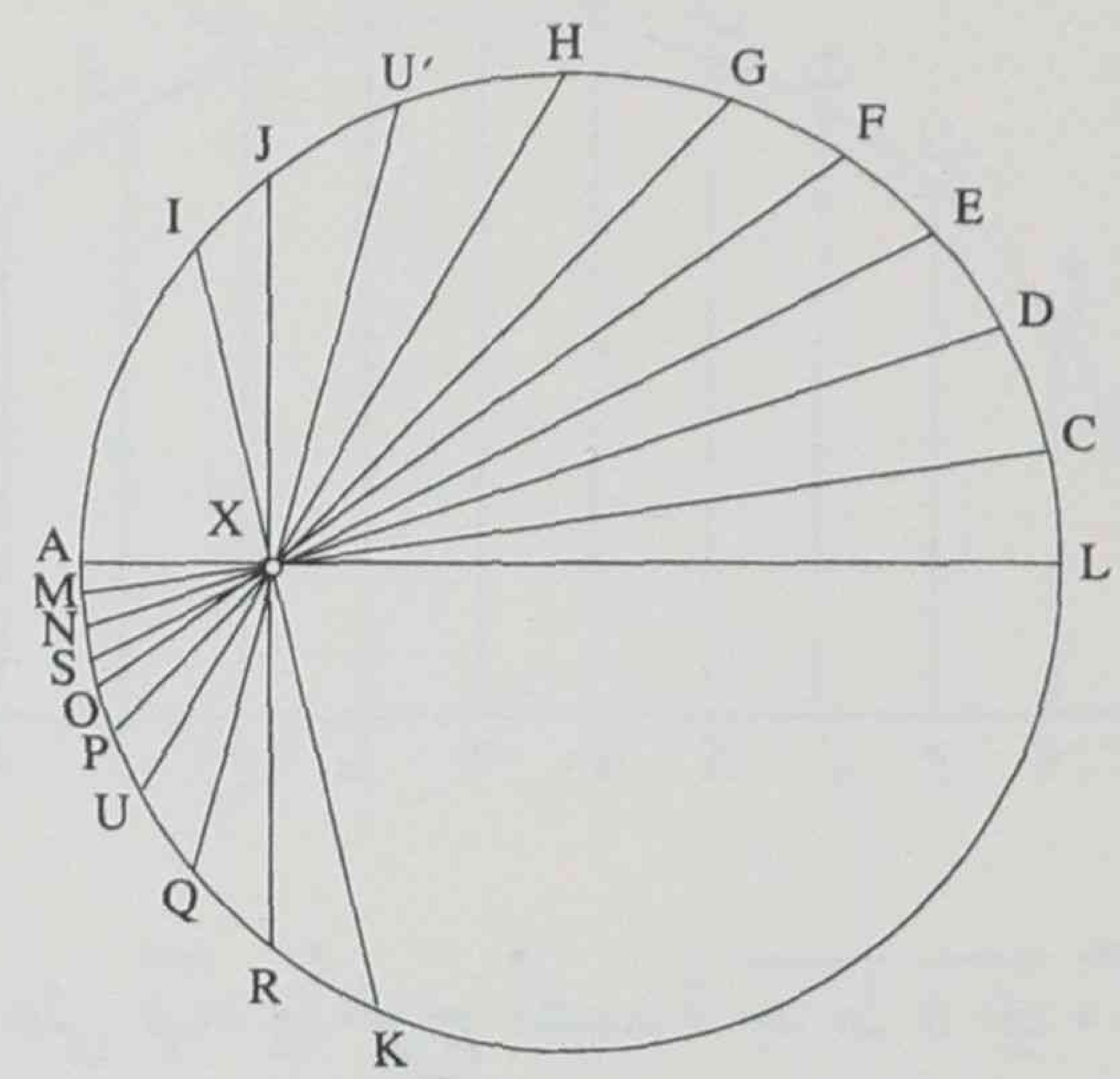


Fig. 9

Si nous supposons la droite *AB* que nous partageons en deux parties au <point> *L* ; et si nous menons de nombreuses droites comme *BG*, *BF*, *BD*, *BH*, *BI*, *BE* — à condition que la droite la plus proche de *B* soit plus grande que la plus éloignée et chacune d'elles plus petite que *AB* — et telles que le produit de chacune de ces droites en entier par la partie qui est du côté de *B* soit égal à *AB* par *BL* ; et telles que les droites les plus proches de *AB* soient

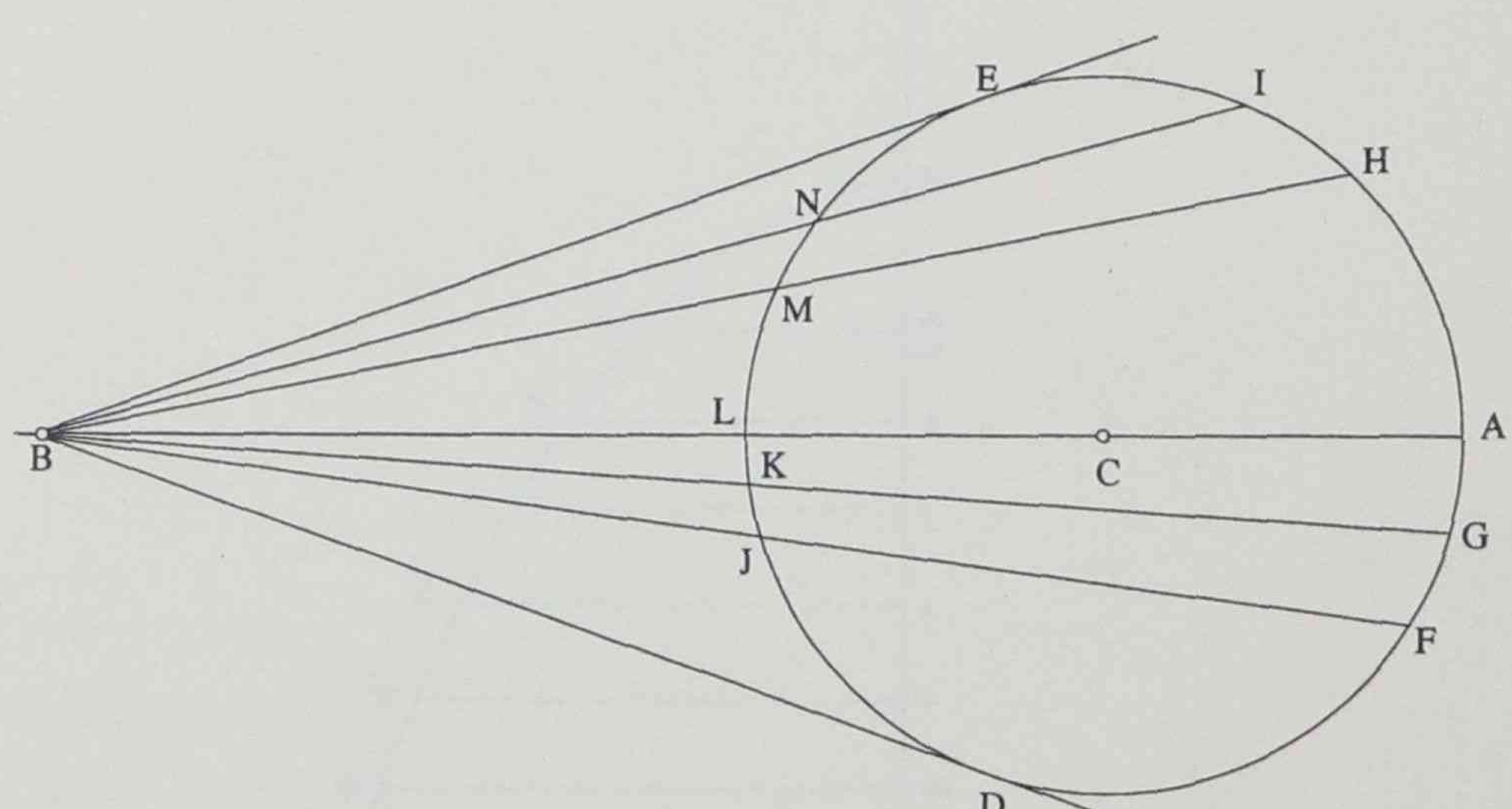
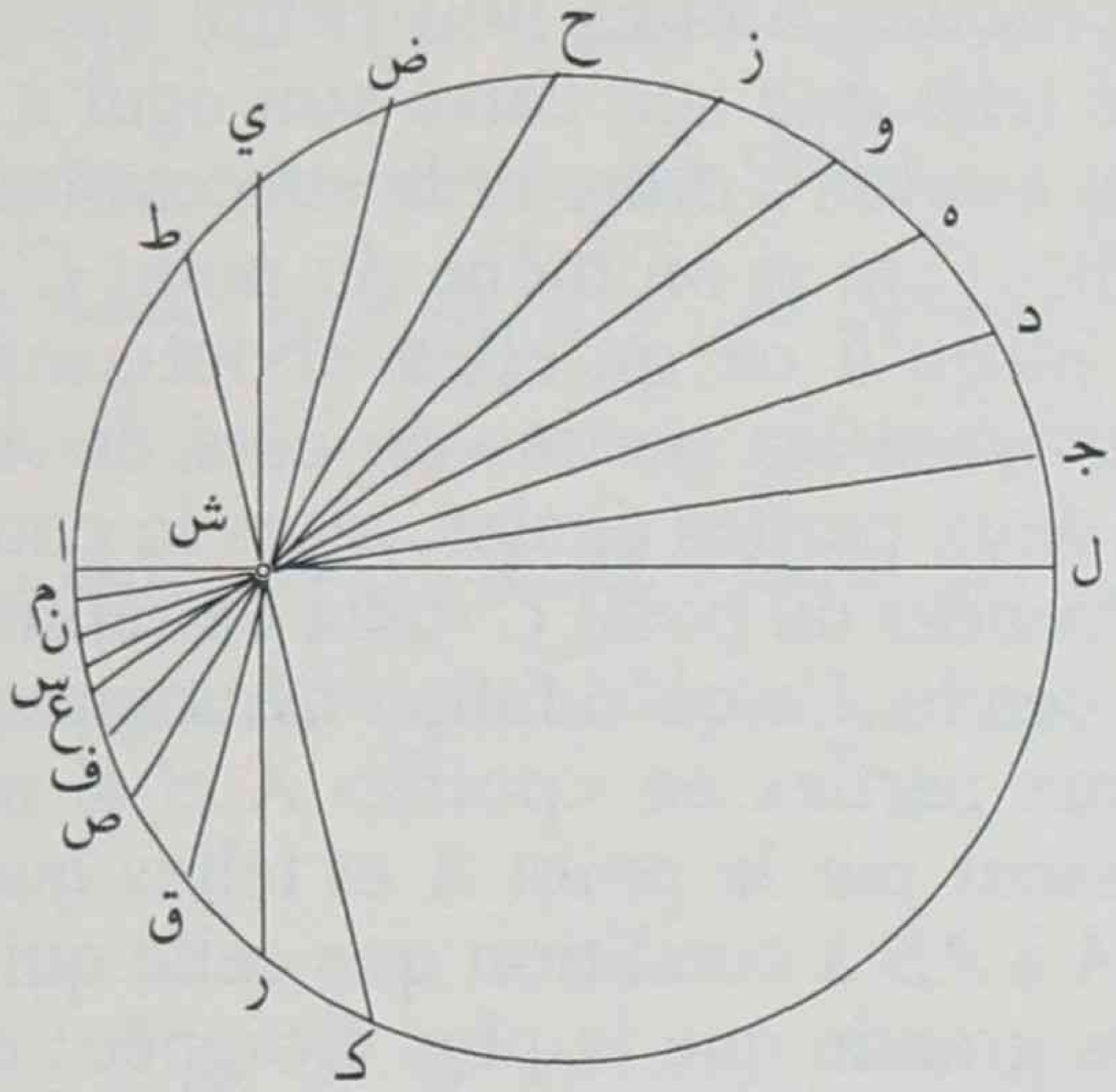


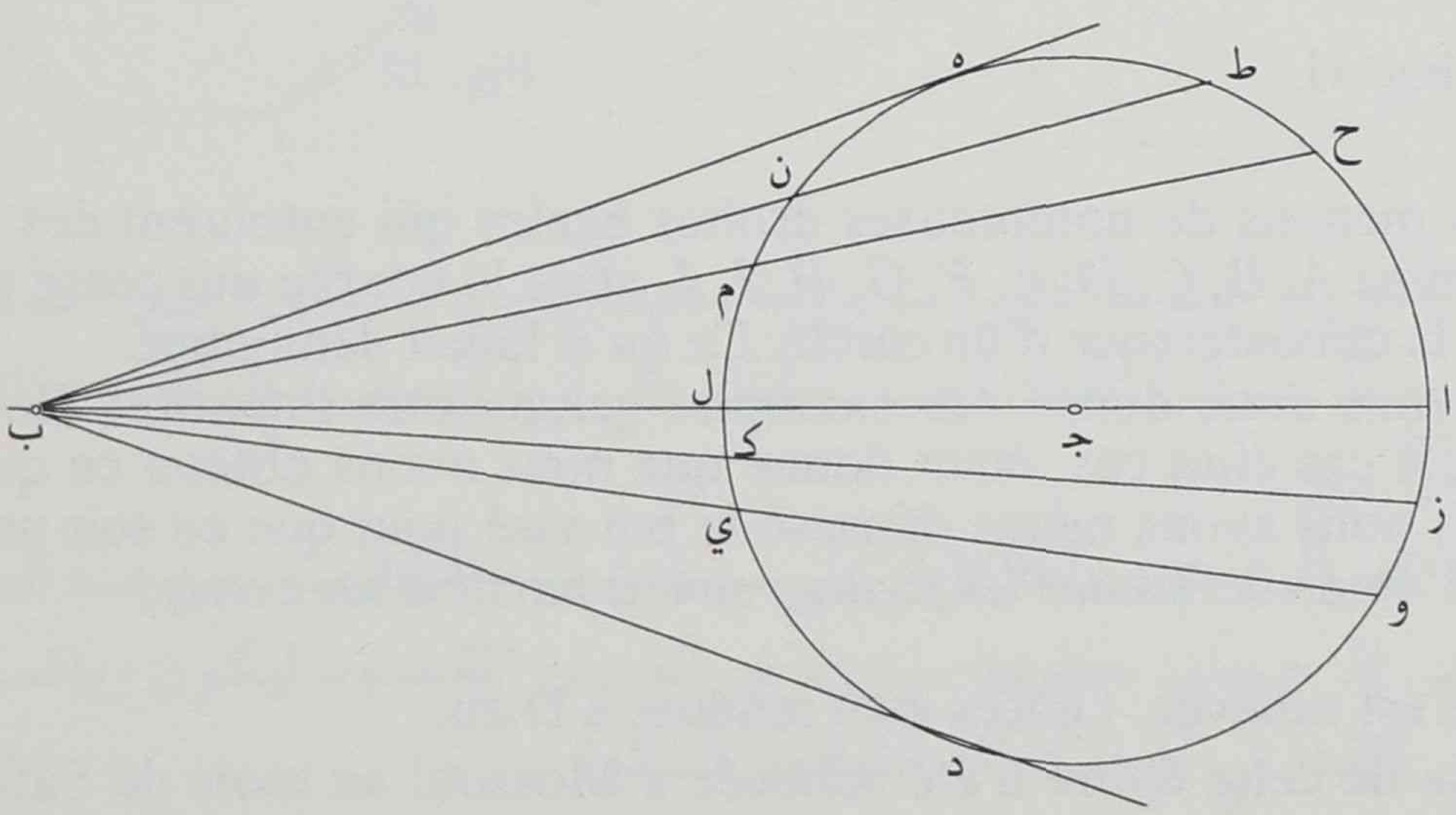
Fig. 10

[1] On trouve dans le manuscrit *AB*. Le point *B* n'est ni déterminé dans le texte, ni dans la figure. Il parlera ensuite de la droite *AL* ; si le point *B* existait, il serait nécessairement sur la droite *AL*. En tout cas, on n'en voit pas la nécessité. Il est vraisemblable qu'il s'agit d'une erreur du copiste.



لنفرض خط ا ل ونقسمه بقسمين على ش، على أن ا ش أصغر من ش ل؛ ونخرج خطوطًا تجوز على نقطة ش وتكون التي تلي نقطة ا أطول منه، ثم أطول مما يليه وأقصر من الأقرب إلى نقطة ل من خط ش ل، يقسمها ش بقسمين ويكون ضرب أحد قسمي كل واحد منها في القسم الآخر يعدل ا ش في ش ل، ⟨فيكون⟩ جـ ش م د ش ن ه ش س و ش ع ز ش ف ح ش ص ض ش ق ي ش ر ⟨ط ش كـ⟩، وش كـ أطول من ر ش وي ش أطول من ط ش؛ وعلى هذا النسق يكون ترتيب إخراج من أطرافها أعمدة إلى خط ا ل تقوى على أقسام ا ل على ما ذكرنا. فإن الخط المحدب الجائز على أطراف هذه الخطوط الدائرة.

إذا فرضنا خط ا ب وقسمناه بقسمين على ل، وأخرجنا خطوطًا كثيرة مثل ب ز ب و ب د ب ح ب ط ب ه – على أن الخط الأقرب إلى ب أطول من الأبعد، كل واحد منها أصغر من ا ب – ويكون ضرب كل واحد من الخط كله في القسم الذي يلي نقطة ب يعدل ا ب في ب ل، وتكون الخطوط



1 ا ل: ا ب، من الممكن أنه يقصد أن نقطة ب هي على خط ا ل الذي سيذكره فيما بعد. ولكنه لم يحدد أين تقع نقطة ب. ومن ثم لا فائدة فيها. وربما كان هذا تصحيف من الناسخ. ولقد رسم في المخطوطة دائرة فارغة – 3 ش ل: ش كـ – 4 ا: ب – 10 ش ل: مكررة / جـ ش م: يعني ضرب القسمين مثل جـ ش في ش م، وكتبها جـ ش م، وهكذا للباقي – 11 ر ش: نش / وي ش: وبش 13 ا ل (الثانية): ا ب / فإن: أولها مطموس – 18 ب ل: ب د.

plus grandes que les plus éloignées et chacune d'elles plus petite que *AB*, jusqu'à ce qu'on aboutisse à une droite telle que son carré soit égal à *AB* par *LB*, comme les droites *EB* et *BD*. On a selon l'ordre et la succession : si on divise *AL* en deux moitiés au <point> *C* et si on mène du point *C* des perpendiculaires aux droites menées jusqu'à ce qu'elles aboutissent à l'extrémité des droites *BD* et *EB* et divisent les parties du côté de *A* de toutes les droites menées du point *B* en deux parties égales, alors la courbe qui passe par les extrémités des droites menées du point *C* <aux extrémités> de leurs parties est la circonférence d'un cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Si nous divisons la droite *KB* en deux parties au <point> *A* et si nous menons de nombreuses droites qui passent par le point *A* et telles que le point *A* les divise selon le rapport de *KA* à *AB* à condition que celle qui est le plus proche de *AB* ou de *AK* soit plus grande que la plus éloignée ; et si nous divisons chacune de leurs deux parties en deux moitiés et si nous menons une perpendiculaire en leurs milieux qui rencontre l'une des droites *KA* et *AB* en son milieu, alors les deux courbes qui passent par les points *A*, *B*, *K* et par les autres extrémités des droites menées décrivent les circonférences de deux cercles tangents.

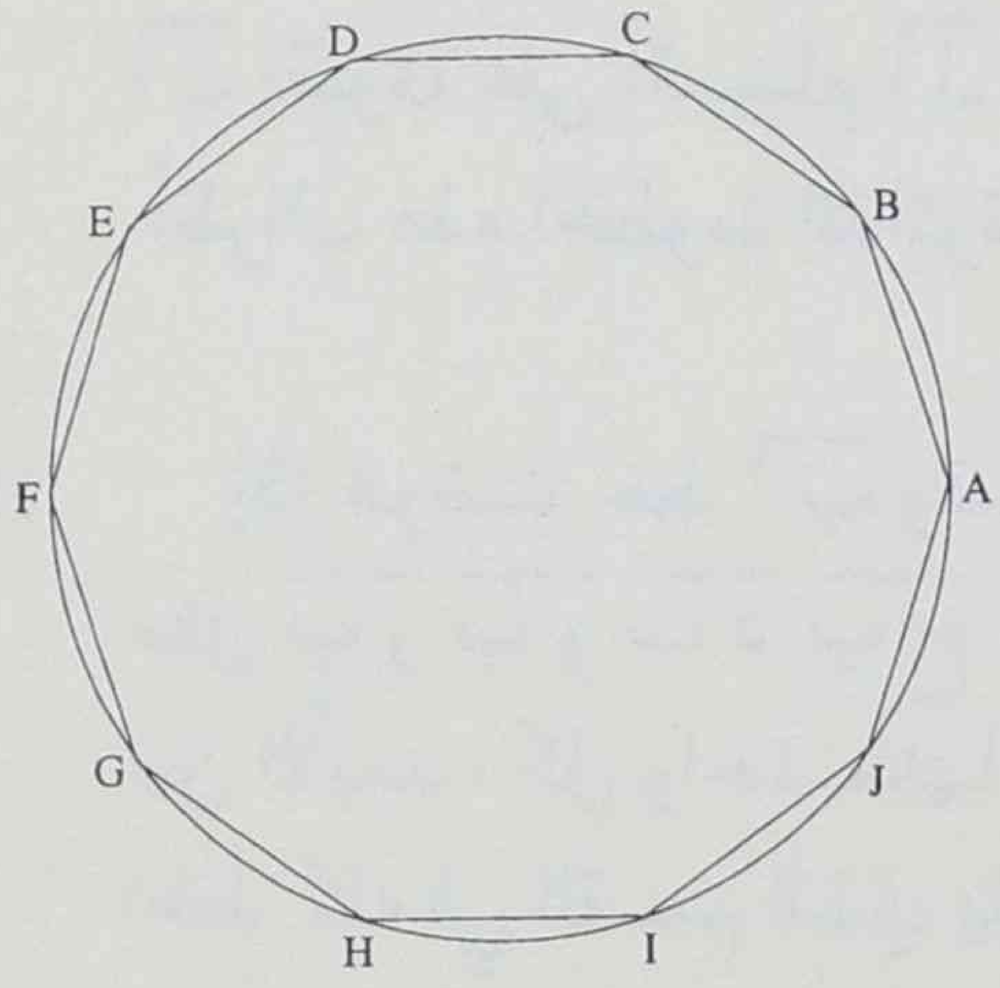


Fig. 11

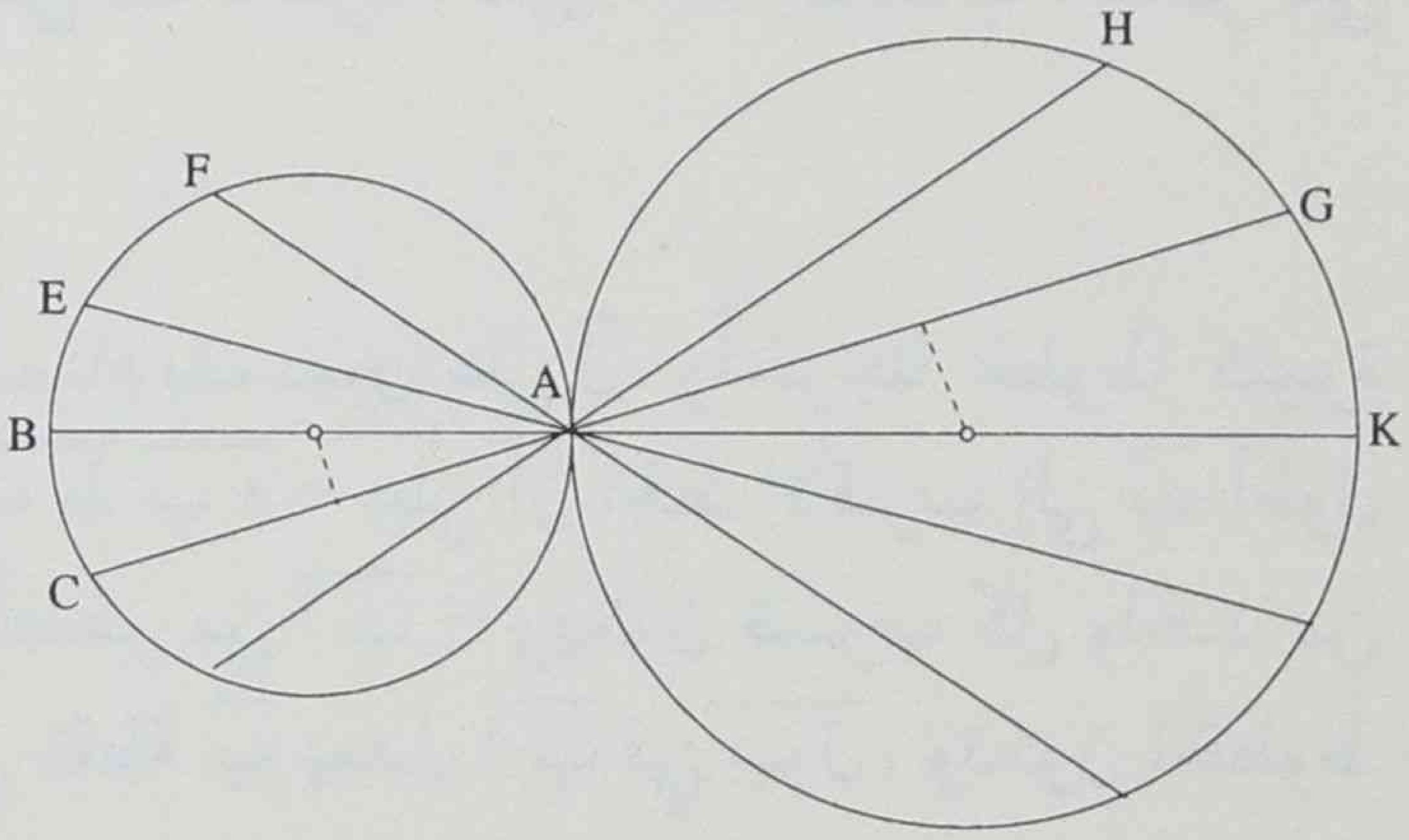


Fig. 12

Si nous menons de nombreuses droites égales qui entourent des angles égaux comme *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, alors la courbe qui passe par ces angles est la circonférence d'un cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

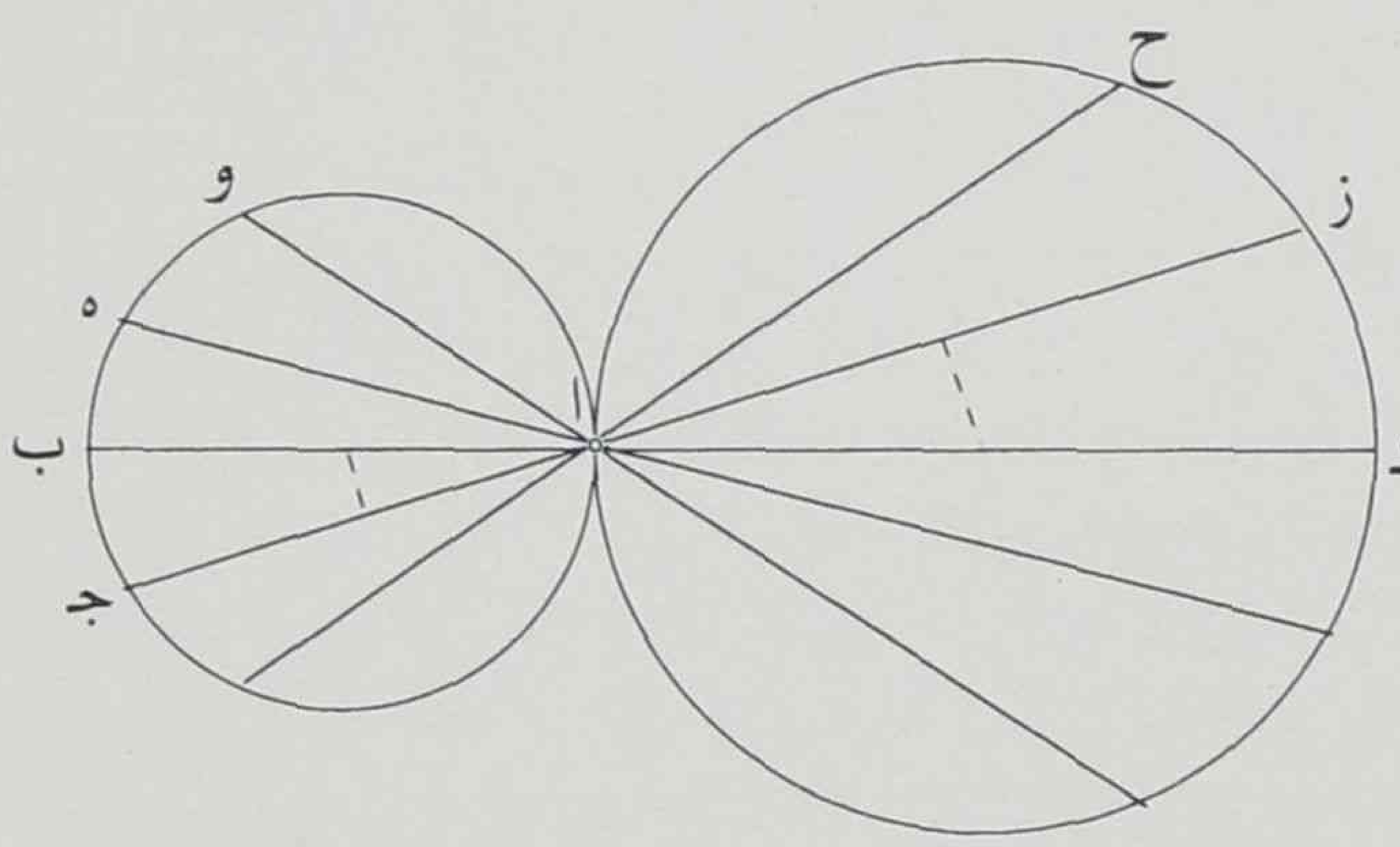
Nous avons donc donné ces exemples selon notre intention. Bornons-nous donc à ces cinq cas, étant donné que nous avons obtenu ce qui était recherché ; nous avons même dépassé le but visé pour que ce soit un exercice pour l'étude de *Toutes les figures sont à partir d'un cercle*.

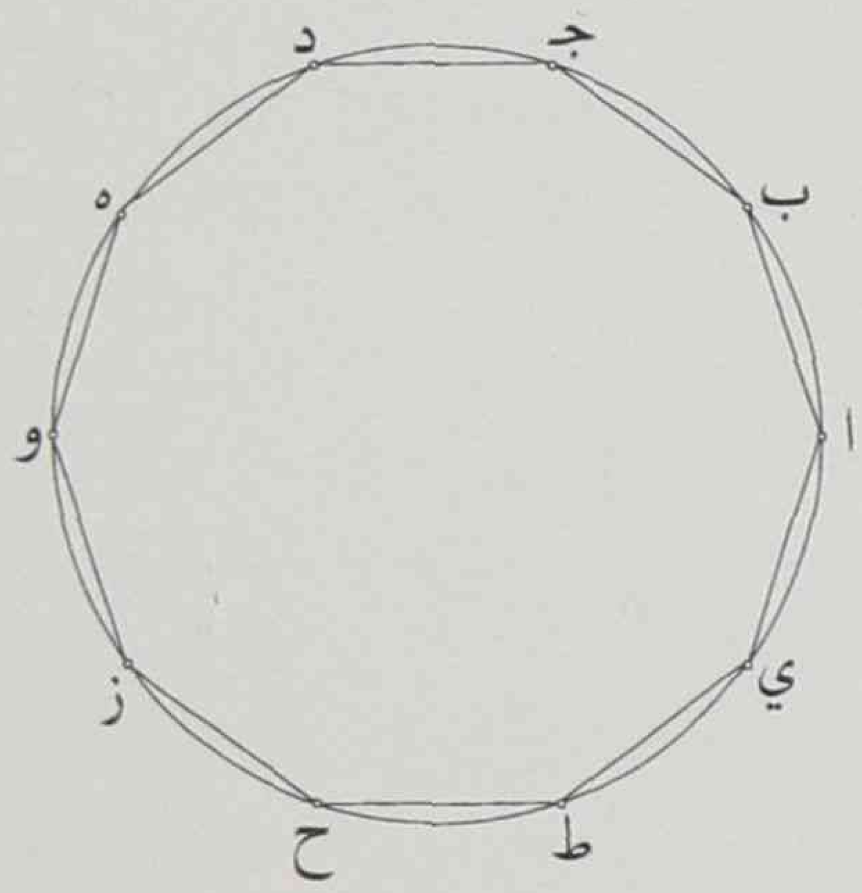
L'épître est achevée. Grâces sont rendues à Dieu.

La copie de cette épître a été achevée à Mossoul au mois de Ṣafar l'an 632 de l'Hégire.

الأقرب إلى آ ب أكبر من الأبعد وكل واحد منها ⟨أصغر⟩ من آ ب، إلى أن يُنتهى إلى خط يكون مربعه مثل آ ب في ل ب مثل خطي ه ب ب د. ويكون على الترتيب والتوالي [التي] إذا قسم آ ل بنصفين على جـ وأخرج من نقطة جـ أعمدة على الخطوط المخرجة تنتهي إلى طرف خطي ب د ه ب وتقسم أقسام سائر الخطوط المخرجة من نقطة ب التي تلي نقطة آ أنصافًا، فالخط المحدب الذي يجوز على أطراف الخطوط المخرجة من نقطة جـ على أقسامها هو محيط الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

إذا قسمنا خط كـ ب بقسمين على آ، وأخرجنا خطوطًا كثيرة جائزة على نقطة آ وتقسمها نقطةُ آ على نسبة كـ آ إلى آ ب، على أن يكون الأقرب إلى آ ب أو آ كـ أطول من الأبعد؛ وإذا قسمنا كل واحد من أحد قسميها بنصفين وأخرجنا عموداً على منتصفها يلقى أحد خطي كـ آ آ ب على منتصفه، فالخطان المحدبان الجائزان على نقط آ ب كـ وعلى سائر أطراف الخطوط المخرجة يرسمان محيطي دائرتين متماستين.





إذا أخرجنا خطوطًا كثيرة متساوية محيطة بزوايا متساوية مثل آ ب جـ د ه و ز ح ط ي، فإن الخط المحدب الجائز على زواياه محيط الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فإذ قد أتينا بهذه المثالات على ما قصدنا، فلنقتصر على هذه الصور الخمس إذ حصّلنا مطلوبك، وزدنا في الغرض المقصود ليكون رياضة في تحصيل كتابنا في أن الأشكال كلها من الدائرة.

تمت الرسالة، وبحمد لله. وفرغت من تعليق هذه الرسالة بالموصل صفر من شهور سنة ٦٣٢ هـ.

1 أكبر: اصغر / آ ب: ل ب – 4 ب د: متاكلة – 9 آ ب: كـ ب – 13 يرسمان: يرسم، وهذا جائز أيضًا / محيطي: محيط – 20 وبحمد لله: مطموسة.

TEXTE ET TRADUCTION

VII

Fī qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn

bi-thalāthat aqsām mutasāwiya

Sur la division de l’angle à côtés droits en trois parties égales

23r *Au Nom de Dieu Clément et Miséricordieux*
C'est à Lui qu'on donne sa confiance

Traité composé sur la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales

par
Abū Sa'īd Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Jalīl al-Sijzī

Les bienfaits de notre Maître, le vénérable Shaykh, le Seigneur, que Dieu prolonge son séjour et perpétue sa gloire et sa hauteur, se sont répandus sur tous les êtres et ont englobé l'Occident et l'Orient. Chacun doit nécessairement le servir selon sa capacité et l'ampleur de ses moyens. Sujet nourri de sa charité et débiteur de louanges et de remerciements envers lui, c'est moi qui, entre tous, mérite le plus de le servir et de manifester de la vénération, en raison de l'opulence de sa bienfaisance à mon égard et de l'abondance de ses bienfaits envers moi. Il m'a été possible, grâce à la bénédiction de son État vainqueur et au bonheur de son temps florissant, de déterminer une proposition admirable entre celles de la géométrie, qui est la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales. Il n'était possible à aucun des anciens de déterminer cette proposition, alors que pourtant ils la désiraient ardemment et avaient de nombreux motifs à son endroit, jusqu'à ce que, au temps d'al-Ma'mūn, Commandeur des croyants — que Dieu soit miséricordieux envers lui —, elle fût établie par Thābit ibn Qurra de Ḥarrān et après lui Abū Sahl al-Qūhī. Nous n'avons rien trouvé de cela chez d'autres que ces deux-là, des anciens ou des modernes.

23v Je l'ai établie par une meilleure méthode, / une démonstration plus claire et une construction plus facile et plus immédiate. Il était possible de déduire plusieurs lemmes à partir de chacun desquels on peut déterminer la division de l'angle en trois parties égales. Il n'était possible à aucun des anciens de rien déterminer de cela par la démonstration géométrique. J'ai réuni tout cela dans ce tome, et j'en ai fait un présent à la bibliothèque de notre Maître le Shaykh, le Seigneur, que Dieu prolonge son séjour, m'honorant ainsi de le servir et me flattant de manifester la vénération due. Que Dieu le maintienne Pilier de l'Islam et refuge de tous les hommes, et nous aide, nous,

بسم الله الرحمن الرحيم ٢٣-و
وبه الثقة

مقالة عملها في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية

أبو سعيد أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي

نعم مولانا الشيخ الأجل السيّد أطال الله بقاءه، وأدام عزه وعلاه، عمت الخلق وشملت الغرب والشرق، فكل أحد يلزمه خدمتُه على حسب قدرته ومقدار طاقته، وعبده غذيُّ برّه ورهينُ حمده وشكره أنا، أحقّ الناس بالخدمة واستشعار العُبودة لتَرف إحسانه إليّ وتوافرِ إنعامه علي. وقد تهيأ لي ببركة دولته القاهرة، وسعادة أيامه الناضرة، استخراج شكل غريب من أشكال الهندسة، وهو قسمةُ الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية. وهذا الشكل لم يتهيأ لأحد من المتقدمين استخراجُه، مع شدة رغبتهم فيه، وتوفّر دواعيهم إليه حتى كان في أيام المأمون أمير المؤمنين، رحمة الله عليه، فعمله ثابت بن قرة الحراني، وبعده أبو سهل الكوهي، ولم نجد عند غيرهما من المتقدمين والمتأخرين في ذلك شيء.

وقد عملته أنا بطريق أحسن، / وبرهان أبْيَن، وعمل أسهل وأقرب. ٢٣-ظ وتهيأ استنباطُ عدة مقدمات يمكن أن يُستخرج من كل واحدة منها قسمةُ الزاوية بثلاثة أقسام متساوية. ولم يتهيأ لأحد من المتقدمين استخراج شيء منها بالبرهان الهندسي. وجمعتُ ذلك كله في هذا الجزء، وجعلته تحفة لخزانة مولانا الشيخ السيّد، أطال الله بقاءه، تشرفًا مني بالخدمة، وتجملاً بإظهار العبودة المفترضة. والله يُبقيه عماداً للإسلام وملاذاً لكافة الأنام، ويوفقنا –

9 لترف: لتراف – 15 نجد عند: نحل عن، لا يصح المعنى إلا بأن تقرأ إما «يجئ عن» أو «نجد عند»، لأن فعل «وجد» لا يتعدى بعن؛ وأخذنا بالعبارة الأخيرة اتساقًا مع المخطوطة – 20 بإظهار: باظها.

l'assemblée de ses sujets, à le remercier de ses grandes faveurs et de ses larges dons, par sa grâce et sa bonté.

Commençons donc par les lemmes que les anciens et les modernes ont introduits par la voie de l'analyse, avant de procéder à la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales. Puis nous les faisons suivre par la démonstration de ce que je suis seul à avoir déterminé. Enfin nous démontrons chacun de ces lemmes. C'est de Dieu que vient le succès.

Lemme de Thābit ibn Qurra de Ḥarrān

BAD est un angle aigu que nous voulons diviser en trois parties égales. Nous menons *DB* perpendiculaire à *DA*, suivant la voie de l'analyse, *BC* parallèle à *AD*. Nous menons du point *A* vers la droite *BC* une droite
24r comme la droite / *AEC* telle que *EC* soit le double de *AB*.

S'il en est ainsi, la division de l'angle *BAD* en trois parties égales est possible ; puisque si nous menons la droite *BG* au milieu de la droite *EC*, les droites *AB*, *BG*, *GE*, *GC* sont égales, car l'angle *B* est droit. L'angle *BGA* sera le double de *GCB* parce qu'il est égal <à la somme> des deux angles internes *C*, *B*. L'angle *BGA* est égal à l'angle *GAB*. L'angle *GAB* est donc le double de l'angle *C* qui est égal à l'angle *EAD* en tant qu'alternes-internes. L'angle *DAC* égal à l'angle *C* est donc le tiers de l'angle *DAB*. Il a donc divisé l'angle *DAB* en trois parties égales. /

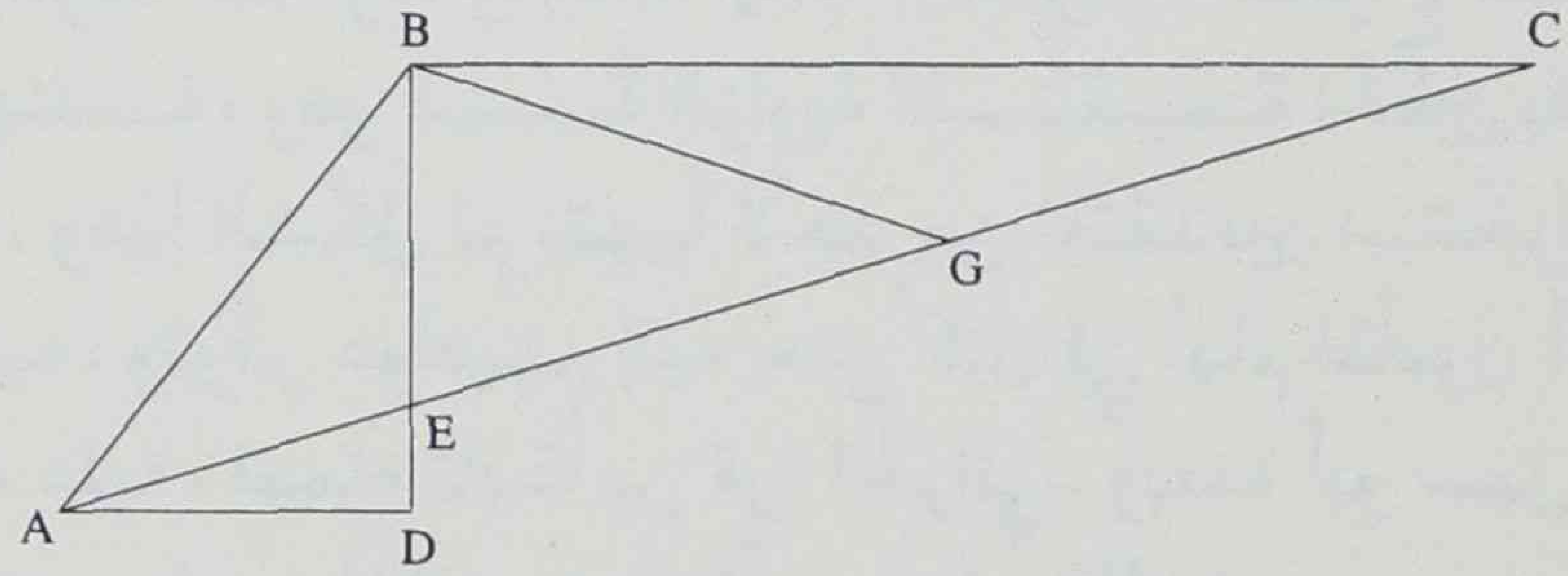


Fig. 1

Lemme cherché par Abū Sahl al-Qūhī

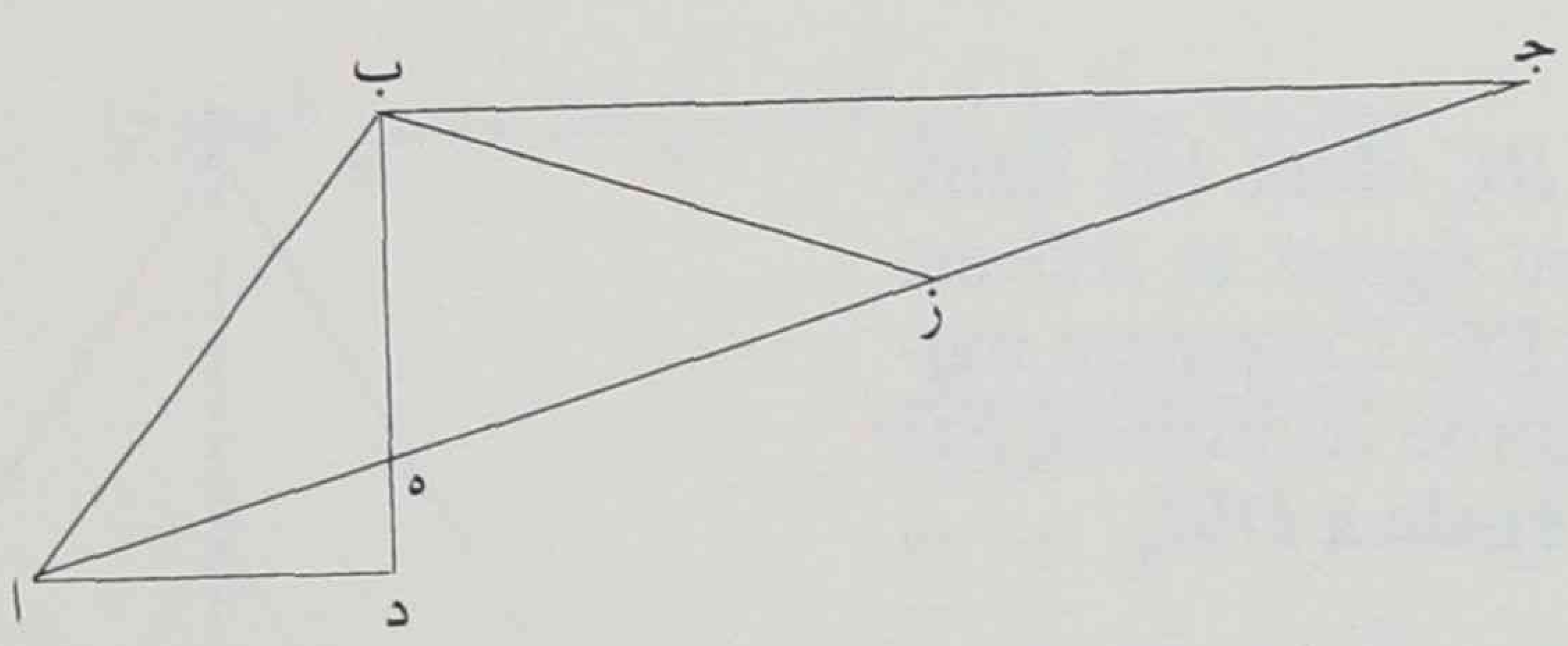
24v Étant données les deux droites *AB*, *BC* entourant l'angle *B*, et *BC* sans limite, nous voulons mener deux droites comme les droites *AC*, *DC* telles que *DC* soit égale à *DA* et que le rapport de *AB* à *BC* soit égal au rapport de *BC* à *BD*.

معشر عبيده – لشكر أياديه الجسام، ومننه العظام، بمنّه وفضله. فلنبتدئ أولاً بالمقدمات التي سلكها القدماء والمحدثون بطريق التحليل، لعمل قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية، ثم نردفه بالبرهان على ما تفردتُ باستخراجه، ثم نبرهن على كل من تلك المقدمات، وبالله التوفيق.

مقدمة ثابت بن قرة الحرّاني

زاوية ب ا د حادة، نريد أن نقسمها بثلاثة أقسام متساوية.

نخرج د ب عموداً على د آ على سبيل التحليل، وب جـ يوازي آ د. ونخرج من نقطة آ إلى خط ب جـ ‹خطًا› كخط / ا ه جـ، يكون ه جـ مثلي ٢٤-و ا ب. وإذا كان ‹ذلك› كذلك، فقد تهيأ قسمة زاوية ب ا د بثلاثة أقسام متساوية؛ لأنا نخرج خط ب ز على منتصف خط ه جـ، فتكون خطوط ا ب ب ز ز ه ز جـ متساوية من أجل أن زاوية ب قائمة، وتكون زاوية ب ز ا مثليْ ز جـ ب، لأنها مثل زاويتي جـ ب الداخلتين، وزاوية ب ز ا مثل زاوية ز ا ب، فزاوية ز ا ب مثلا زاوية جـ المساوية لزاوية ه ا د من جهة التبادل، فزاوية د ا جـ المساوية لزاوية جـ ثلث زاوية د ا ب. فقد قسم زاوية د ا ب بثلاثة أقسام متساوية./



مقدمة ‹سألها› أبو سهل الكوهي ٢٤-ظ

خطا ا ب ب جـ مفروضان، يحيطان بزاوية ب، وب جـ غير متناه. نريد أن نخرج ‹خطين› كخطي ا جـ د جـ، يكون د جـ مثل د آ وتكون نسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة ب جـ إلى ب د.

2 والمحدثون: والمحدثين – 12 مثل (الثانية): مثلى – 13 مثلا: مثلى، يكتبها بالألف المقصورة، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 17 متناهٍ: متناهي، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

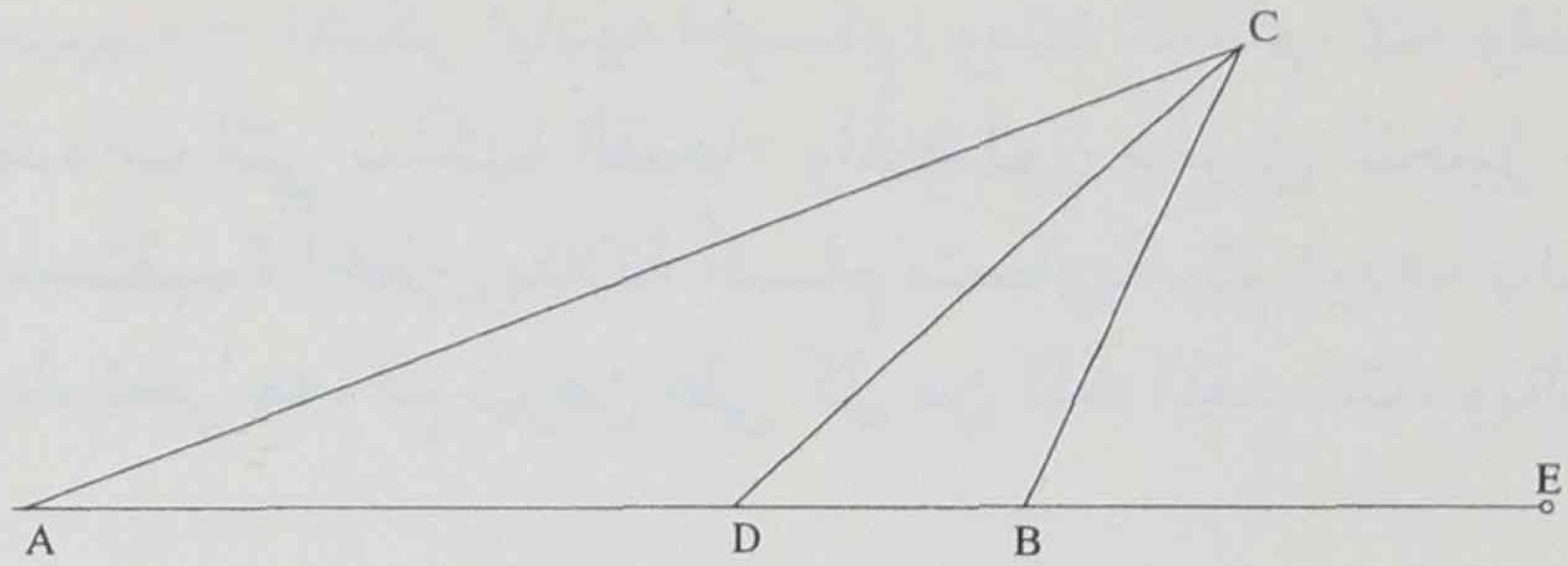


Fig. 2

Si ceci est possible, la division de l'angle *EBC* en trois parties égales sera possible si on mène *AB* jusqu'à *E*, car le triangle *ABC* sera semblable au triangle *DBC*, parce que l'angle *B* sera commun. On aura donc l'angle *BCD* du triangle *BCD* égal à l'angle *CAB* du triangle *CAB*, et l'angle *CDB* égal à l'angle *ACB*. Les deux angles *D*, *C* du triangle *BDC* seront donc égaux <respectivement> aux deux angles *C*, *A* du triangle *BAC*. Mais l'angle *BDC* est le double de l'angle *A* ; il est donc le double de l'angle *DCB*. L'angle *EBC* est égal <à la somme> des deux angles *BCD*, *CDB*. L'angle *BDC* est donc les deux tiers de l'angle *EBC* et l'angle *BCD* est son tiers. Par ce lemme il est donc possible de diviser l'angle en trois parties égales. /

25r Or j'ai établi les démonstrations de ces deux lemmes par une méthode facile autre que leur méthode.

Lemme cherché par Abū al-Ḥasan al-Shamsī al-Harawī

Un triangle *ABC* dont les deux côtés *AB*, *AC* sont égaux et *AG* est perpendiculaire à *BC*. Comment mener une droite comme la droite *CED* telle que *ED* soit égale à *DB* ?

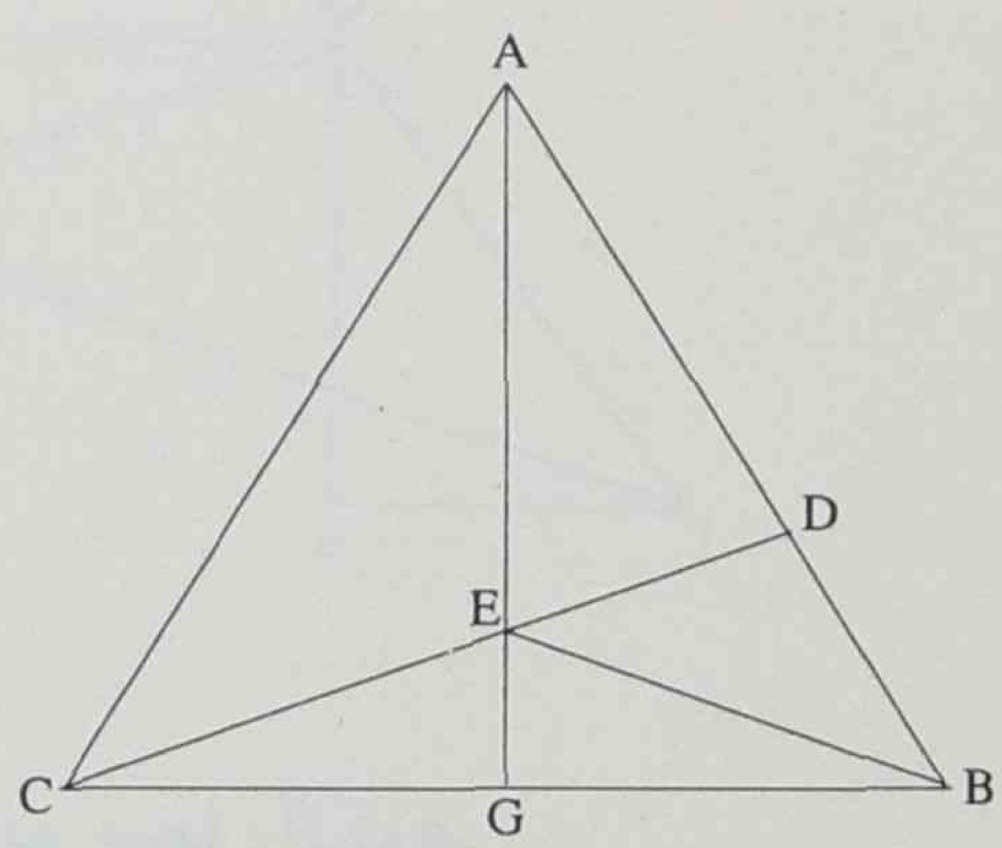
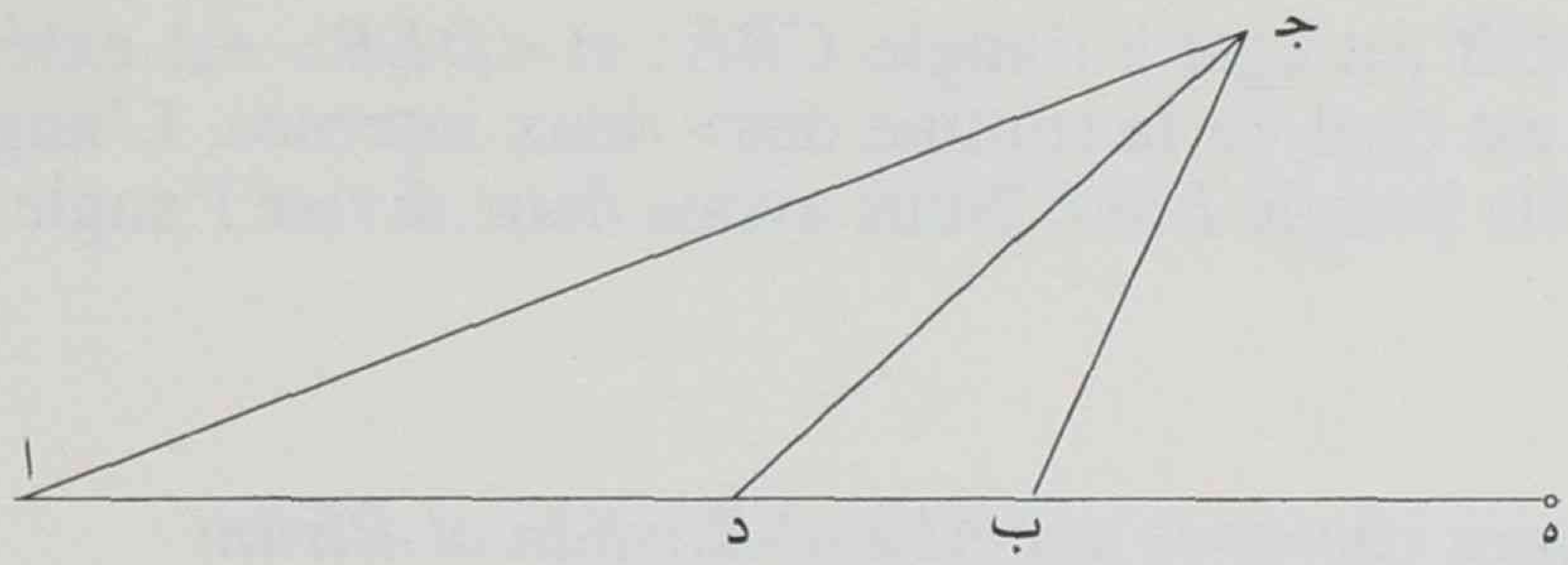


Fig. 3[1]

S'il en est ainsi, la division de l'angle *ABC* en trois parties égales sera possible. Joignons *BE*. L'angle *DEB* qui est égal à l'angle *DBE* est donc le double de l'angle *DCB*

[1] Cette figure n'est pas dans le manuscrit.

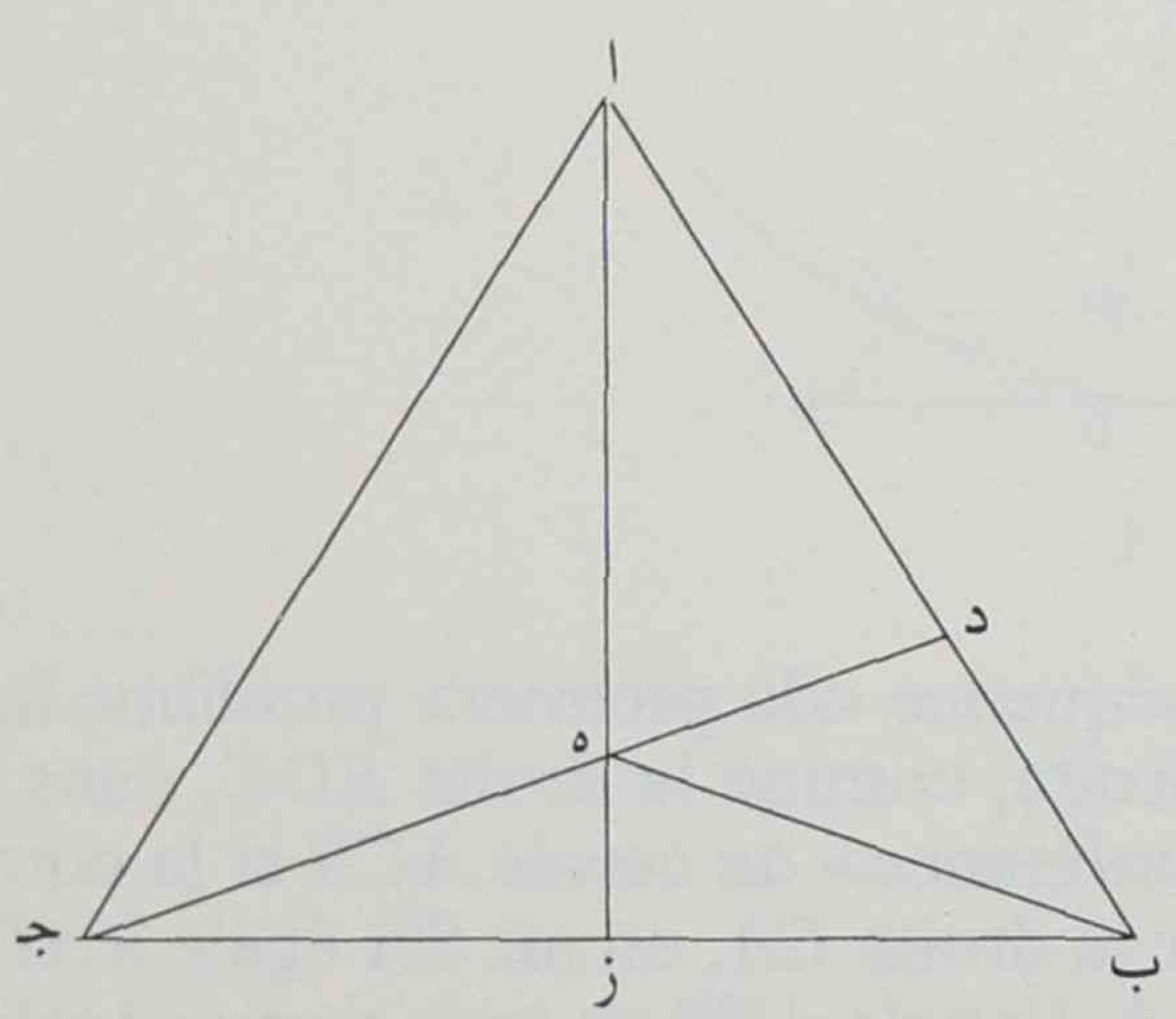


وإذا تهيأ ذلك، فيتهيأ انقسام زاوية ه ب جـ بثلاثة أقسام متساوية إذا أخرج ا ب إلى ه؛ وذلك لأن مثلث ا ب جـ يكون شبيهًا بمثلث د ب جـ، لاشتراك زاوية ب. فتكون زاوية ب جـ د من مثلث ب جـ د مساوية لزاوية جـ ا ب من مثلث جـ ا ب. وزاوية جـ د ب مساوية لزاوية ا جـ ب، فيكون زاويتا د جـ من مثلث ب د جـ مساويتين لزاويتي جـ ا من مثلث ب ا جـ. لكن زاوية ب د جـ مثلا زاوية ا، فهي مثلا زاوية د جـ ب، وزاوية ه ب جـ مثل زاويتي ب جـ د جـ د ب، فزاوية ب د جـ ثلثا زاوية ه ب جـ، وزاوية ب جـ د ثلثها. فقد تهيأ بهذه المقدمة قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية. /

وقد استخرجت البراهين على هاتين المقدمتين بطريق سهل دون طريقهما. ٢٥-و

مقدمة سألها أبو الحسن الشمسي الهروي

مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ، وا ز عمود على ب جـ. كيف نخرج ⟨خطًا⟩ كخط جـ ه د يكون ه د مساويًا لـ د ب؟



وإذا كان ذلك كذلك، فقد تهيأ قسمة زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية. وذلك أنا نصل ب ه، فتكون زاوية د ه ب المساوية لزاوية د ب ه مثلي زاوية د جـ ب، لأن

4 فتكون: ويكون – 5 زاويتا: زاويتى / مساويتين: مساويتان – 6 زاوية: زاويتى، ثم صحح عليها / جـ د ب: ب د ب – 7 ثلثا: ثلثى – 9 هاتين: هذين – 12 ساقي: كتب أولاً «الاضلاع»، ثم ضرب عليها بالقلم.

puisque l'angle *DCB* est égal à l'angle *CBE* ; et <*DEB*> est extérieur au triangle *EBC* et il est égal <à la somme des> deux internes. L'angle *DBE* est donc le double de l'angle *EBG*. Nous avons donc divisé l'angle *ABC* en trois parties égales.

Lemmes cherchés par Abū al-Rayḥān al-Bīrūnī
Que Dieu très Haut le soutienne

Le premier : un triangle *ABC* à deux côtés *AB*, *AC* égaux. Comment mener une droite comme la droite *AD* telle que si nous posons *AE* égal à *AD* et que nous joignons *ED* le rapport de *AB* à *BD* soit égal au rapport de *AD* à *DE* ?

L'intention dans cette construction est la division de l'angle *BAC* en trois parties égales.

25v Traçons au centre *A* et à la distance *AE* l'arc *EDH*. Menons *EGH*. / Il est clair qu'il est parallèle à *BC*. Puisque le rapport de *AB* à *BD* est égal au rapport de *AD* à *DE* et que *AE* est égal à *AD*, le rapport de *AB* à *BD* sera égal au rapport de *AE* à *ED* et que *EG* est parallèle à *BD*, le rapport de *AB* à *BD* est égal au rapport de *AE* à *EG*. Le rapport de *AE* à chacun de *ED* et *EG* est donc le même. *EG* est donc égal à *ED* et les deux triangles *AED*, *DEG* sont semblables car l'angle *EDA* est commun. L'angle *DEH* est donc égal à l'angle *EAD*, donc l'arc *DH* est le double de l'arc *DE* car l'angle *E* est inscrit et l'angle *A* est au centre. L'angle *BAC* a donc été divisé en trois parties égales par l'analyse et son tiers est l'angle *BAD*.

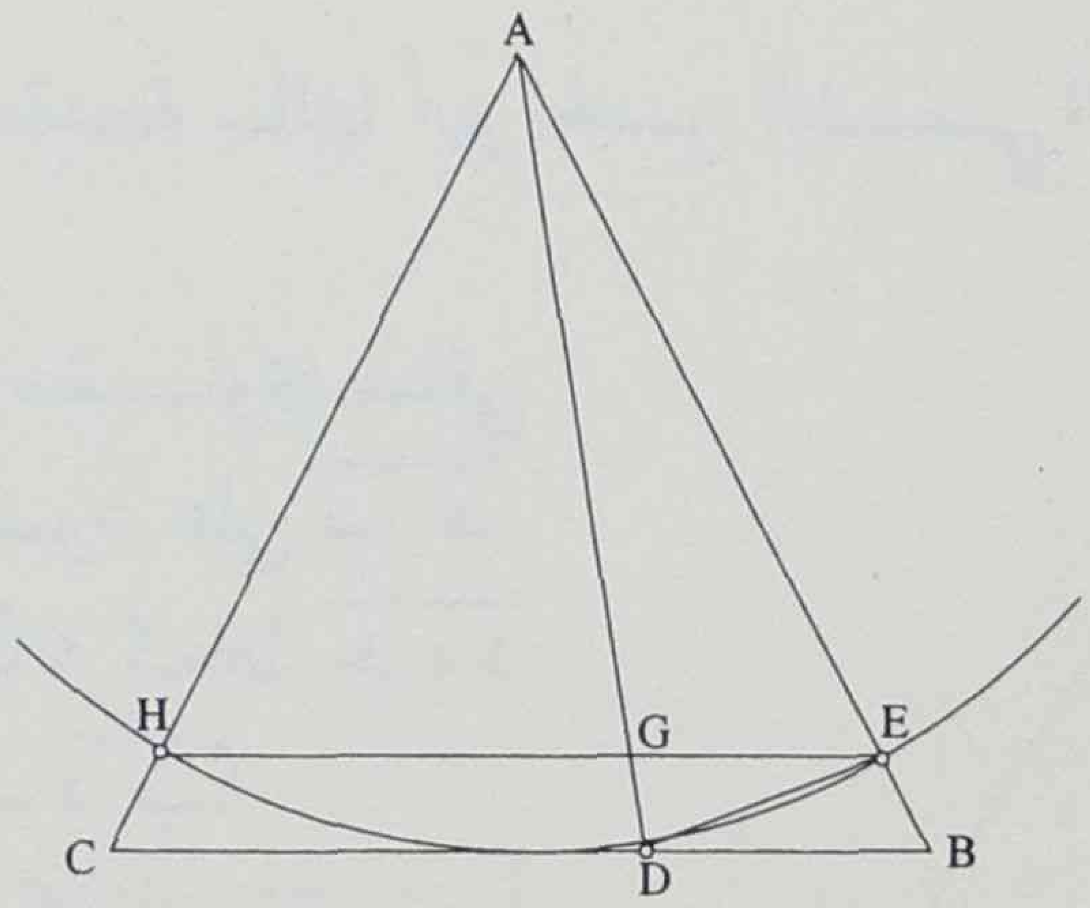


Fig. 4

Deuxième problème : C'est une conséquence <du premier> problème lui-même, qui est : comment mener une droite, comme la droite *EDC*, dans le cercle *ACB*, de centre *E*, vers <la circonférence> du cercle *ACB* et la corde *AB*, telle que si nous joignons *C*, *A* par la droite *CA*, on ait *CA* égale à *AD* ; et que si nous joignons *EB*, la division de l'angle *AEB* en trois parties égales soit possible ?

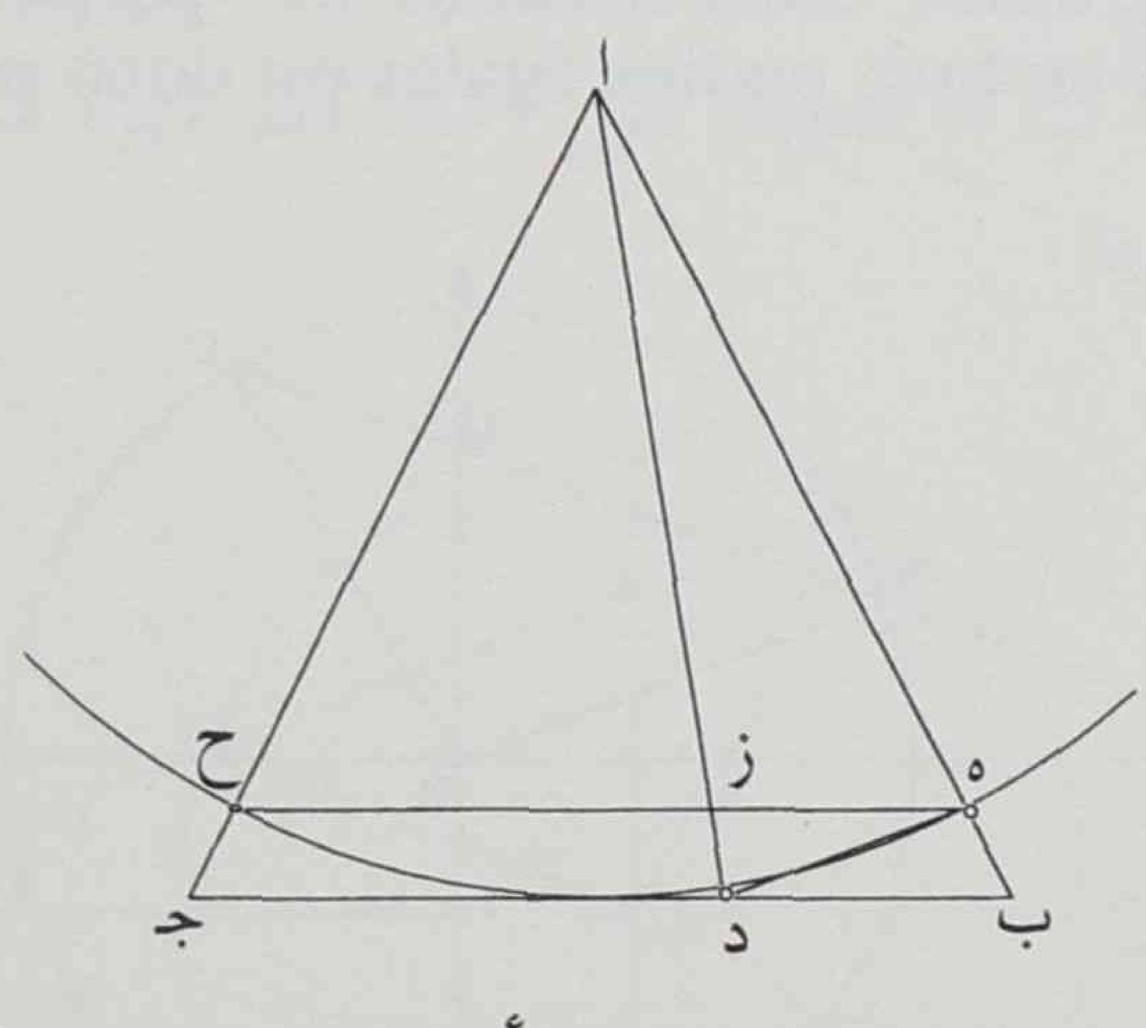
زاوية د جـ ب مثل زاوية جـ ب ه، وهي خارجة من مثلث ه ب جـ، وهي مثل الداخلتين. فزاوية د ب ه مثلا زاوية ه ب ز. فقد قسمنا زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية.

مقدمات سألها أبو الريحان، أيده الله تعالى

إحداها: مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ. كيف نخرج ⟨خطًا⟩ كخط ا د، إذا جعلنا ا ه مثل ا د ووصلنا ه د، كانت نسبة ا ب إلى ب د كنسبة ا د إلى د ه؟

والغرض في هذا العمل قسمة زاوية ب ا جـ بثلاثة ⟨أقسام⟩ متساوية.

فلندر على مركز ا وببعد ا ه قوس ه د ح ونخرج ه ز ح. / فبيّنٌ أنه ٢٥-ظ يوازي ب جـ. ولأن نسبة ا ب إلى ب د كنسبة ا د إلى د ه، وا ه مثل ا د، تكون نسبة ا ب إلى ب د كنسبة ا ه إلى ه د. ولأن ه ز يوازي ب د، تكون نسبة ا ب إلى ب د كنسبة ا ه إلى ه ز، فنسبة ا ه إلى كل واحد من ه د ه ز واحدة، فـ ه ز مثل ه د، ومثلثا ا ه د د ه ز متشابهان لاشتراك زاوية ه د ا، فزاوية د ه ح مساوية لزاوية ه ا د، فقوس د ح مثلا قوس د ه، لأن زاوية ه على المحيط وزاوية ا على المركز. فقد انقسمت زاوية ب ا جـ بثلاثة أقسام متساوية بالتحليل، وثلثها زاوية ب ا د.



المسألة الثانية: هي نتيجة هذه المسألة بعينها، وهي كيف نخرج ⟨خطًا⟩ كخط ه د جـ في دائرة ا جـ ب من مركز ه إلى دائرة ا جـ ب ووتر ا ب، إذا وصلنا جـ ا بخط جـ ا، كان جـ ا مثل ا د؛ وإذا وصلنا ه ب، تهيأ انقسام زاوية ا ه ب ثلاثة أقسام متساوية؟

5 إحداها: احدها – 13 ومثلثا: ومثلثى – 17 وهي: وهو.

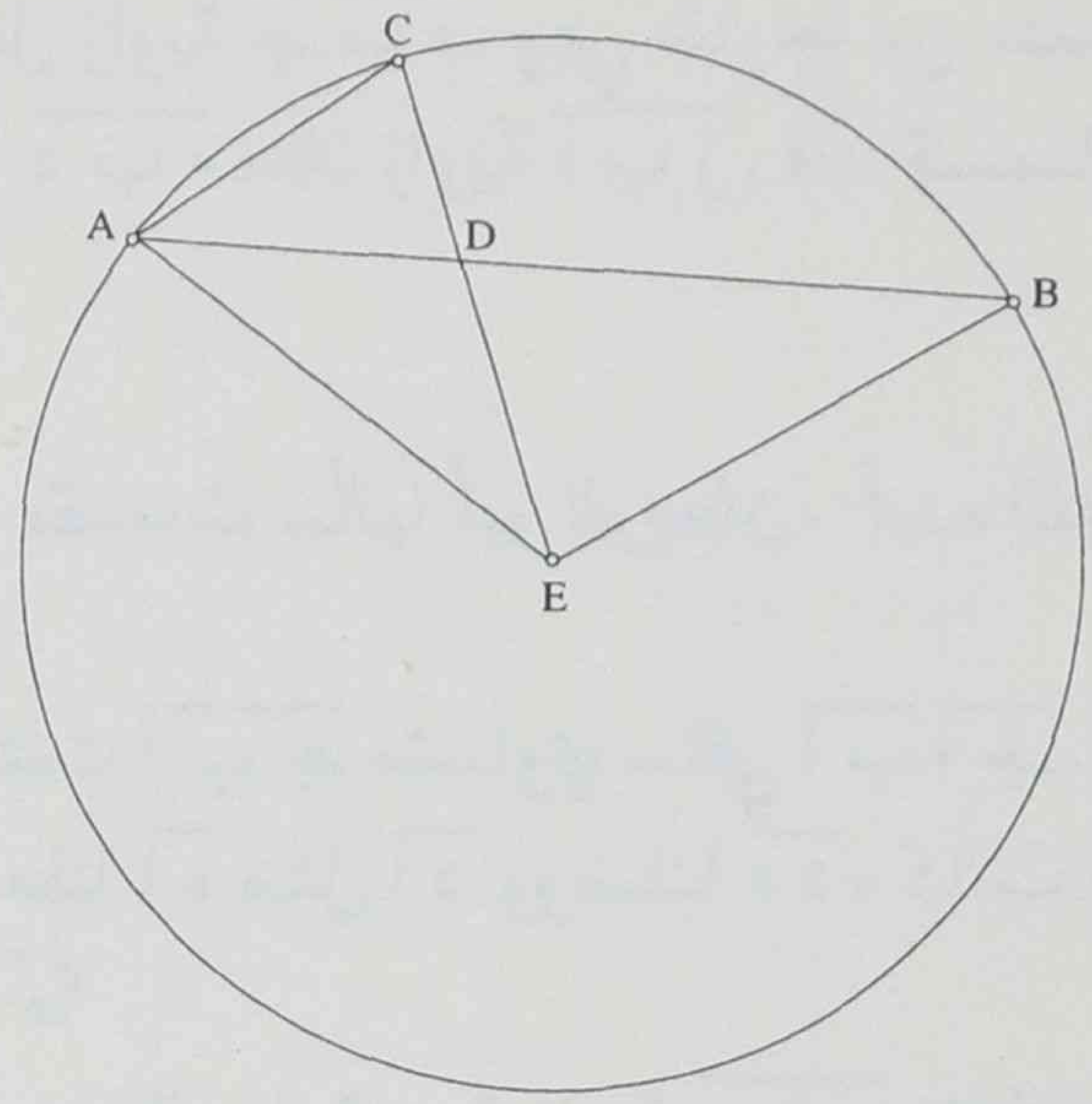


Fig. 5

26r Ainsi, comme le triangle *ACD* / est semblable au triangle *ACE* car l'angle *C* est commun, l'angle *A* du triangle *ACD* est donc égal à l'angle *E* du triangle *ACE*. L'arc *CB* est donc le double de l'arc *CA*, comme nous l'avons précédemment indiqué.

Troisième problème: Comment mener du point *C* une droite vers la droite *AB*, comme la droite *CD*, telle que *CD* par *AB* plus le carré de *BD* soit égal au carré de *AB* ?

Il aurait fallu ajouter à cette condition que la droite joignant *C* et *B* soit égale à la droite *AB* afin que le problème soit déterminé par les conditions nécessaires. S'il en est ainsi, nous menons *BH* perpendiculaire à *AB* ; la division de l'angle *CBH* en trois parties égales est donc possible.

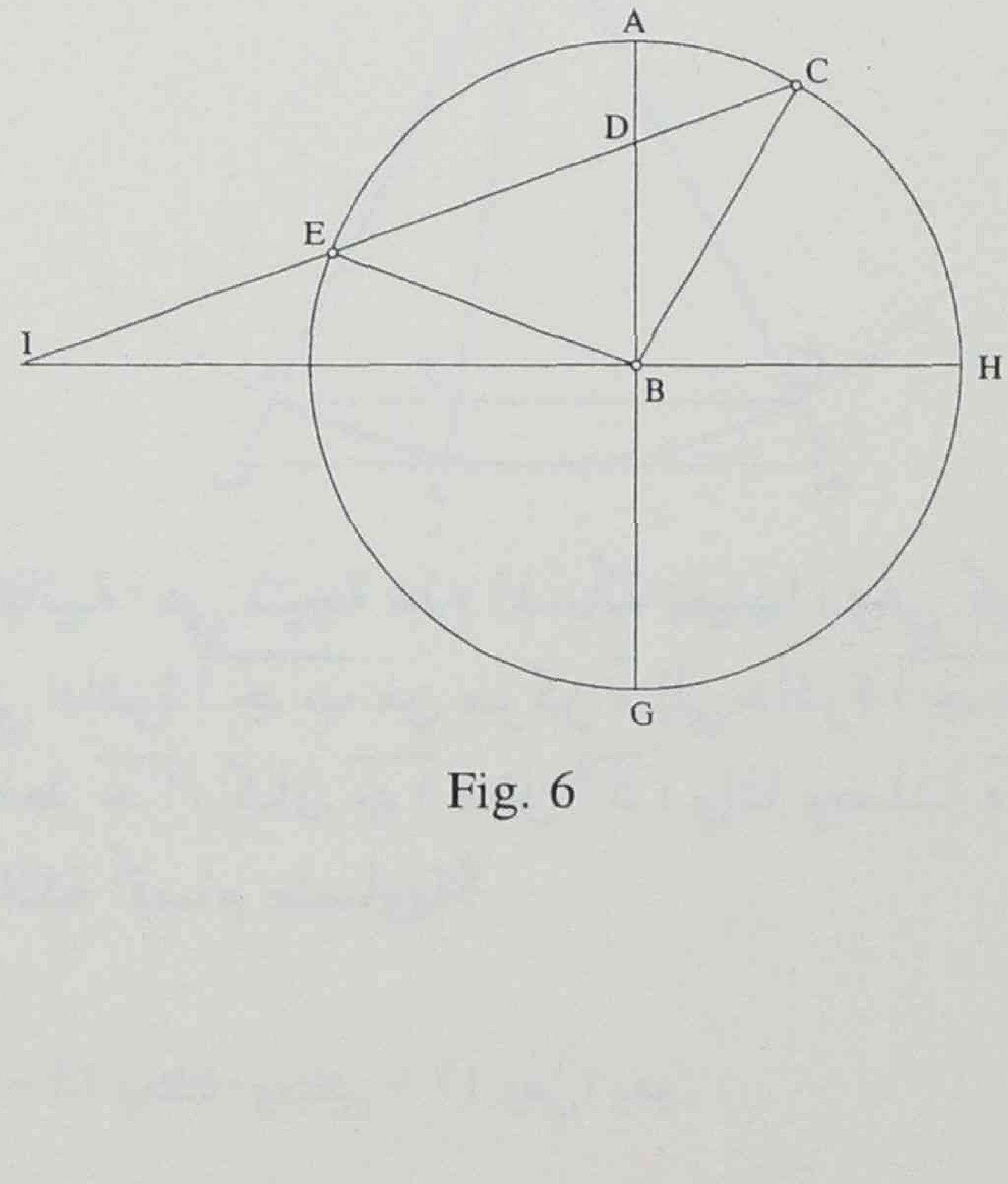
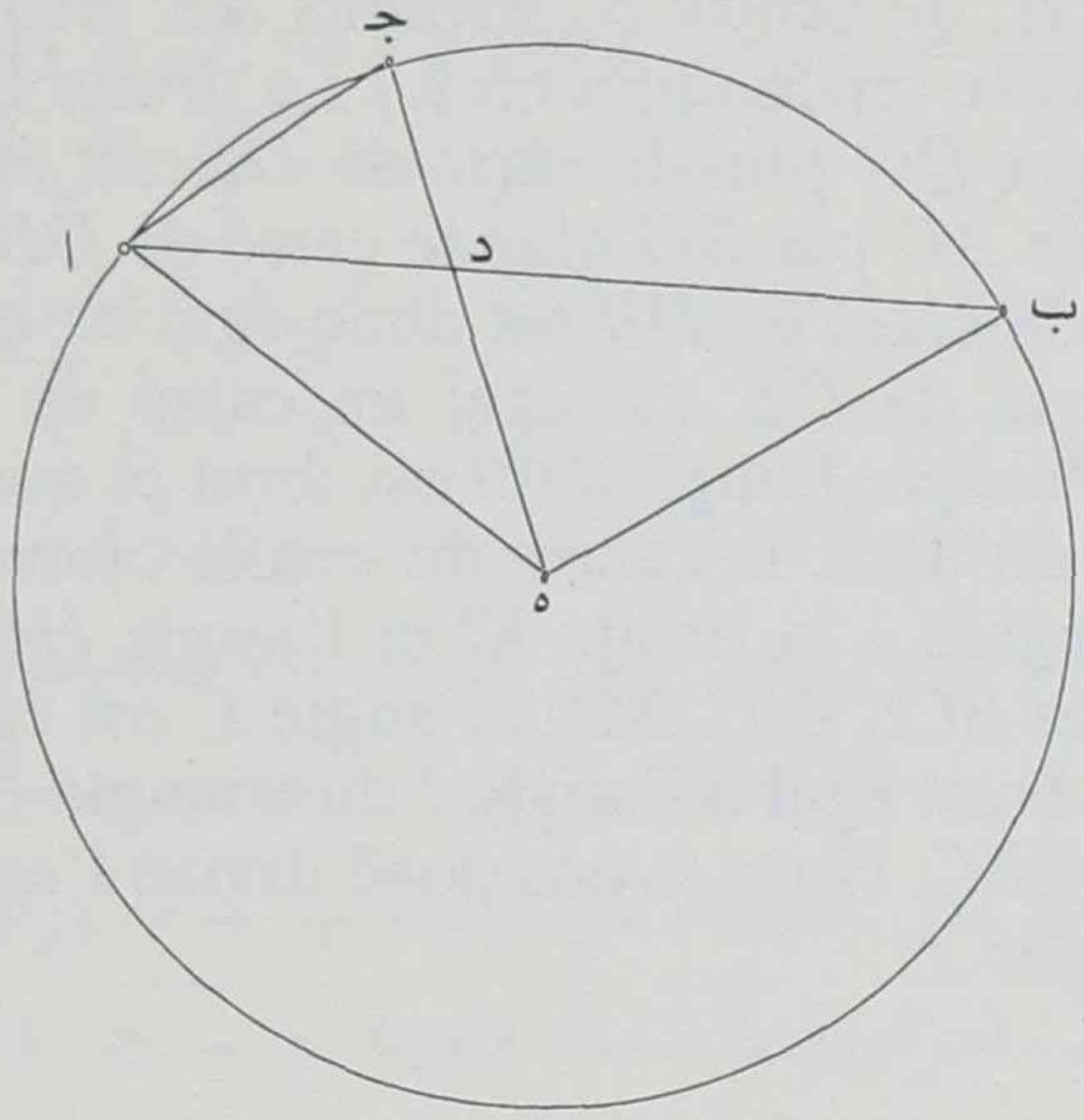


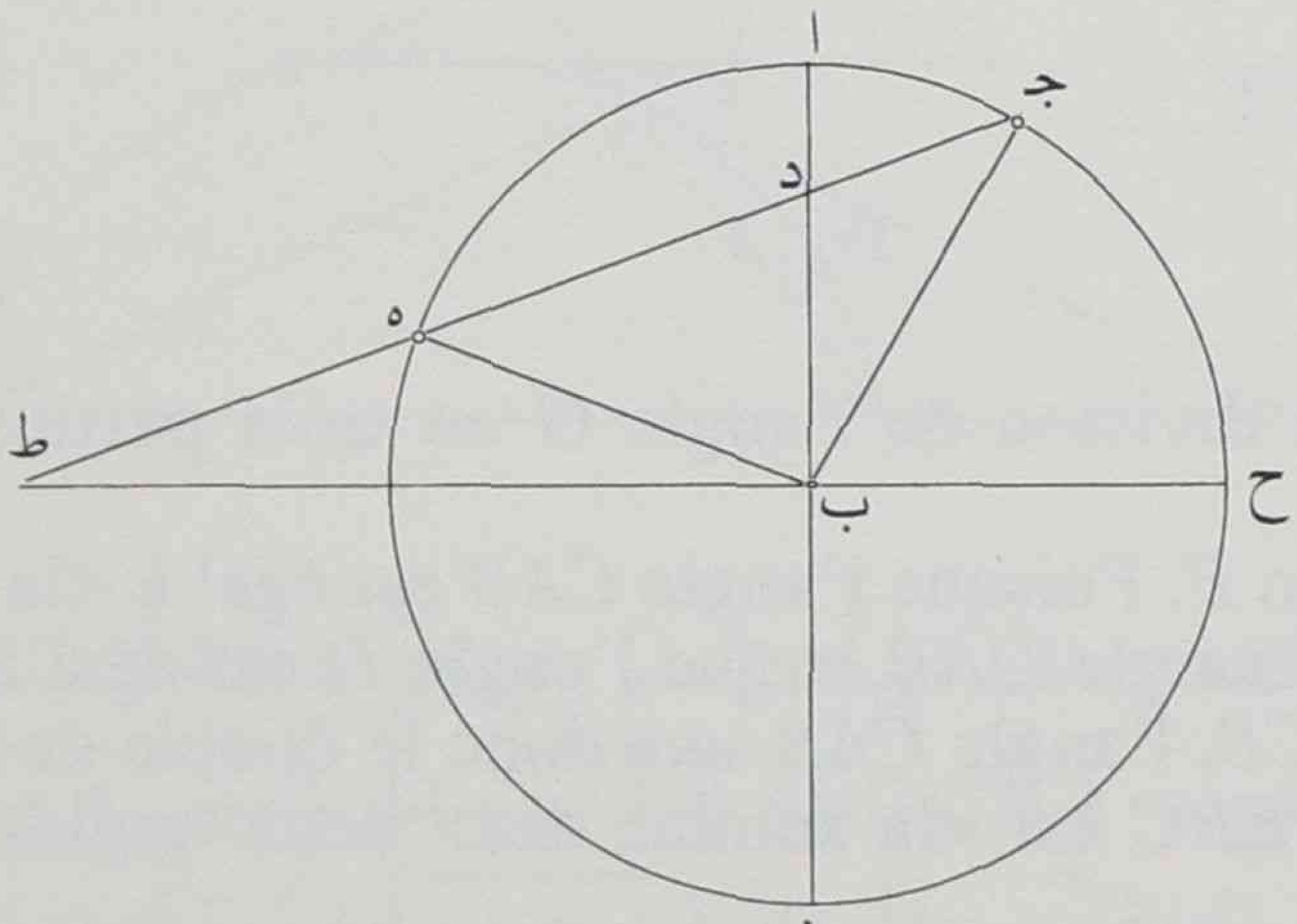
Fig. 6



وذلك أن مثلث ا جـ د / يشبه مثلث ا جـ ه لاشتراك زاوية جـ، فتكون ٢٦-و
زاوية ا من مثلث ا جـ د مثل زاوية ه من مثلث ا جـ ه. فقوس جـ ب مثلا قوس جـ ا على ما قدمنا ذكره.

المسألة الثالثة: كيف نخرج من نقطة جـ خطاً إلى خط ا ب كخط جـ د، يكون جـ د في ا ب مع مربع ب د مثل مربع ا ب؟

وكان ينبغي أن يزاد في هذه الشريطة أن الخط الذي يصل ما بين جـ ب مساوٍ لخط ا ب حتى تصير المسألة محدودة بالشرائط الواجبة. وإذا كان ذلك كذلك، وأخرجنا ب ح عموداً على ا ب، فقد تهيأ قسمة زاوية جـ ب ح بثلاثة أقسام متساوية.



8 ب ح: بحـ.

Traçons le cercle *ACH*, de centre *B* ; menons *AB* jusqu'à *G* et menons
26v *HB*, *CD* jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en *I*. / La droite *DE* est donc égale à la droite *AB* car *AD* par *DG* plus le carré de *DB* est égal à *CD* par *DE* plus le carré de *DB*. Mais *AD* par *DG* plus le carré de *DB* est égal au carré de *AB*. *CD* par *DE* plus le carré de *DB* est donc égal au carré de *AB*. Mais *CD* par *AB* plus le carré de *DB* est égal au carré de *AB*. *DE* est par conséquent égal à *AB*. Puisque l'angle *DBI* est droit et que la droite *DE* est égale à la droite *EB*, *E* est donc le centre du cercle circonscrit au triangle *DBI*, la droite *DE* est égale à la droite *EI* et l'angle *HBC* est égal à <la somme> des deux angles *BCI*, *BIC*. Mais l'angle *C* est égal à l'angle *E* du triangle *BCE* et l'angle *B* est égal à l'angle *I* du triangle *BEI*. L'angle *I* est donc le tiers de l'angle *HBC*. Nous avons donc divisé l'angle *HBC* en trois parties égales par ce lemme. /

27r *Autre lemme cherché par Abū Ḥāmid al-Ṣāghānī*

Deux angles *G*, *H*, aigu et obtus <respectivement et dont la somme> est égale à deux droits. Nous voulons diviser l'angle *G* en trois parties égales.

Nous posons l'arc *ACB* sur la corde *AC* que sous-tend un angle égal à l'angle *H* et nous menons indéfiniment la corde *CA*. Comment mener deux droites, comme les deux droites *CB*, *DB*, égales, et telles que si on mène *AB* il soit égal à *AD* ?

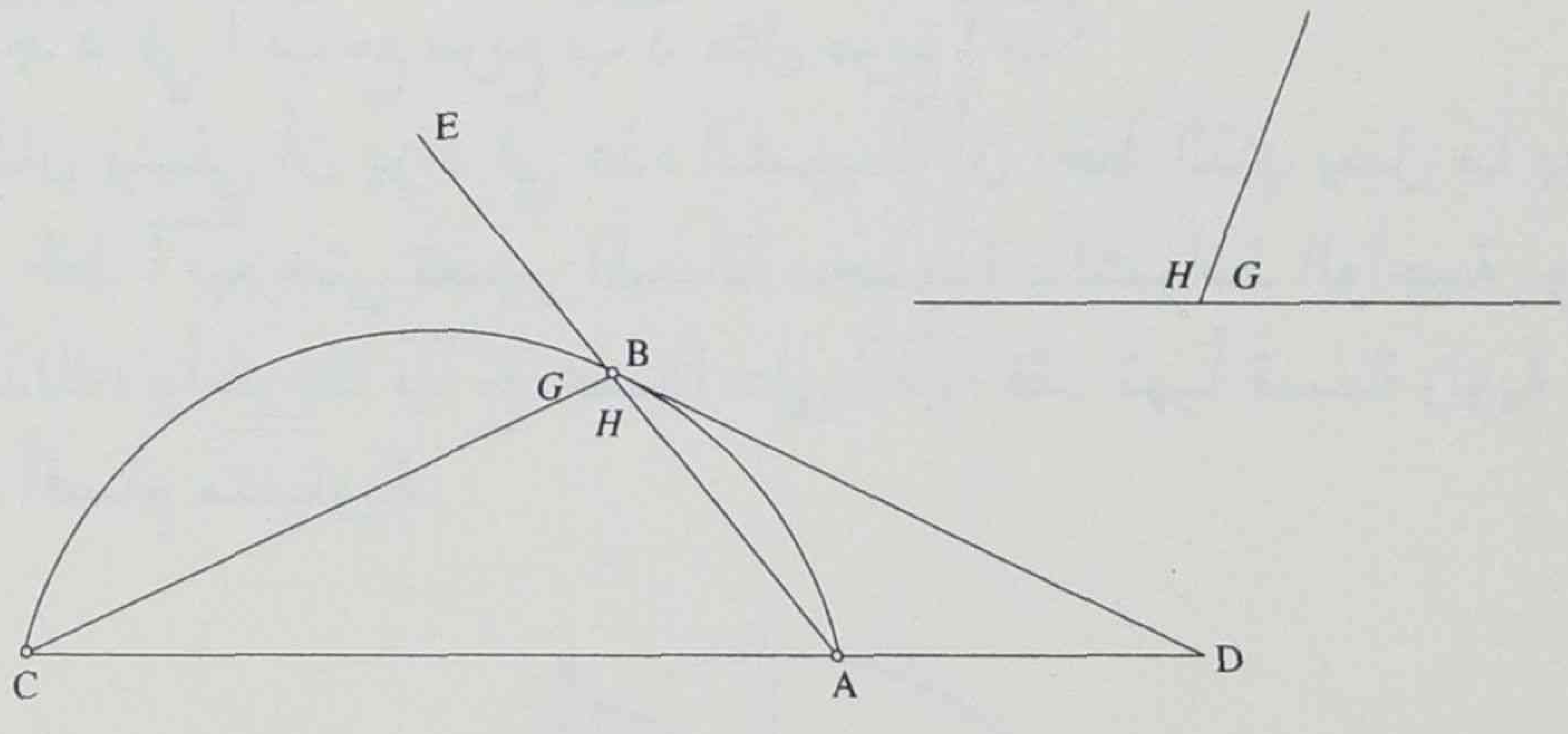


Fig. 7

S'il en est ainsi, la division de l'angle *G* en trois parties égales sera possible.

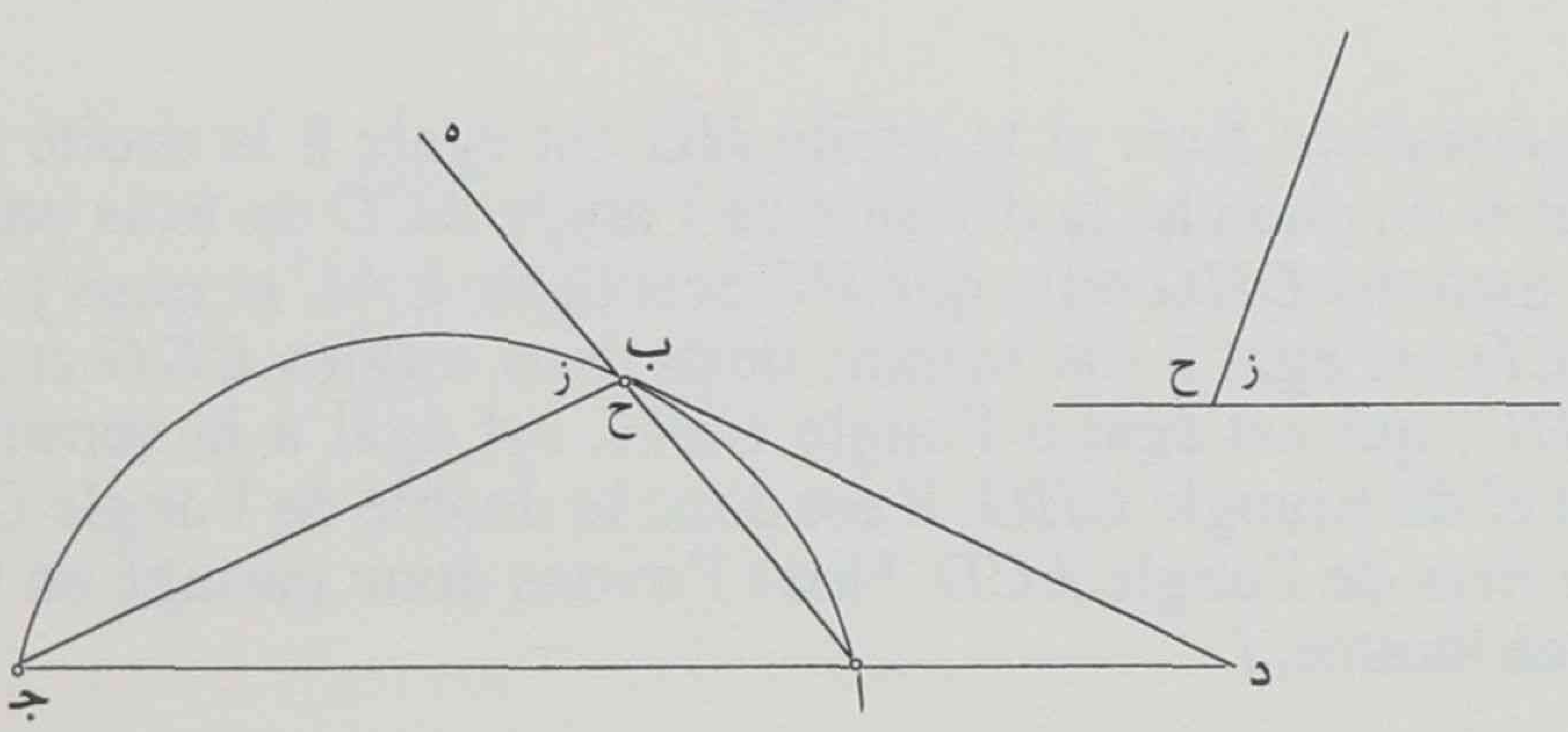
Menons *AB* jusqu'en *E*. Puisque l'angle *CAB* est égal à <la somme des> deux angles *D*, *B* du triangle *DAB* et que l'angle *D* est égal à l'angle *B* et égal aussi à l'angle *DCB*, l'angle *CAB* sera donc le double de l'angle *ACB*. Mais l'angle externe *EBC* est <la somme des> deux angles *BCA*, *CAB*.

فلندر دائرة ا جـ ح على مركز ب، ونخرج ا ب إلى ز ونخرج ح ب جـ د حتى يلتقيا على ط، فيكون / خط د ه مثل خط ا ب، لأن ا د في د ز ومربع ٢٦-ظ د ب مثل جـ د في د ه ومربع د ب. لكن ا د في د ز ومربع د ب مثل مربع ا ب، فـ جـ د في د ه ومربع د ب مثل مربع ا ب. لكن جـ د في ا ب ومربع د ب مثل مربع ا ب، فـ د ه إذاً مثل ا ب. ولأن زاوية د ب ط قائمة، وكان خط د ه مثل ‹خط› ه ب، يكون ه مركز الدائرة المحيطة بمثلث د ب ط، ويكون خط د ه مساوياً لخط ه ط، وزاوية ح ب جـ مثل زاويتي ب جـ ط ب ط جـ. لكن زاوية جـ مثل زاوية ه من مثلث ب جـ ه، وزاوية ب مثل زاوية ط من مثلث ب ه ط، فزاوية ط ثلث زاوية ح ب جـ. فقد قسمنا زاوية ح ب جـ بثلاثة أقسام متساوية بهذه المقدمة./

مقدمة أخرى سألها أبو حامد الصاغاني ٢٧-و

زاويتا ز ح حادّة ومنفرجة ومعادلة لقائمتين، وأردنا أن نقسم زاوية ز بثلاثة أقسام متساوية.

نجعل قوس ا جـ ب على وتر ا جـ يقبَل زاوية مساوية لزاوية ح، ونخرج وتر جـ ا إلى غير نهاية. كيف نخرج ‹خطين› كخطي جـ ب د ب يكونان متساويين، وإذا أخرج ا ب، يكون مساوياً لـ ا د؟



وإذا كان ذلك كذلك، فقد تهيأ انقسام زاوية ز بثلاثة أقسام متساوية.

فلنخرج ا ب إلى ه، فلأن زاوية جـ ا ب مثل زاويتي د ب من مثلث د ا ب وزاوية د مثل زاوية ب ومثل زاوية د جـ ب أيضاً، تكون زاوية جـ ا ب مثلي زاوية ا جـ ب. لكن زاوية ه ب جـ الخارجة مثل زاويتي ب جـ ا جـ ا ب،

20 الخارجة: الحاحه.

L'angle *BCA* est donc le tiers de l'angle *EBC*. Nous avons donc divisé l'angle *EBC* qui est égal à l'angle *G* en trois parties égales par ce lemme. /

27v *Autre lemme de certains Anciens par la règle et la géométrie mobile*

Il nous faut cependant le déterminer par la géométrie fixe : Étant donné le cercle *ADB* de diamètre *AB* que l'on prolonge indéfiniment du côté de *B* ; et le point *D* sur sa circonférence. Nous voulons mener une droite, comme la droite *DHG*, telle que *HG* soit égale à *AC*.

Par la géométrie mobile : ils ont considéré une règle partagée, le plus précisément possible, selon les parties <aliquotes> du demi-diamètre *AC*. Ils ont posé au point *D* un pivot et ils ont déplacé une règle sur la circonférence du cercle, comme la règle *DHG*, jusqu'à ce que les parties de *HG* soient égales aux parties de *AC*.

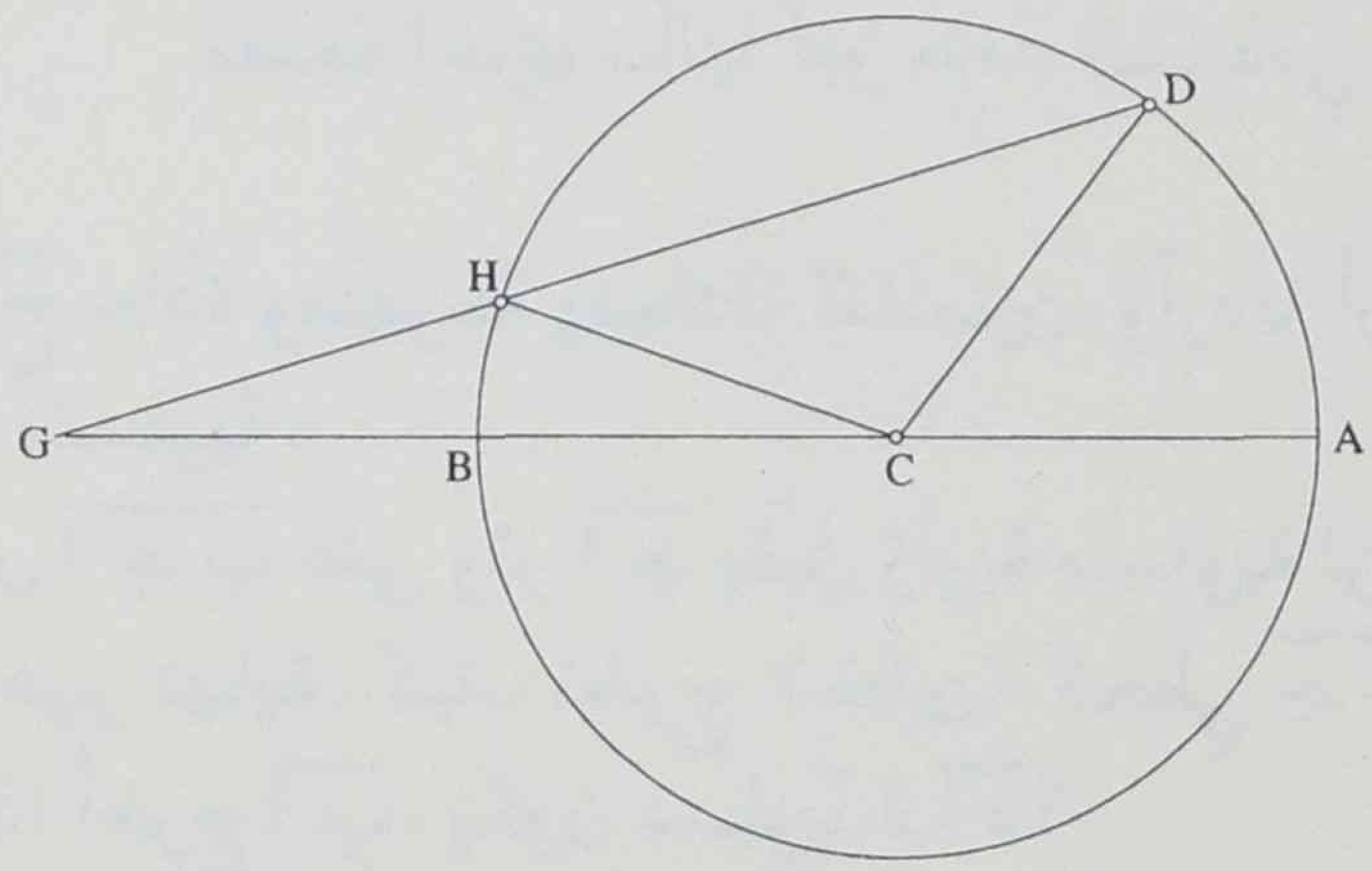


Fig. 8

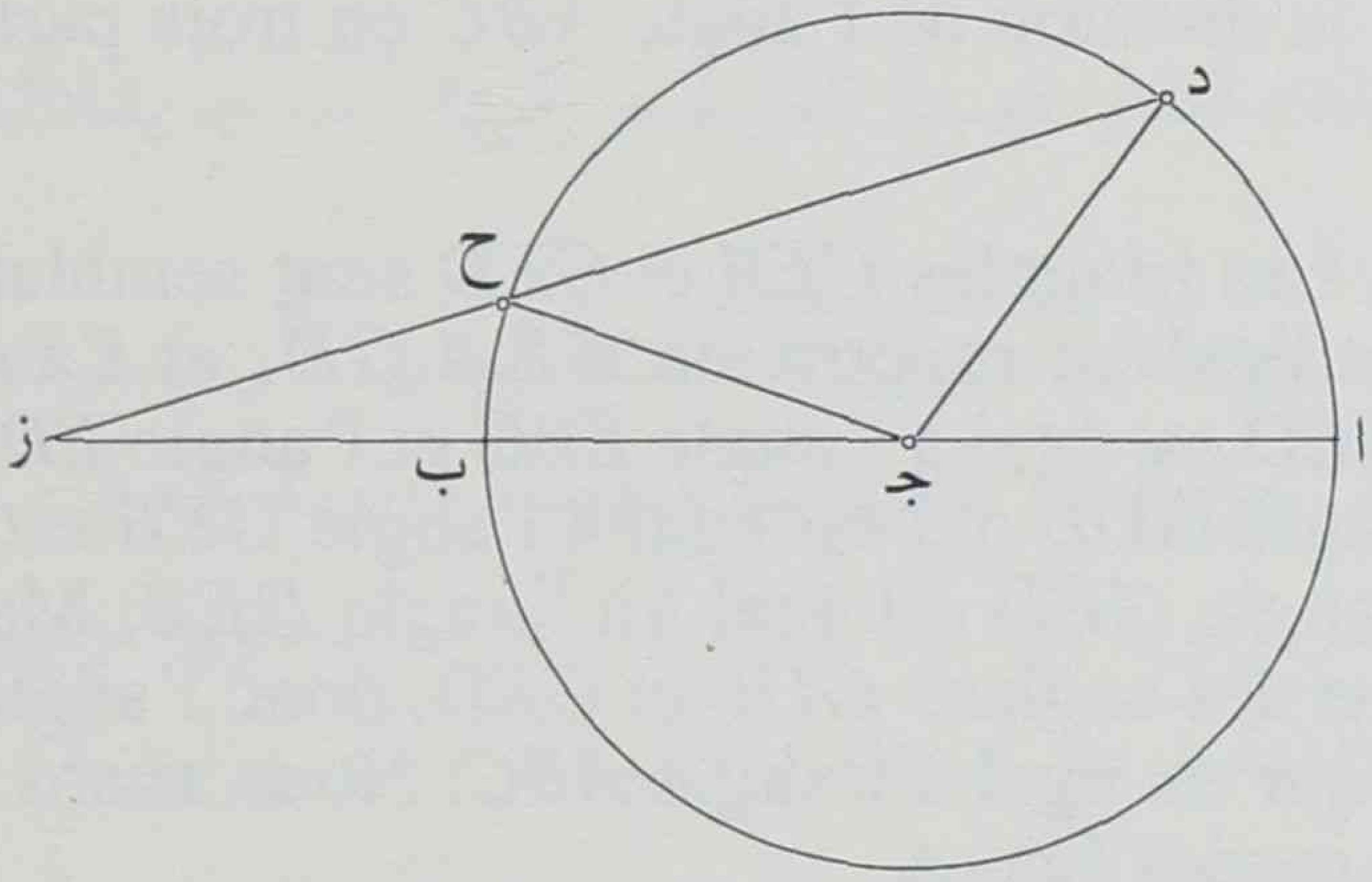
Par la géométrie fixe : si la droite *HG* est égale à la droite *AC* et si on joint *CG*, et si on cherche la division de l'angle *ACD* en trois parties égales, alors nous menons *DHG* telle que *HG* soit égale à *AC* et nous joignons *CH*. L'angle *ACD* est égal à <la somme des> deux angles *CDG* et *DGC*. Mais l'angle *DHC*, qui est égal à l'angle *CDG*, est égal à la somme des deux angles *C* et *G* du triangle *CHG*. Il est donc le double de l'angle *G* ; l'angle *G* est donc le tiers de l'angle *ACD*. Nous l'avons donc partagé en trois parties égales par ce lemme. /

فزاوية ب جـ ا ثلث زاوية ه ب جـ. فقد قسمنا زاوية ه ب جـ المساوية لزاوية ز بثلاثة أقسام متساوية بهذه المقدمة./

مقدمة أخرى لبعض القدماء بالمسطرة وبالهندسة المتحركة ٢٧-ظ

وينبغي أن نستخرجها بالهندسة الثابتة، وهي: دائرة ا د ب مفروضة، وقطرها ا ب، وقد خرج من جهة ب بلا نهاية، ونقطة د على محيطها؛ ونريد أن نخرج ‹خطًا› كخط د ح ز، يكون ح ز مساويًا لـ ا جـ.

وبالهندسة المتحركة: جعلوا مسطرة مقسومة على أقسام نصف قطر ا جـ بأدقّ ما يمكن، ووضعوا على نقطة د لازمة، وحركوا على محيط الدائرة ‹مسطرة› كمسطرة د ح ز حتى صار أقسام ح ز مساوية لأقسام ا جـ.



وبالهندسة الثابتة: إذا كان خط ح ز مثل خط ا جـ، ووصل جـ ز، ‹و›يكون مطلوبًا: قسمة زاوية ا جـ د بثلاثة أقسام متساوية، فنخرج د ح ز يكون ح ز مساويًا لـ ا جـ ونصل جـ ح. فزاوية ا جـ د مثل زاويتي جـ د ز د ز جـ. لكن زاوية د ح جـ المساوية لزاوية جـ د ز مثل زاويتي جـ ز من مثلث جـ ح ز، فهي مثلا زاوية ز، فزاوية ز ثلث زاوية ا جـ د. فقد قسمناها بثلاثة أقسام متساوية بهذه المقدمة. /

9 ح ز: جر.

28r *Autre lemme : notre analyse*

Soit un demi-cercle *ACB*, de diamètre *AB*, de centre *D*. On mène la corde *CB*. Comment mener une droite comme la droite *DE* telle que, si on mène du point *E* une droite *EG* parallèle à *CB*, on ait *BG* par *GD* égal au carré de *GE* ?

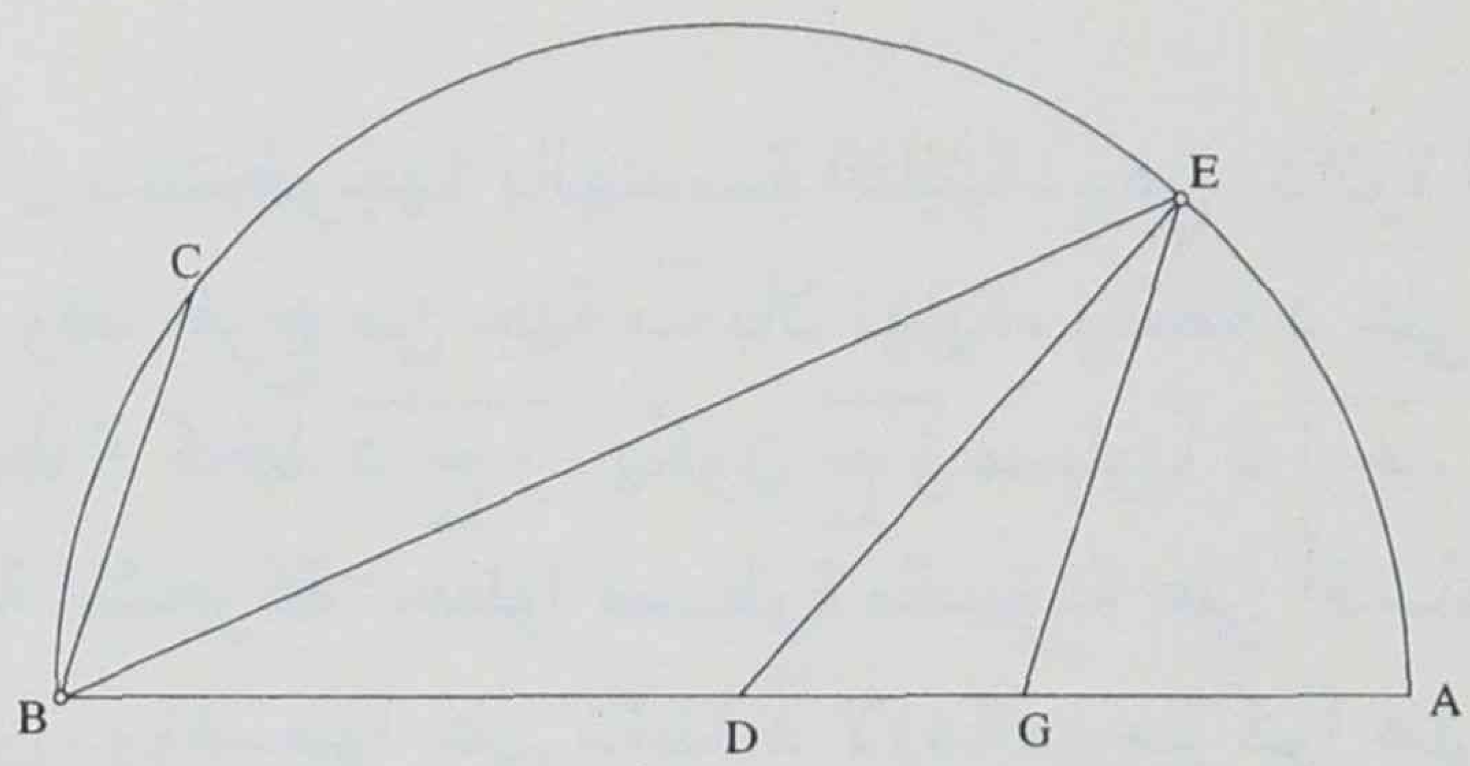


Fig. 9

S'il en est ainsi, alors la division de l'angle *ABC* en trois parties égales sera possible.

En effet, joignons *EB*. Les triangles *GEB* et *GED* sont semblables car le rapport de *BG* à *GE* est égal au rapport de *GE* à *GD*, et l'angle *G* est commun ; alors l'angle *GED* est égal à l'angle *EBG* et l'angle *EDG* est égal à l'angle *GEB* ; donc l'angle *GDE* qui est égal à l'angle *GEB* est le double
28v de l'angle *DEB*, donc l'angle *GED* est égal / à l'angle *DEB*. Mais l'angle *AGE* est égal à <la somme des angles> *GDE* et *GED*, donc l'angle *GED* est le tiers de l'angle *AGE*, qui est égal à l'angle *ABC*. Nous avons donc partagé l'angle *ABC* en trois parties égales.

Lemme que j'ai déterminé, à partir duquel j'ai démontré tous les autres lemmes mentionnés

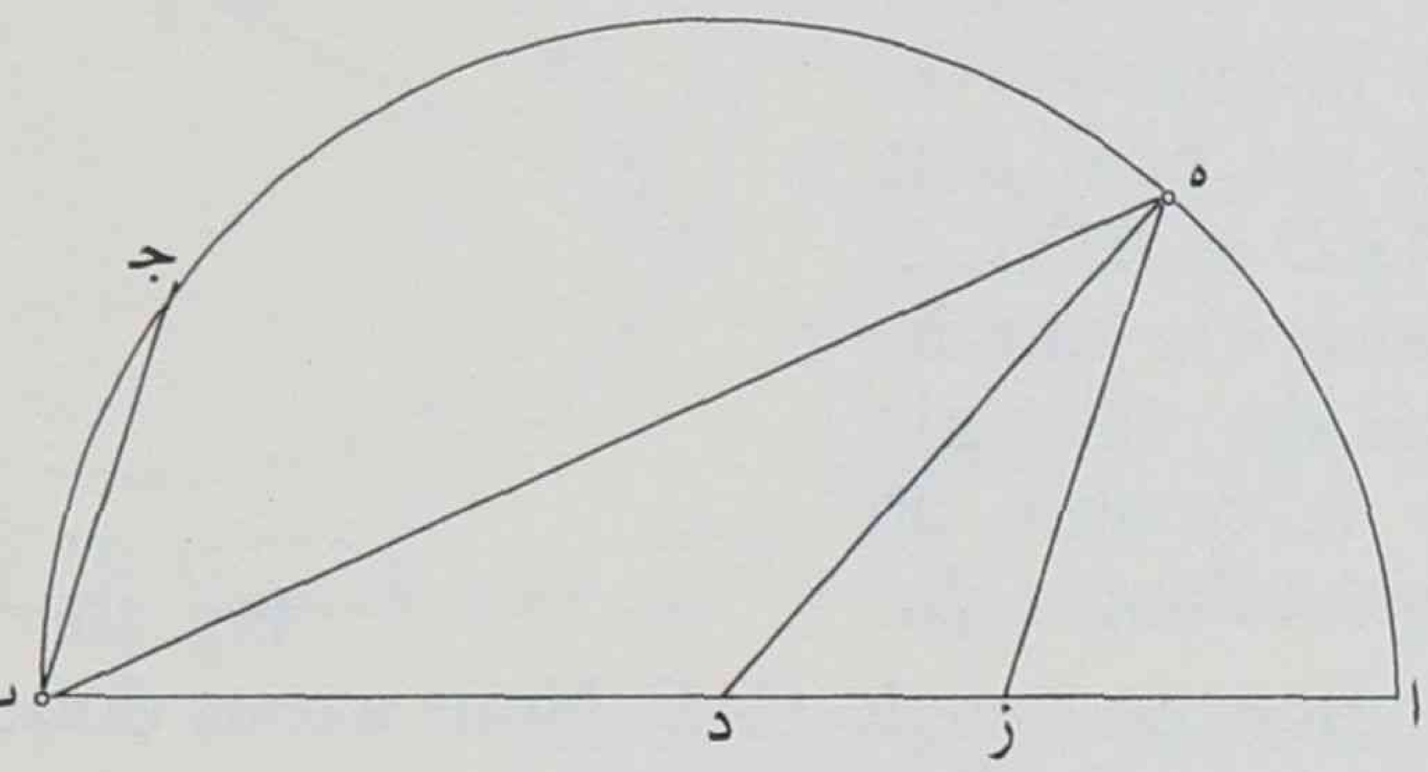
Soit deux droites *AB* et *AC* égales. Nous voulons mener une droite comme la droite *BD* telle que *BD* par *DA* plus le carré de *AD* soit égal au carré de *AB*.

S'il en est ainsi, et si nous prolongeons *CA* jusqu'en *E*, alors la division de l'angle *BAE* en trois parties égales sera possible.

En effet, nous traçons de centre *A* et à la distance *AB* le cercle *EBCG*. Nous menons *BD* telle que *BD* par *DA* plus le carré de *DA* soit égal au

مقدمة أخرى: تحليلنا ٢٨-و

وهي: نصف دائرة ا جـ ب والقطر ا ب والمركز د؛ وقد أخرج وتر جـ ب. كيف نخرج ⟨خطًا⟩ كخط د ه، إذا أخرج من نقطة ه خط ه ز يوازي جـ ب، يكون ب ز في ز د مساويًا لمربع ز ه؟



وإذا كان ذلك كذلك، فقد تهيأ انقسام زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية.

وذلك أنا نصل ه ب، فمثلثا ز ه ب ز ه د متشابهان، لأن نسبة ب ز إلى ز ه كنسبة ز ه إلى ز د. وزاوية ز مشتركة منهما، فزاوية ز ه د مثل زاوية ه ب ز وزاوية ه د ز مثل زاوية ز ه ب. فزاوية ز د ه المساوية لزاوية ز ه ب مثلا زاوية د ه ب، فزاوية ز ه د مثل / زاوية د ه ب. وزاوية ا ز ه مثل ٢٨-ظ زاويتي ز د ه ز ه د، فزاوية ز ه د ثلث زاوية ا ز ه، التي هي مساوية لزاوية ا ب جـ؛ فقد قسمنا زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية.

المقدمة التي استخرجتها وبرهنت سائر المقدمات المذكورة منها

خطا ا ب ا جـ متساويان، أردنا أن نخرج ⟨خطًا⟩ كخط ب د، يكون ب د في د ا مع مربع ا د مساويين لمربع ا ب.

وإذا كان ذلك كذلك، فقد تهيأ قسمة زاوية ب ا ه، إذا أخرجنا جـ ا إلى ه على الاستقامة، بثلاثة أقسام متساوية.

وذلك أنا ندير على مركز ا وببعد ا ب دائرة ه ب جـ ز ونخرج ب د، يكون ب د في د ا مع مربع د ا مساويًا لمربع ا ب. ونخرج ب د ز، فيكون

4 مساويًا: مساوٍ – 7 فمثلثا: فمثلثى – 8 ز د: ز حـ – 15 مساويين: مساويان.

carré de *AB*. Nous menons *BDG*,
29r alors *BD* / par *DG* est égal à *ED* par *DC*. Mais *ED* par *DC* plus le carré de *AD* est égal au carré de *AC*, c'est-à-dire *AB*. Donc *BD* par *DG* plus le carré de *AD* est égal au carré de *AB*. Par conséquent *BD* par *DG* et *BD* par *DA* est le même, et *DG* est égal à *DA*. Nous joignons *AG* ; alors l'angle *EAB* est égal à la somme des angles *ABD* et *BDA*, et l'angle *BDA* est égal à <la somme des> angles *A* et *G* du triangle *ADG* ; il est donc le double de l'angle *G*, qui est égal à l'angle *B*.

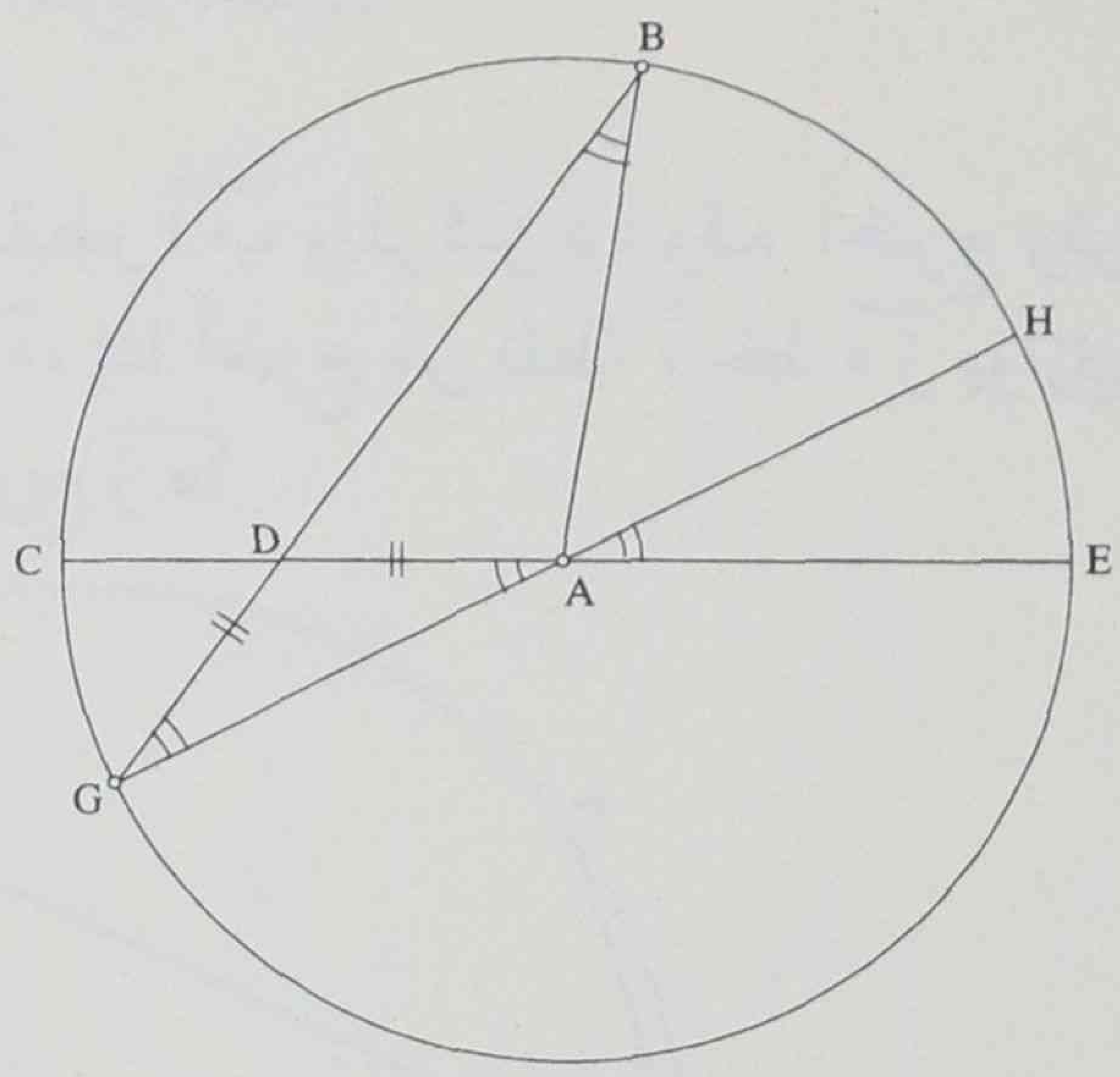


Fig. 10

L'angle *B* est donc le tiers de l'angle *EAB*. Nous avons donc divisé l'angle *EAB* en trois parties égales à l'aide de ce lemme.

<Démonstration du lemme>

Une fois introduit ces lemmes, démontrons ce lemme-ci, puis poursuivons par les démonstrations des autres lemmes mentionnés.

Soit deux droites *AC* et *CD* égales et qui entourent un angle *C* ; nous voulons mener une droite du point *D* jusqu'à la droite *CA* comme la droite *DE*, telle que le produit de la droite *DE* par *EC* plus le carré de *EC* soit égal
29v au carré de *CD*. Construisons / une hyperbole de sommet le point *C* et dont le côté droit est égal à son diamètre transverse — soit *CA* son diamètre transverse ; et dont les angles des ordonnées soient égaux à l'angle *C*, par la démonstration de la proposition 55 du premier livre de l'ouvrage

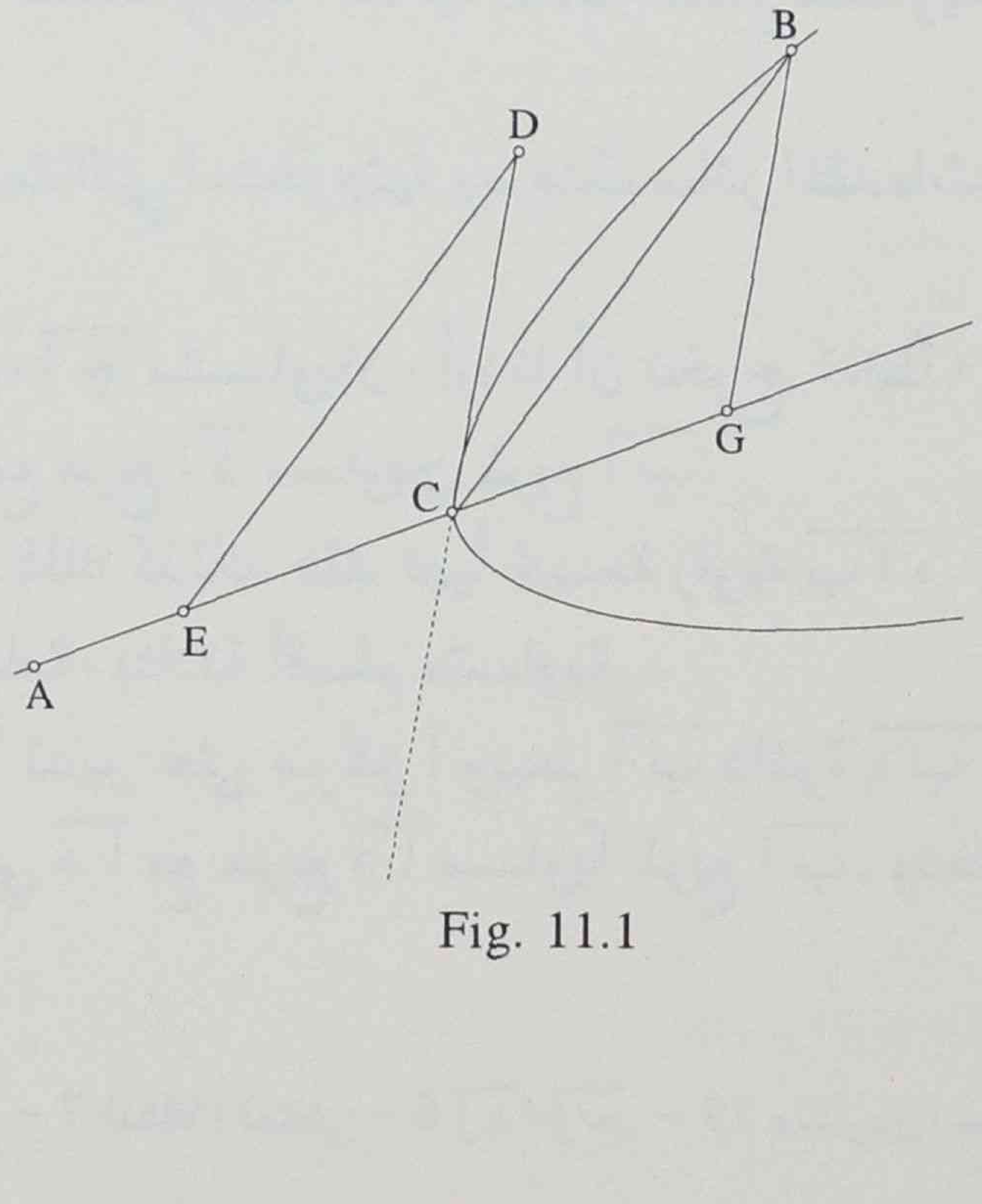
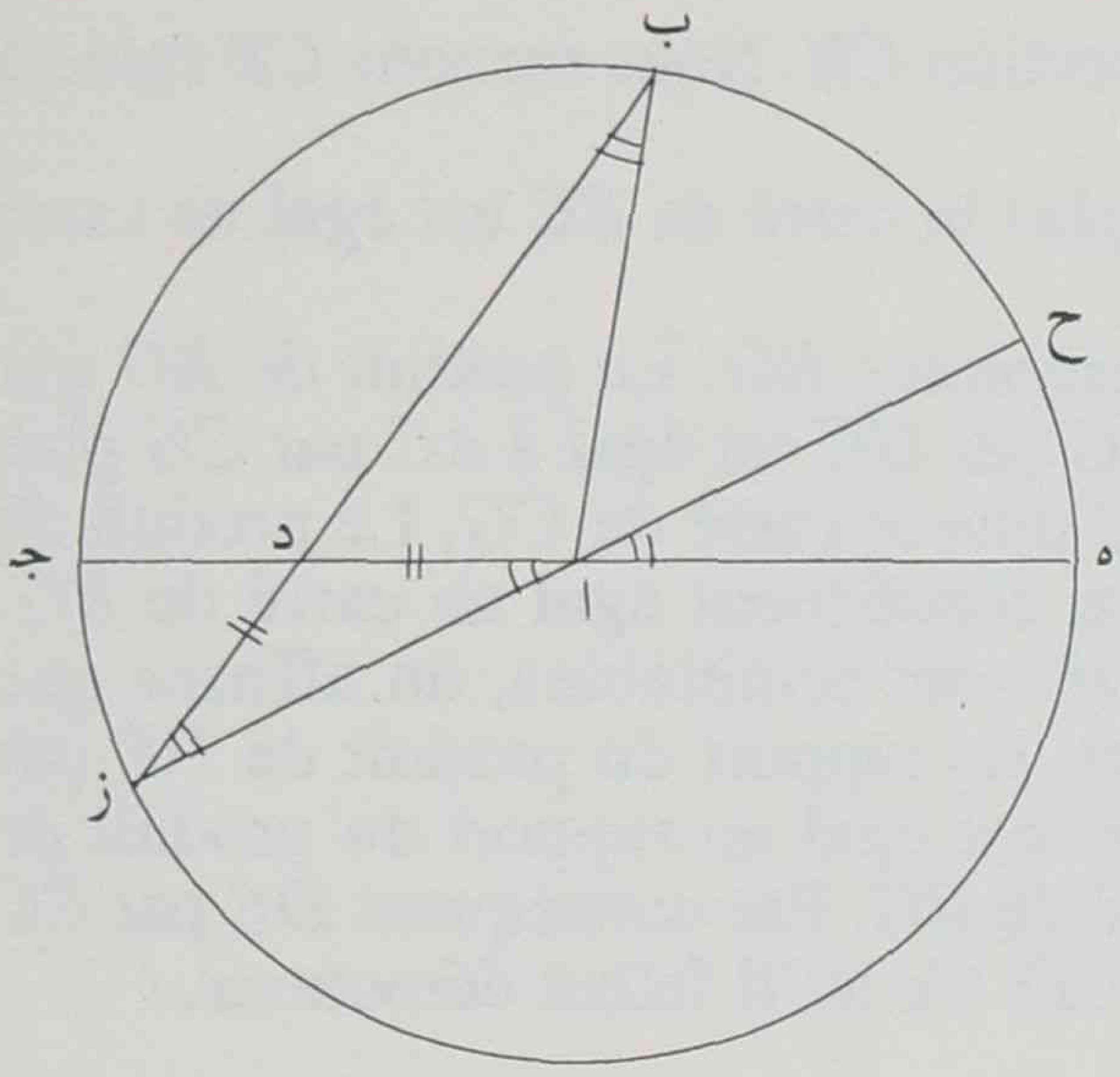
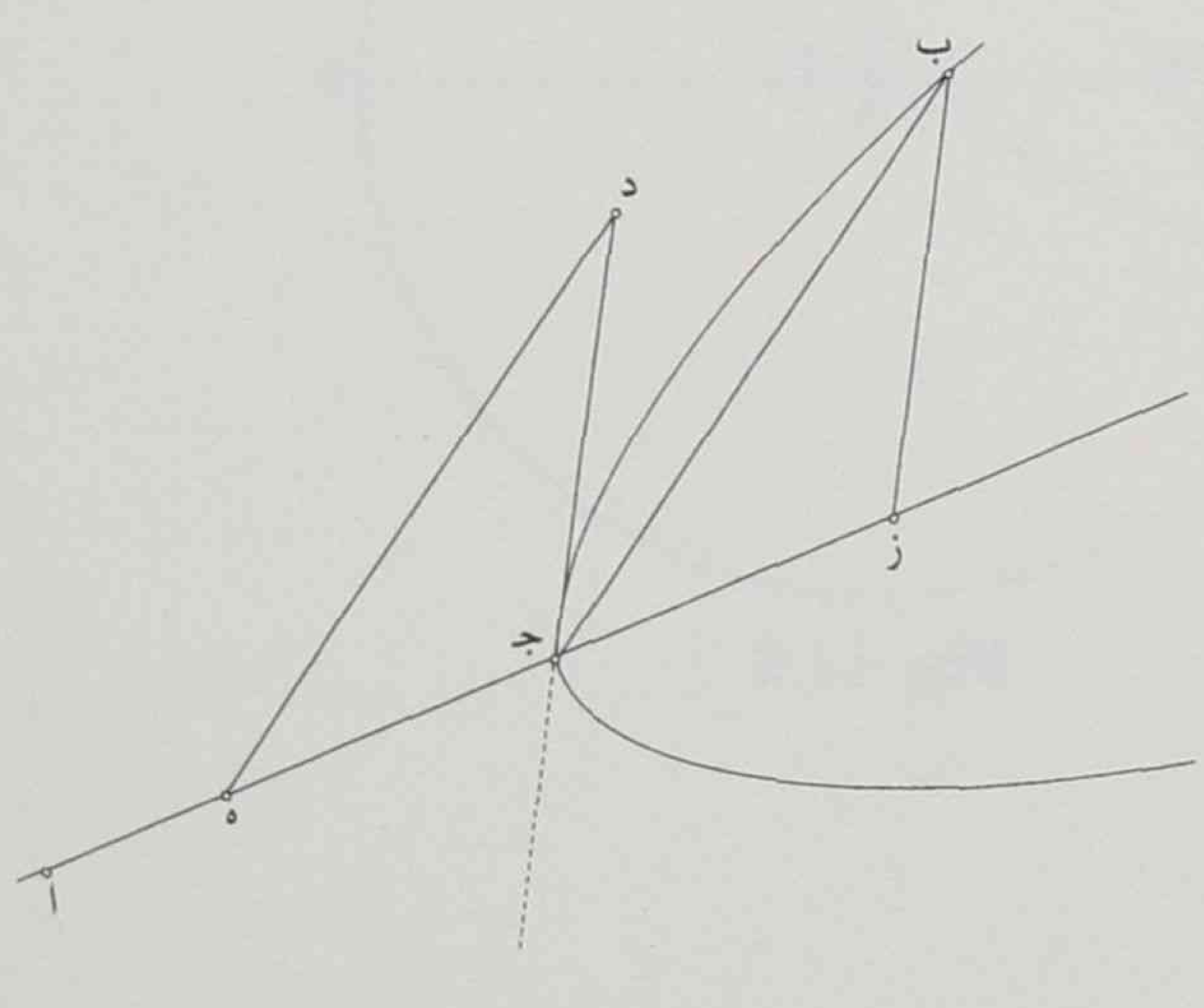


Fig. 11.1



ب د / فـي د ز مثل ه د في د ج. ٢٩-و وهـ د في د ج مع مربع ا د مثل مربع ا ج، أعني ا ب، فـ ب د فـي د ز ومربع ا د مثل مربع ا ب. فـ ب د في د ز إذاً وفي د ا واحـد، فـ د ز مثل د ا. ونصل ا ز، فزاوية ه ا ب مثل زاويتي ا ب د ب د ا وزاويـة ب د ا مثل زاويتي ا ز من مثلث ا د ز، فهي مثلا زاوية ز المساوية لزاوية ب. فزاوية ب ثلث زاوية ه ا ب. فقد قسمنا زاوية ه ا ب بثلاثة أقسام متساوية بهذه المقدمة.

فإذ قد قدمنا هذه المقدمات، فلنبرهن على مثل هذه المقدمة، ثم نتبعه بالبراهين على سائر المقدمات المذكورة، وهي: خطا ا ج جـ د متساويان ويحيطان بزاوية جـ؛ وأردنا أن نخرج خطاً مستقيماً من نقطة د إلى خط جـ ا كخط د ه، يكون ضرب خط د ه في ه جـ مع مربع ه جـ مساوياً لمربع جـ د. فلنعمل / قطعاً زائداً يكون رأسه نقطة جـ وضلعه القائم مساوٍ لقطره ٢٩-ظ المجانب - وقطره المجانب جـ ا - وزاوية خطوط ترتيبه مساوية لزاوية جـ ببرهان الشكل <٥٥> من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروطات،



9 فهي: فهو – 13 ا جـ: ا ب – 18 ببرهان: ببرها / <٥٥>: ترك فراغاً لرقم الشكل ولم يثبته، وما أثبتناه هو رقم هذا الشكل في نسخة بني موسى.

d'Apollonius sur les *Coniques*. Soit la section *CB*. Nous menons *CB* égale à *CD* et nous menons *DE* parallèle à *CB*.

Je dis que le produit de *DE* par *EC* plus le carré de *EC* est égal au carré de *CD*.

Démonstration: Menons la droite ordonnée *BG*. Le produit de *AG* par *GC* est donc égal au carré de *GB*. Or *AG* par *GC* est égal à *AC* par *CG* plus le carré de *CG*, c'est-à-dire *BC* par *CG* plus le carré de *CG*. Le produit de *BC* par *CG* plus le carré de *CG* est par conséquent égal au carré de *BG*. Mais puisque les triangles *BCG* et *CDE* sont semblables, on affirme que leurs côtés sont selon un même rapport. Le rapport du produit de *DE* par *EC* plus le carré de *EC* au carré de *DC* est égal au rapport du produit de *BC* par *CG* plus le carré de *CG* au carré de *BG*. Par conséquent *DE* par *EC* plus le carré de *EC* est égal au carré de *CD*. Ce qu'il fallait démontrer. /

<*Trisection de l'angle*>

30r Nous voulons diviser l'angle *BAE* en trois parties égales[1]. Traçons le cercle *EBC* de centre *A* et prolongeons *EA* jusqu'en *D*; menons *BDG* telle que *BD* par *DA* plus le carré de *AD* soit égal au carré de *AB*. Il est donc clair que la droite *DG* est égale à la droite *DA*. Menons *GA* jusqu'en *H*; je dis que l'angle *EAH* est le tiers de l'angle *EAB*, car nous avons montré dans le lemme que l'angle *B* est le tiers de l'angle *EAB*. Mais il est égal à l'angle *G*, donc l'angle *G* est égal à l'angle *DAG*. Il est donc égal à l'angle *EAH* par opposition. Nous avons donc divisé l'angle *EAB* en trois parties égales. Ce qu'il fallait démontrer.

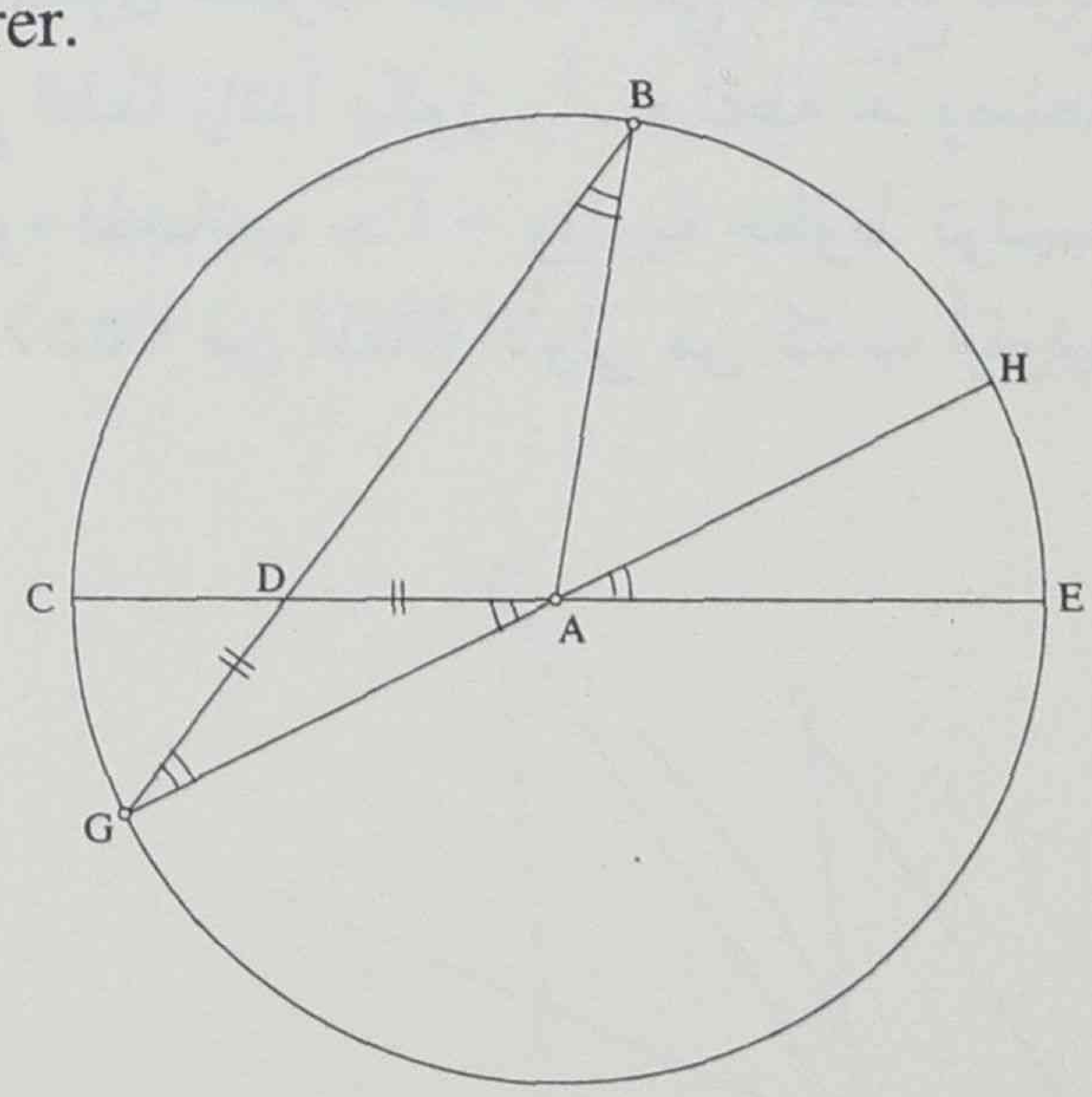


Fig. 11.2

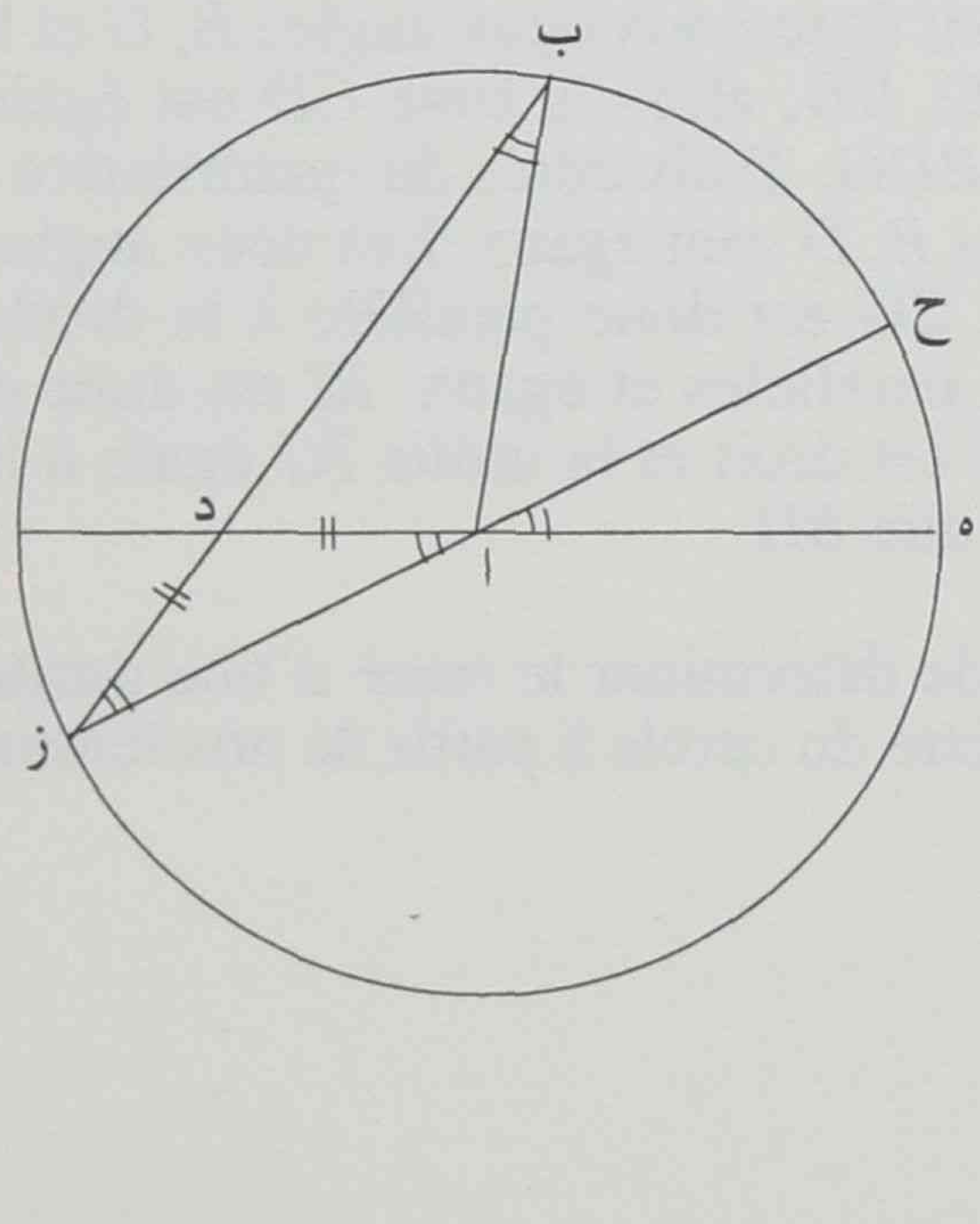
[1] Après avoir proposé de diviser l'angle *BAE* en trois parties égales, il étudie la division de *CAE* selon une figure en partie effacée. Nous avons gardé l'angle initial et corrigé le reste en conséquence, pour la cohérence du texte.

وهو قطع جـ ب. ونخرج جـ ب مساوياً لـ جـ د ونخرج د ه يوازي جـ ب.

أقول: إن ضرب د ه في ه جـ ومربع ه جـ مساوٍ لمربع جـ د.

برهان ذلك: أن نخرج ب ز خط الترتيب، فيكون ضرب ا ز في ز جـ مساوٍ لمربع ز ب. لكن ا ز في ز جـ مساوٍ لـ ا جـ في جـ ز ومربع جـ ز، أعني ب جـ في جـ ز ومربع جـ ز. وضرب ب جـ في جـ ز ومربع جـ ز إذاً مساوٍ لمربع ب ز. ولأن مثلثي ب جـ ز جـ د ه متشابهان، يكون حكم أضلاعهما في النسبة واحد. فتكون نسبة ضرب د ه في ه جـ ومربع ه جـ إلى مربع د جـ كنسبة ضرب ب جـ في جـ ز ومربع جـ ز إلى مربع ب ز. فإذاً د ه في ه جـ ومربع ه جـ مساوٍ لمربع جـ د؛ وذلك ما أردنا بيانه. /

نريد أن نقسم زاوية ب ا ه بثلاثة أقسام متساوية، فلندر دائرة ه ب جـ ٣٠-و
على مركز ا، ونخرج ه ا إلى د، ونخرج ب د ز يكون ب د في د ا ومربع ا د مساوياً لمربع ا ب، فبين أن خط د ز مثل خط د ا. فلنخرج ز ا إلى ح؛ أقول: إن زاوية ه ا ح ثلث زاوية ه ا ب، لأنا قد بينا في المقدمة أن زاوية ب ثلث زاوية ه ا ب، وهي مساوية لزاوية ز، وزاوية ز مساوية لزاوية د ا ز، فهي مساوية لزاوية ه ا ح من جهة المقابلة. فقد قسمنا زاوية ه ا ب بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا بيانه.



10 ه ب جـ: ه ط جـ – 11 ب د ز: جـ د ر، وضعنا «ب» بدلاً من «جـ» حتى يتسق النص مع الشكل.

Démonstration du troisième des problèmes d'Abū al-Rayḥān <al-Bīrūnī>
Que Dieu le soutienne

Un cercle *ACD* donné, le diamètre *AK*, le centre *B* et l'angle dont on cherche la division en trois parties égales : *ABC*.

30v Prolongeons indéfiniment *AKG* et menons la perpendiculaire / *BH* à *AG*. On cherche d'abord à mener la droite *CLI* telle que *LI* soit égal à *BH*.

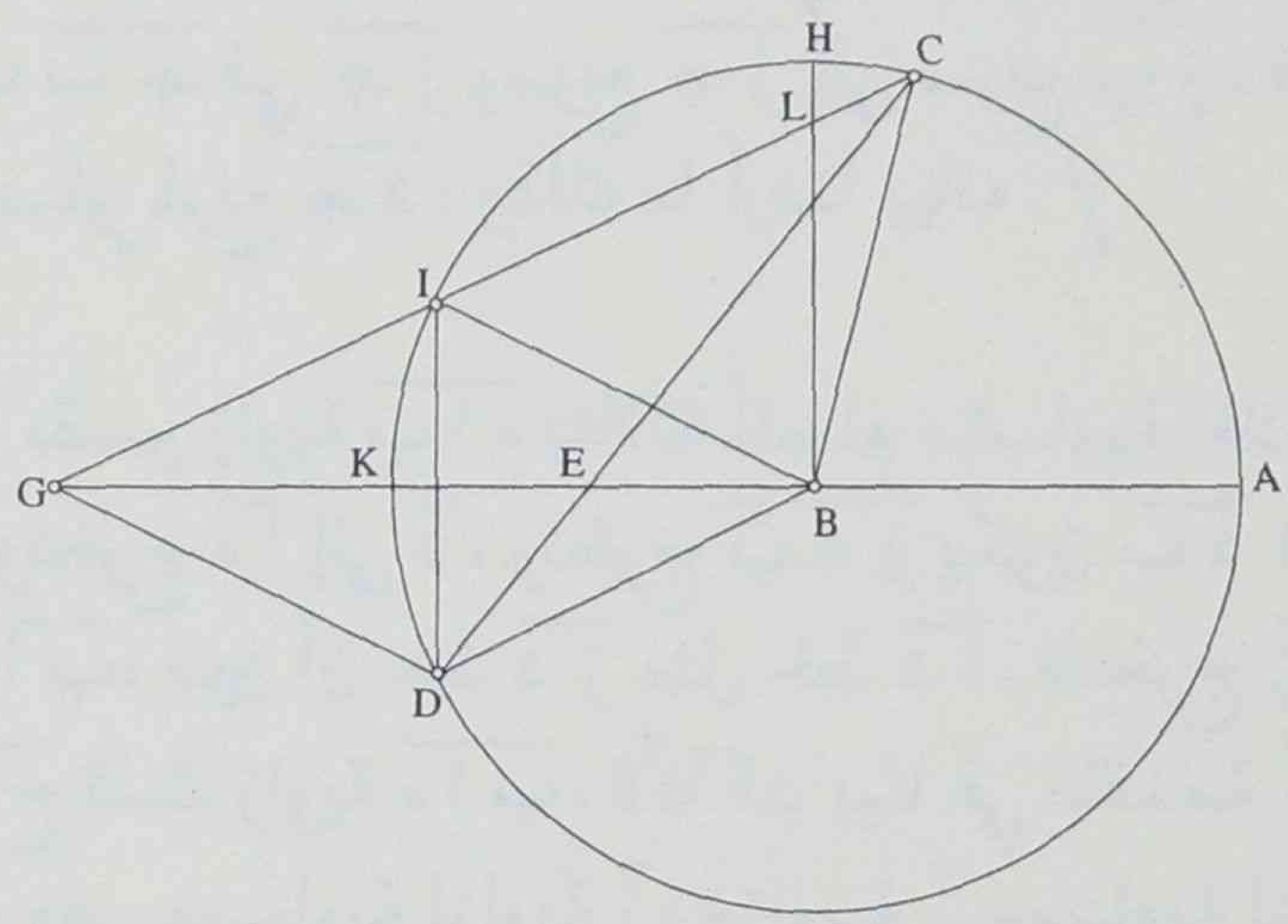


Fig. 12

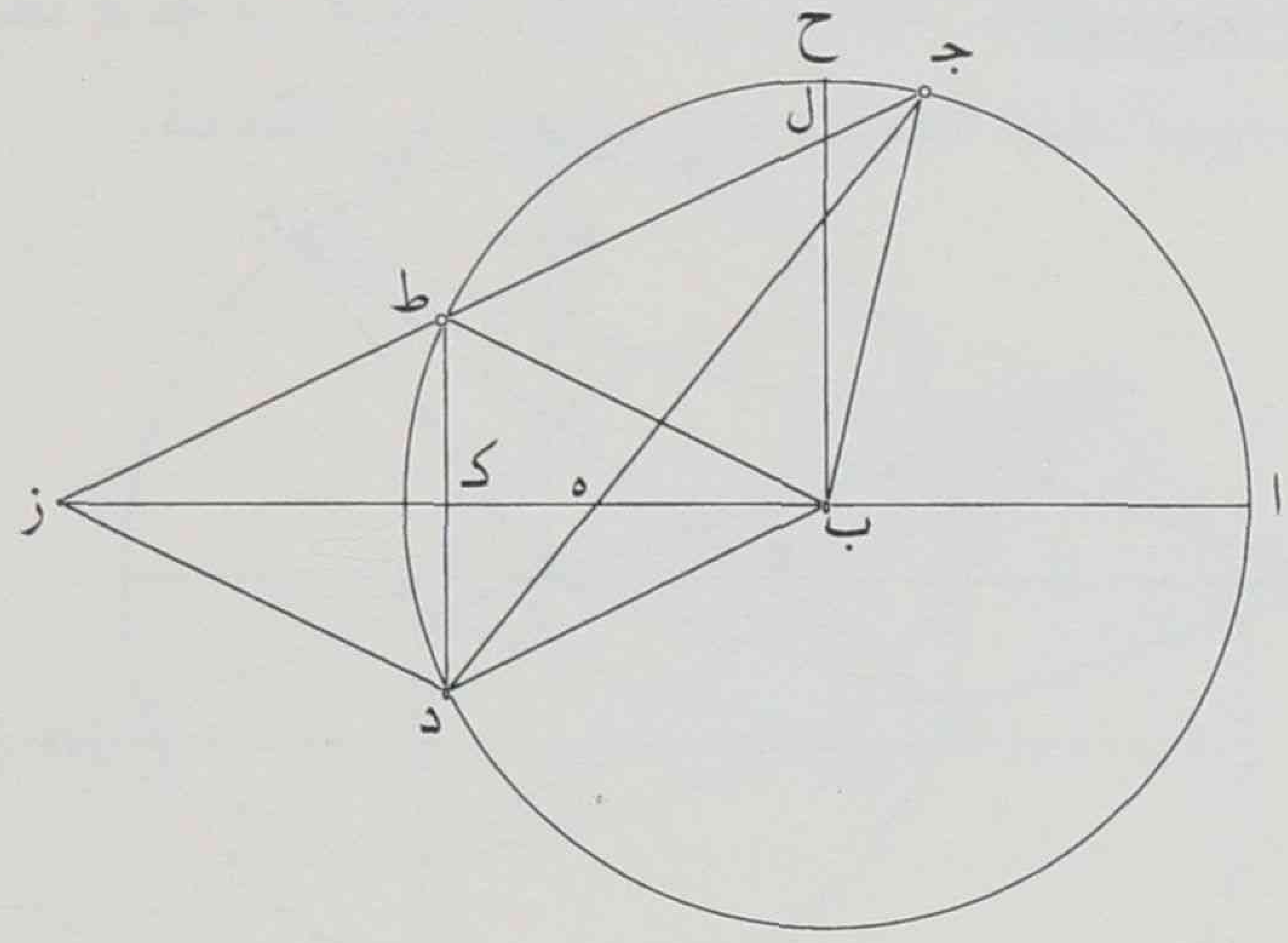
Menons *CED* telle que *ED* soit égal à *EB*. Nous menons *DG* égal à *BD*. Joignons *CIG* et menons *BI*, *DI*. Puisque dans les deux triangles *CBD*, *BDG* les deux angles *C*, *D* sont égaux aux deux angles *B*, *G* et les deux côtés *CB*, *BD* aux deux côtés *DG*, *BD*, alors la base *CD* est égale à la base *BG* et l'angle *CBD* à l'angle *BDG*. Trois côtés du quadrilatère *CBDG* sont donc égaux et les deux angles *B*, *D* sont égaux. Les deux angles *BCG*, *DGC* sont donc égaux. La droite *CG* est donc parallèle à la droite *BD*. La surface *BIGD* est donc à côtés parallèles et égaux. *BI* est donc égal à *GI*. Dans le triangle *BLG* l'angle *B* est droit et la droite *IG* égale à la droite *IB*. *LI* est donc égal à *IB*, je veux dire *BH*.

Il est donc possible de déterminer le tracé d'une droite *CLI* telle que *LI* soit égal au demi-diamètre du cercle à partir de nos lemmes. Ce qu'il fallait démontrer. /

البرهان على المسألة الثالثة من مسائل أبي الريحان، أيده الله

دائرة ا جـ د موضوعة والقطر ا ك، والمركز ب، والزاوية المطلوب انقسامها بثلاثة أقسام متساوية ا ب جـ.

فلنخرج ا ك ز على الاستقامة إلى غير نهاية، ونخرج عمود/ ب ح على ا ز؛ ‹و›المطلوب أولاً إخراج خط جـ ل ط، يكون ل ط مساوياً لـ ب ح. ٣٠-ظ



‹فلنخرج› جـ ه د، يكون ه د مساوياً لـ ه ب. ونخرج د ز يساوي ب د، ونصل جـ ط ز ونخرج ب ط د ط. فلأن من مثلثي جـ ب د ب د ز زاويتي جـ د مساويتان لزاويتي ب ز، وضلعي جـ ب ب د لضلعي د ز ب د، تكون قاعدة جـ د مساوية لقاعدة ب ز وزاوية جـ ب د لزاوية ب د ز. فمن ذي أربعة أضلاع جـ ب د ز ثلاثة أضلاع منها متساوية وزاويتا ب د متساويتان، فزاويتا ب جـ ز د ز جـ متساويتان، فخط جـ ز يوازي خط ب د، فسطح ب ط ز د متوازي الأضلاع ومتساويها، فـ ب ط مثل ز ط؛ ومن مثلث ب ل ز زاوية ب قائمة وخط ط ز مثل خط ط ب، فـ ل ط مثل ط ب، أعني ب ح.

فقد تهيأ إخراج خط جـ ل ط بمساواة ل ط نصف قطر الدائرة من مقدماتنا؛ وذلك ما أردنا بيانه./

3 ا ب جـ: أولها متآكل.

31r *Démonstration du lemme de Thābit*

Nous voulons diviser l'angle *BCM* en trois parties égales.

Menons *BMH* perpendiculaire à *CM* et égal à *BC*. Nous menons indéfiniment *BG*, perpendiculaire à *BH* et parallèle à *CM*. Au centre *B* et à la distance *BC*, nous traçons le cercle *CHD*. Nous menons *CED* tel que *ED* soit égal à *EB*, d'après ce que nous avons fait précédemment. Nous joignons *BD* et nous menons *CLIG* parallèle à *BD*.

Je dis que la droite *LG* est le double de la droite *CB* et que l'angle *BCM* sera divisé en trois parties égales par cette construction, d'après ce que nous avons montré dans le lemme.

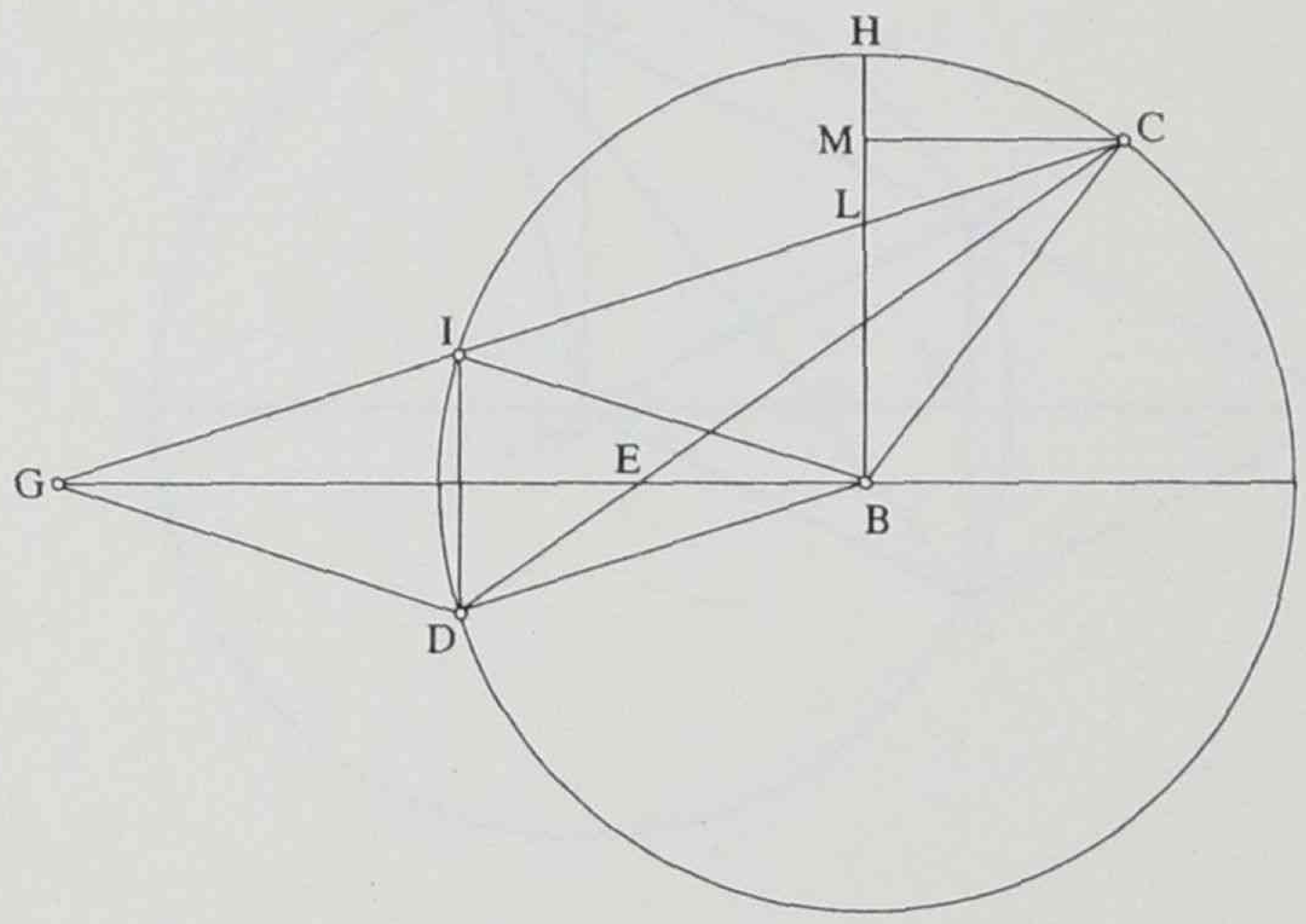


Fig. 13

Démonstration: Nous joignons *BI*. Puisque nous avons montré dans la proposition précédente que la droite *LI* est égale au demi-diamètre, je veux dire à *BI*, et que l'angle *LBG* est droit, la droite *LG* sera donc un diamètre du cercle circonscrit au triangle *LBG* et le point *I* en sera le centre. La droite *IG* est par conséquent égale à la droite *IL*. La droite *LG* est donc le double de la droite *CB*.

Il est donc possible de diviser l'angle *BCM* en trois parties égales, d'après ce dont nous avons montré le comment, dans le lemme de Thābit. Ce qu'il fallait démontrer. /

31v *Démonstration du deuxième des problèmes d'Abū al-Rayḥān <al-Bīrūnī>*
Que Dieu le soutienne

Je dis que par nos lemmes on a rendu possible le tracé d'une droite *BNM* sur la corde *CA* du cercle *ACD* tel que si on mène *AM* il serait égal à *AN*.

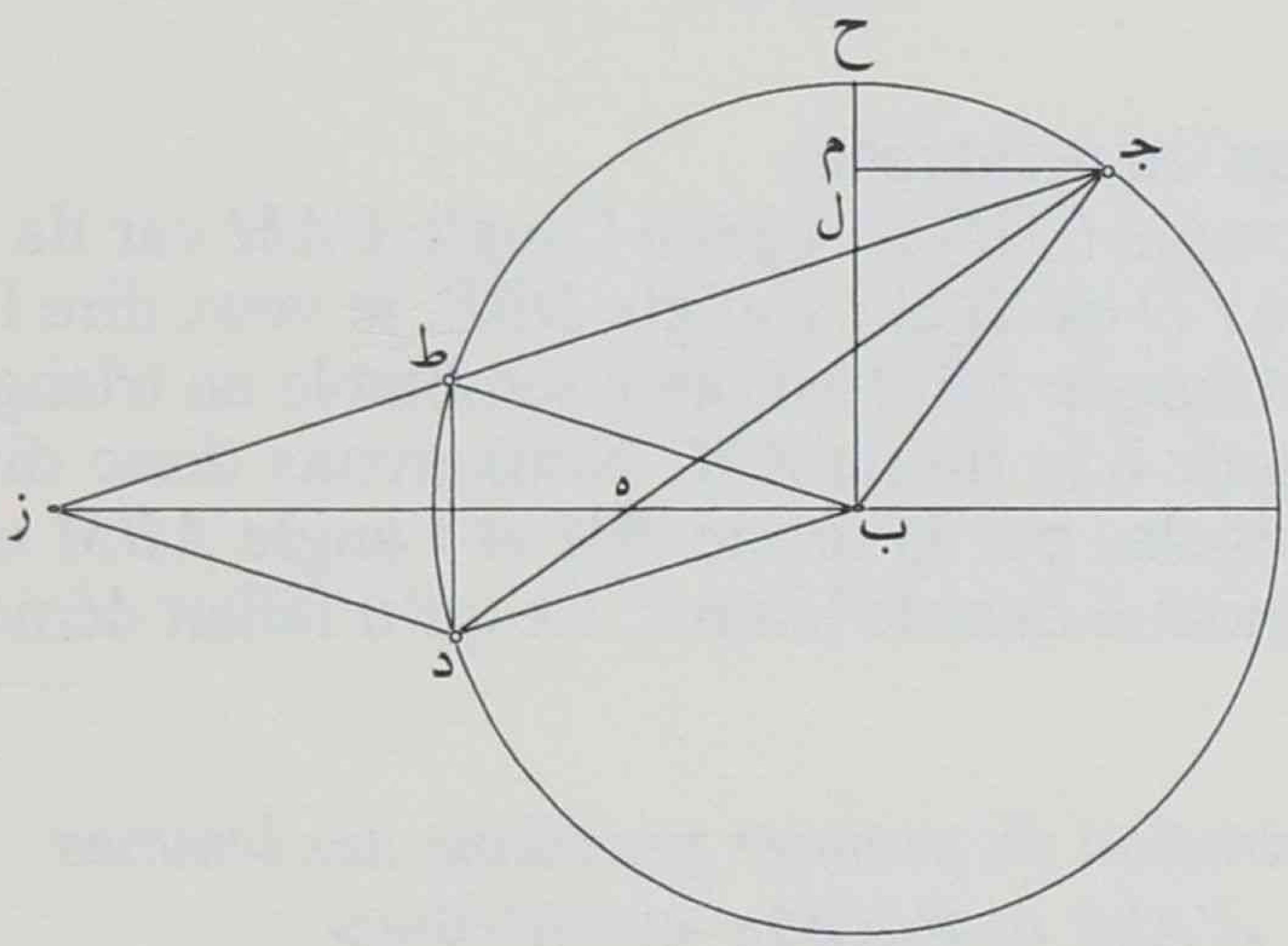
Menons *CED* tel que *ED* soit égal à *EB*. Menons *DB* et prolongeons-la jusqu'en *M* et menons *MA*.

البرهان على مقدمة ثابت ٣١-و

نريد أن نقسم زاوية ب جـ م بثلاثة أقسام متساوية.

فلنخرج ب م ح عموداً على جـ م ومساوياً لـ ب جـ، ونخرج ب ز عموداً على ب ح ويوازي جـ م بغير نهاية. ونذير على مركز ب وببعد ب جـ دائرة جـ ح د. ونخرج جـ ه د، يكون ه د مثل ه ب، بما قدمنا عمله. ونصل ب د ونخرج جـ ل ط ز يوازي ب د.

أقول: إن خط ل ز مثلا خط جـ ب، وإن زاوية ب جـ م تصير مقسومة بثلاثة أقسام متساوية بهذا العمل، على ما بيّنا في المقدمة.



برهان ذلك: أن نصل ب ط. ولأنّا قد بيّنا في الشكل المتقدم أن خط ل ط مساوٍ لنصف القطر - أعني ب ط - وزاوية ل ب ز قائمة، يكون خط ل ز قطراً للدائرة التي تحيط بمثلث ل ب ز، وتكون نقطة ط مركزاً لها. فخط ط ز إذاً مثل خط ط ل، فخط ل ز مثلا خط جـ ب.

فقد تهيأ قسمة زاوية ب جـ م بثلاثة أقسام متساوية على ما بيّنا في مقدمة ثابت كيفية ذلك؛ وذلك ما أردنا بيانه. /

البرهان على المسألة الثانية من مسائل أبي الريحان، أيده الله ٣١-ظ

وأقول: إنه تهيأ بمقدماتنا إخراج خط ب ن م على وتر جـ ا في دائرة ا جـ د، إذا أخرج ا م يكون مساوياً لـ ا ن.

فلنخرج جـ ه د على أن يكون ه د مثل ه ب، ونخرج د ب وننفذه إلى م ونخرج م ا.

18 يكون: تكون.

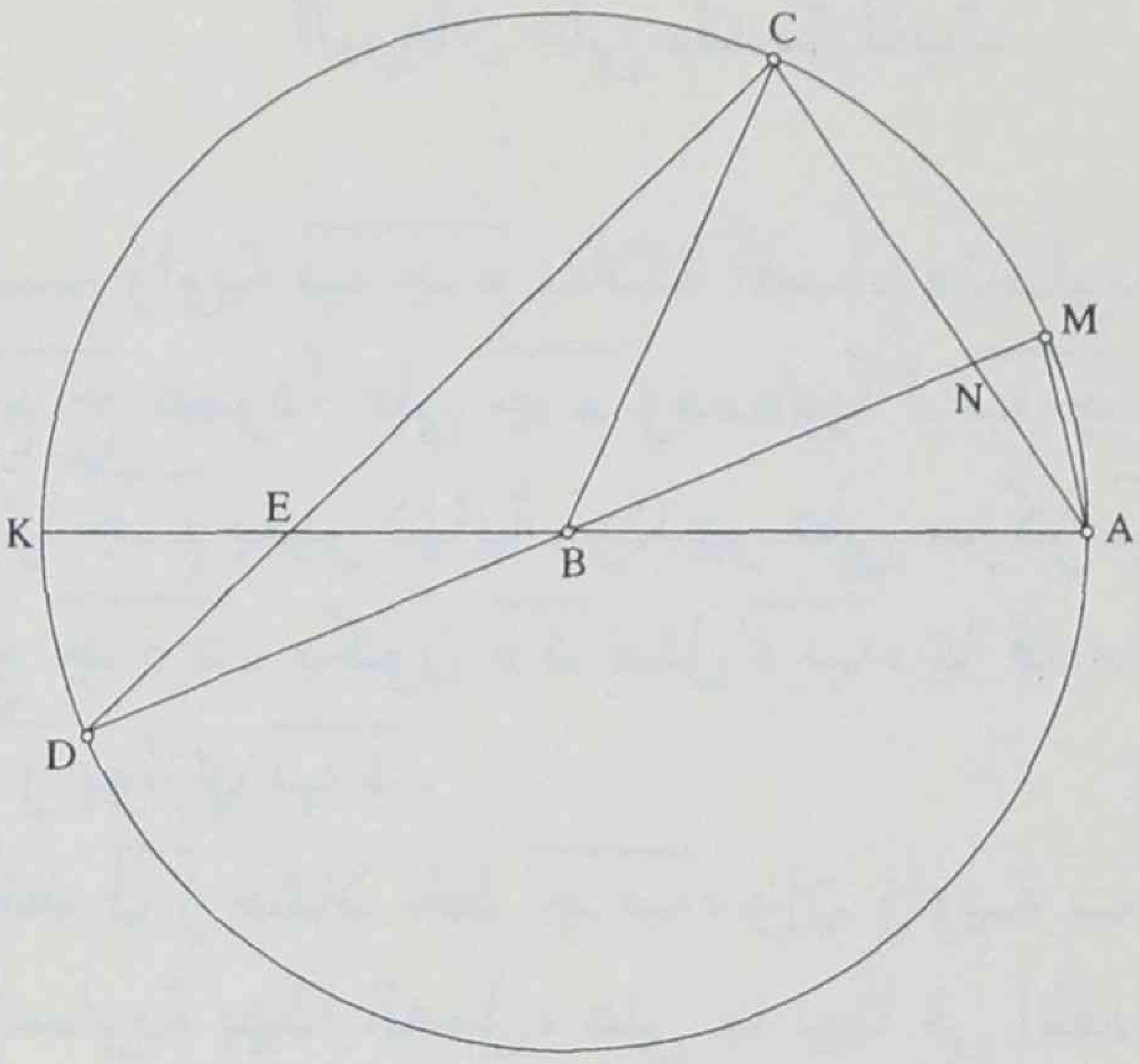


Fig. 14

Je dis que c'est ce qu'on recherche.

Démonstration : L'angle *CDB* est égal à l'angle *CAM* car ils interceptent
32r l'arc *CM*. Mais l'angle / *D* est égal à l'angle *DBE*, je veux dire l'angle *ABM* qui lui est opposé. Le triangle *ABM* est donc semblable au triangle *AMN*. La droite *AN* est donc égale à la droite *AM*. Nous avons donc divisé l'angle *ABC* en trois parties égales par la droite *BM* et l'angle *ABM* est son tiers, comme nous l'avons montré dans le lemme. Ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration du premier problème des lemmes d'Abū al-Rayḥān <al-Bīrūnī>

Soit *ABC* un triangle à deux côtés *AB*, *AC* égaux. Comment mener une droite, comme la droite *AD*, telle que si on mène *DE* on ait le rapport de *AB* à *BD* égal au rapport de *AD* à *DE* et que *AE* soit égal à *AD*.

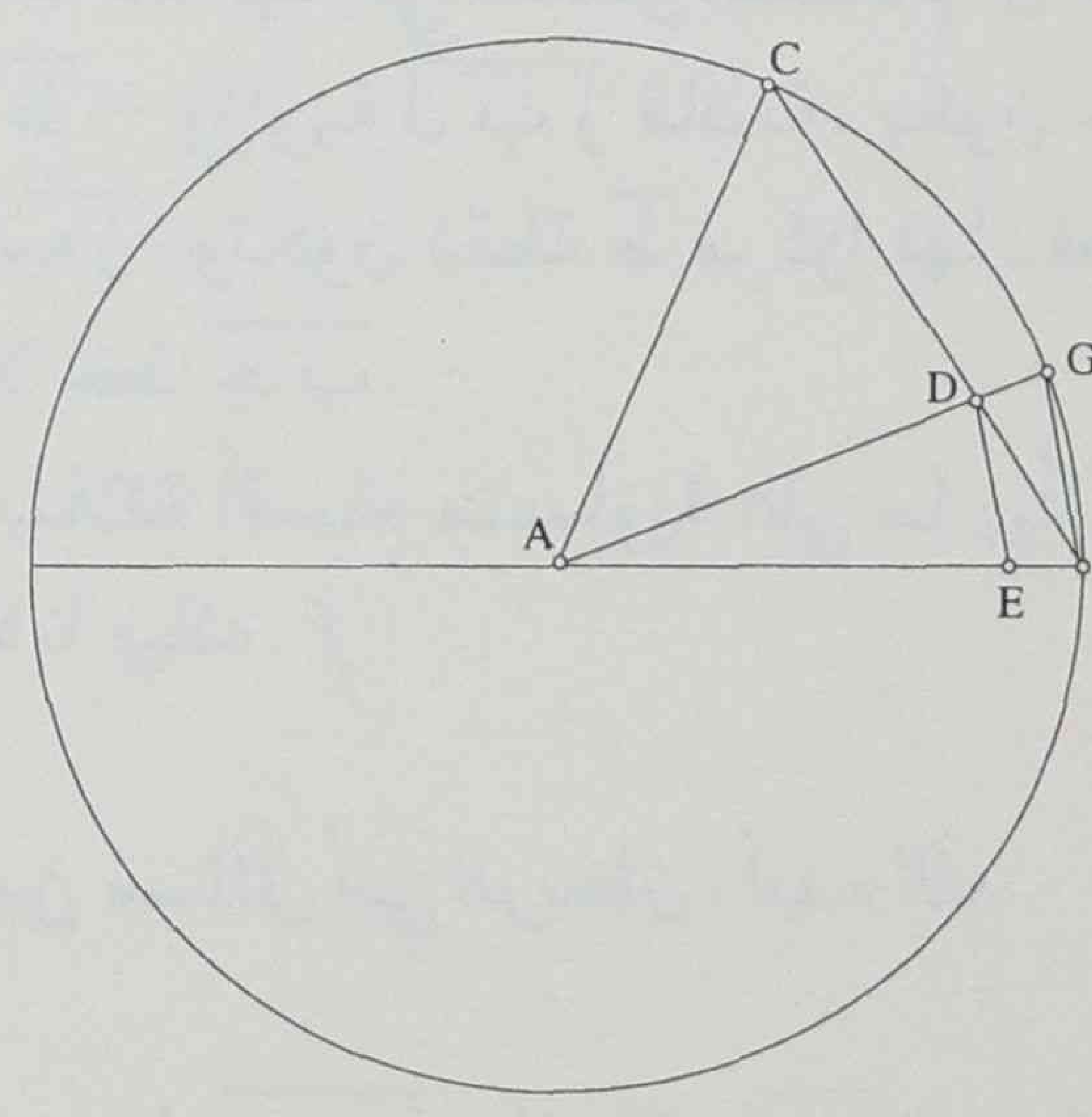
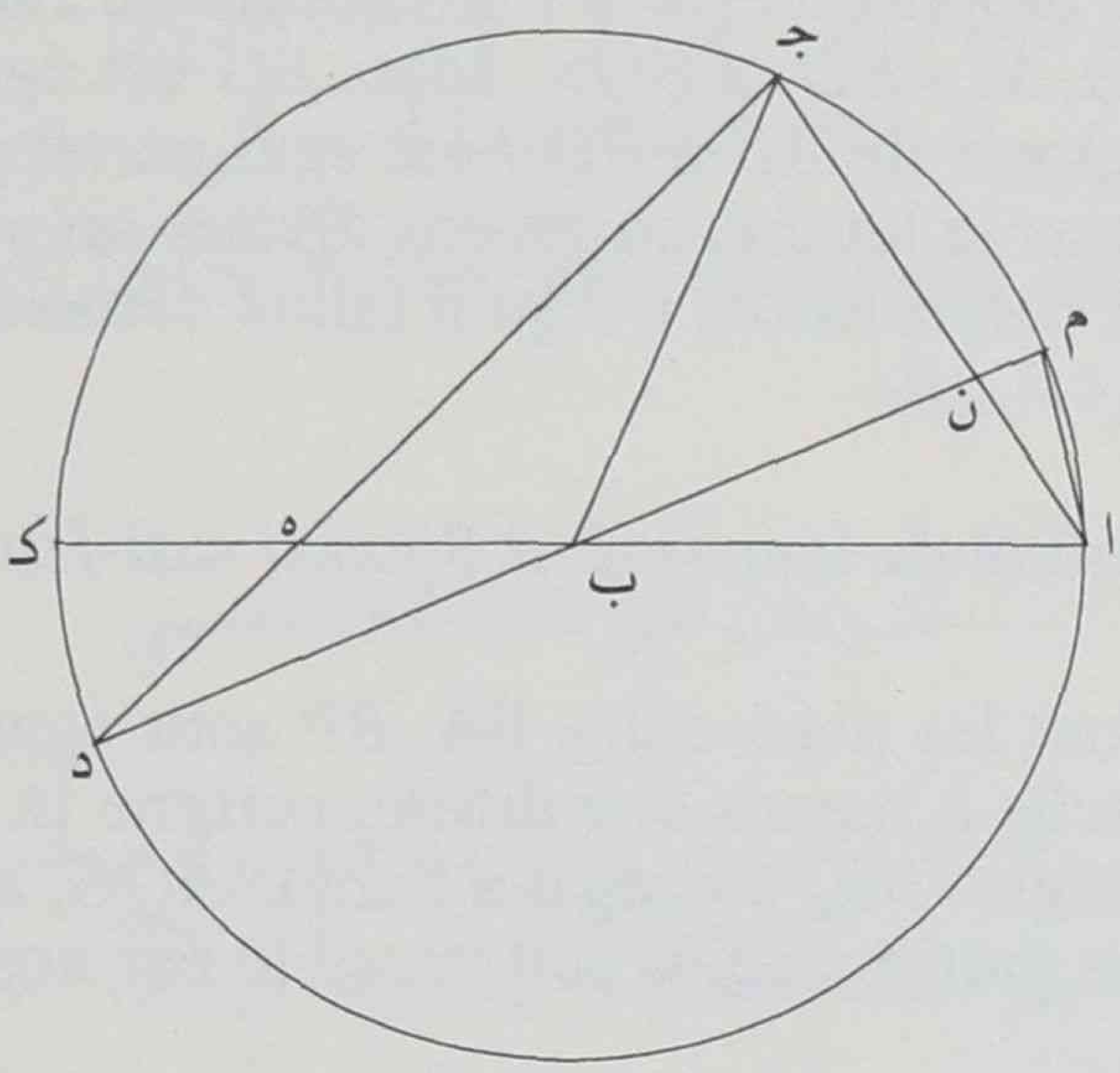


Fig. 15

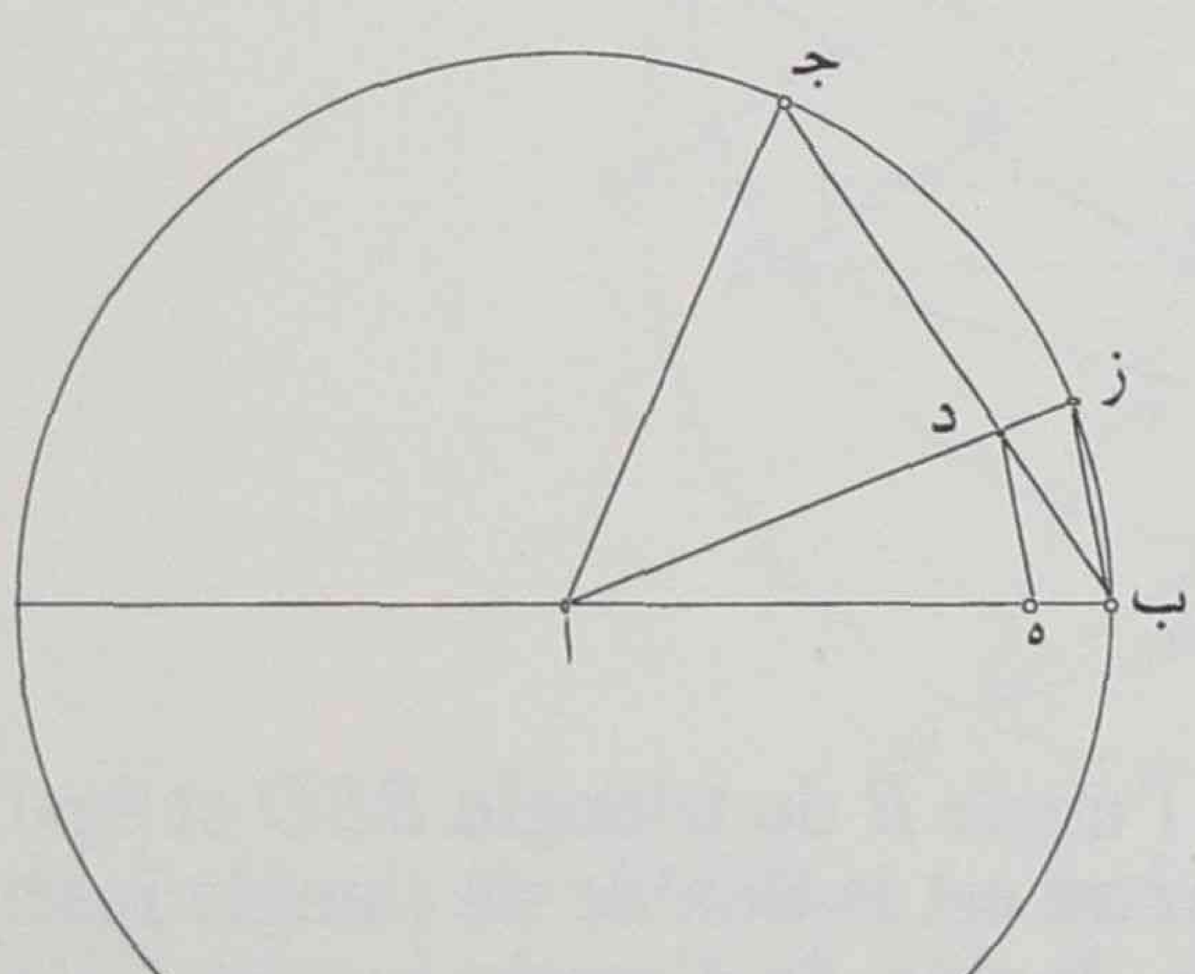
Traçons de centre *A* et à la distance *AB* un cercle *BC* et menons *ADG* telle que si on mène *GB* elle sera égale à *BD*, d'après ce que nous avons précédemment construit à partir nos lemmes. Menons *DE* parallèle à *BG*.



أقول: إنه هو المطلوب.

برهان ذلك: أن زاوية جـ د ب مساوية لزاوية جـ ا م؛ لأنهما على قوس ٣٢-و جـ م، لكن زاوية / د مساوية لزاوية د ب ه، أعني زاوية ا ب م المقابلة لها. فمثلث ا ب م يشبه مثلث ا م ن، فخط ا ن مساوٍ لخط ا م. فقد قسمنا زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية بخط ب م وتكون زاوية ا ب م ثلثها، على ما بينا في المقدمة؛ وذلك ما أردنا بيانه.

البرهان على المسألة الأولى من مقدمات أبي الريحان



وهو: مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ، كيف نخرج ⟨خطًا⟩ كخط ا د إذا أخرج د ه، تكون نسبة ا ب إلى ب د كنسبة ا د إلى د ه، ويكون ا ه مساويًا لـ ا د؟

فلندر دائرة ب جـ على مركز آ ⟨وببعد ا ب⟩ ونخرج ا د ز، إذا أخرج ز ب يكون مساويًا لـ ب د، بما عملناه متقدمًا من مقدماتنا. ونخرج د ه يوازي ب ز.

2 جـ د ب: متآكلة وهي غير مقروءة – 12 ا د: ا ك.

Je dis que c'est ce qu'on recherche.

Démonstration : Le rapport de *AB* à *BG* est égal au rapport de *AE* à *ED* du fait du parallélisme de <*ED* et *BG*>. Mais *BG* est égal à *BD* et *AE* est
32v égal à *AD*, donc le rapport de *AB* à *BD* / est égal au rapport de *AD* à *DE*. Nous avons montré dans le lemme comment diviser un angle *BAC* en trois parties égales par cette construction. Ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration du lemme d'al-Shamsī <al-Harawī>

Un triangle *ABP* dont les deux côtés *BA*, *BP* sont égaux ; *BU* perpendiculaire à *AP*. On cherche à mener une droite, comme la droite *PQG*, telle que, si on joint *AQ*, l'angle *GAQ* soit égal à l'angle *AQG*, afin que la division de l'angle *BAP* en trois parties égales soit possible par nos lemmes. Ceci est facile.

Nous traçons en effet de centre *B* et à la distance *BA* le cercle *APC*. Menons *AB* jusqu'à *K* sur *APC* et *PB* jusqu'à *C* sur *APC*. Menons *CED* tel que *ED* soit égal à *EB* d'après ce qui précède. Menons *DBM*. Menons *PQGM* et joignons *AQ*.

Je dis que *AG* est égal à *GQ*.

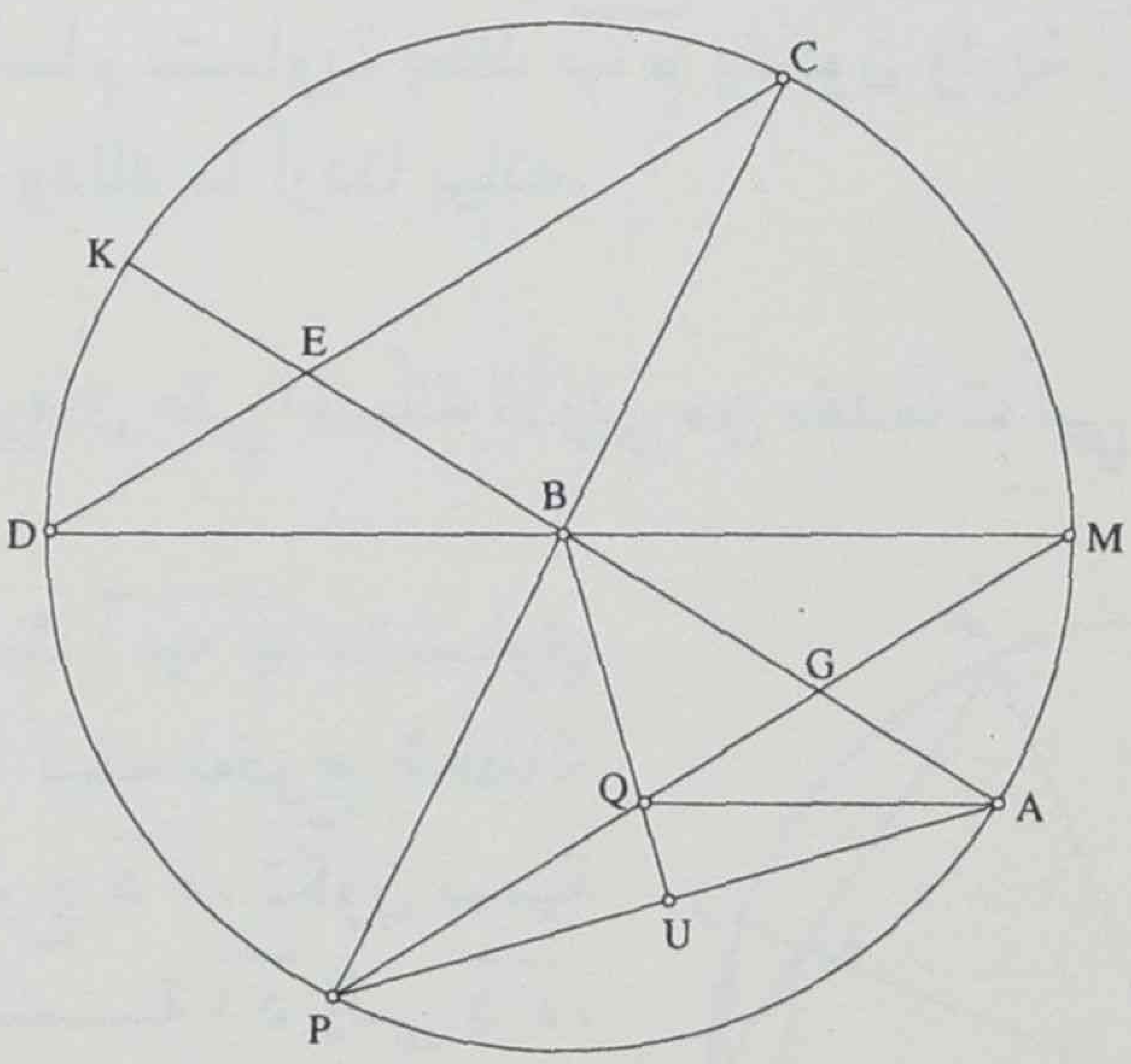


Fig. 16

Démonstration : L'angle *D* est égal à l'angle *B* du triangle *BED* et égal à
33r l'angle *MBA*. / Mais l'angle *MBA* au centre est le double de l'angle inscrit *MPA* et l'angle au centre *CBM* est le double de l'angle inscrit *CPM*. L'angle *BPQ* est donc le double de l'angle *QPA* et l'angle *GAQ* est égal à

أقول: إنه هو المطلوب.

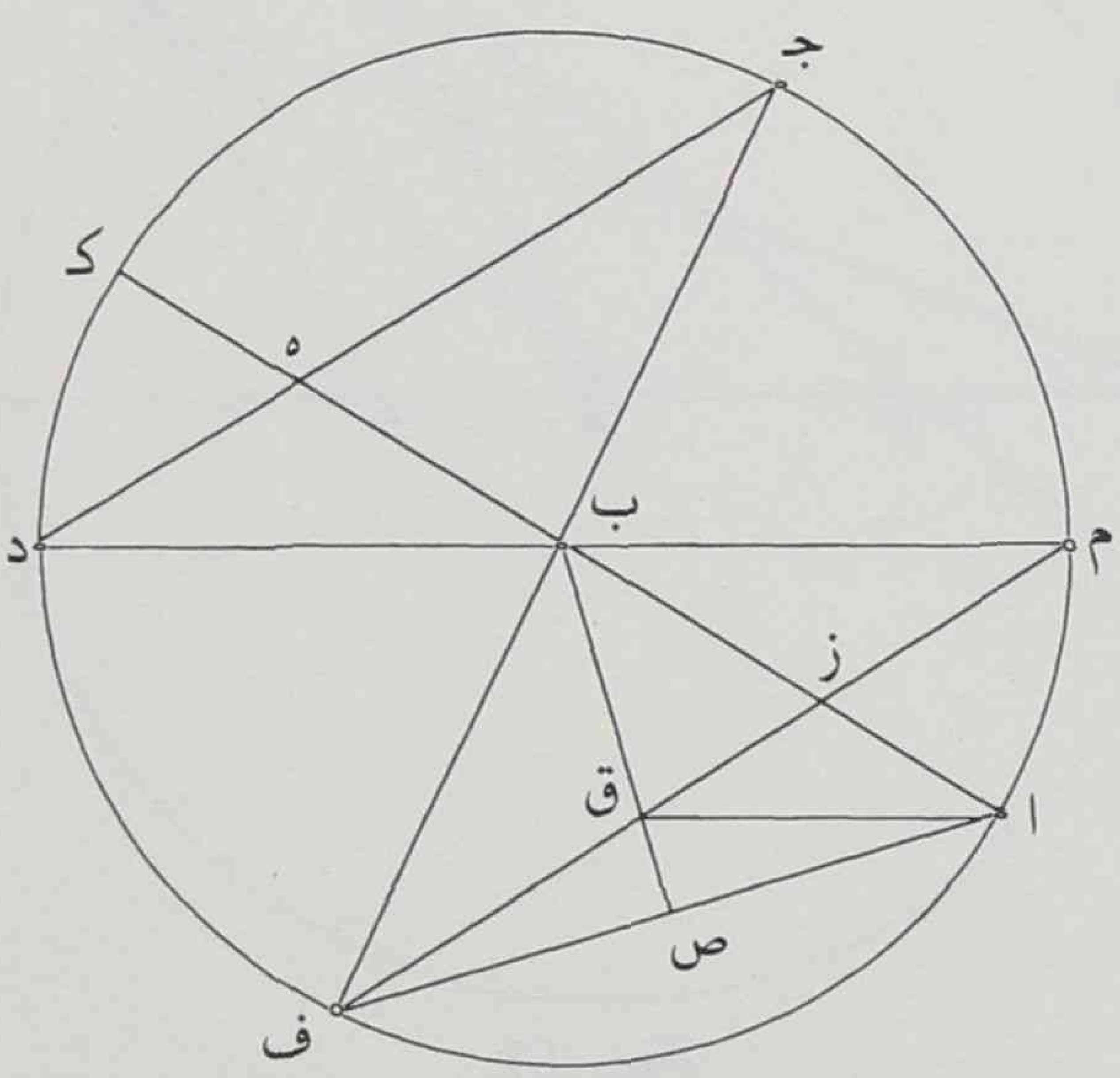
برهان ذلك: أن نسبة ا ب إلى ب ز كنسبة ا ه إلى ه د من جهة التوازي، لكن ب ز مثل ب د وا ه مثل ا د، فنسبة ا ب إلى ب د كنسبة / ا د إلى ٣٢-ظ د ه. وبينّا في المقدمة كيفية قسمة زاوية ب ا جـ بثلاثة أقسام متساوية بهذا العمل؛ وذلك ما أردنا بيانه.

البرهان على مقدمة الشمسي

مثلث ا ب ف متساوي ساقي ب ا ب ف، وعمود ب ص على ا ف. والمطلوب إخراج خط كخط ف ق ز، إذا وصل ا ق، تكون زاوية ز ا ق مساوية لزاوية ا ق ز ليتهيأ قسمة زاوية ب ا ف بثلاثة أقسام متساوية بمقدماتنا، ⟨وهذا⟩ سهل.

وذلك أنا ندير على مركز ب وببعد ب ا دائرة ا ف جـ ونخرج ا ب إلى ك ⟨على ا ف جـ⟩ وف ب إلى جـ ⟨على ا ف جـ⟩ ونخرج جـ ه د يكون ه د مساوياً لـ ه ب بما قدّمنا. ونخرج د ب م ونخرج ف ق ز م. ونصل ا ق.

أقول: إن ا ز مساوٍ لـ ز ق.



برهان ذلك: أن زاوية د مثل زاوية ب من مثلث ب ه د، ومثل زاوية م ب ا،/ لكن زاوية م ب ا ⟨على المركز⟩ ضعف زاوية م ف ا على المحيط، ٣٣-و وزاوية جـ ب م على المركز ضعف زاوية جـ ف م على المحيط، فزاوية ب ف ق ضعف زاوية ق ف ا، وزاوية ز ا ق مثل زاوية ب ف ق، فزاوية

14 ا ز: متاكلة – 15 ب ه د: أولها متاكل – 17 جـ ب م: جيم / جـ ف م: جـ ق م – 18 فزاوية: وزاوية.

l'angle *BPQ*. L'angle *PAQ* est donc la moitié de l'angle *GAQ*. L'angle *GAQ* est donc le double de l'angle *PAQ*. Or l'angle *GQA* est égal à <la somme> des deux angles *QPA*, *QAP*, je veux dire le double de l'angle *QAP*. L'angle *GQA* est donc égal à l'angle *GAQ*. La droite *GQ* est donc égale à la droite *GA*. Mais de ce que nous avons indiqué, il est clair que l'angle *BAP* est rendu divisible en trois parties égales. Ce qu'il fallait démontrer. /

33v *Démonstration du lemme d'Abū Sahl al-Qūhī*

On cherche à construire un triangle sur une droite quelconque, comme le triangle *SOK*, tel que l'angle *SOA* soit égal à un angle aigu donné, et que, si on mène une droite, comme la droite *SB*, elle sera égale à la droite *BK* et le rapport de *OK* à *OS* sera égal au rapport de *OS* à *OB*.

Supposons que l'angle que l'on cherche à diviser est l'angle *CBA*. Nous traçons de centre *B* et à une distance quelconque le cercle *ACK* de diamètre *AK*. Nous menons *CED* tel que *ED* soit égal à *EB*. Nous menons *BS* parallèle à *CD* et *SO* parallèle à *CB*.

Je dis que les deux triangles *SBO*, *KSO* sont tels que nous l'avons voulu.

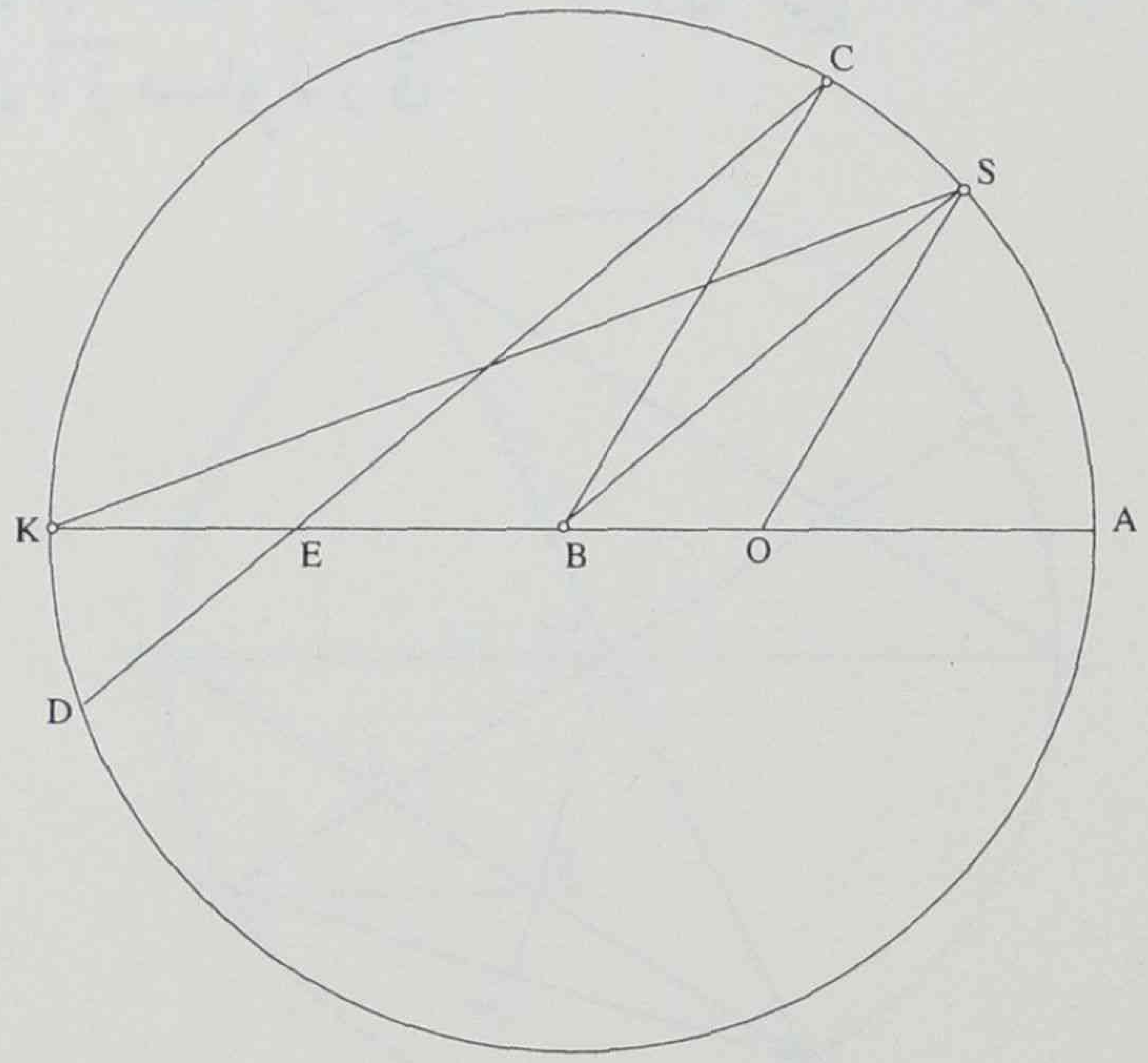


Fig. 17

Démonstration : Le produit de *CE* par *EB* plus le carré de *EB* est égal au carré de *CB*. Le produit de *SB* par *BO* plus le carré de *BO* est aussi égal au

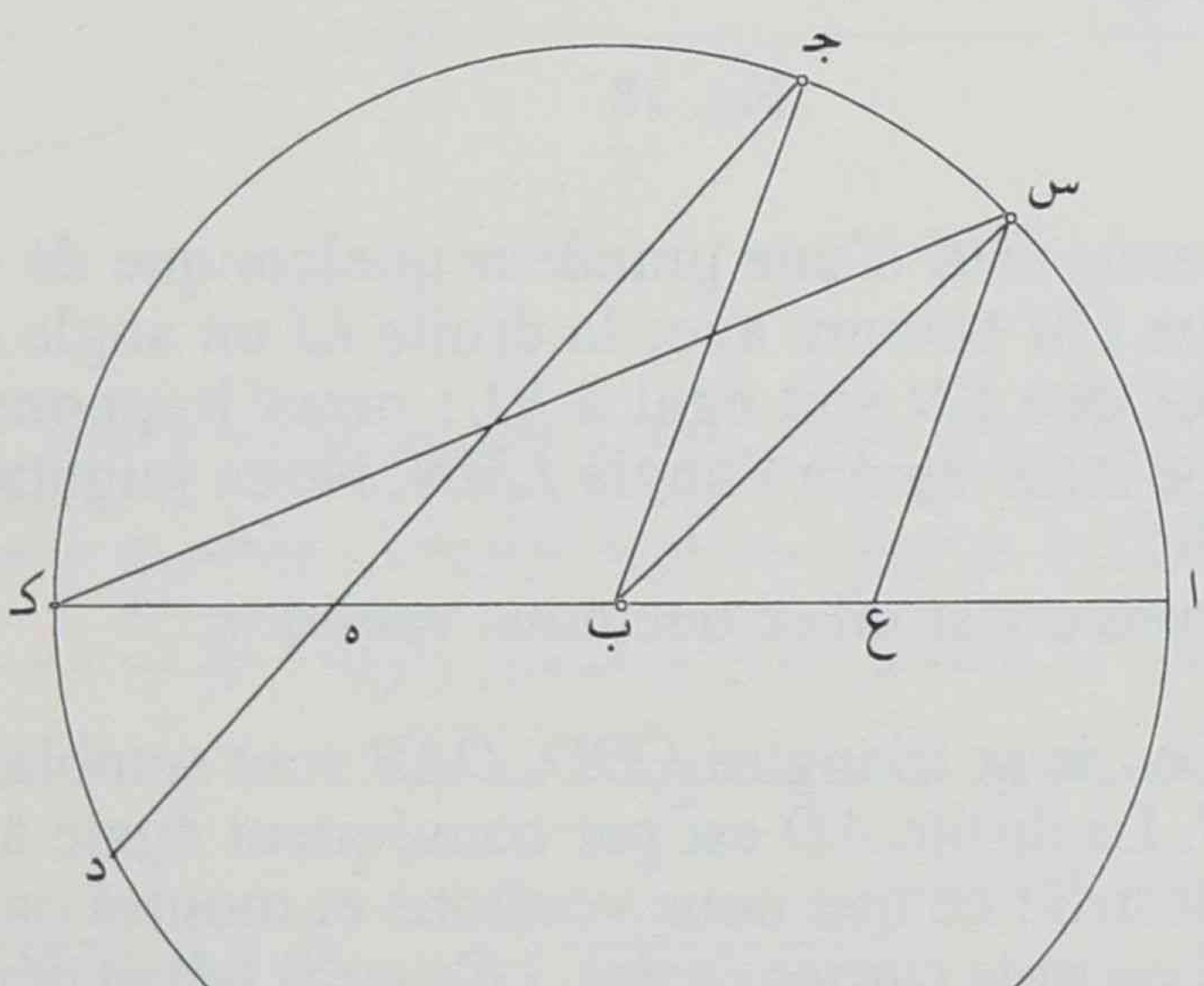
ف ا ق نصف زاوية ز ا ق، فزاوية ز ا ق مثلا زاوية ف ا ق. لكن زاوية ز ق ا مثل زاويتي ق ف ا ق ا ف، أعني مثلي زاوية ق ا ف، فزاوية ز ق ا مثل زاوية ز ا ق، فخط ز ق مثل خط ز ا. وقد تبين بما ذكرنا أن زاوية ب ا ف صارت مقسومة بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

البرهان على مقدمة أبي سهل الكوهي ٣٣-ظ

المطلوب عمل مثلث على أيّ خط يكون كمثلث س ع ك وتكون زاوية س ع ا مساوية لزاوية مفروضة حادّة، وإذا أخرج ‹خط› كخط س ب، يكون مساوياً لخط ب ك ‹وتكون نسبة ع ك إلى ع س مساوية لنسبة ع س إلى ع ب›.

فلنفرض الزاوية المطلوب قسمتها زاوية ج ب ا. وندير على مركز ب، وبأيّ بعد يكون دائرة ا ج ك والقطر ا ك، ونخرج ج ه د، يكون ه د مساوياً لـ ه ب، ونخرج ب س يوازي ج د، وس ع يوازي ج ب.

أقول: إن مثلثي س ب ع ك س ع كما أردنا.



برهان ذلك: ضرب ج ه في ه ب مع مربع ه ب مساو لمربع ج ب، ‹و›يكون ضرب س ب أيضًا في ب ع مع مربع ب ع مساوياً لمربع ع س،

11 ا ج ك: احعد – 12 مساوياً: متاكلة / ج ب: متاكلة – 13 س ب ع: حسع – 15 مساوياً: مساو.

carré de *OS*. Le produit de *KB* par *BO* plus le carré de *OB*, je veux dire *KO* par *OB*, est donc égal au carré de *SO*. Les deux triangles *SOK* et *SOB* sont donc semblables, la droite *BS* est égale à la droite *BK* et l'angle *AOS* est égal à l'angle *ABC*. Ce qu'il fallait démontrer. /

34r *Démonstration du lemme d'Abū Ḥāmid al-Ṣāghānī*

Soit l'arc *ABC* <dont la corde *AC*> sous-tend un angle égal à l'angle *H* et on a mené *CA* indéfiniment ; nous voulons mener deux droites égales, comme les deux droites *CB*, *BD*, jusqu'au périmètre de l'arc *ABC*, et telles que si on mène *AB*, elle sera égale à *AD*. Par ce lemme la division de l'angle *G* en trois parties égales sera possible.

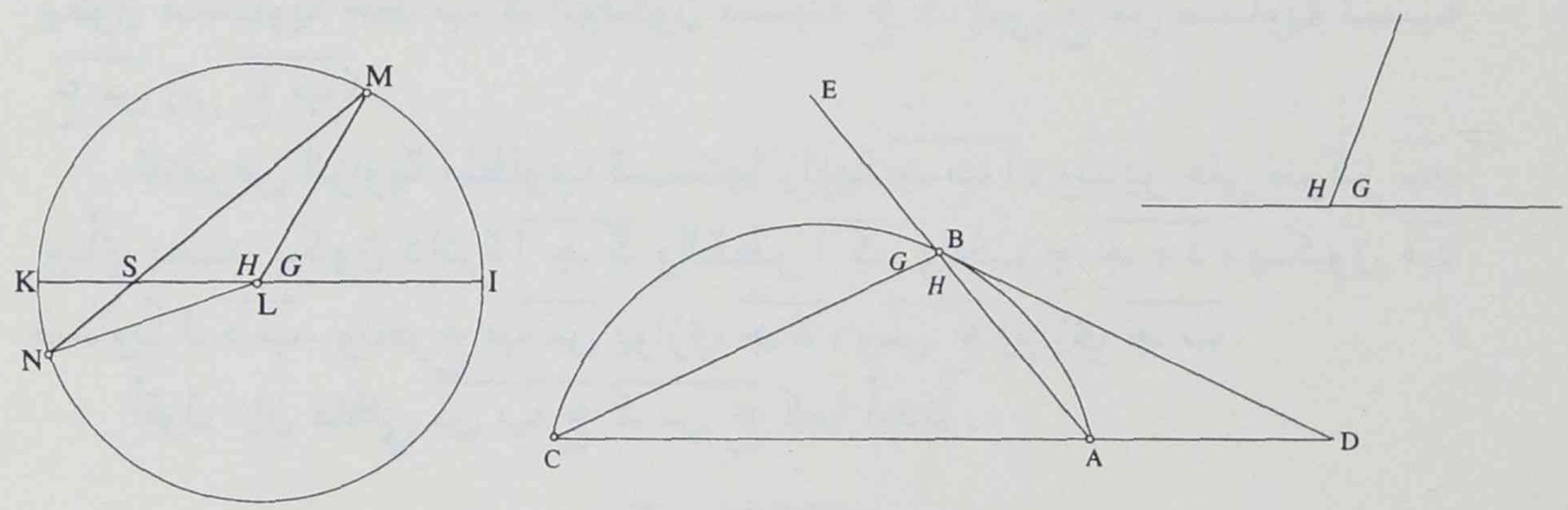


Fig. 18

Nous traçons le cercle *INK* d'une grandeur quelconque de centre *L* et de diamètre *IK* ; la droite *LM* entoure avec la droite *LI* un angle égal à l'angle *G*. Menons *MSN* tel que *SN* soit égal à *SL* ; nous joignons *LN* et nous construisons un angle *ACB* égal à l'angle *LMN*. Nous joignons *AB* et nous menons *BD* égal à *BC*.

Je dis que nous avons construit ce que nous voulions.

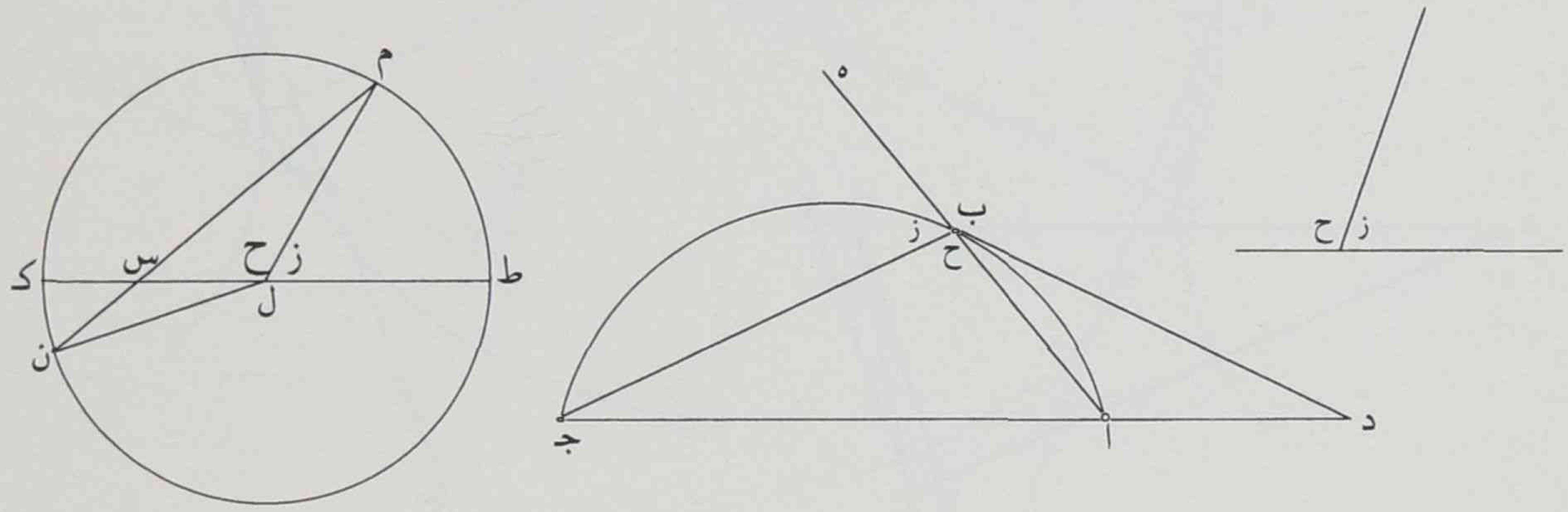
Démonstration : Les deux triangles *CBD*, *DAB* sont semblables aux deux triangles *MLN*, *LSN*. La droite *AD* est par conséquent égale à la droite *AB*. Nous avons donc construit ce que nous voulions et montré par ce lemme la

34v division de l'angle *G* en trois parties égales. / Ce qu'il fallait démontrer.

فضرب ك ب في ب ع مع مربع ع ب – أعني ك ع في ع ب – مساوٍ لمربع س ع. فمثلثا س ع ك س ع ب متشابهان، وخط ب س مثل خط ب ك، وزاوية ا ع س مساوية لزاوية ا ب جـ، وذلك ما أردنا بيانه. /

البرهان على مقدمة أبي حامد الصاغاني ٣٤-و

قوس ا ب جـ يقبَل زاويةً مساوية لزاوية ح، وقد خرج جـ ا إلى غير نهاية؛ أردنا أن نخرج ‹خطين› كخطي جـ ب ب د إلى محيط قوس ا ب جـ متساويين. وإذا أخرج ا ب يكون ا ب مثل ا د. وبهذه المقدمة يتهيأ قسمة زاوية ز بثلاثة أقسام متساوية.



ندير دائرة ط ن ك بأيّ مقدار يكون على مركز ل، والقطر ط ك، وخط ل م يحيط مع خط ل ط بزاوية مساوية لزاوية ز، ونخرج م س ن، يكون س ن مساوياً لـ س ل. ونصل ل ن ونعمل زاوية ا جـ ب مساوية لزاوية ل م ن، ونصل ا ب ونخرج ب د مساوياً لـ ب جـ.

فأقول: إنا عملنا ما أردنا.

برهان ذلك: أن مثلثي جـ ب د د ا ب مشابهان لمثلثي م ل ن ل س ن، فخط ا د إذاً مساوٍ لخط ا ب. فقد عملنا ما أردنا، وبينّا من هذه المقدمة قسمة زاوية ز بثلاثة أقسام متساوية؛ / وذلك ما أردنا بيانه. ٣٤-ظ

2 س ع ب: أولها متآكل – 4 الصاغاني: الصغاني – 9 ط ن ك: طند / ط ك: طد – 11 ل ن: لز – 14 جـ ب د: أولها متآكل.

Démonstration du premier des problèmes d'Abū al-Rayḥān une autre méthode admirable[1] *que nous avons déterminée*

Soit les deux droites *AB* et *BC* qui entourent un angle aigu *B* ; *BC* est sans limite du côté de *C*. Nous voulons mener une droite comme la droite *AC* telle que si on mène *CD* qui coupe *AB* en *D*, alors *AD* sera égale à *AC* et le rapport de *AD* à *BC* sera égal au rapport de *AC* à *CD*.

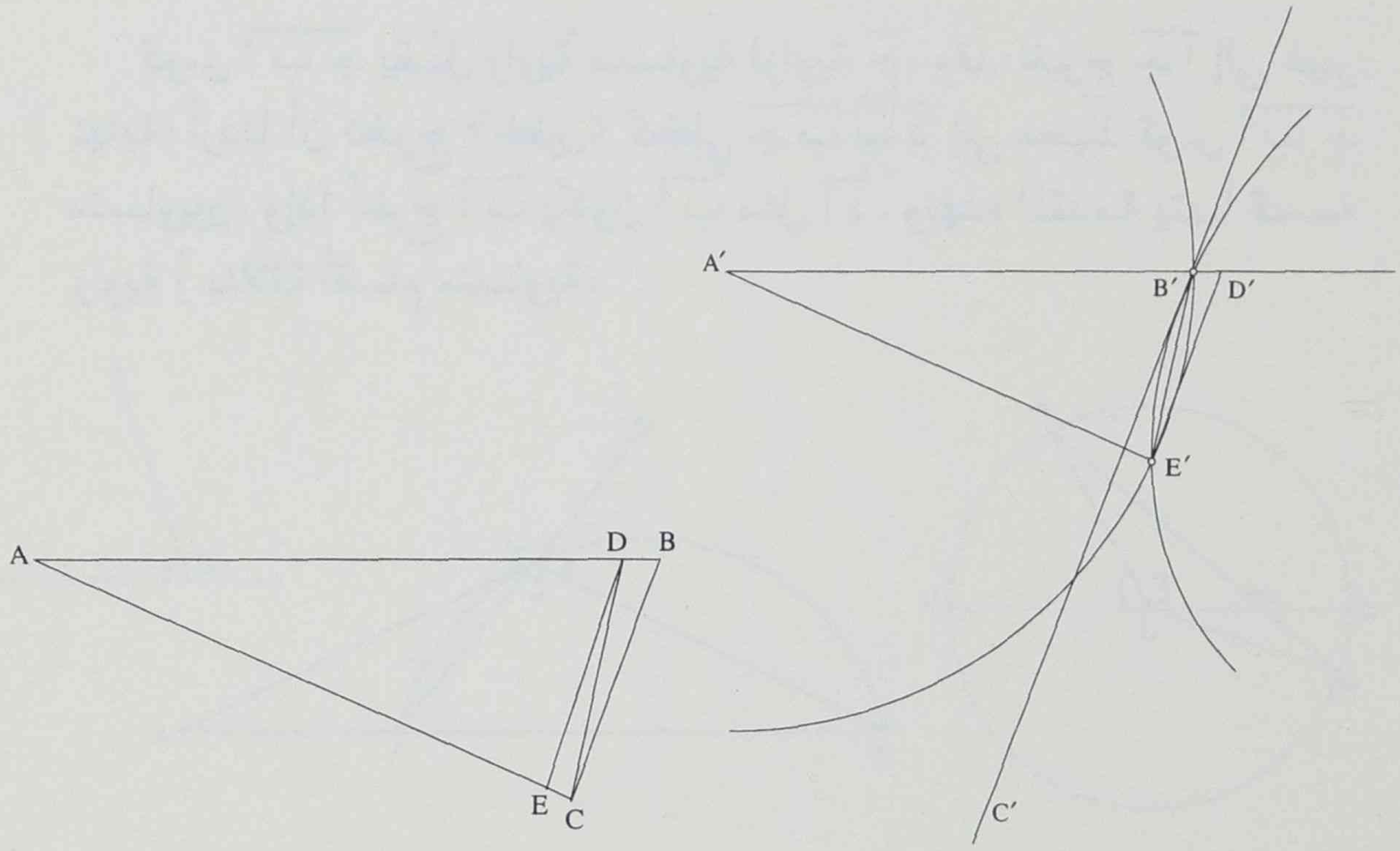


Fig. 19

Supposons que les deux droites *AB* et *BC* entourent un angle égal à l'angle *B* et construisons une hyperbole de sommet le point *B*, de diamètre transverse la droite *BA* et de côté droit égal à son diamètre transverse[2] ; et telle que ses droites ordonnées entourent avec le diamètre <transverse> un
35r angle égal à l'angle *B* ; soit la section *BE*. Traçons de centre / *A* et à la distance *AB* un arc *BE* ; il est donc nécessaire qu'il coupe la section ; qu'il la coupe en *E*. Nous menons *ED* comme droite ordonnée et nous posons le rapport de *AB* à *BC* dans la première figure égal au rapport de *AD* à *DE* dans la deuxième. Nous joignons *AC*, nous posons *AD* égal à *AC* et nous joignons *DC*.

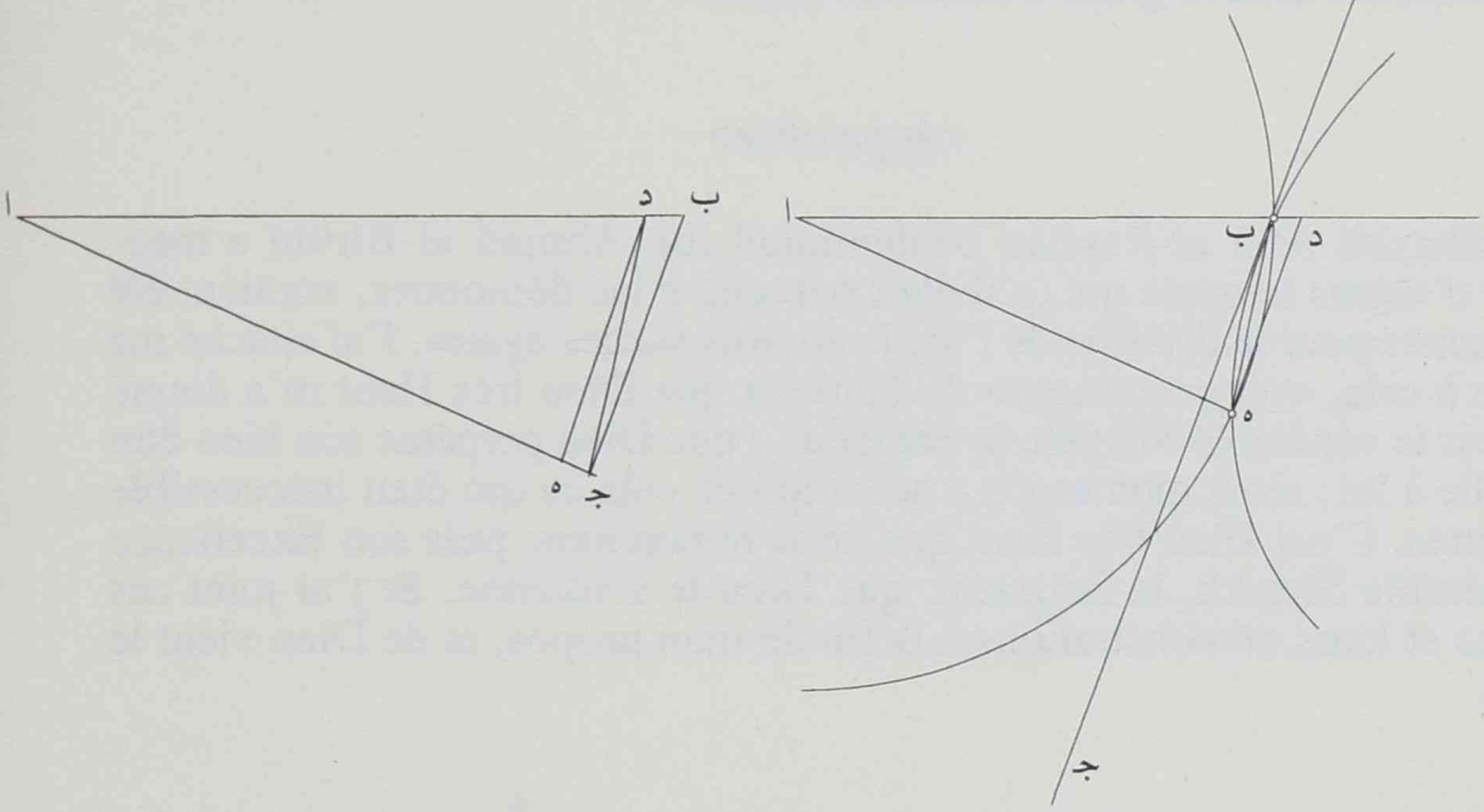
Je dis que les deux triangles *ABC* et *ACD* sont semblables.

[1] Peut-être à l'origine le terme *gharīb* était-il *qarīb* (proche), mal lu par le copiste ; le terme « admirable » est quelque peu excessif dans ce contexte, puisqu'il s'agit toujours du même cercle et de la même hyperbole.

[2] Sur les notations, voir le commentaire.

البرهان على المسألة الأولى من مسائل أبي الريحان
بطريق آخر غريب: استخراجنا

خطا اب ب جـ يحيطان بزاوية ب الحادة، وب جـ غير متناه في جهة جـ؛ أردنا أن نخرج ‹خطًا› كخط ا جـ، إذا أخرج جـ د، يقسم اب على د، يكون اد مساويًا لـ ا جـ، ويكون نسبة اد إلى ب جـ كنسبة ا جـ إلى جـ د.



فلنفرض خطي اب ب جـ يحيطان بالزاوية المساوية لزاوية ب، ونعمل قطعًا زائدًا يكون رأسه نقطة ب، وقطره المجانب خط ب ا، وضلعه القائم مساويًا لقطره المجانب، وتكون خطوط ترتيبه تحيط مع القطر بزاوية مساوية لزاوية ب، وهو قطع ب ه. ونديز على مركز / ا وببعد اب قوس ٣٥-و ب ه؛ فلا بدّ من أن يقطع القطع، فليقطعه على ه. ونخرج ه د خط الترتيب، ونجعل نسبة اب إلى ب جـ في الصورة الأولى كنسبة اد إلى د ه من الثانية. ونصل ا جـ ونجعل اد مثل ا جـ، ونصل د جـ.

فأقول: إن مثلثي اب جـ ا جـ د متشابهان.

1 الأولى: الا – 3 متناه: متناهى، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 13 متشابهان: متشابها، كتب بعدها «اد»، ثم ضرب عليها بالقلم – كتب الناسخ بجوار الشكل المثلث «الأولى».

Démonstration : Le rapport de *AB* à *BC* est égal au rapport de *BC* à *BD*, et l'angle *B* des triangles *ABC* et *BCD* est commun ; les deux triangles *ABC* et *BCD* sont donc semblables. L'angle *BCD* est donc égal à l'angle *CAD*. Si on mène *DE* parallèle à *BC*, alors le triangle *CED* sera semblable au triangle *CAD*, car l'angle *CDE* est égal à l'angle *DCB*, en raison des alternes-internes ; l'angle *CDE* est donc égal à l'angle *DAC*. Le triangle *ACD* est donc semblable au triangle *CDE*. La droite *CD* est donc égale à la droite *DE*, le triangle *ACD* est semblable au triangle *ABC* et le rapport de *AD* à *BC* est égal au rapport de *AD*, c'est-à-dire *AC* à *DE*, c'est-à-dire *DC*. Ce qu'il fallait démontrer. /

35v Le traité est achevé grâce à Dieu très Haut.

<Appendice>

Le Shaykh Abū al-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī a mentionné d'autres lemmes qui, s'il était parvenu à les démontrer, auraient été des lemmes pour la division de l'angle en trois parties égales. J'ai attaché ma pensée à cela, <reconnaissant> du bonheur que Dieu très Haut m'a donné
36r de servir le vénérable Shaykh, le Seigneur, / que Dieu perpétue son bien-être et me lie à lui ; alors mon esprit a accompli en cela ce qui était inaccessible aux autres. C'est Dieu très Haut que nous remercions, puis son Excellence le vénérable Shaykh, le Seigneur, que Dieu le soutienne. Et j'ai joint ces lemmes et leurs démonstrations à la fin de mon propos, et de Dieu vient le succès.

Premier lemme parmi ceux mentionnés par Abū al-Rayḥān : Soit le triangle *ABC* dont les côtés *AB* et *AC* sont égaux. Comment augmenter *AB* d'un excédent comme *BD* tel que, si nous joignons *DC* et que nous posons l'angle *DCE* égal à l'angle *EDC*, le produit de *AE* par *EB* soit égal au produit de *AB* par *BD* ?

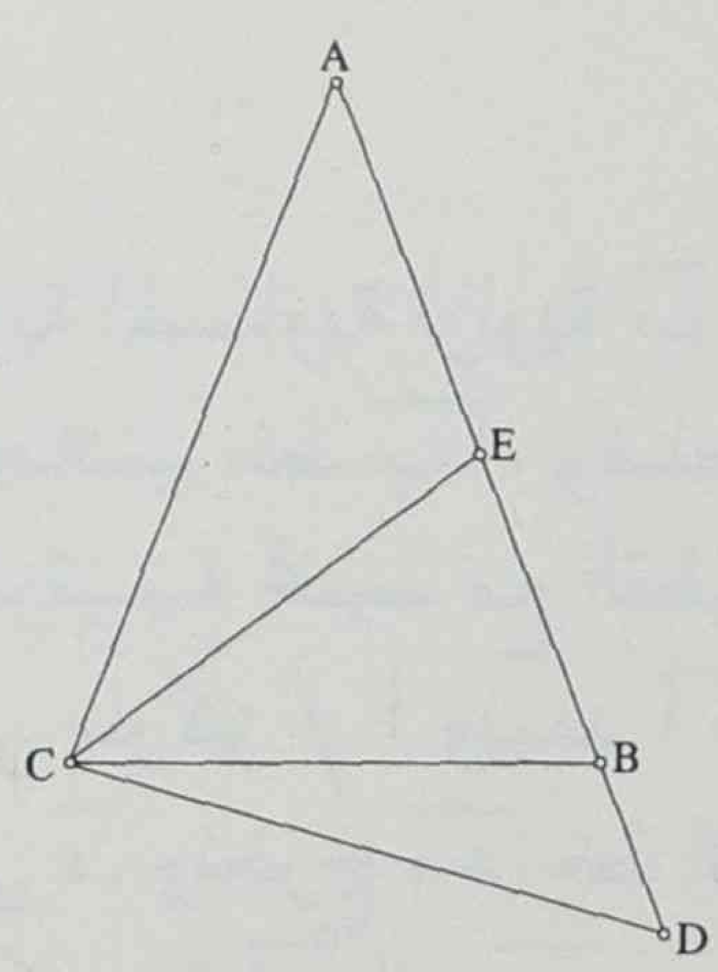


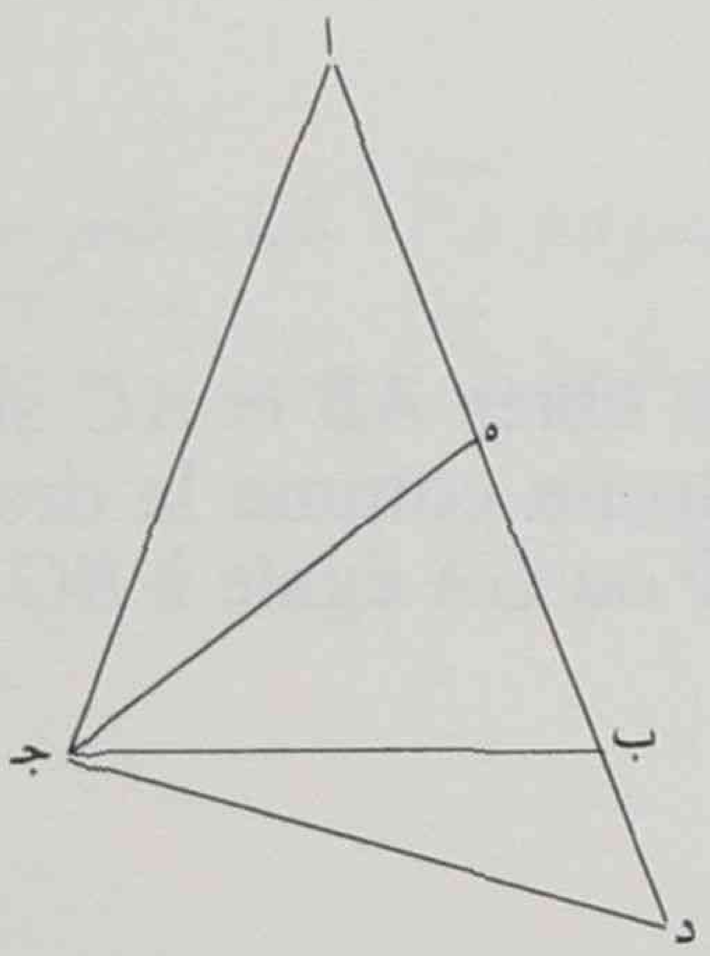
Fig. 20

برهان ذلك: أن نسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة ب جـ إلى ب د، وزاوية ب من مثلثي ا ب جـ ب جـ د مشتركة، فمثلثا ا ب جـ ب جـ د متشابهان، فزاوية ب جـ د مثل زاوية جـ ا د. وإذا أخرج د ه يوازي ب جـ، يكون مثلث جـ ه د يشبه مثلث جـ ا د، لأن زاوية جـ د ه مساوية لزاوية د جـ ب من جهة التبادل. فزاوية جـ د ه مساوية لزاوية د ا جـ، فمثلث ا جـ د يشبه مثلث جـ د ه، فخط جـ د مساوٍ لخط د ه ومثلث ا جـ د يشبه مثلث ا ب جـ، ونسبة ا د إلى ب جـ كنسبة ا د، أعني ا جـ، إلى د ه، أعني د جـ؛ وذلك ما أردنا بيانه./

تم القول، بحمد الله تعالى. ٣٥-ظ

‹ملحق›

ثم ذكر الشيخ أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني مقدمات أخر لو توصل إلى براهينها، كانت أيضًا من مقدمات قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية. فأعملت الفكر في ذلك ‹...› بما أسعدني الله تعالى به من خدمة الشيخ الأجل السيد / أدام الله نعيمه وأعلقنيه من حبله؛ فجادت القريحة ٣٦-و من ذلك بما تعذر على غيري، والشكر لله تعالى، ثم لدولة الشيخ الأجل السيد أيده الله. وألحقت تلك المقدمات وبراهينها آخر هذا الكلام وبالله التوفيق.



المقدمة الأولى مما ذكره أبو الريحان:

مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ؛ كيف نزيد في ا ب زيادة كـ ب د، إذا وصلنا د جـ وجعلنا زاوية د جـ ه مثل زاوية ه د جـ، كان ضرب ا ه في ه ب مثل ضرب ا ب في ب د.

2 مثلثي: متاكلة – 9 كتب في الهامش الأيسر «نظرت وصححت بمنّه وكرمه» – 11 البيروني: كتب الناسخ بعدها «رحمه الله تعالى»؛ زاد الناسخ هذه العبارة على النص المنقول، فالبيروني قد توفي بعد وفاة السجزي بعقود، فمن غير المعقول أن تكون هذه العبارة للسجزي.

Deuxième lemme: Soit le trapèze *ABCD* dont le côté *AB* est parallèle au côté *CD*, et le côté *AC* égal au côté *BD*. On sépare de la diagonale *AD* la droite *DE* égale à *BD* telle que le rapport de *DC* à *BD* soit égal au rapport de *AB* à *AE*. Le côté *CD* est connu et ses angles sont donnés. Comment connaître chacun des côtés *AB*, *BD*, *AD* ou comment construire le trapèze sous cette forme ?

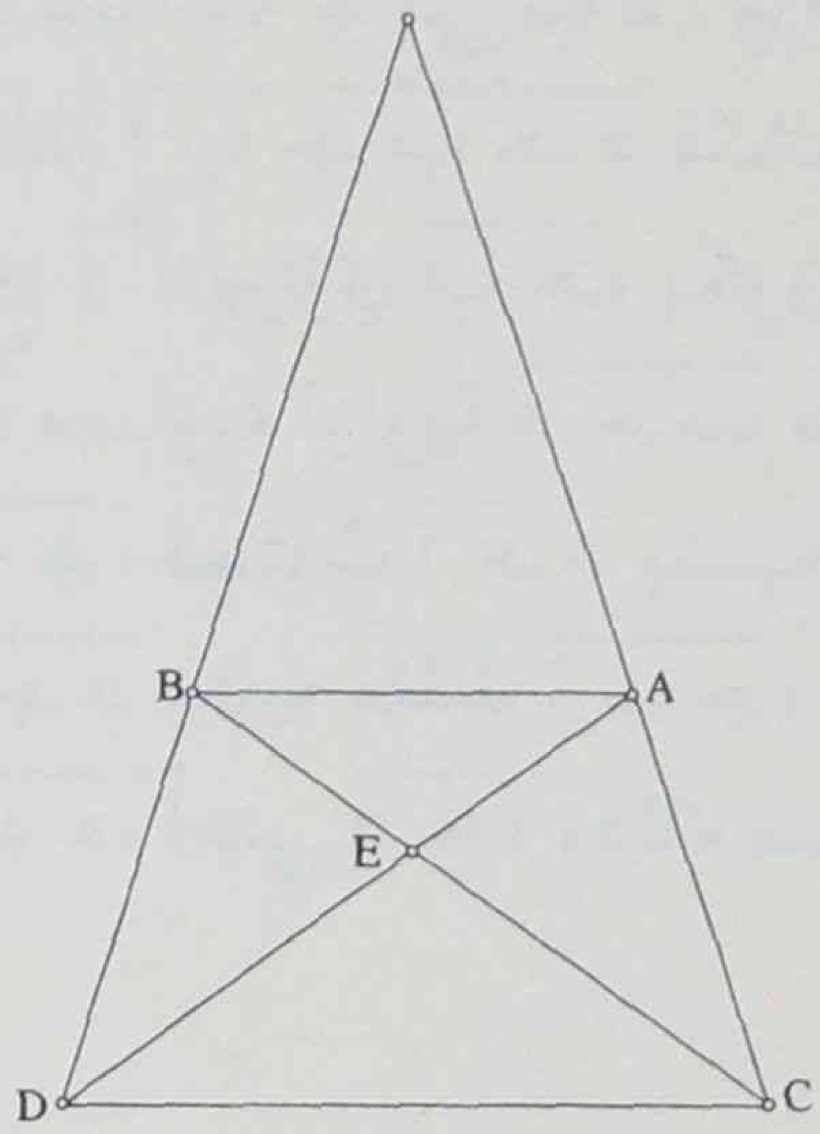


Fig. 21

Troisième lemme: Soit le triangle *ABC* dont les côtés *AB* et *AC* sont
36v égaux ; et soit *AD* sa hauteur qu'on prolonge indéfiniment. / Comment mener une droite comme la droite *EGH* de sorte que *BG* soit égale à *GE* et *HG* égale à *GC* ?

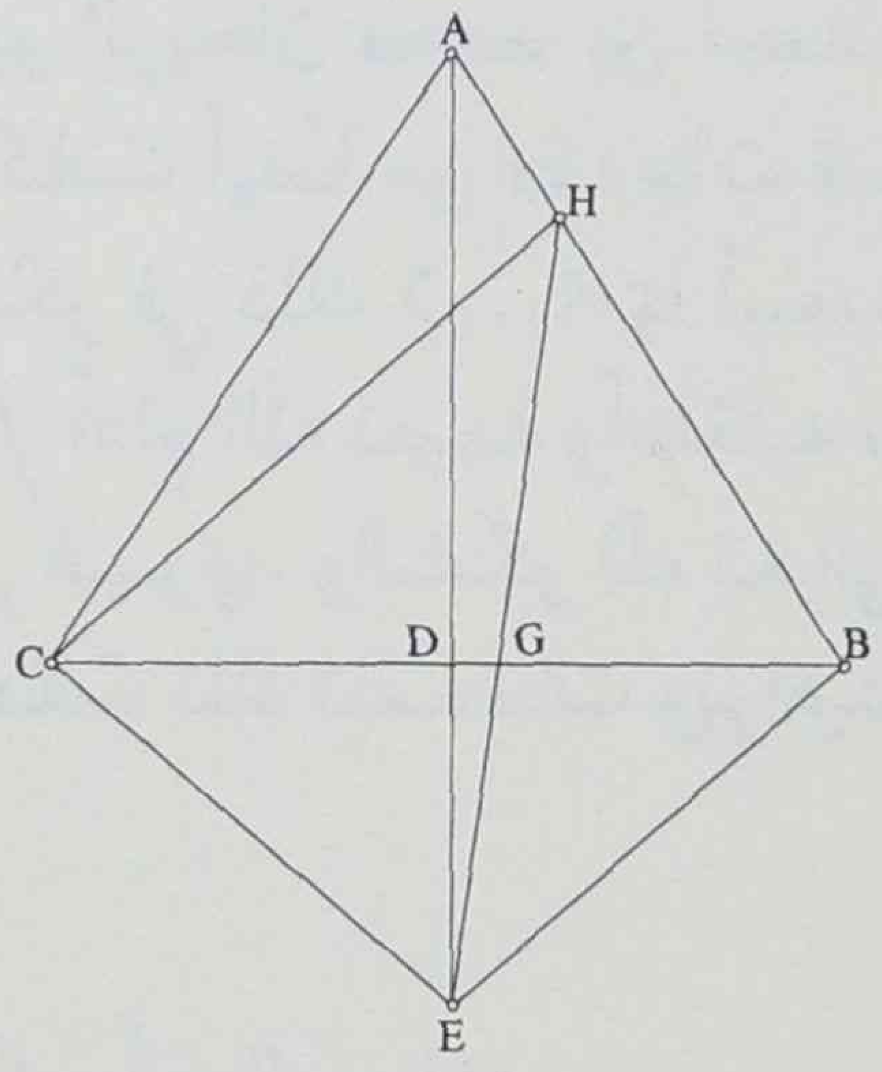


Fig. 22

Quatrième lemme: Soit le triangle *ABC* dont les côtés *AB* et *AC* sont égaux ; soit *AD* sa hauteur. Comment mener une droite comme la droite *BGE* telle que *BG* soit égale à *EC* ou *GE* égale à *GD* ou *GA* égale à *BG* ou *BG* égale à *GC* ?

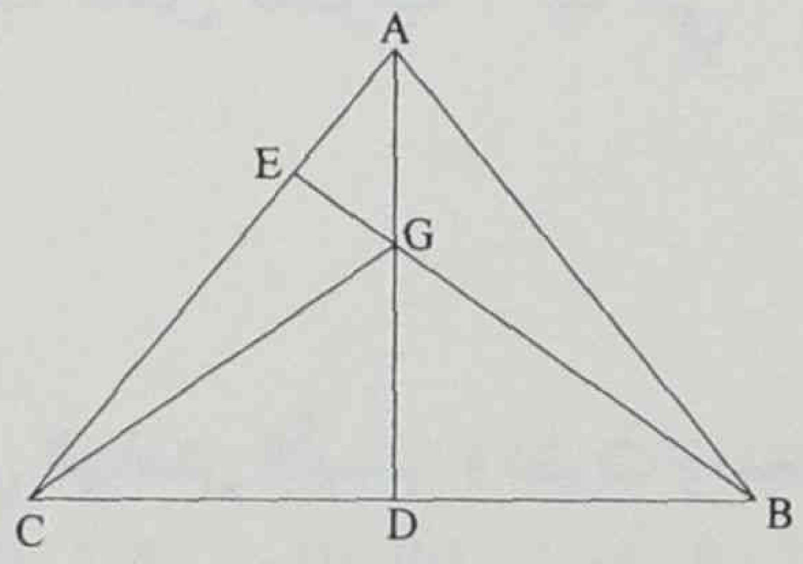
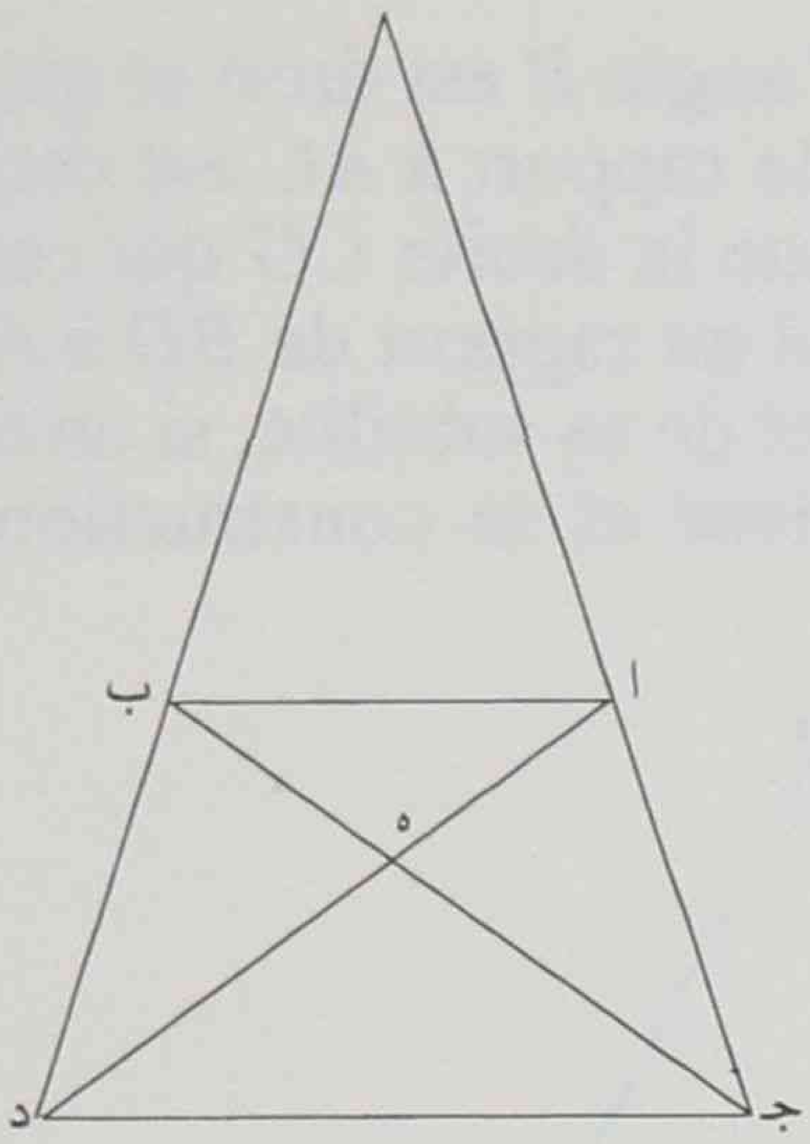
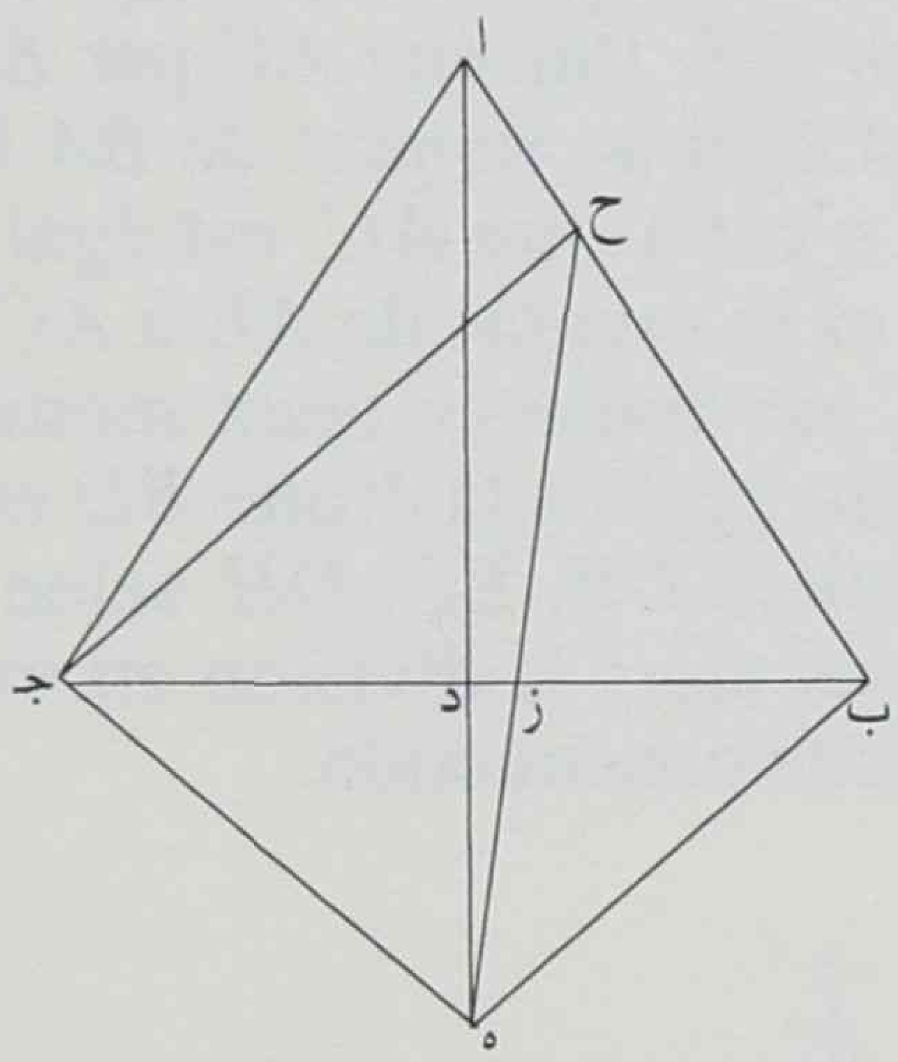


Fig. 23

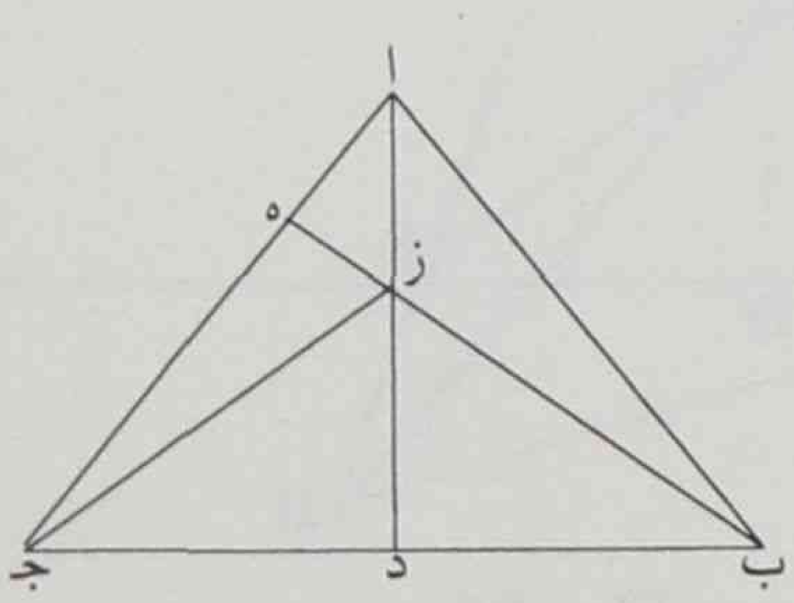


الثانية : منحرف ا ب جـ د ، ضلع ا ب منه يوازي ضلع جـ د ، وضلع ا جـ يساوي ضلع ب د . وفصل من قطر ا د خط د ه مثل ب د ، وكانت نسبة د جـ إلى ب د كنسبة ا ب إلى ا ه. وضلع جـ د معلوم وزواياه مفروضة. كيف نعلم واحداً من أضلاع ا ب ب د ا د أو كيف نعمل منحرفًا على هذه الصورة؟

الثالثة : مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ وعموده ا د ، وقد أخرج بغير نهاية. / كيف نخرج ‹خطًا› كخط ه ز ح حتى يكون ب ز مثل ز ه ٣٦-ظ وح ز مثل ز جـ؟



الرابعة : مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ وعموده د ا ؛ كيف نخرج ‹خطًا› كخط ب ز ه حتى يكون ب ز مثل ه جـ أو يكون ز ه مثل ز د أو يكون ز ا مثل ب ز أو يكون ب ز مثل ز جـ.



12 د ا : آ.

Cinquième lemme : Soit le triangle *ABC* dont l'angle *B* est droit et qui est de forme connue. On y mène la droite *BD* dont le rapport à *AC* est connu. Comment mener du <point> *C* une droite telle que la droite *CG* qui coupe *AB* en *E* telle que le rapport de *BG* à *CE* soit égal au rapport de *BD* à *AC* ? Ce cinquième lemme, en raison de sa profondeur et de sa subtilité, si on augmente ses hypothèses, deviendra après son analyse et sa construction un lemme pour la division de l'angle. /

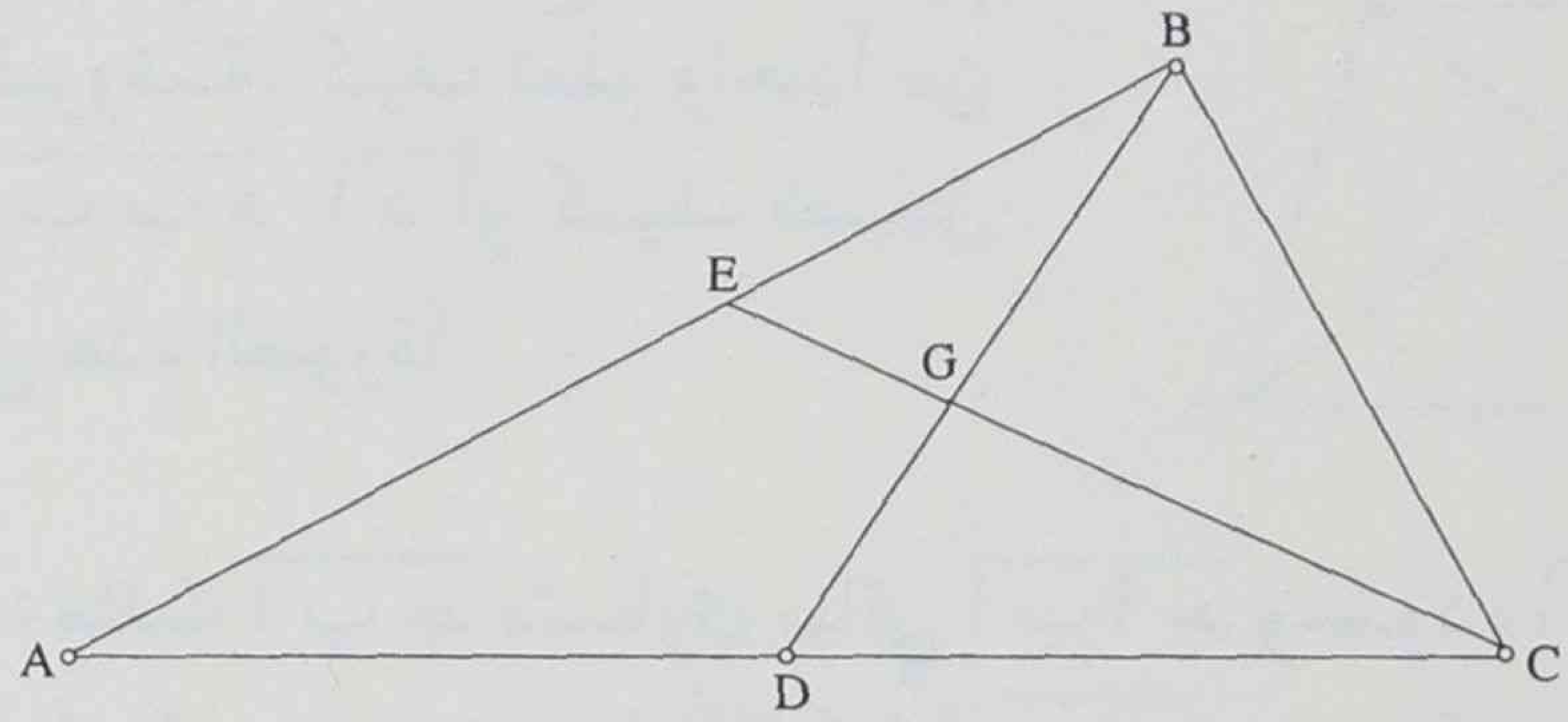


Fig. 24

37r *Analyse du premier lemme* : Prolongeons *CB* jusqu'en *I*, menons *AG* perpendiculaire à *BC* et joignons *BH*. Puisque *AE* par *EB* est égal à *AB* par *BD*, le rapport de *AE* à *BD* est égal au rapport de *BA* à *BE* ; et par permutation le rapport de *AE* à *AB*, c'est-à-dire *AC*, est égal au rapport de *BD* à *BE*. Or *DBE* est égal à *EHC* et le rapport de *AE* à *AC* est égal au rapport de *EH* à *HC*, car l'angle *EAC* est divisé en deux moitiés par la droite *AH*. La droite *EH* est par conséquent égale à la droite *BD* et *CH* est égale à *BE*. Si donc nous trouvons les droites *DE*, *EC*, *DH* selon ce que nous avons cherché par la voie de l'analyse, alors la division en trois parties égales de l'angle *ABI* sera possible par cette construction.

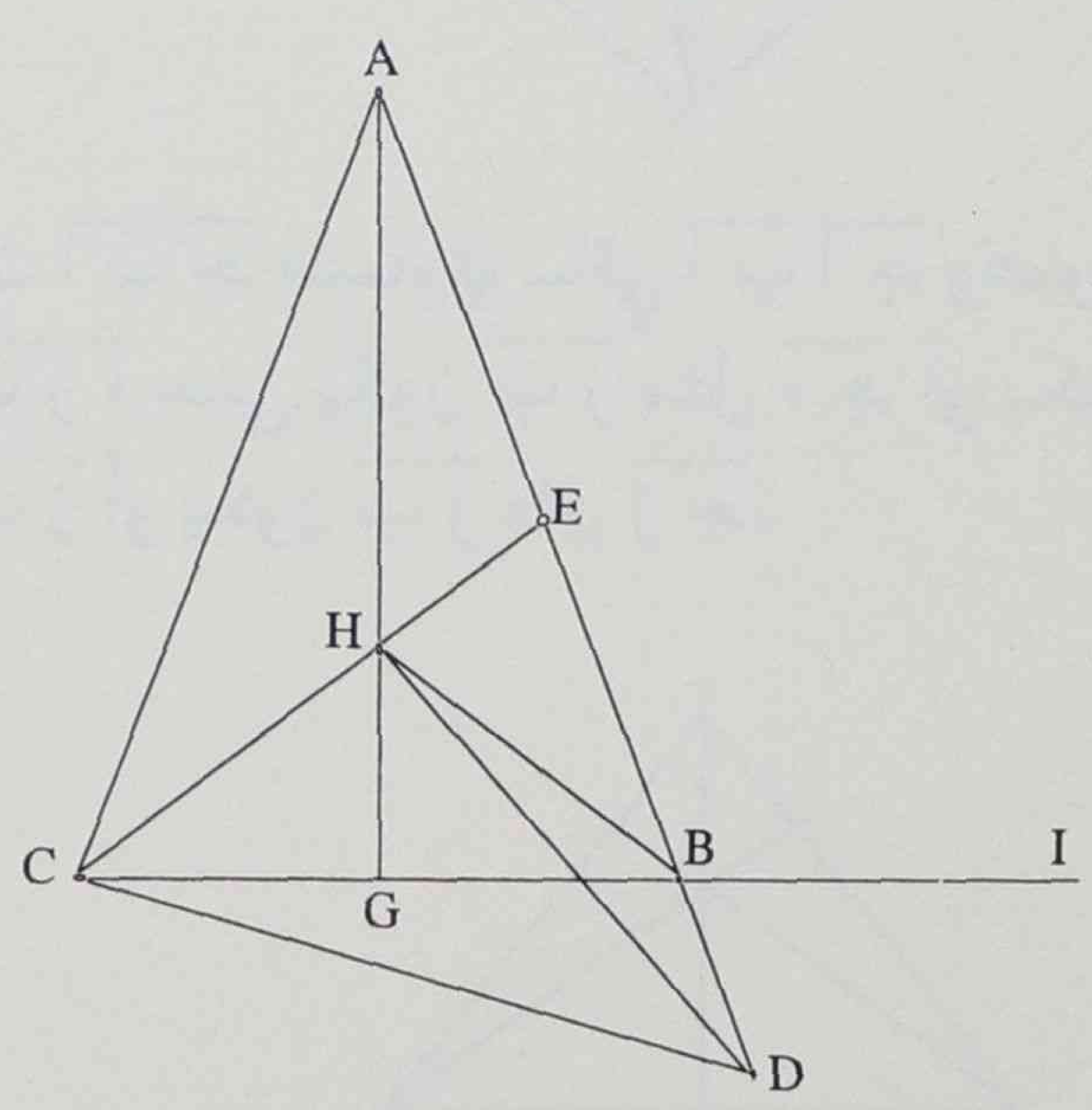
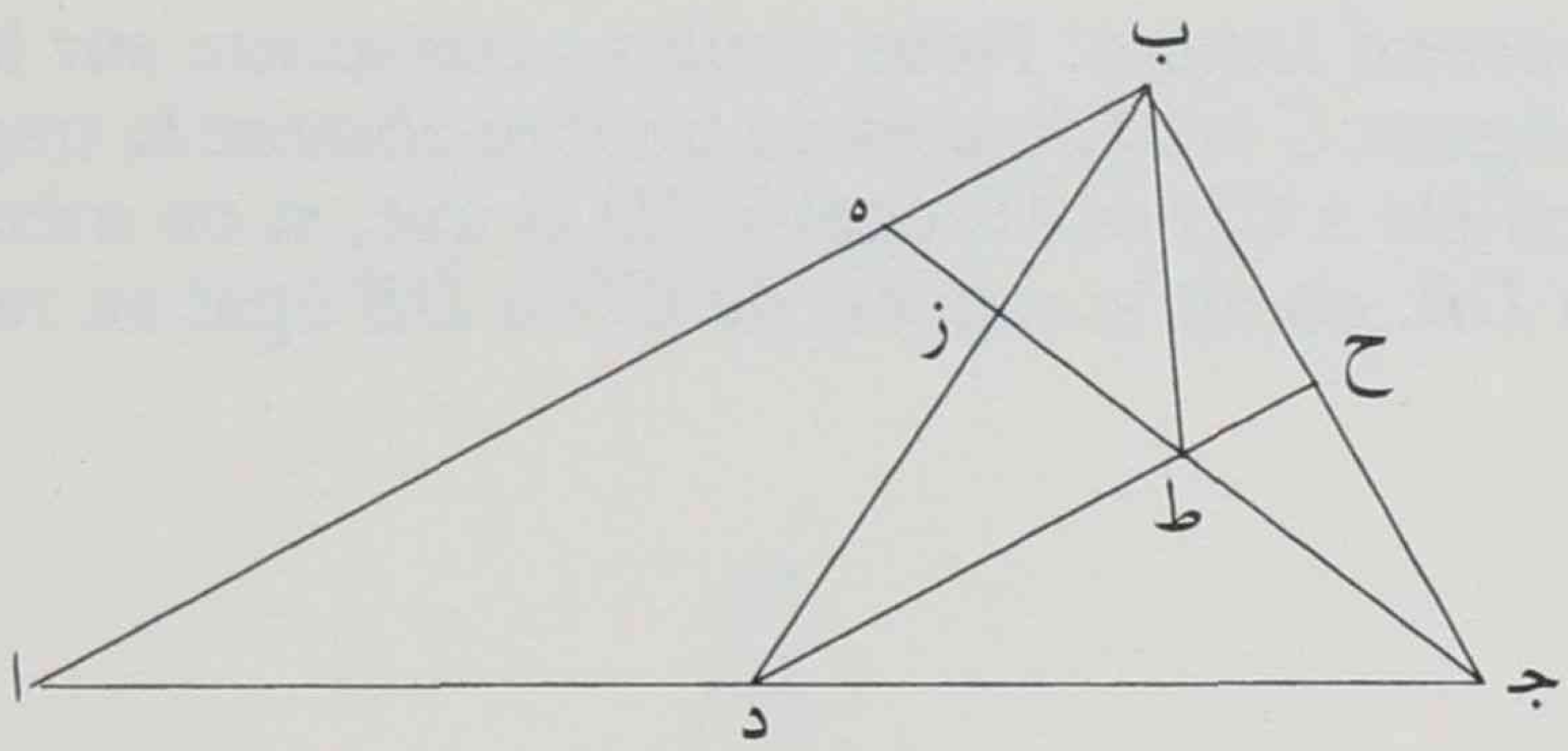
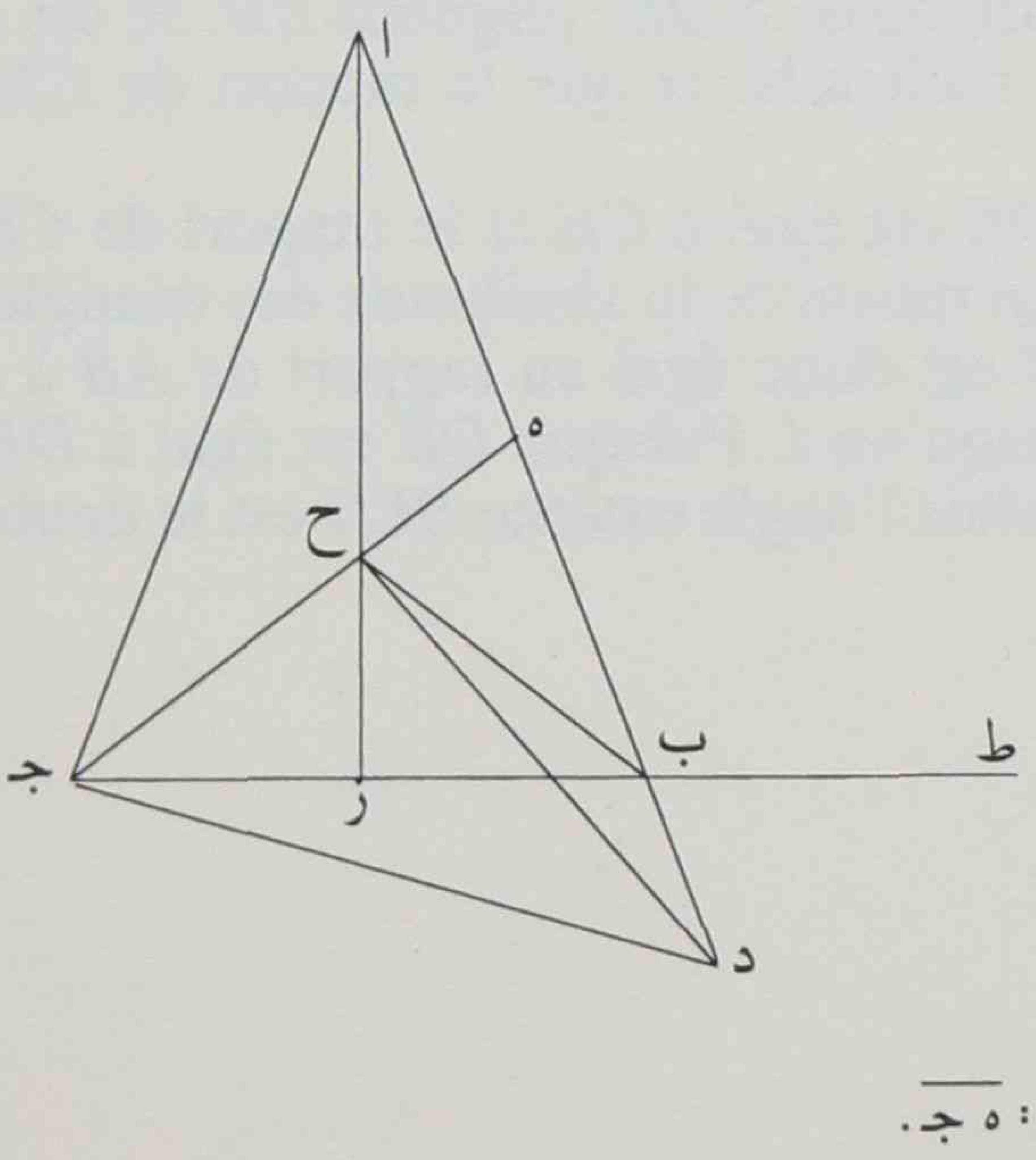


Fig. 25

الخامسة: مثلث ا ب جـ قائم زاوية ب وهو معلوم الصورة، وقد أخرج فيه خط ب د معلوم النسبة إلى ا جـ؛ كيف نخرج من جـ ‹خطًا› كخط جـ ز ‹يقطع ا ب على› ه حتى تكون نسبة ب ز إلى جـ ه كنسبة ب د إلى ا جـ وهذه الخامسة، لعمقها وطرافتها، لو زيد في مفروضاتها بعد تحليلها وعملها لصارت مقدمة لقسمة الزاوية. /



٣٧-و تحليل الأولى: فلنخرج جـ ب على استقامته إلى ط، ونخرج ا ز عمودًا على ب جـ ونصل ب ح. ولأن ا ه في ه ب مثل ا ب في ب د، تكون نسبة ا ه إلى ب د [كنسبة ب ا إلى ب د] كنسبة ب ا إلى ب ه. وبالإبدال نسبة ا ه إلى ا ب، أعني ا جـ، كنسبة ب د إلى ب ه. ولكن د ب ه مثل ه ح جـ، ونسبة ا ه إلى ا جـ كنسبة ه ح إلى ح جـ، لأن زاوية ه ا جـ مقسومة بنصفين بخط ا ح، فخط ه ح إذاً مثل خط ب د وجـ ح مثل ب ه. فإذا وجدنا خطوط د ه جـ د ح على ما طلبنا بطريق التحليل، فقد تهيأ لنا قسمة زاوية ا ب ط بثلاثة أقسام متساوية، بهذا العمل.



3 ا جـ: جـ – 10 ح جـ: ه جـ.

En effet, puisque la droite *HC* est égale à la droite *BE* et *HC* égale à *BH*, *BH* est donc égale à *BE*. L'angle *BEH* est donc égal à l'angle *EHB*; mais l'angle *EHB* est le double de l'angle *HCB*, donc l'angle *BEH* est le double de l'angle *ECB*. Or la somme des deux angles internes *BEC* et *ECB* est égale à l'angle externe *IBE*. Ainsi il a été possible de diviser l'angle *IBA* en trois parties égales. Ce qu'il fallait démontrer. /

37v *Analyse du second lemme*: Nous voulons construire sur la droite *CD* et avec les angles égaux *C* et *D* donnés un trapèze comme le trapèze *ABCD* tel que *AB* soit parallèle à *CD* et *AC* égal à *BD* et que, si on mène *AD* et qu'on pose *DE* égal à *DB*, on ait le rapport de *CD* à *DB* égal au rapport de *AB* à *AE*.

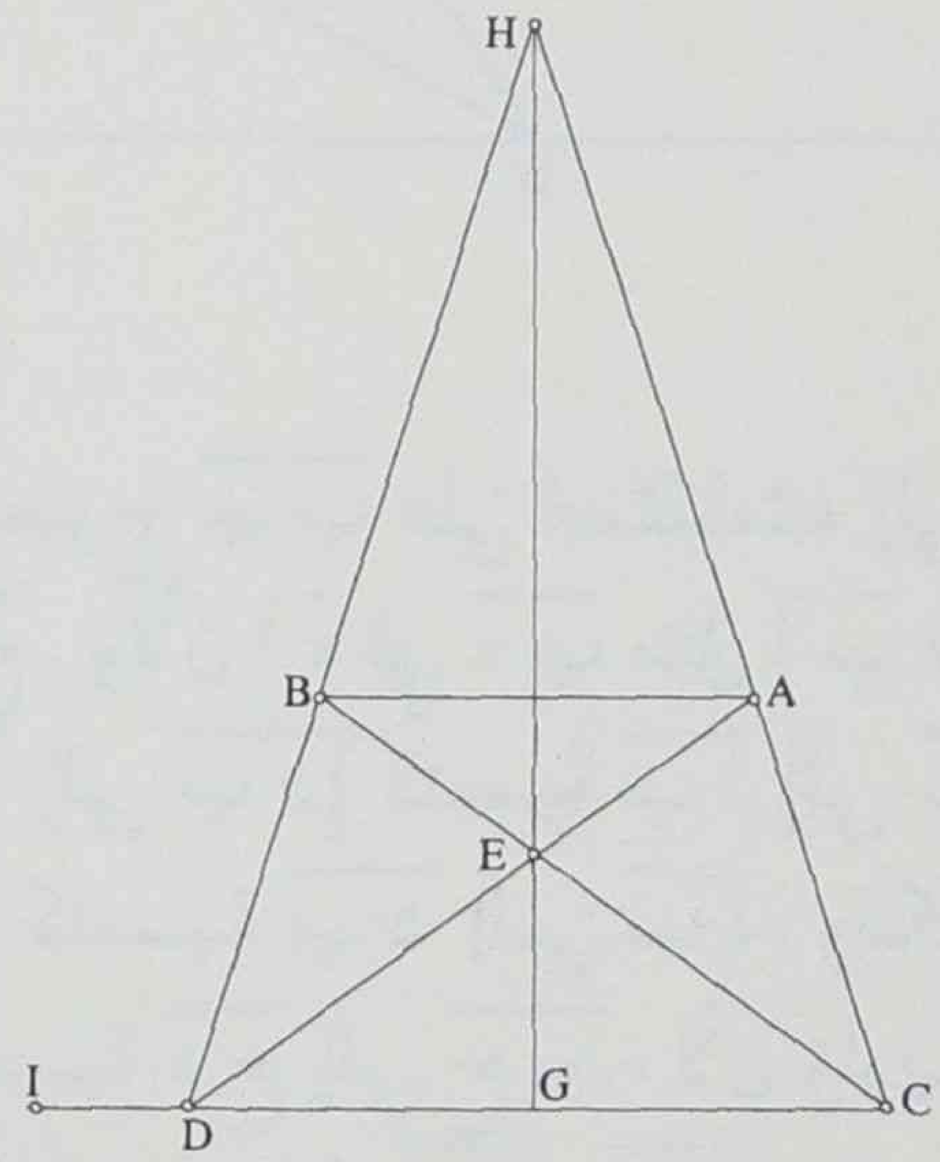


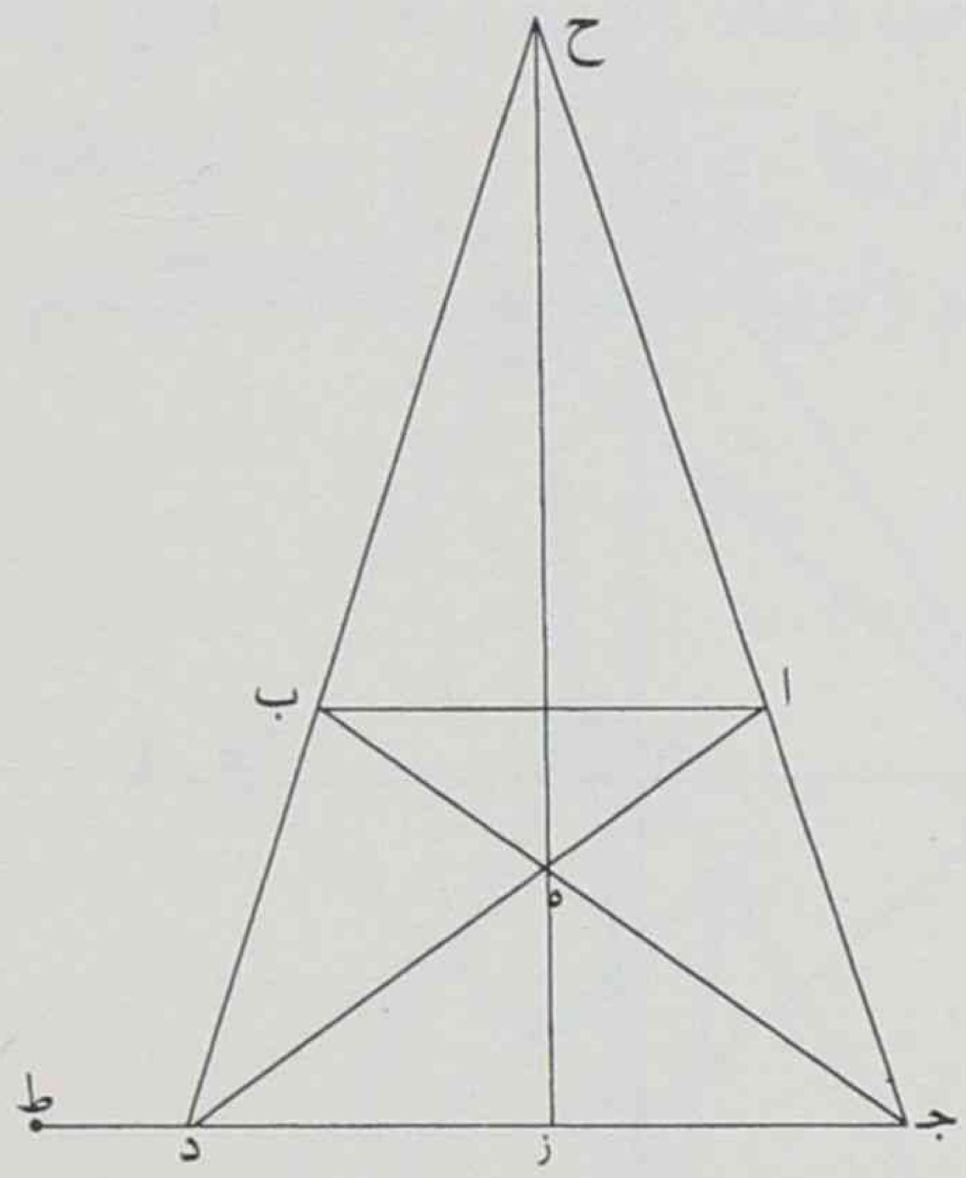
Fig. 26

Par analyse: Nous prolongeons *CA* et *DB* jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en *H*. Nous menons la perpendiculaire *HG* et nous menons *CEB* et *DEA* telles que *DB* soit égale à *DE*; joignons *AB*. Je dis que le quadrilatère *ACDB* est ce qu'on recherche et que le rapport de *CD* à *DB* est égal au rapport de *AB* à *AE*.

Démonstration: *DE* est égal à *CE* et le rapport de *CD* à *DE* est égal au rapport de *AB* à *AE* en raison de la similitude des triangles *CDE* et *ABE*. Le rapport de *CD* à *DB* est donc égal au rapport de *AB* à *AE*. Nous prolongeons ensuite *CD* jusqu'en *I*. Puisque *DE* est égal à *DB*, l'angle *EBD* est égal à l'angle *BED*. Mais l'angle externe *BED* est le double de l'angle *BCD*,

وذلك لأن خط ح جـ مساوٍ لخط ب ه وح جـ مثل ب ح، فـ ب ح مثل ب ه، فزاوية ب ه ح مثل زاوية ه ح ب، وزاوية ه ح ب مثلا زاوية ح جـ ب، فتكون زاوية ب ه ح مثلي زاوية ه جـ ب. لكن زاويتي ب ه جـ ه جـ ب الداخلتين مثل زاوية ط ب ه الخارجة. فقد تهيأ انقسام زاوية ط ب ا بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا بيانه./

٣٧-ظ تحليل المسألة الثانية: نريد أن نعمل على خط جـ د وزاويتي جـ د المتساويتين الموضوعتين منحرفًا كمنحرف ا ب جـ د، يكون ا ب يوازي جـ د ‹وا جـ يساوي ب د›، وإذا أخرج ا د وجعل د ه مثل د ب، تكون نسبة جـ د إلى د ب كنسبة ا ب إلى ا ه.



فعلى التحليل: نخرج جـ ا د ب حتى يلتقيا على ح، ونخرج عمود ح ز، ونخرج جـ ه ب د ه ا، يكون د ب مثل د ه، ونصل ا ب؛ أقول: إن ذا الأربعة الأضلاع ا جـ د ب هو المطلوب، وإن نسبة جـ د إلى د ب كنسبة ا ب إلى ا ه.

برهان ذلك: أن د ه مثل جـ ه، ونسبة جـ د إلى د ه كنسبة ا ب إلى ا ه لتشابه مثلثي جـ د ه ا ب ه. فنسبة جـ د إلى د ب كنسبة ا ب إلى ا ه. ثم نخرج جـ د إلى ط، فلأن د ه مثل د ب، تكون زاوية ه ب د مثل زاوية ب ه د. وزاوية ب ه د الخارجة مثلا زاوية ب جـ د، فمن مثلث ب جـ د زاوية

3 فتكون: متآكلة / زاويتي: متآكلة – 11 ذا: د ط، ونجد فوقها وفي الهامش علامة للإشارة إلى الصواب في الهامش إلا أنه لم يثبته.

donc, dans le triangle *BCD*, l'angle *DBC* est le double de l'angle *BCD*. Or
38r l'angle *IDB* externe est égal à la somme des angles / *DBC* et *DCB* internes. Ainsi il a été possible de diviser l'angle *IDB* en trois parties égales par ce lemme. Ce qu'il fallait démontrer.

Analyse du troisième lemme: Par l'analyse, s'il en est ainsi, joignons *BE*, *CE*, *CH*. On a alors le quadrilatère *BCHE*, dont les côtés *BE* et *CH* sont parallèles et les côtés *BH* et *CE* sont égaux, car le triangle *BGE* a les côtés *BG* et *GE* égaux et le triangle *HGC* a les côtés *CG* et *GH* égaux. S'il en est ainsi, alors *HC* est parallèle à *BE* et les angles *GBE*, *GEB*, *GHC*, *GCH* sont égaux. L'angle *BHE* est égal à l'angle *BEH* car il est égal à l'angle *BCE*, qui est égal à l'angle *CBE*, c'est-à-dire l'angle *BEH*. Or l'angle *HGB* est le double de l'angle *GEB*; il est par conséquent le double de l'angle *GHB*. Prolongeons *CB* jusqu'en *I*; la somme des angles *HGB*, *GHB* internes est donc égale à l'angle *IBH* externe. Ainsi il a été possible de diviser l'angle *IBH* en trois parties égales par cette construction. Ce qu'il fallait démontrer. /

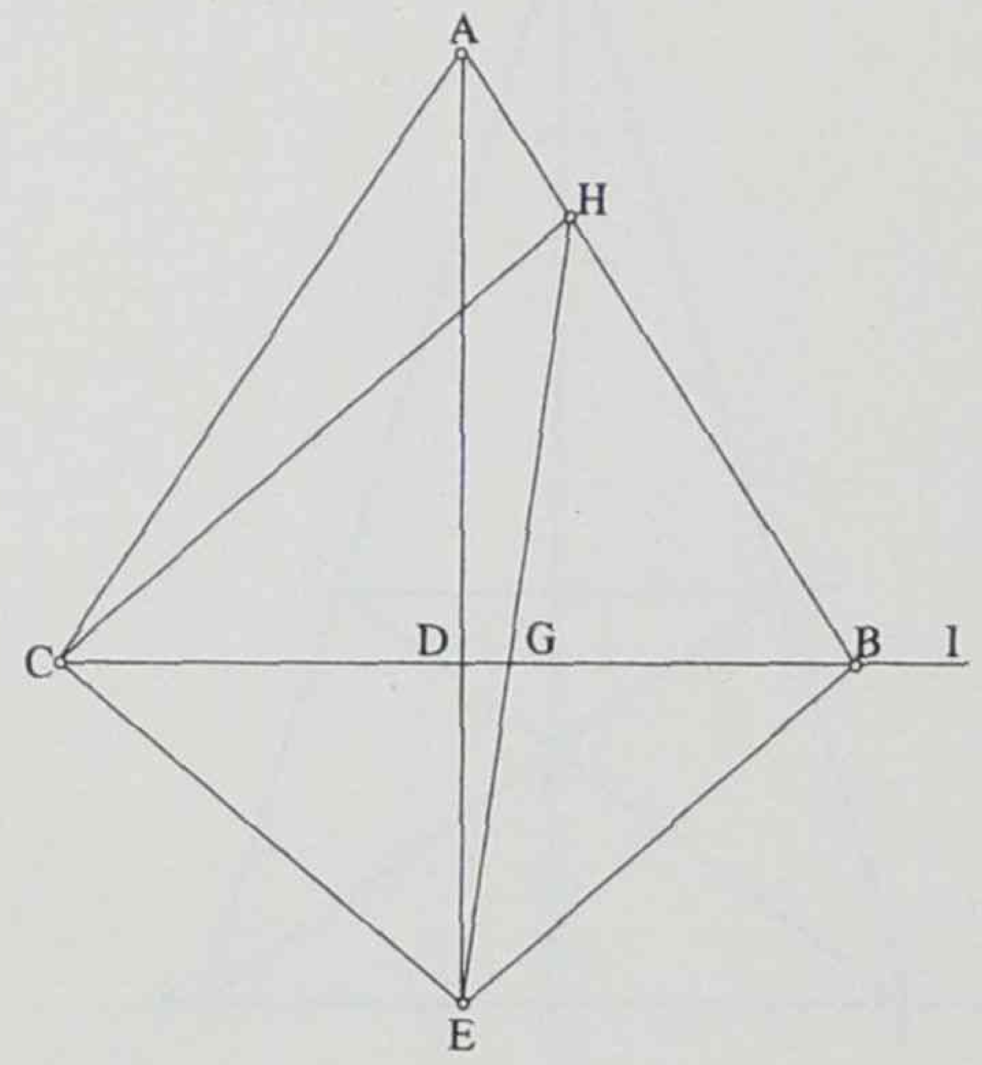
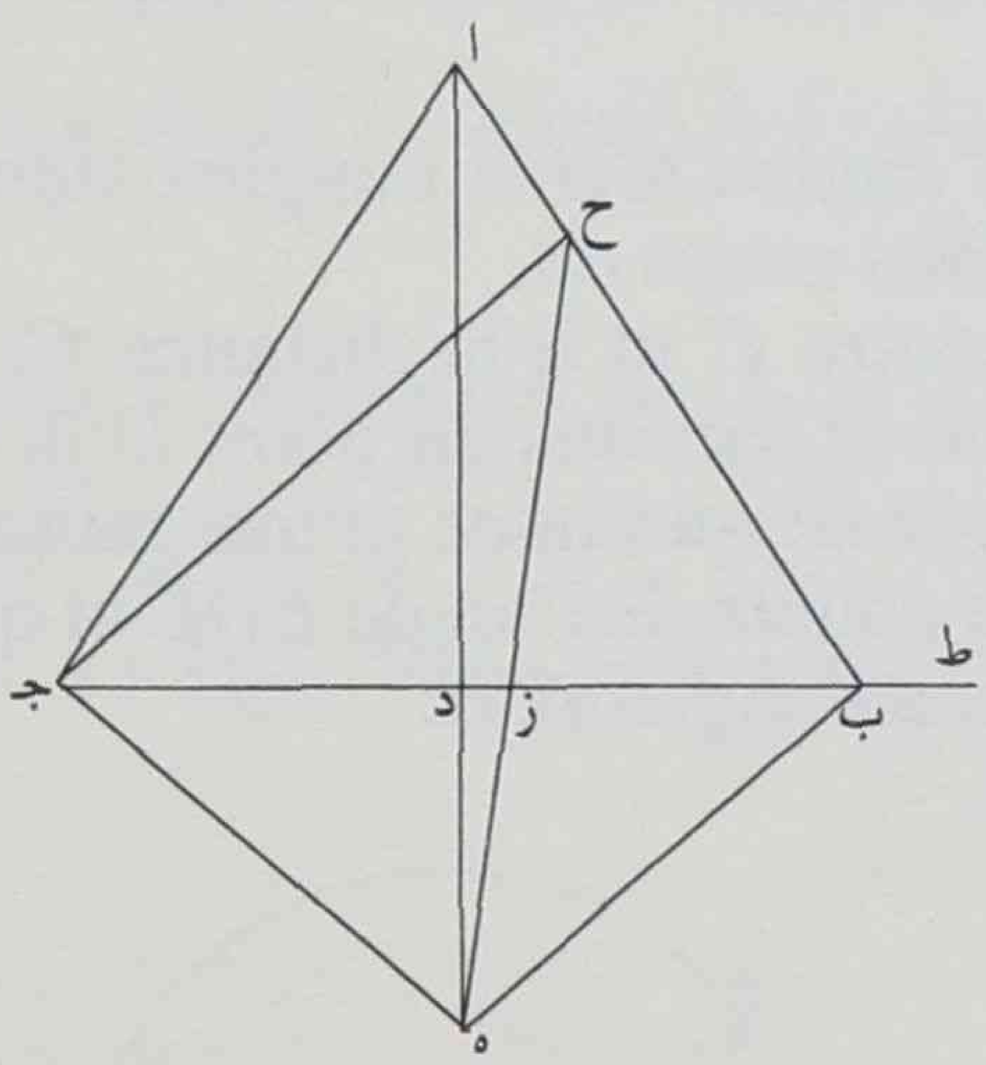


Fig. 27

38v *Analyse du quatrième lemme*: Nous menons la droite *BGE* et nous joignons *CG*. On a alors *GB* égale à *CE*. Or *GB* est égale à *GC*, donc *GC* est égale à *CE*. Or l'angle *EGC* est le double de l'angle *EBC*. Nous menons donc *BC* jusqu'en *H*. On a, à partir du triangle *EBC*, l'angle *BEC* égal au

د ب جـ مثلا زاوية ب جـ د. لكن زاوية ط د ب الخارجة مثل زاويتي / د ب جـ د جـ ب الداخلتين. فقد تهيأ انقسام زاوية ط د ب بثلاثة أقسام ٣٨-و متساوية بهذه المقدمة؛ وذلك ما أردنا بيانه.

تحليل الثالثة: فعلى التحليل، إذا كان ذلك كذلك، فلنصل ب ه جـ ه جـ ح، فيكون شكل ب جـ ح ه متوازي ضلعي ب ه جـ ح ومساوي ضلعي ب ح جـ ه، لأن مثلث ب ز ه متساوي ساقي ب ز ز ه، ومثلث ح ز جـ متساوي ساقي جـ ز ز ح. وإذا كان ذلك كذلك، يكون ح جـ يوازي ب ه وزوايا ز ب ه ز ه ب ز ح جـ ز جـ ح متساوية، فزاوية ب ح ه مثل زاوية ب ه ح، لأنها مثل زاوية ب جـ ه المساوية لزاوية جـ ب ه، أعني زاوية ب ه ح. لكن زاوية ح ز ب مثلا زاوية ز ه ب، فهي إذاً مثلا زاوية ز ح ب. فلنخرج جـ ب إلى ط، فزاويتا ح ز ب ز ح ب الداخلتين مثل زاوية ط ب ح الخارجة. فقد تهيأ انقسام زاوية ط ب ح بثلاثة أقسام متساوية بهذا العمل؛ وذلك ما أردنا بيانه./



تحليل الرابعة: نخرج خط ب ز ه ونصل جـ ز، فيكون ز ب مثل جـ ه. ٣٨-ظ لكن ز ب مثل ز جـ، ف ز جـ مثل جـ ه. لكن زاوية ه ز جـ مثلا زاوية ه ب جـ، فنخرج ب جـ إلى ح، فيكون من مثلث ه ب جـ زاوية ب ه جـ مثلي زاوية

1 د ب جـ: بحـ – 5 متوازي: المتوازي – 6 ز ه: د ه – 7 ز ح: ز ب – 11 مثل زاوية ط ب ح: متاكلة – 12 تهيأ انقسام: متاكلة.

double de l'angle *EBC*; l'angle *ECH* externe est donc égal à la somme des angles *CEB* et *EBC*. Il est donc possible de diviser l'angle *ACH* en trois parties égales. Ce qu'il fallait démontrer.

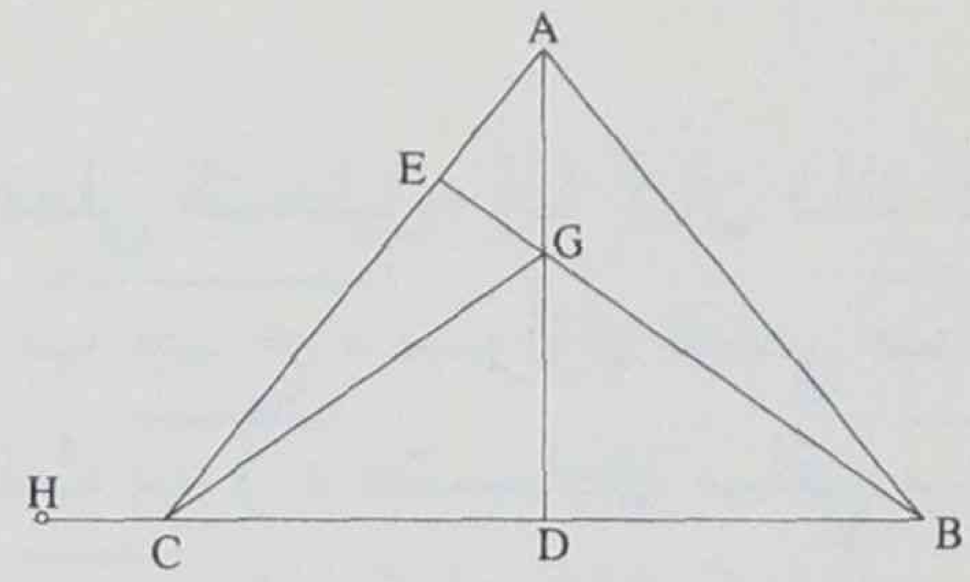


Fig. 28

<*Analyse du cinquième lemme*> : Il nous faut méditer le cinquième problème et nous demander s'il conduit à un lemme pour la division de l'angle en trois parties égales.

Démonstrations d'un lemme pour ces propositions

Nous voulons construire un triangle avec un angle donné tel que l'un de ses angles soit le double de l'autre et que la somme de tous les deux soit égale à un angle externe et que ce soit un angle donné.

Soit l'angle donné l'angle *DCB* et l'angle externe l'angle *DCA* ou *BCH*; nous voulons ce que nous avons dit.

Nous traçons de centre *C* et à la distance *CA* le cercle *ADB* et nous
39r prolongeons / *DCH*. Nous menons du point *D* la droite *DEG* telle que *EG* soit égale à *EC*, d'après ce que nous avons montré dans le lemme. Je dis que l'angle *DEC* est le double de l'angle *EDC* et que la somme des deux est égale à l'angle *ACD* ou à l'angle *BCH*.

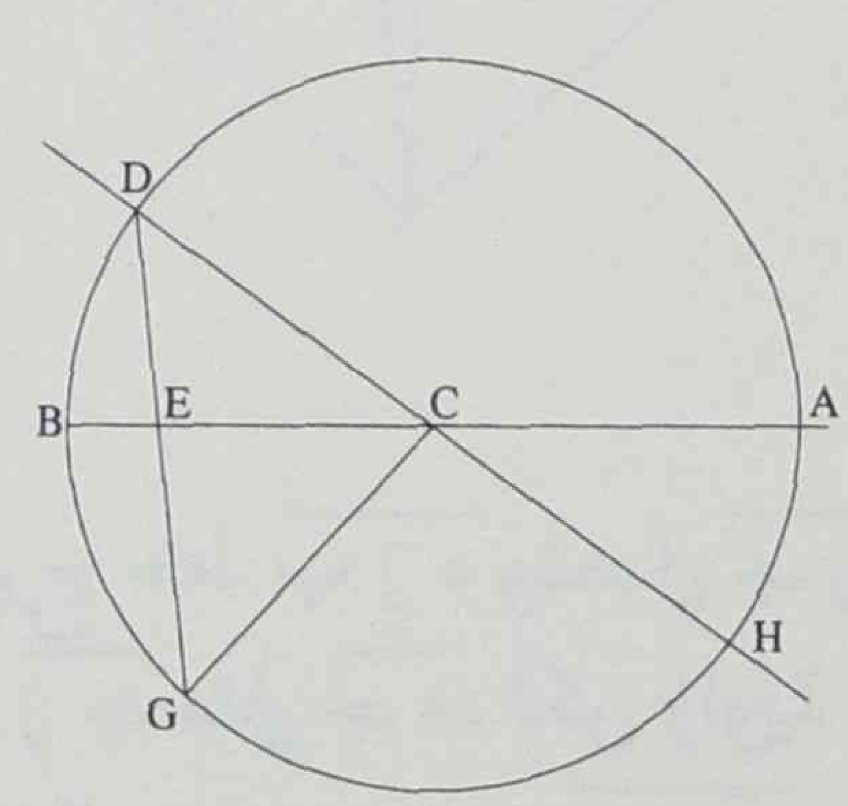
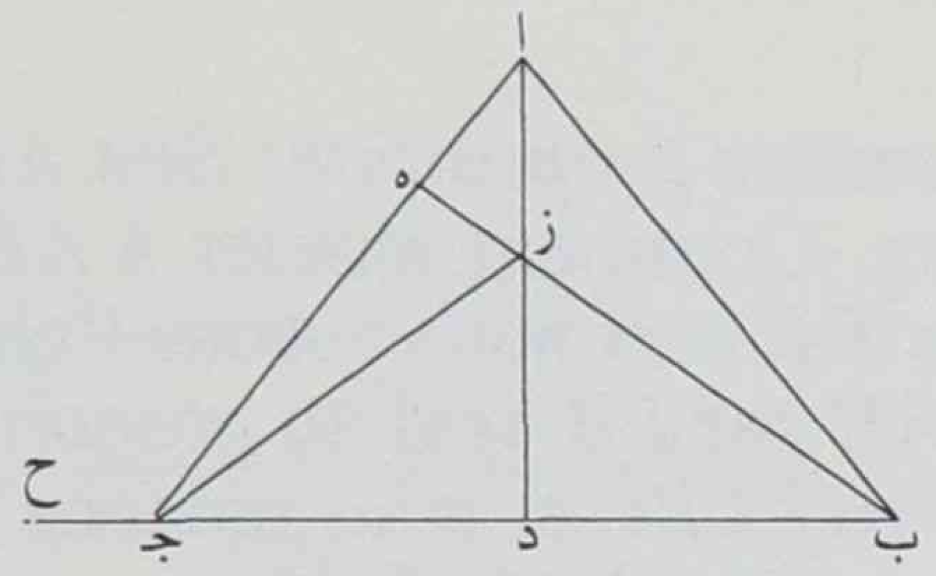


Fig. 29

ه ب جـ، فزاوية ه جـ ح الخارجة مثل زاويتي جـ ه ب ه ب جـ. فقد تهيأ انقسام زاوية ا جـ ح بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا بيانه.



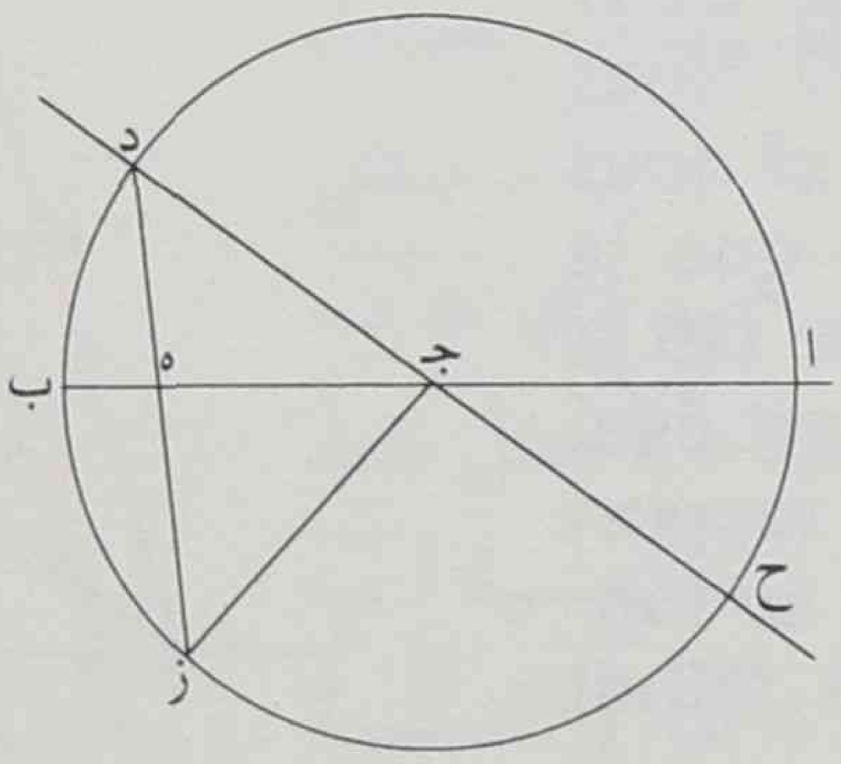
وينبغي أن نتأمل المسألة الخامسة، وهل هي تؤدي ⟨إلى⟩ مقدمة قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية.

البراهين على مقدمة هذه الأشكال

نريد أن نعمل مثلثًا على زاوية مفروضة يكون إحدى زواياه مثلي الزاوية الأخرى وكلتاهما مثل زاوية خارجة ولتكن زاوية مفروضة.

فلتكن الزاوية المفروضة زاوية د جـ ب والزاوية الخارجة زاوية د جـ ا أو ب جـ ح؛ ونريد ما قلنا.

فندير على مركز جـ وببعد جـ ا دائرة ا د ب، ونخرج / د جـ ح على استقامة، ونخرج من نقطة د خط د ه ز، يكون ه ز مثل ه جـ على ما بينا في المقدمة. أقول: إن زاوية د ه جـ مثلا زاوية ه د جـ، وكلتاهما مثل زاوية ا جـ د أو زاوية ب جـ ح. ٣٩-و



6 الزاوية: زاوية – 7 كلتاهما: كلاهما / خارجة: متآكلة / ولتكن: متآكلة – 8 المفروضة: متآكلة – 12 وكلتاهما: وكلاهما.

Démonstration: Joignons *CG*; l'angle *CED* est alors égal à la somme des angles égaux *ECG* et *EGC*. Or l'angle *EGC* est égal à l'angle *EDC*, donc l'angle *DEC* est le double de l'angle *EDC*. Mais la somme des deux angles *E* et *D* du triangle *EDC* est égale à l'angle *ECH* ou à l'angle *DCA*. Ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de la première proposition: Soit *ABC* un triangle dont les côtés *AB* et *AC* sont égaux. Comment ajouter à *AB* un excédent comme *BD* tel que si nous joignons *DC* et si nous posons l'angle *DCE* égal à l'angle *EDC* on ait le produit de *AE* par *EB* égal au produit de *AB* par *BD*? Nous
39v menons la perpendiculaire *AG* à *BC* et nous menons / la droite *CE* telle que l'angle *CEB* soit le double de l'angle *ECB*. Nous menons *EB* jusqu'en *D* tel que *ED* soit égal à *EC*. Nous joignons *CD*, nous menons *CB* jusqu'en *I* et nous joignons *BH*.

Nous avons montré que la droite *BH* est égale à la droite *BE*. Or le rapport de *AC* à *CH* est égal au rapport de *AE* à *EH*; mais *CH* est égale à *EB* d'après ce que nous avons montré. Le rapport de *AC*, c'est-à-dire *AB*, à *BE* est donc égal au rapport de *AE* à *EH*; mais *EH* est égale à *BD*, donc le rapport de *AB* à *BE* est égal au rapport de *AE* à *BD*. Le produit de *BA* par *BD* est donc égal au produit de *AE* par *BE*. Ce qu'il fallait démontrer.

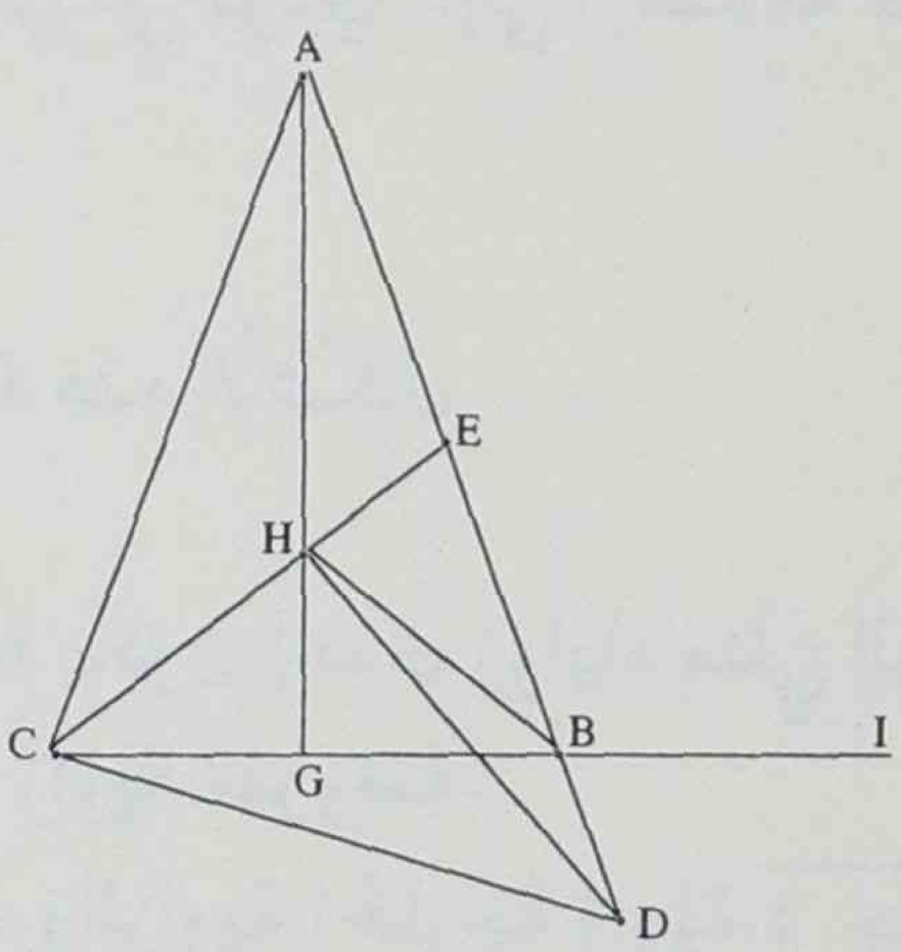


Fig. 30

Démonstration de la deuxième proposition: Nous menons *CA* et *DB* jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *H*. Nous menons la perpendiculaire *HG* à *CD* et nous menons la droite *CB*. Elle engendre le triangle *BCD* tel que l'angle *CBD* soit le double de l'angle *BCD*. Nous menons *BA* parallèle à *CD* et nous menons *DEA*; il est clair que la droite *DE* est égale à la droite *DB* et que le rapport de *CD* à *DE* est égal au rapport de *AB* à *AE*. Le rapport
40r de *CD* à *DB* / est donc égal au rapport de *AB* à *AE*. Ce qu'il fallait démontrer.

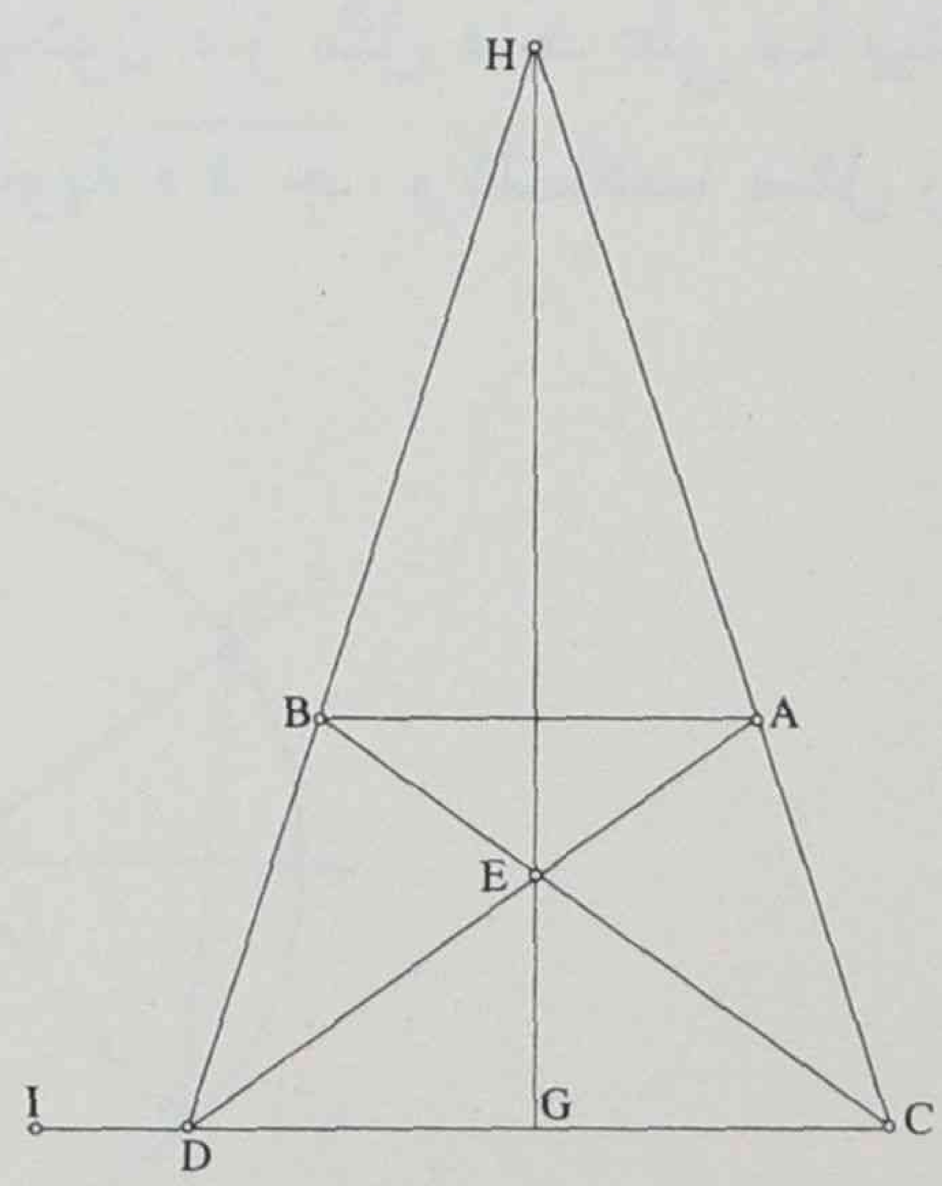
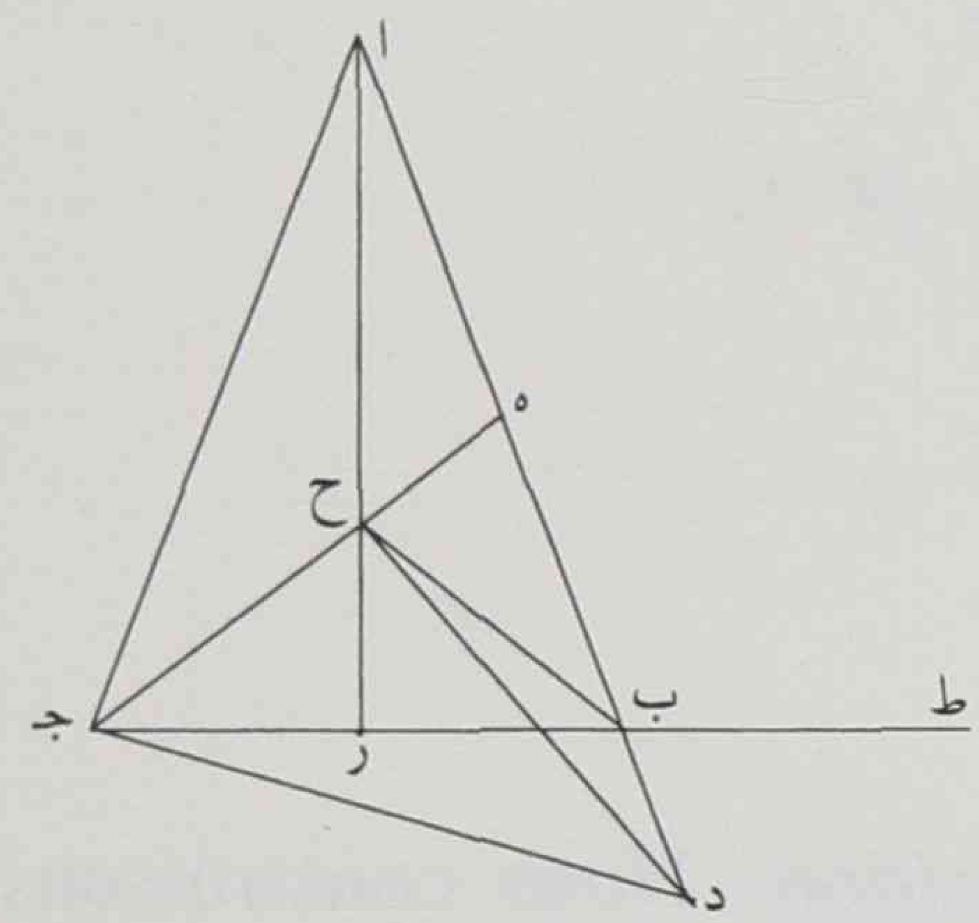


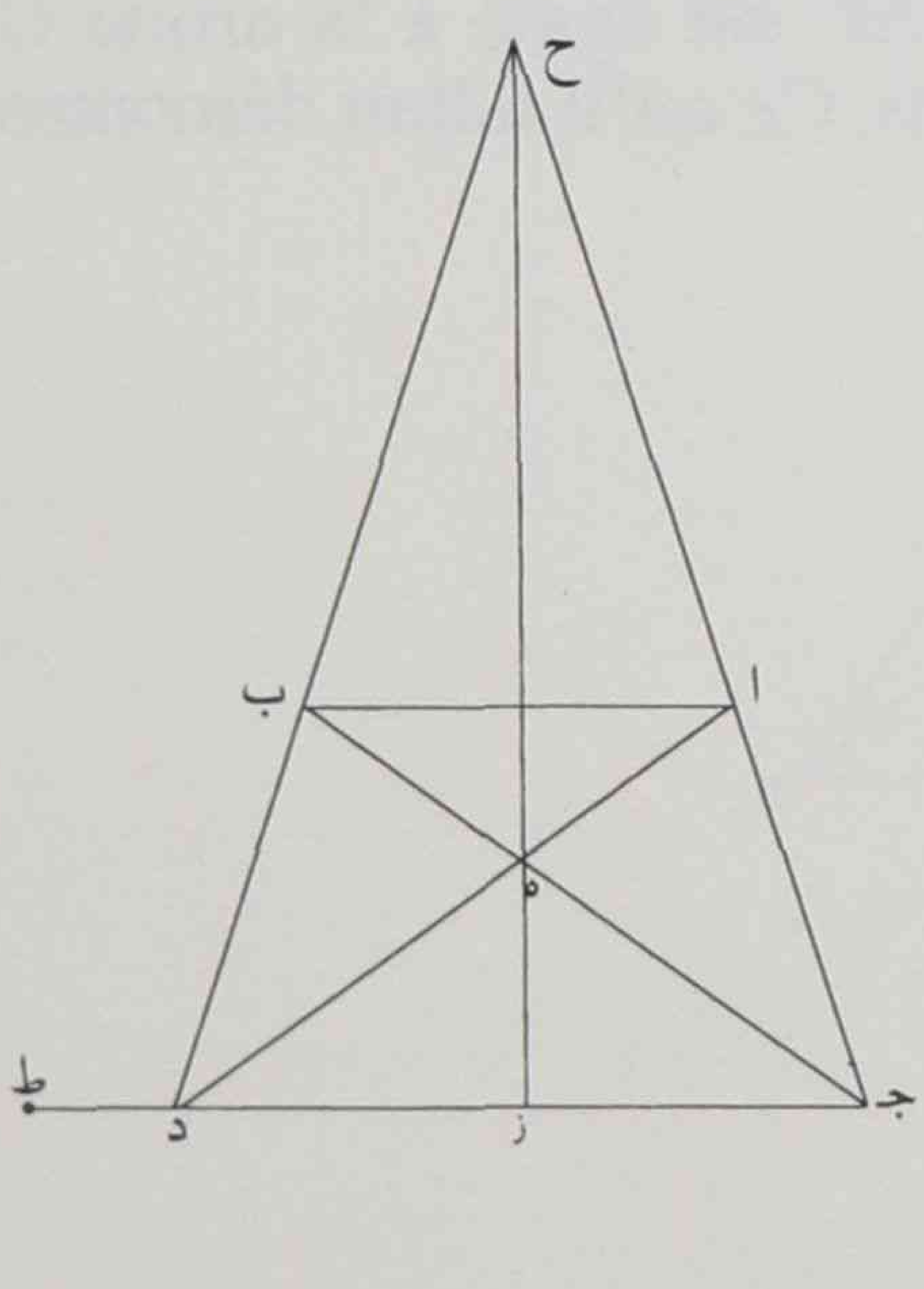
Fig. 31

برهان ذلك: أنّا نصل جـ ز، فزاوية جـ ه د مثل زاويتي ه جـ ز ه ز جـ المتساويتين. لكن زاوية ه ز جـ مثل زاوية ه د جـ، فزاوية د ه جـ مثلا زاوية ه د جـ؛ وزاويتا ه د من مثلث ه د جـ مثل زاوية ه جـ ح أو زاوية د جـ ا؛ وذلك ما أردنا بيانه.

البرهان على الشكل الأول: مثلث ا ب جـ متساوي ساقي ا ب ا جـ؛ كيف نزيد في ا ب زيادة كـ ب د، إذا وصلنا د جـ وجعلنا زاوية د جـ ه مثل زاوية ه د جـ كان ضرب ا ه في ه ب مثل ضرب ا ب في ب د؟ ونخرج عمود ا ز على ب جـ، ونخرج / خط جـ ه، تكون زاوية جـ ه ب مثلي زاوية ه جـ ب. ٣٩-ظ
ونخرج ه ب إلى د، يكون ه د مثل ه جـ، ونصل جـ د، ونخرج جـ ب إلى ط ونصل ب ح.



فقد بيّنا أن خط ب ح مثل خط ب ه. ولكن نسبة ا جـ إلى جـ ح كنسبة ا ه إلى ه ح، وجـ ح مثل ه ب على ما بيّنا. فنسبة ا جـ، أعني ا ب، إلى ب ه كنسبة ا ه إلى ه ح، وه ح مساوٍ لـ ب د، فنسبة ا ب إلى ب ه كنسبة ا ه إلى ب د؛ فضرب ب ا في ب د مثل ضرب ا ه في ب ه؛ وذلك ما أردنا بيانه.



البرهان على الشكل الثاني: نخرج جـ ا د ب حتى يلتقيا على ح، ونخرج عمود ح ز على جـ د، ونخرج خط جـ ب يحدث مثلث ب جـ د، تكون زاوية جـ ب د مثلي زاوية ب جـ د. ونخرج ب ا يوازي جـ د، ونخرج د ه ا، فبيّن أن خط د ا مثل خط د ب، وأن نسبة جـ د إلى د ه كنسبة ا ب إلى ا ه، فنسبة جـ د إلى د ب / كنسبة ا ب إلى ا ه؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ٤٠-و

3 وزاويتا: وزاويتي – 6 زيادة ... د جـ: متآكلة – 7 ا ز: ا ب – 24 د ا: د ه.

Démonstration de la troisième proposition: Nous construisons le triangle *BHC* tel que l'angle *BHC* soit le double de l'angle *BCH*. Nous menons *CE* égale à *HB* et *E* sur la bissectrice de l'angle *BHC* et nous joignons *BE* et *CE*. Puisque les angles *C* et *H* du triangle *CGH* sont égaux et que *CE* est égale à *BH*, alors *BE* est parallèle à *CH* et les angles *B*, *E*, *H*, *C* des triangles *BEG* et *CHG* sont égaux, et l'angle *BCE* est égal à l'angle *CHE*; l'angle *BCE* est donc égal à l'angle *BEH* et la droite *BH* est égale à la droite *BE*. C'est pourquoi la droite *CE* est égale à <la droite> *BE*. Les deux droites *BE* et *CE* sont donc égales; le point *E* tombe donc sur la droite *AD*, la hauteur; la droite *HG* est égale à la droite *CG* et *GE* est égale à *GB*. Nous avons donc construit ce que nous voulions. Ce qu'il fallait démontrer.

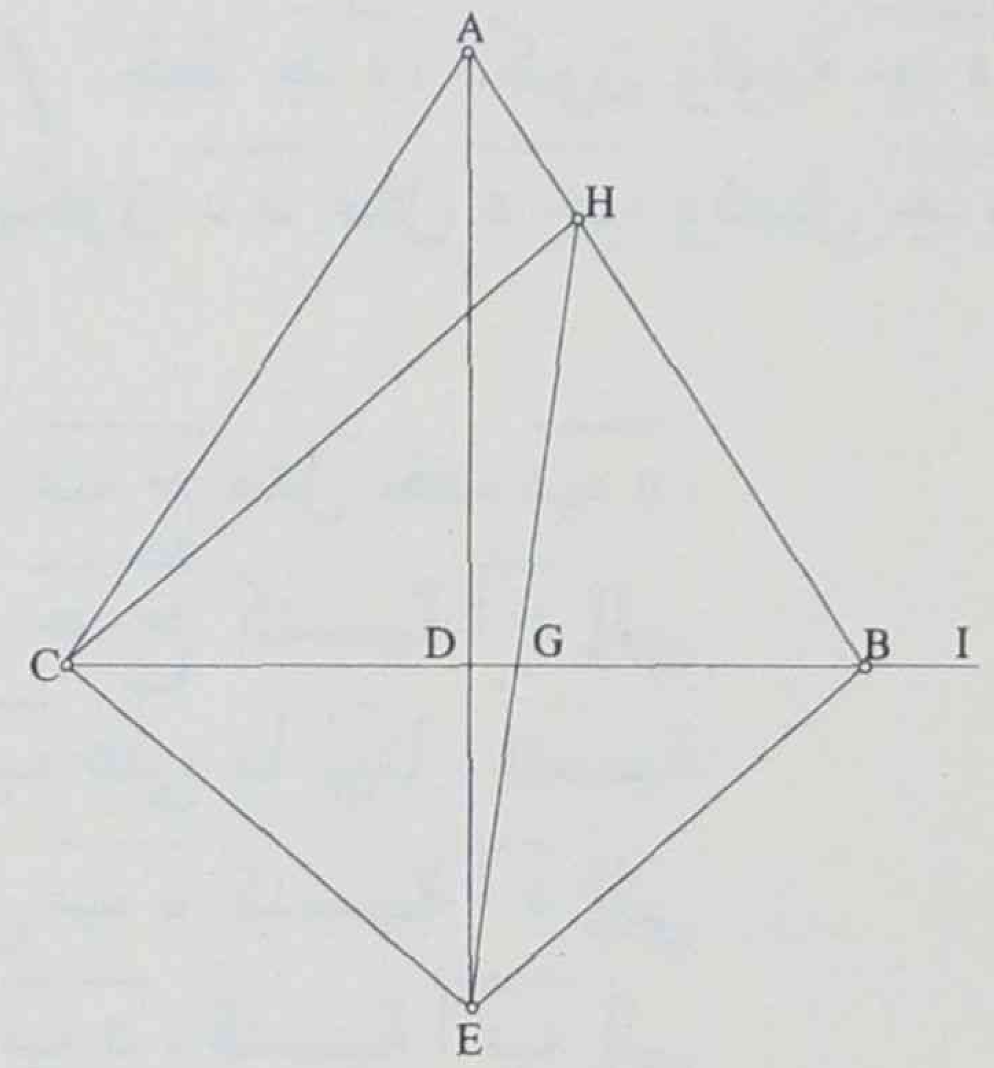


Fig. 32

Démonstration de la quatrième proposition: Nous construisons le triangle *BEC* tel que l'angle *E* soit le double de l'angle *B*, et nous joignons
40v *GC*; l'angle *E* est donc le double de l'angle *B*; mais l'angle *EGC* / est le double de l'angle *B*, donc la droite *EC* est égale à la droite *GC*. Or la droite *GC* est égale à la droite *GB*, donc la droite *EC* est égale à la droite *GB*. Nous avons donc construit ce que nous voulions. Ce qu'il fallait démontrer.

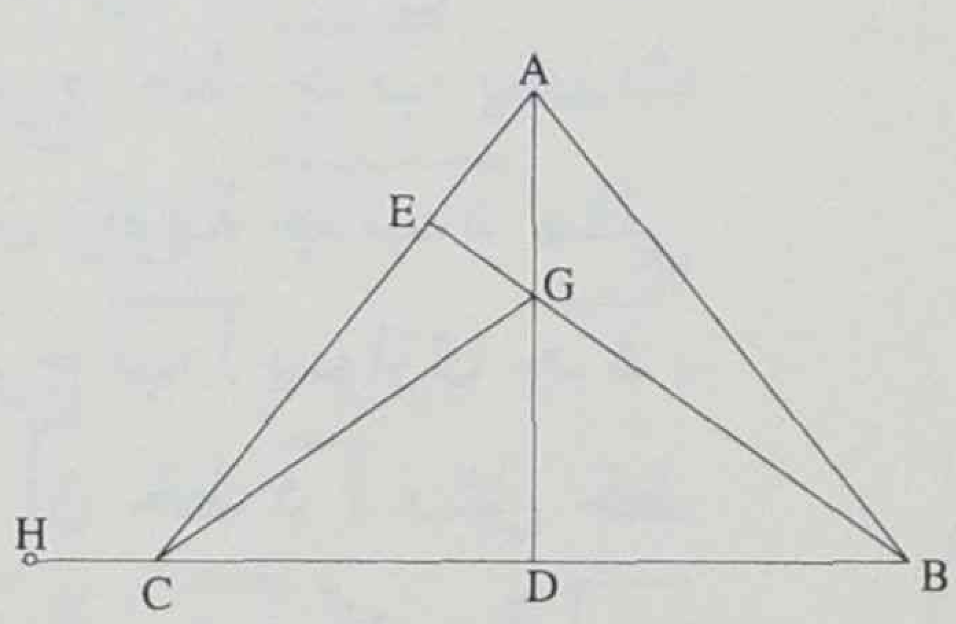
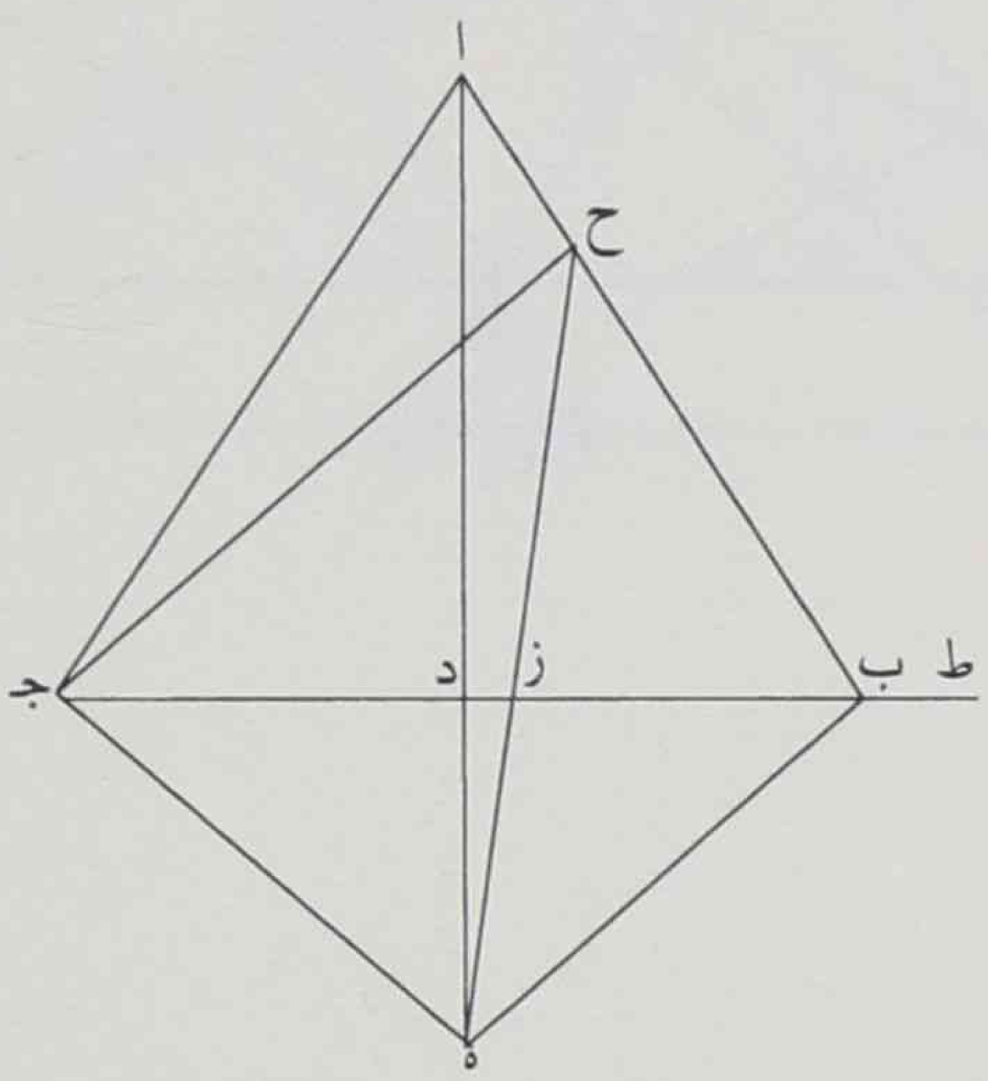
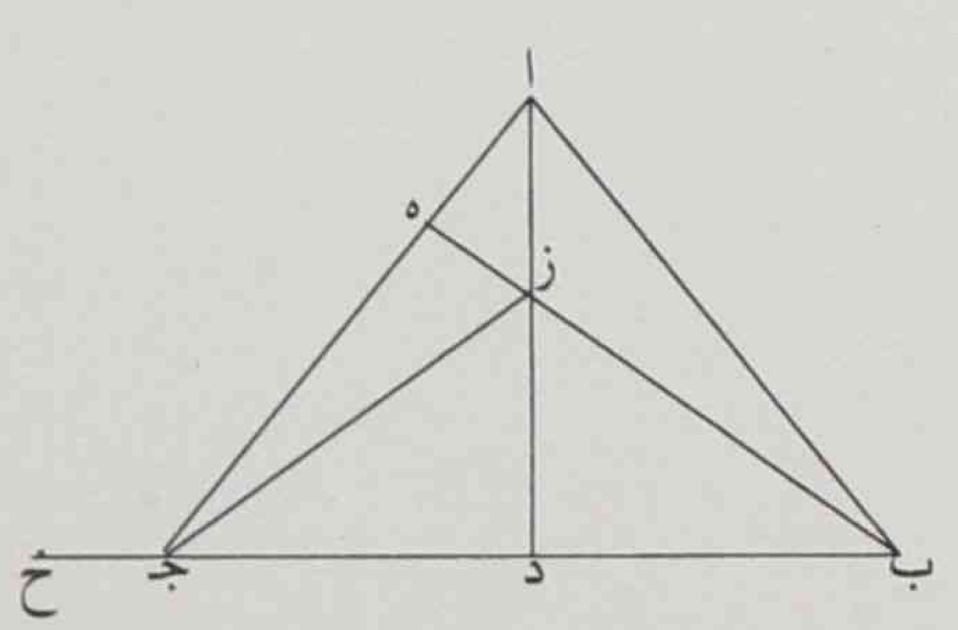


Fig. 33

البرهان على الشكل الثالث: نعمل مثلث ب ح جـ، تكون زاوية ب ح جـ مثلي زاوية ب جـ ح. ونخرج جـ ه مثل ح ب ‹وه› على منتصف زاوية ب ح جـ، ونصل ب ه جـ ه. فلأن زاويتي جـ ح من مثلث جـ ز ح متساويتان وجـ ه مثل ب ح، يكون ب ه يوازي جـ ح وزوايا ب ه ح جـ من مثلثي ب ه ز جـ ح ز متساوية، وزاوية ب جـ ه مثل زاوية جـ ح ه، تكون زاوية ب جـ ه مثل زاوية ب ه ح، فخط ب ح مثل خط ب ه؛ ولذلك خط جـ ه مثل ب ه، فخطا ب ه جـ ه متساويان، فنقطة ه وقعت على خط ا د العمود، وخط ح ز مثل خط جـ ز، وز ه مثل ز ب. فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا بيانه.



البرهان على الشكل الرابع: نعمل مثلث ب ه جـ، تكون زاوية ه مثلي زاوية ب، ونصل ز جـ، فزاوية ه مثلا زاوية ب؛ وزاوية ه ز جـ / مثلا زاوية ٤٠-ظ ب، فخط ه جـ مثل خط ز جـ. لكن خط ز جـ مثل خط ز ب، فخط ه جـ مثل خط ز ب. فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا بيانه.



4 متساويتان: متساويتين / ب ح: ب جـ – 7 فخطا: فخطي / متساويان: متساويين – 8 فقد عملنا ما أردنا: متآكلة.

Démonstration de la cinquième proposition: Ce problème se ramène au quatrième problème. Si en effet nous menons *DH* jusqu'au milieu de *CB*, on a le triangle *BCD* isocèle, avec *CD* égal à *BD*. Nous menons la droite *CIGE* telle que la droite *BG* soit égale à la droite *CI*, d'après ce que nous avons construit dans le quatrième problème. Nous menons *BI*. *BI* est donc égale à *CI*; elle est alors égale à *BG*. Or *CIE* est le double de *BI*, car elle est la corde de l'angle droit *B*. Mais on a mené *BI* égale à *IC*; par conséquent *BG* est la moitié de *CE*; sa construction est donc facile par ce qui précède. Ce qu'il fallait démontrer.

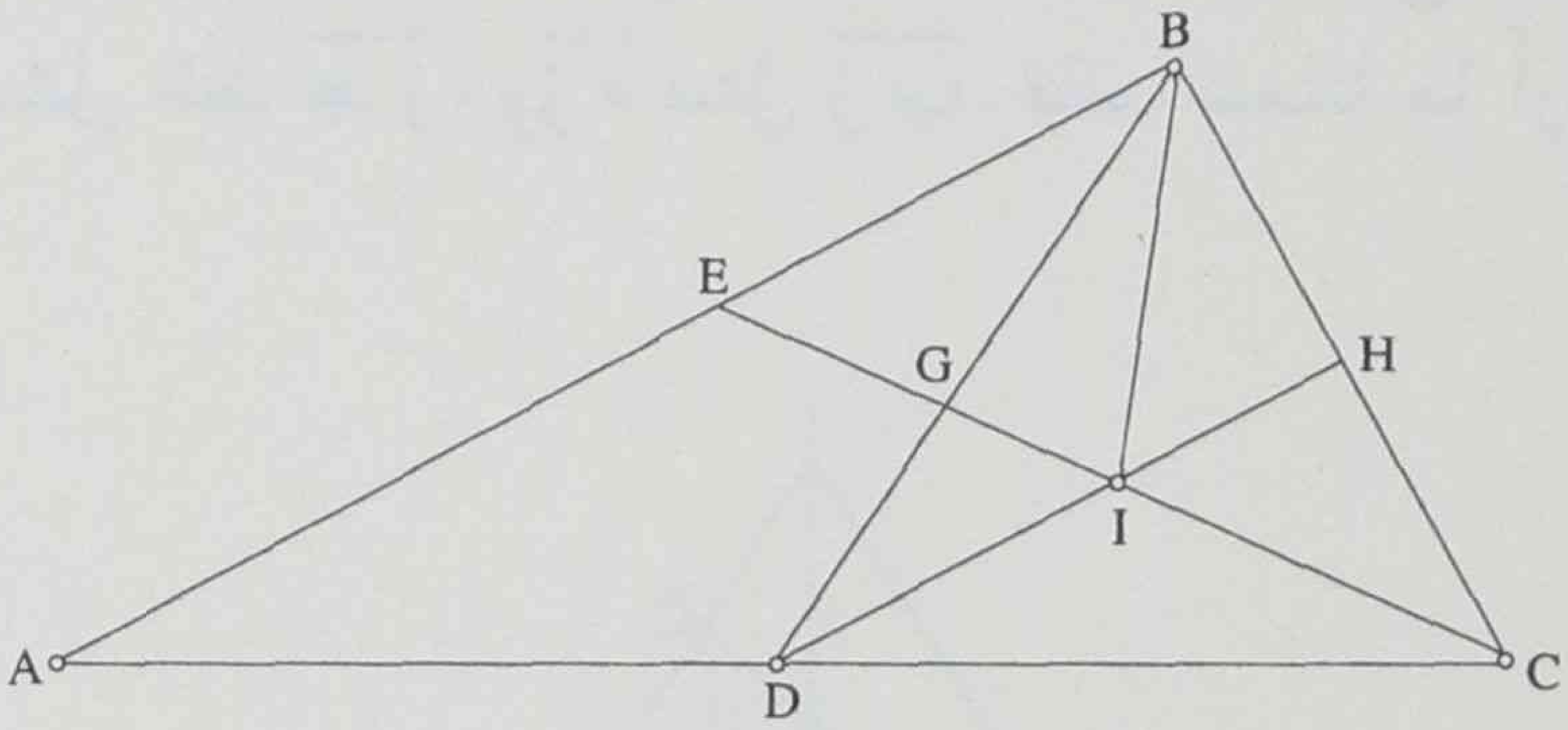
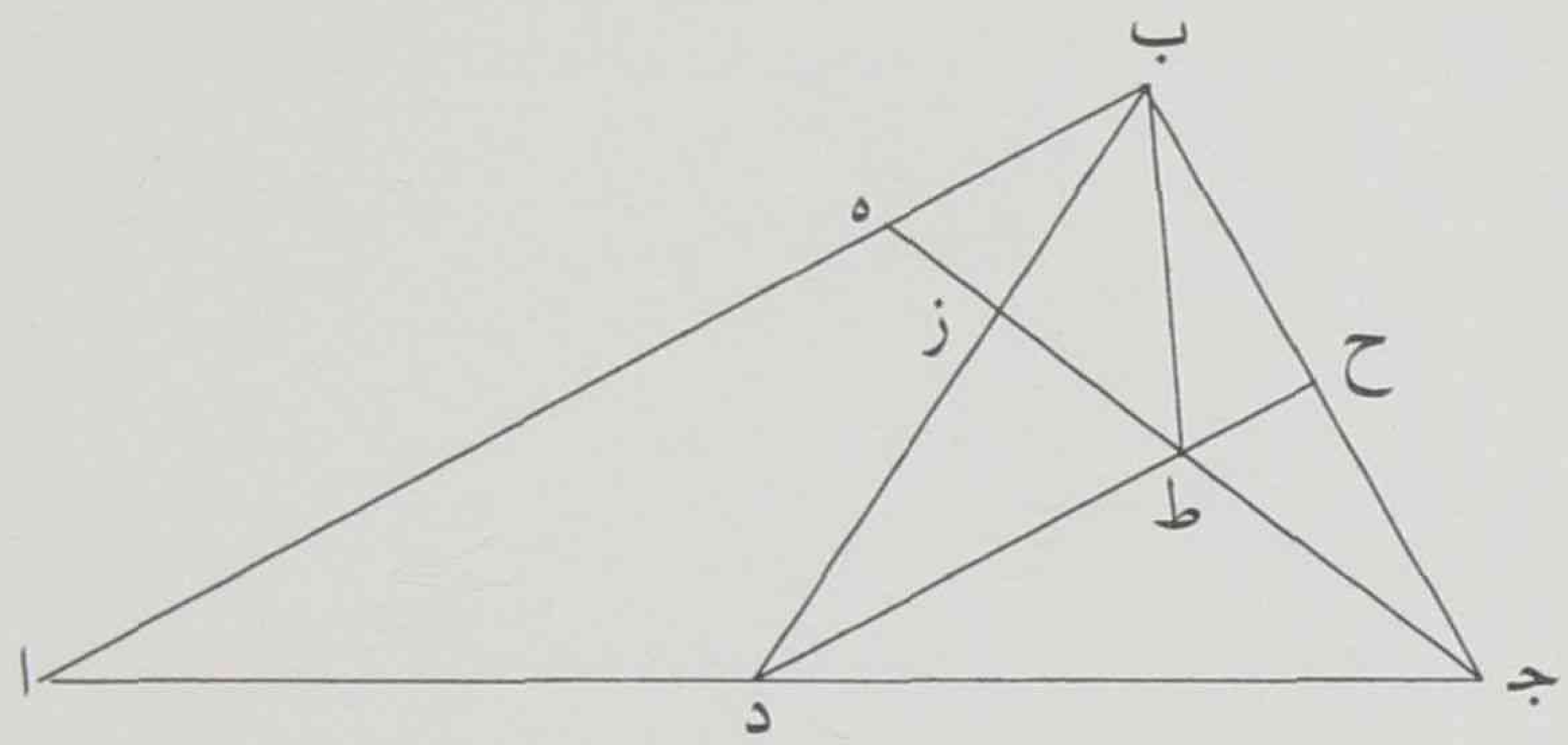


Fig. 34

البرهان على الشكل الخامس: هذه المسألة ترجع إلى المسألة الرابعة، وذلك أنّا إذا أخرجنا د ح على انتصاف جـ ب، يكون مثلث ب جـ د متساوي الساقين، جـ د مثل ب د. ونخرج خط جـ ط ز ه، يكون خط ب ز مساوياً لخط جـ ط، على ما عملنا في المسألة الرابعة. ونخرج ب ط، فـ ب ط مثل جـ ط، فهو مثل ب ز. لكن جـ ط ه مثلا ب ط، لأنه وتر زاوية ب القائمة وقد خرج ب ط مثل ط جـ، فيصير إذاً ب ز نصف جـ ه، وعمله بما تقدم سهل؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



4 المسألة: فوق السطر – 6 ب ط: كتب أولاً ر ط، ثم ضرب عليها بالقلم – 7 نبين: متآكلة.

TEXTE ET TRADUCTION

VIII

Istikhrāj al-muwassaṭayn wa-qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya bi-ṭarīq al-handasa

Détermination des deux moyennes et division de l'angle à côtés droits en trois parties égales par la géométrie

Au Nom de Dieu Clément et Miséricordieux
Que Dieu nous aide

La détermination des deux moyennes et la division de l'angle dont les côtés sont des droites en trois parties égales, par la voie de la géométrie

Rectification de
Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī

Lemme requis : Nous voulons appliquer au point B donné une hyperbole que les deux droites CD et CE ne rencontrent pas, mais dont elles s'approchent continûment si on les prolonge continûment.

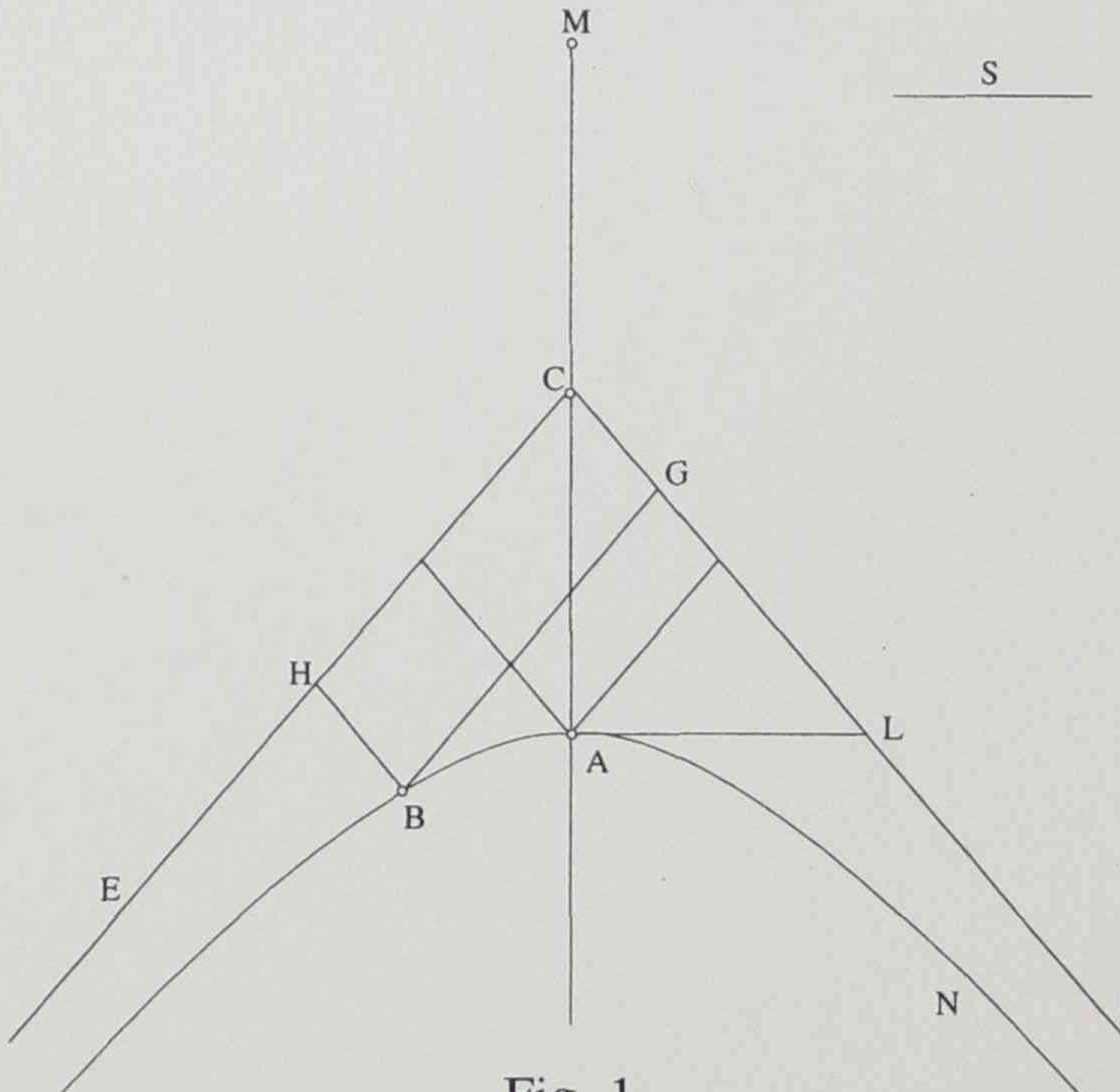


Fig. 1

Menons les deux droites BH et BG parallèles à CD et CE et posons le parallélogramme CA égal au parallélogramme CB, et tel que ses côtés soient égaux. Joignons CA et menons LA perpendiculairement à CA ; posons que le carré de LA puisse AC par S. Prolongeons CA jusqu'en M tel que CM soit égal à CA, et appliquons au point A une hyperbole telle que AM soit son

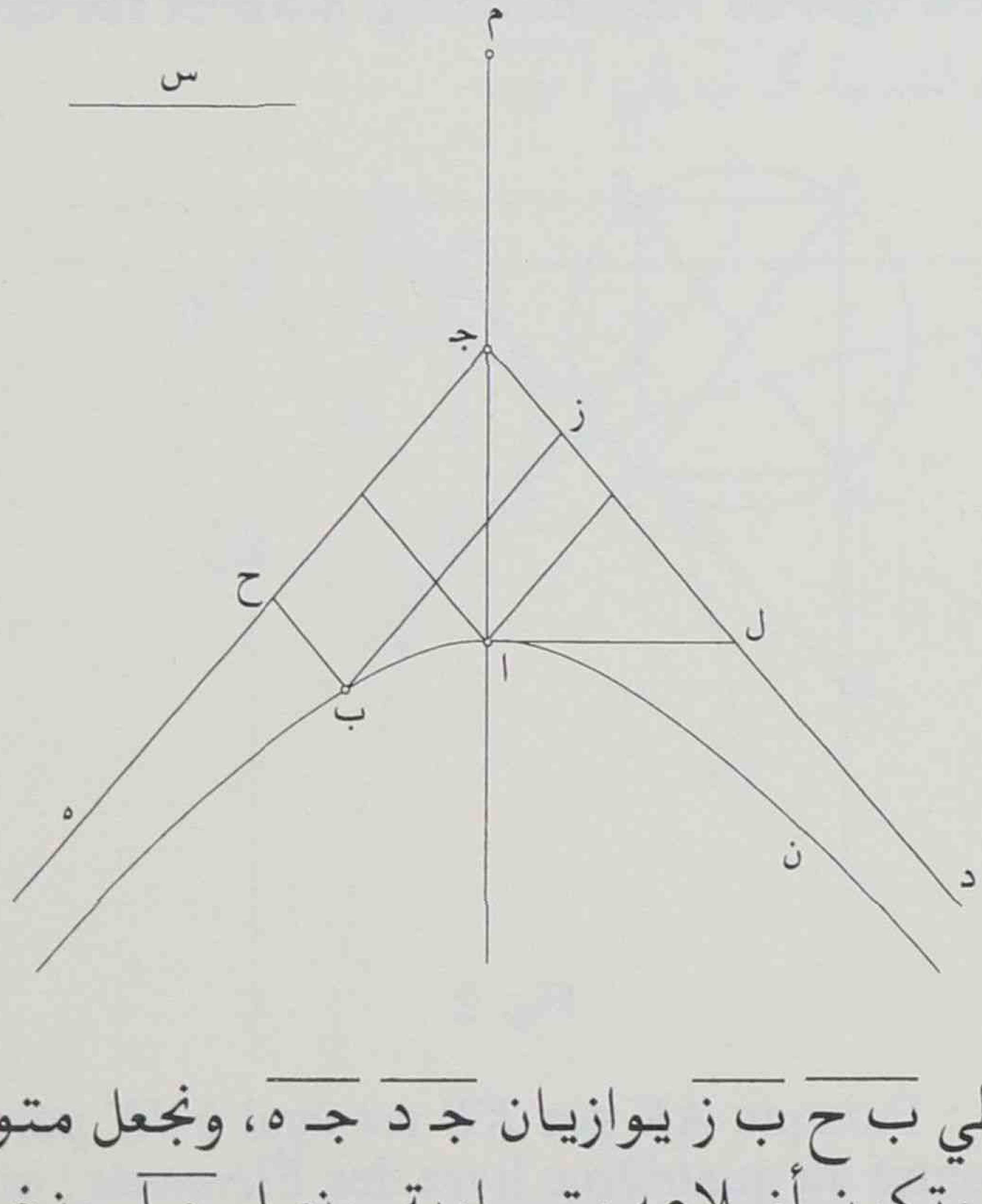
بسم الله الرحمن الرحيم ۳۰

ربّ أعن

استخراج الموسطين وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية بطريق الهندسة

إصلاح أحمد بن محمد بن عبد الجليل

مقدمة يطالب بها : نريد أن نضيف إلى نقطة ب المعطاة قطعًا زائداً لا يلقيانه خطا جـ د جـ ه بل يقربانه دائماً بإخراجهما على استقامتهما دائماً.



فنخرج خطي ب ح ب ز يوازيان جـ د جـ ه، ونجعل متوازي جـ ا يعدل متوازي جـ ب، وتكون أضلاعه متساوية. ونصل جـ ا، ونخرج ل ا عموداً على جـ ا، ونجعل مربع ل ا يقوى على ا جـ في س. ونخرج جـ ا إلى م، يكون جـ م مثل جـ ا، ونضيف إلى نقطة ا قطعًا زائداً، يكون ا م محوره وضعف س

7 خطا : خطي – 9 عموداً : عمود.

axe et le double de *S* son côté droit, d'après ce qu'a montré Apollonius dans le livre des *Coniques*[1]. Soit la section *AN*. Il est clair que la droite *AL* est tangente à la section *NA*, et que le carré de *LA* est égal au quart de *AM* par le double de *S*. *CD* et *CE* ne rencontrent donc pas la section *AN*, mais s'en approchent continûment, d'après ce qu'a montré Apollonius dans le second livre des *Coniques*[2] ; et il est clair que le point *B* se trouve sur la section car le parallélogramme *CB* est égal au parallélogramme *CA*.

Ainsi, une fois introduit ce que nous avons introduit, nous disons que les droites *AB* et *AC* sont données et nous avons posé qu'elles entourent l'angle droit *A*. Et ce qu'on cherche, c'est de trouver deux droites entre *AB* et *AC* pour que les quatre se succèdent en proportion. /

31 Achevons le parallélogramme *AB* et que *AB* soit plus grand *AC* ; prolongeons *AB* et *AC* continûment, et appliquons au point *D* l'hyperbole *DGE*, sous la condition que *AC* et *AB* s'en approchent continûment, sans la rencontrer ; soit *GDE*. Traçons un cercle circonscrit au parallélogramme *AD*. Il est nécessaire qu'il coupe la section en un autre point que le point *D*. Qu'il la coupe en *J*. Joignons *DJ* et prolongeons-la de part et d'autre jusqu'en *K* et *L*.

Je dis que *BK* et *CL* sont celles qu'on recherche, c'est-à-dire que le rapport de *AB* à *CL* est égal au rapport de *CL* à *KB* et est égal au rapport de *KB* à *AC*.

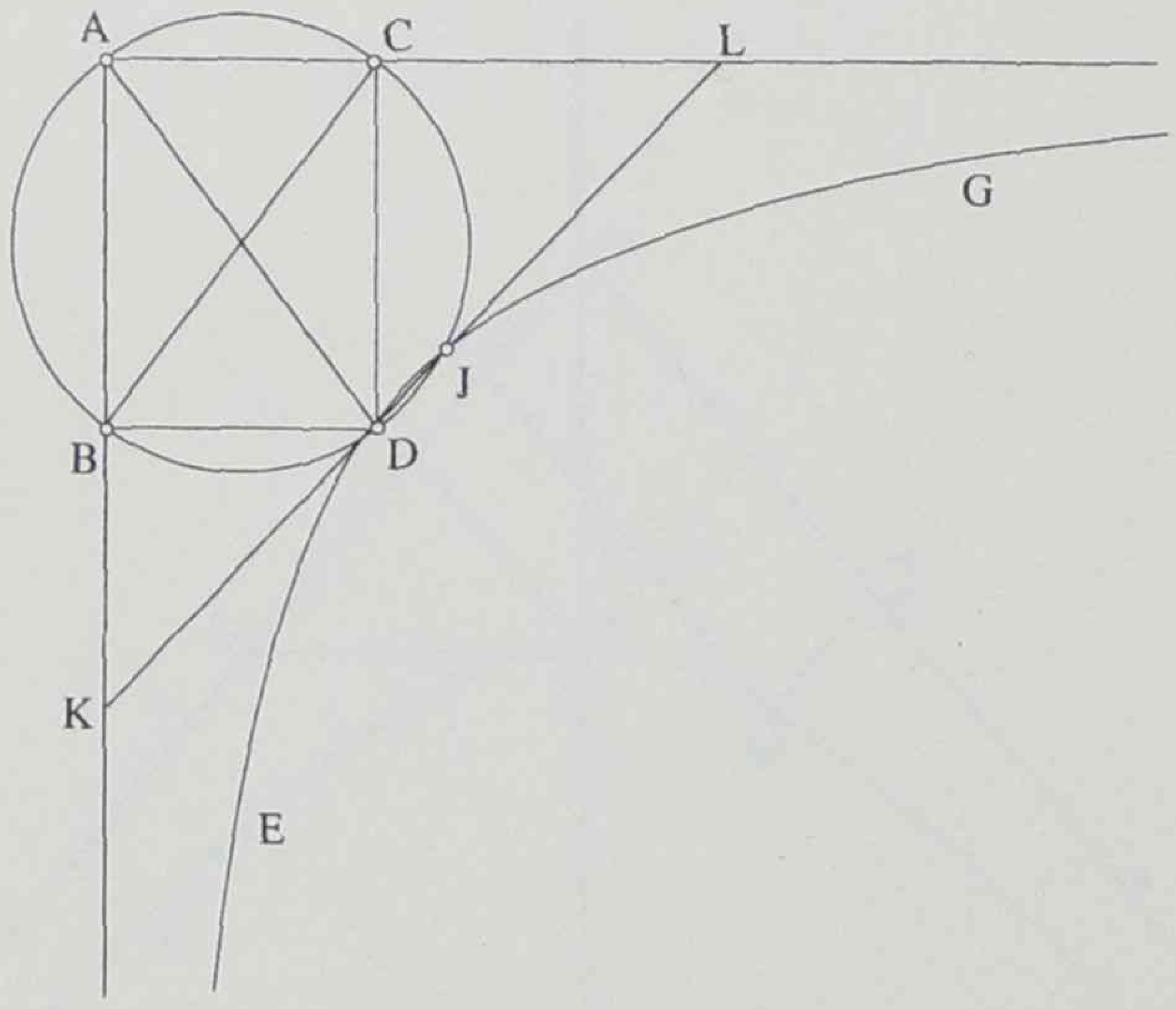


Fig. 2

Démonstration : Puisque *AK* par *KB* est égal à *JK* par *KD*, d'après ce qu'Euclide a démontré au quatrième livre des *Éléments* ; et puisque *KD* est égale à *JL*, *AK* par *KB* est donc égal à *DL* par *LJ* ; mais *DL* par *LJ* est égal

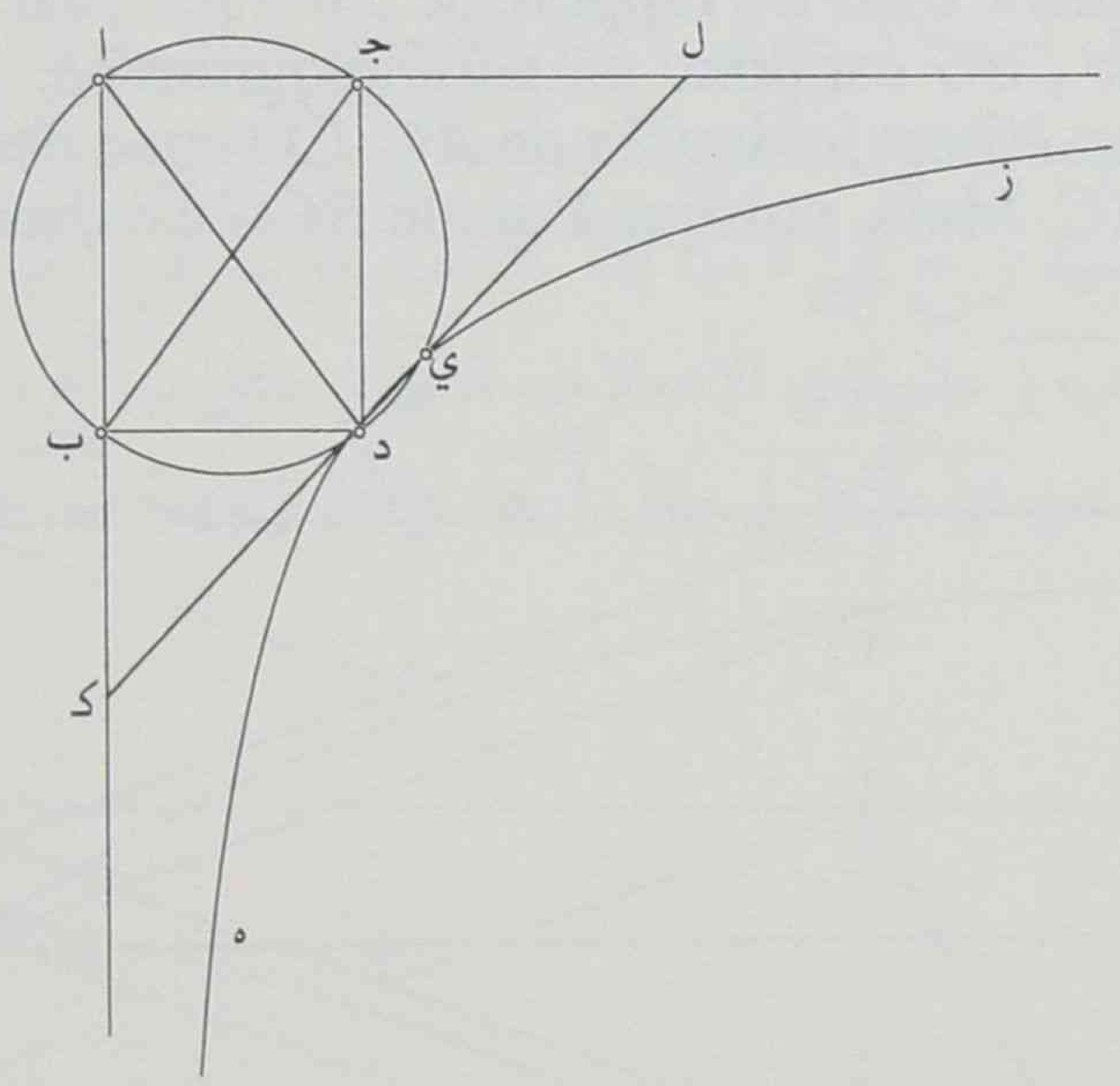
[1] Proposition 4 du livre II
[2] Proposition 14 du livre II.

ضلعه المنتصب، على ما بيّنه أبلونيوس في كتاب *المخروطات*، وهو قطع ا ن. فبيّنٌ أن خط ا ل يماس قطع ن ا، ومربع ل ا يعدل ربع ا م في ⟨ضعف⟩ س. فقطع ا ن لا يلقيانه جـ د جـ ه بل يقربانه دائمًا، على ما بيّنه أبلونيوس في الثانية من *المخروطات*؛ وبيّنٌ أن نقطة بَ تقع على القطع لأن متوازي جـ ب يعدل متوازي جـ ا.

فإذ قد قدمنا ما قدمنا؛ فنقول: إن خطي ا ب ا جـ المستقيمين معطيان، ووضعنا أنهما يحيطان بزاوية آ القائمة. والمطلوب: وجود خطين مستقيمين ⟨بين⟩ ا ب ا جـ لتكون الأربعة متوالية متناسبة. /

فلنتم سطح ا ب المتوازي الأضلاع، وليكن ا ب أطول من ا جـ، ونخرج ٣١
ا ب ا جـ على استقامتهما دائمًا، ونضيف إلى نقطة دَ قطع ز د ه الزائد، على الشريطة التي يقربانه ا جـ ا ب دائمًا ولا يلقيانه أبداً، وهو ز د ه. وندير دائرة تحيط بمتوازي ا د. فلا بدّ من أن تقطع القطع على نقطة سوى نقطة دَ، فلتقطعه على يَ. ونصل د ي ونخرجه في الجهتين إلى كـ ل.

أقول: إن ب كـ جـ ل هما المطلوبان، أعني أن نسبة ا ب إلى جـ ل كنسبة جـ ل إلى كـ ب وكنسبة كـ ب إلى ا جـ.



برهانه: لأن ا كـ في كـ ب مثل ي كـ في كـ د، كما بينه أقليدس في الرابعة من *الأصول*، ولأن كـ د مثل ي ل، فـ ا كـ في كـ ب مثل د ل في ل ي. لكن

2 ربع: مربع – 3 يلقيانه: يلتقيانه – 6 معطيان: معطان – 10 ز د ه: د ي ه – 11 التي: كذا، والعبارة ركيكة وإن كان المعنى واضحًا / يقربانه: يقرباه / يلقيانه: يلقياه.

à AL par LC, AK par KB est donc égal à AL par LC, et le rapport de AK à AL est égal au rapport de CL à KB. Mais le rapport de AK à AL est égal au rapport de DC à CL et le rapport de DC à CL est égal au rapport de CL à KB. Or le triangle KBD est semblable au triangle DCL ; le rapport de KB à BD est donc égal au rapport de DC à CL, et le rapport de DC à CL est égal au rapport de CL à KB et est égal au rapport de KB à BD. Ainsi, entre CD et BD il y a CL et KB et les quatre se succèdent en proportion. Ce qu'il fallait démontrer.

Division de l'angle en trois parties égales

Nous voulons diviser l'angle BAC donné dont les côtés sont des droites en trois parties égales.

Nous menons la droite CB perpendiculairement à AB et menons CD parallèle à AB et AD parallèle à BC. Nous construisons sur le point B une hyperbole que les droites DAE et DCG ne rencontrent pas mais dont elles s'approchent continûment si on les prolonge continûment. Soit BH. Nous
32 menons BH double de AC, nous menons HG parallèle à BC, / nous joignons AG qui coupe BC en J et nous partageons GJ en deux moitiés en I ; nous joignons CI. D'après ce qu'a montré Apollonius au second livre des *Coniques*, HG par JD est égal à BD ; le rapport de GH à AB est donc égal au rapport de AD à DG, c'est-à-dire égal au rapport de JC à CG, en raison de la similitude des deux triangles, c'est-à-dire égal au rapport de JB à BA, en raison de la similitude des triangles JCG et JBA. Le rapport de GH à AB est par conséquent égal au rapport de JB à AB ; JB est donc égal à HG et lui est parallèle ; BG est donc un parallélogramme. JG est donc égal à BH, c'est-à-dire que JG est le double de AC. Chacune des <droites> JI et IG est donc égale à AC. Mais, puisque l'angle BCG est droit, la droite IC est donc

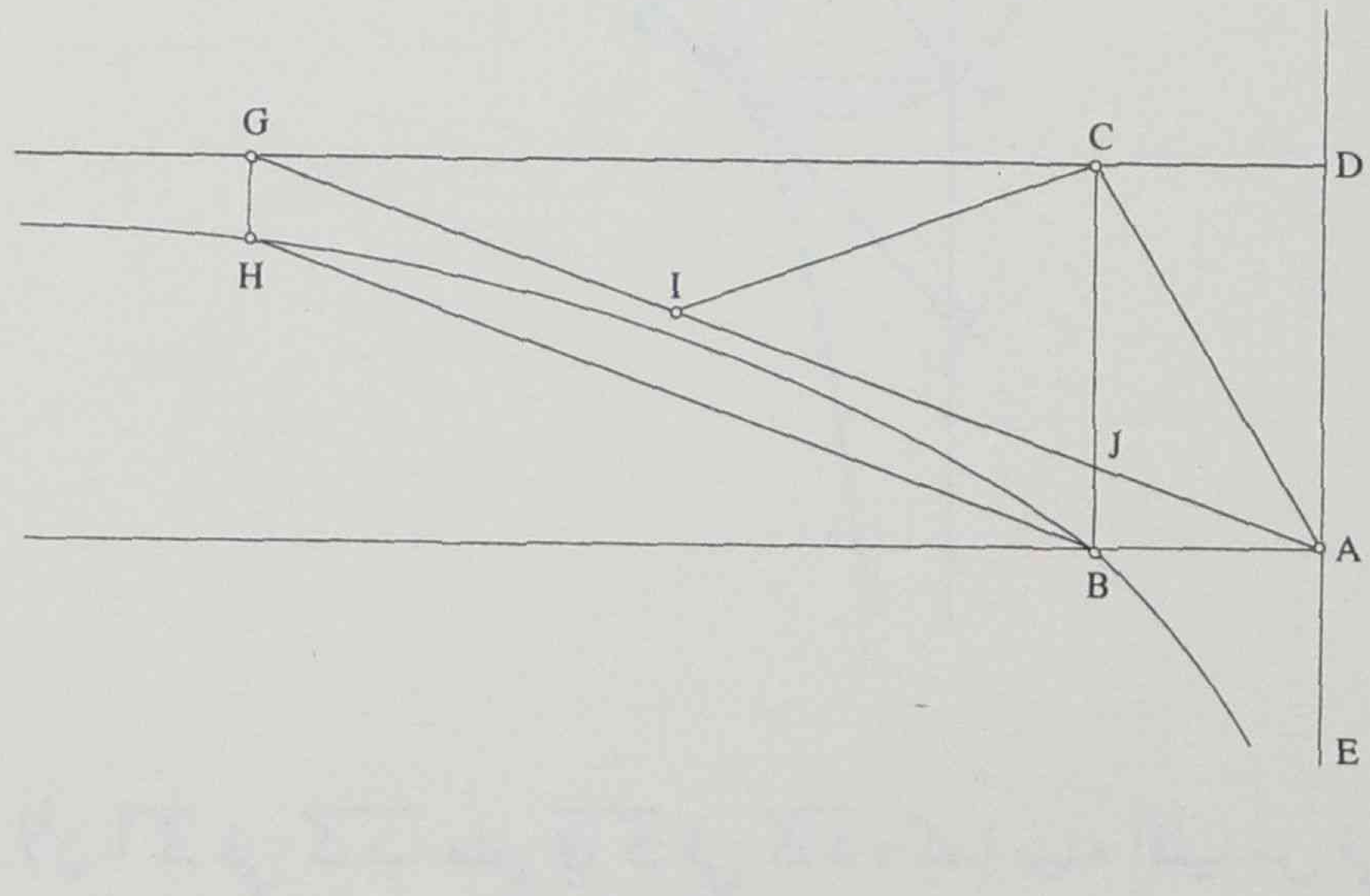


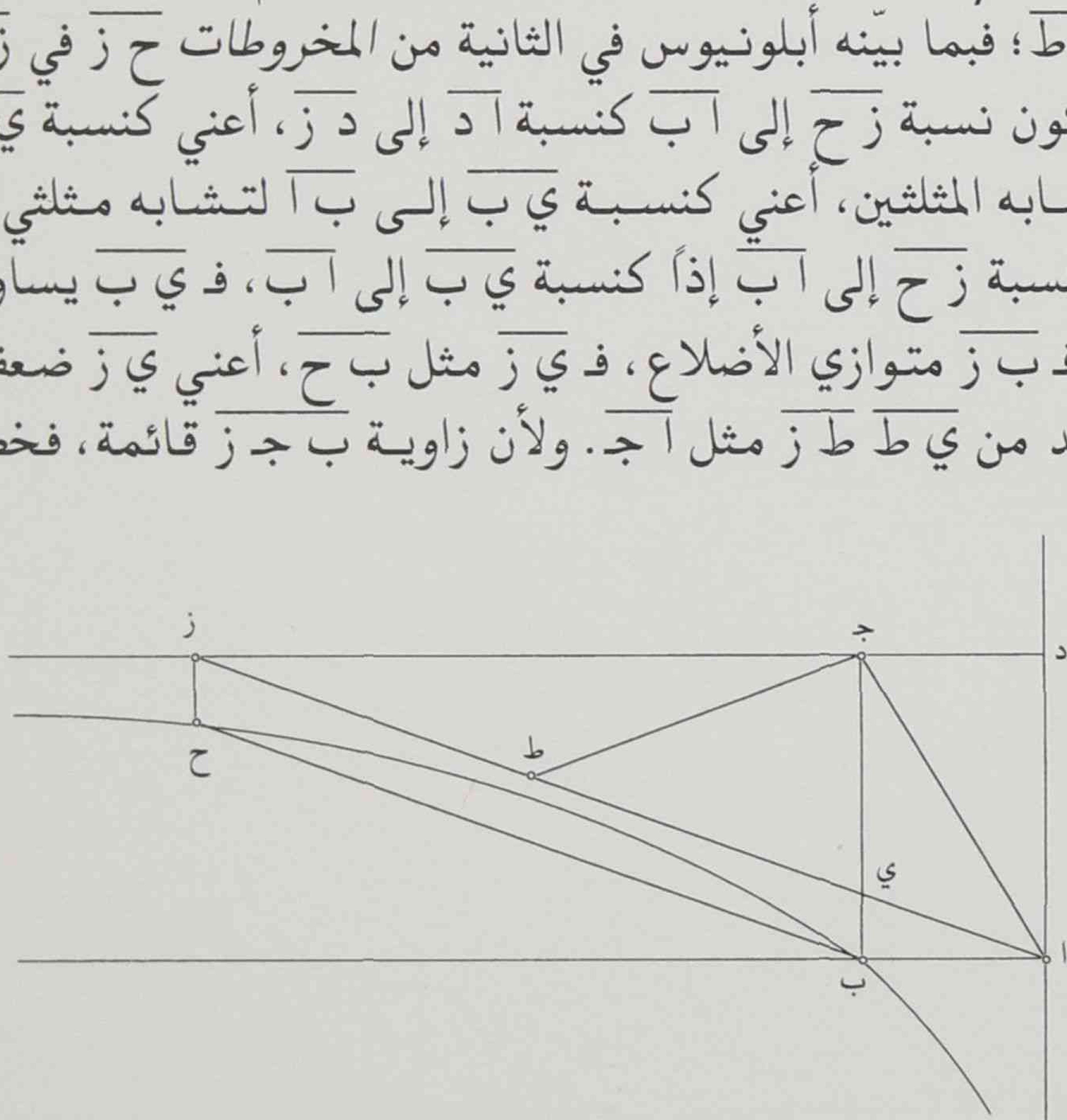
Fig. 3

د ل في ل ي مثل ا ل في ل جـ، فـ ا ك في ك ب مثل ا ل في ل جـ. فنسبة ا ك إلى ا ل كنسبة جـ ل إلى ك ب. لكن نسبة ا ك إلى ا ل كنسبة د جـ إلى جـ ل، ونسبة د جـ إلى جـ ل كنسبة جـ ل إلى ك ب. ولأن مثلث ك ب د يشبه مثلث د جـ ل، فنسبة ك ب إلى ب د كنسبة د جـ إلى جـ ل، فنسبة د جـ إلى جـ ل كنسبة جـ ل إلى ك ب وكنسبة ك ب إلى ب د. فقد وقع بين جـ د ب د جـ ل ك ب وتوالت الأربعة متناسبة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية

نريد أن نقسم زاوية ب ا جـ المعطاة المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

فنخرج خط جـ ب عموداً على ا ب، ونخرج جـ د يوازي ا ب وا د يوازي ب جـ. ونعمل على نقطة ب قطعًا زائدًا لا يلقيانه د ا ه د جـ ز بل يقربانه دائمًا بإخراجهما دائمًا، وهو ب ح، ونخرج ب ح ضعف ا جـ ونخرج ح ز يوازي ب جـ / ونصل ا ز يقطعه ب جـ على ي ونقسم ز ي بنصفين على ط، ٣٢
ونصل جـ ط؛ فبما بيّنه أبلونيوس في الثانية من *المخروطات* ح ز في ز د مثل ب د، فتكون نسبة ز ح إلى ا ب كنسبة ا د إلى د ز، أعني كنسبة ي جـ إلى جـ ز لتشابه المثلثين، أعني كنسبة ي ب إلى ب ا لتشابه مثلثي ي جـ ز ي ب ا. فنسبة ز ح إلى ا ب إذاً كنسبة ي ب إلى ا ب، فـ ي ب يساوي ح ز ويوازيه، فـ ب ز متوازي الأضلاع، فـ ي ز مثل ب ح، أعني ي ز ضعف ا جـ، فكل واحد من ي ط ط ز مثل ا جـ. ولأن زاوية ب جـ ز قائمة، فخط ط جـ



10 عموداً: عمود – 12 بإخراجهما: باخراجها – 15 فتكون: تكون / ا د إلى د ز: ا د ب إلى ا د ز.

égale à la droite *IG* ; le triangle *ACI* est donc isocèle, *AC* est égal à *CI* et aussi égal à *IG*. L'angle *AIC* est donc le double de l'angle *CGA*, qui est égal à l'angle alterne *GAB*. L'angle *CAI*, qui est égal à l'angle *CIA*, est donc le double de l'angle *GAB*. Nous le partageons donc en deux moitiés. Nous avons ainsi divisé l'angle *CAB* en trois parties égales. Ce qu'il fallait démontrer.

Le traité sur les deux moyennes et la division de l'angle dont les côtés sont droits en trois parties égales est achevé. Rectification de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī.

Je l'ai transcrit dans la ville de la paix, dans l'<École> Niẓāmiyya – que Dieu fasse sa fortune et pardonne à son fondateur – à la veille de Jumādā le premier, l'an cinq cent cinquante-sept de l'Hégire.

مثل ط ز، فمثلث ا جـ ط متساوي الساقين، ا جـ مثل جـ ط ومثل ط ز أيضاً. فزاوية ا ط جـ ضعف زاوية جـ ز ا المساوية لزاوية ز ا ب المتبادلة. فزاوية جـ ا ط المساوية لزاوية جـ ط ا ضعف زاوية ز ا ب، فنقسمها بنصفين. فقد قسمنا زاوية جـ ا ب بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تم القول في الموسطين وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام ‹متساوية›، إصلاح أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي.

علقتها بمدينة السلام في النظامية، عمرها الله، وعفا بانيها بتاريخ غرة جمادى الأولى لسنة سبع وخمسين وخمسمائة هجرية.

2 جـ ز ا: حر – 3 فنقسمها: فيقسمه.

TEXTE ET TRADUCTION

IX

Fī ʿamal al-musabbaʿ fī al-dāʾira wa-qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya

Sur la construction de l'heptagone régulier et la trisection de l'angle

B-10v
R-80v
Q-113v

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

Livre de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī

sur la construction de l'heptagone dans le cercle et la trisection de l'angle rectiligne

Il a dit : nous sommes surpris par celui qui cherche instamment l'art de la géométrie et s'y adonne, et, alors qu'il emprunte aux éminents anciens, voit en eux faiblesse et défaut ; en particulier quand c'est un débutant et un élève, connaissant peu la géométrie, de sorte qu'il se met à imaginer que s'offrent à lui par la moindre démarche des choses qu'il estime faciles d'accès et proches de l'entendement, alors qu'elles dépassent l'entendement de ceux qui sont rompus à cet art et s'y sont formés.

Puissé-je savoir par quelle puissance, par quelle intuition, par quelle habitude et par quelle pénétration, il a une assez bonne idée de lui-même pour trouver l'heptagone à partir des préliminaires de celui qui lit une partie du livre introductif, c'est-à-dire le livre d'Euclide sur les *Éléments*, sans avoir ni habitude ni exercice, et qu'il rabaisse ceux qui sont distingués en cet art.

Et quel besoin de croire à la faiblesse de l'éminent Archimède, en dépit de son avance en géométrie sur tous les géomètres : il est en effet parvenu en géométrie à une extrémité telle que les Hellènes l'ont appelé « le Géomètre » — c'est Archimède et aucun des anciens ni des modernes n'a reçu ce nom[1] — en raison de son éminence dans l'art de la géométrie. Son application était extrême pour déterminer les choses utiles, et grâce à sa puissance il
B-11r a réalisé les instruments, les machines et les travaux mécaniques, / il a établi les lemmes de l'heptagone et il y a poursuivi la bonne voie ; c'est par sa

[1] Litt. : son nom.

ب-١٠-ظ
ر-٨٠-ظ
ق-١١٣-ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في عمل المسبّع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية

قال: إنّا نعجب ممن يلتمس ويتعاطى صناعة الهندسة، مع اقتباسه من القدماء الأفاضل، يظن بهم العجز والتقصير؛ وخاصة إذا كان مبتدئاً ومتعلماً، مع قلة المعرفة بها، بحيث يقع في وهمه أنه يتهيّأ له بأهون السعي أشياء يُقدّرها سهلةَ المأخذ قريبة على الأفهام، وقد بَعُدَ ذلك عن فهم المرتاضين في هذه الصناعة المتدرّبين فيها.

فليت شعري، بأية قوة وحدس ودُربة وغَوْصٍ يُحسن الظنَّ بنفسه في وجود المسبّع من مقدمات مَن يقرأ بعض كتابَ المدخل - أعني كتاب أوقليدس في *الأصول* - وليس له دربةٌ ولا رياضة ويستنقص المبرّزين في هذه الصناعة.

وما الذي يُوجب الظنّ في عجز أرشميدس الفاضل مع تقدمه في الهندسة على سائر المهندسين: فإنه بلغ في الهندسة غاية ‹حتى› سماه اليونانيون المهندس - وهو أرشميدس، ولم يُسمَّ أحدٌ من المتقدمين ولا من المتأخرين باسمه - لفضله في صناعة الهندسة، وإنه كان في غاية الاجتهاد في استخراج الأشياء النافعة، وبقوته تم الأدواتِ والآلات والمهنَ الحِيليّة،/ وإنه بنى مقدّمات المسبّعَ وسلك طريقَ الصواب فيه، وبقوته أدركنا المسبّع، ب-١١-و

2-5 كتاب ... قال: قال احمد بن محمد بن عبد الجليل الشجزي [ب] كتاب عمل ... متساوية لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي قال [ق] - 2 بن محمد: ناقصة [ر] - 3-2 في الدائرة: ناقصة [ر] - 5 إنّا: أنا [ح] / نعجب: اتعجب [ر، ق، ح] / يلتمس و: ناقصة [ر، ق] / مع: وانه مع [ر] انه مع [ق] ومع [ح] - 7 مع: ومع [ر] - 8 على: عن [ر، ق] - 9 المتدربين: المصدرين [ق] - 10 بأية: بايت [ب] / وغوْص: وغوض [ب] وعوض [ر، ق] / بنفسه: ناقصة [ر، ق، ح] - 12 أوقليدس: اقليدس [ق] - 14 يوجب: اوجب [ق] - 17 لفضله: لفصله، وكتب في الهامش «الأصل بفضله» [ب] - 18 والمهن: ناقصة [ر] - 19 مقدّمات: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم [ب].

puissance que nous avons saisi l'heptagone, et Héron a saisi les mécaniques par sa puissance, par son soin et par son application dans les choses mathématiques. Cela en dépit de son éminence, de sa primauté et de son rang dans l'art de la géométrie, ce misérable égaré taxe Archimède d'insuffisance et propose les premiers de ses préliminaires, mauvais, corrompus, loin de la voie de la vérité, et incapables de mener à la construction de l'heptagone. Ce leurre qui ne trompe que lui-même et dont il a cru qu'il leurrait quelqu'un, il ne le fera que pour celui qui ne fait rien de bien en géométrie, pas même dans les débuts. Et en plus, il attribue ensuite à Archimède des choses qui feraient offense à quelqu'un doué du moindre entendement, sans parler des géomètres ; et il prétend que le lemme introduit par Archimède est plus difficile que ce qu'il cherche, et il déteste sa voie et le taxe d'imitation. C'est très beau ce qu'Archimède a fait, par la démonstration qu'il a obtenue des lemmes de l'heptagone, et par ce qu'il a écrit dans son livre de sorte que celui qui ne le mérite pas ne peut pas en profiter, comme ce malheureux.

Moi aussi, après avoir emprunté à la science d'Archimède et aux préliminaires d'Apollonius, et en particulier aux modernes comme al-ʿAlā' ibn Sahl, j'ai conservé précieusement cette notable et curieuse proposition,
Q-114r ainsi que ce dont j'ai pu disposer, par la moindre / démarche, de / la trisec-
R-81r tion de l'angle / rectiligne à l'aide du premier livre de l'ouvrage d'Apollo-
B-11v nius sur les *Coniques*.

Maintenant, j'expose quel est l'état de cela et je commence par les propos de celui qui s'est leurré lui-même pour que ce soit une leçon aux débutants, et je montre combien ses propos sont corrompus et sa construction fallacieuse ; je poursuivrai par les lemmes de l'heptagone, et je continuerai par la construction de l'heptagone. J'achèverai ce livre par la trisection de l'angle rectiligne, et de Dieu j'implore l'assistance.

Ceci est le commencement de son livre, et l'ordre de ces lemmes.

Il[1] a dit : parmi de nombreux lemmes qu'il a introduits pour la division du cercle en sept parties égales, Archimède a imité[2] un lemme dont il n'a pas montré la construction et qu'il n'a pas démontré ; et peut-être est-il d'une construction plus difficile et d'une démonstration plus éloignée que ce pour quoi il l'a introduit. C'est le suivant :

[1] Abū al-Jūd.

[2] Ici on traduit selon le sens compris par al-Sijzī, voir *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. III, p. 335.

وقد أدرك إيرن *المخانيقونات* بقوته وعنايته واجتهاده بالأشياء التعاليمية. هذا مع فضله وتقدّمه ومرتبته في صناعة الهندسة، ينسبه هذا البائس الضال إلى التقصير، ويُومئ إلى أوائل مقدماته الردية الفاسدة البعيدة من طريق الصواب التي لا يمكن أن توقف على عمل المسبع بها. والتمويه الذي موّه ‹به› على نفسه وظن أنه يموَّه على أحد، اللّهم إلا على من لا يُحسن شيئًا من الهندسة ولا من مدخلها. ثم مع هذا ينسُب أرشميدس إلى أشياءَ تقبح بمن له أدنى فهمٍ فضلاً عن المهندسين. ويزعم أن المقدمة التي أتى بها أرشميدس أصعبُ من المطلب، ويستقبح طريقته، وينسبه إلى التقليد. فنِعمَ ما فعل أرشميدسُ بما حصَّل من البرهانِ على مقدمات المسبع، وما سطر في كتابه لئلا ينتفع به مَن لا يستحقّه، مثلُ هذا المحروم.

وأنا أيضًا بعد اقتباسي من علم أرشميدس، ومن مقدمات أبلونيوس، وخاصةً من المحدثين مثل العلاء بن سهل، كنت ضنينًا بهذا الشكل الشريف الغريب، وعلى ما تهيأ لي بأهونِ / السعي من / انقسام الزاوية المستقيمة ق-١١٤-و ر-٨١-و / الخطين بثلاثة أقسام متساوية، من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في ب-١١-ظ *المخروطات*.

والآن أشرح الحال في ذلك وأقدّم قول هذا المُمَوِّه على نفسه ليكون تأديبًا للمبتدئين، وأبيّن فساد قوله والمغالطة فيما عمله، ثم أردفه بمقدمات المسبع، وأتبعه بعمل المسبع، وأختم الكتاب بقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية. وبالله التوفيق.

وهذا ابتداء كتابه وترتيب مقدماته.

قال: قد قلّد أرشميدسُ – في خلال مقدمات كثيرة قدّمها لقسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية – مقدّمة لم يبيّن عملها ولم يبرهن عليها، ولعلها أصعب عملاً وأبعد برهانًا مما له قدّمها، وهي هذه.

1 أدرك: ادرب [ق] / المخانيقونات: المجانيقونات [ب، ط] المنجنيقات [ق] / وعنايته: وبعنايته [ر، ق] – 3 الردية: الكلية [ق] – 4 الذي: كتبها «إلى»، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت الصواب في الهامش [ب] – 5 يموّه: موّه [ق] / لا: ليس [ب، ح] / يحسن: حسن [ق] – 6 تقبح: يقبح [ر، ق، ح] – 7 بمن: لمن [ر، ق، ح] / أتى: ناقصة [ر] / أتى بها: ادربها [ق] – 8 طريقته: طريقه [ق] – 9 أرشميدس: كتبها أحيانًا «ارشميذس» أو «ارسميدش»، ولن نشير إليها فيما بعد [ب] / سطر: سطره [ر، ق، ح] – 10 به: ناقصة [ر، ق] / يستحقه: يستحق [ق] – 11 أبلونيوس: ابللونيوس [ر] – 12 مثل: من [ر] – 14 أبلونيوس: ابللونيوس [ر] – 15 المخروطات: المخروط [ر، ق] – 16 والآن: ولان [ر، ق] / ليكون: لتكون [ر] – 19 التوفيق: كتب بعدها «وهو حسبي كافيا ومعينا» [ر، ق] – 22 يبيّن: يتبين [ق] – 23 عملاً: ناقصة [ر].

Il[1] a dit qu'il — il veut dire Archimède — a dit : Menons la diagonale du carré *ABCD* ; soit *AC*. Prolongeons *AB* jusqu'à *E* sans limite et menons d'un point de *BE*, soit *E*, une droite jusqu'à l'angle du carré, au point *D*, qui coupe la diagonale *AC* au point *G* et le côté *BC* au point *H*, de sorte que le triangle *BHE* à l'extérieur du carré soit égal au triangle *CDG*.

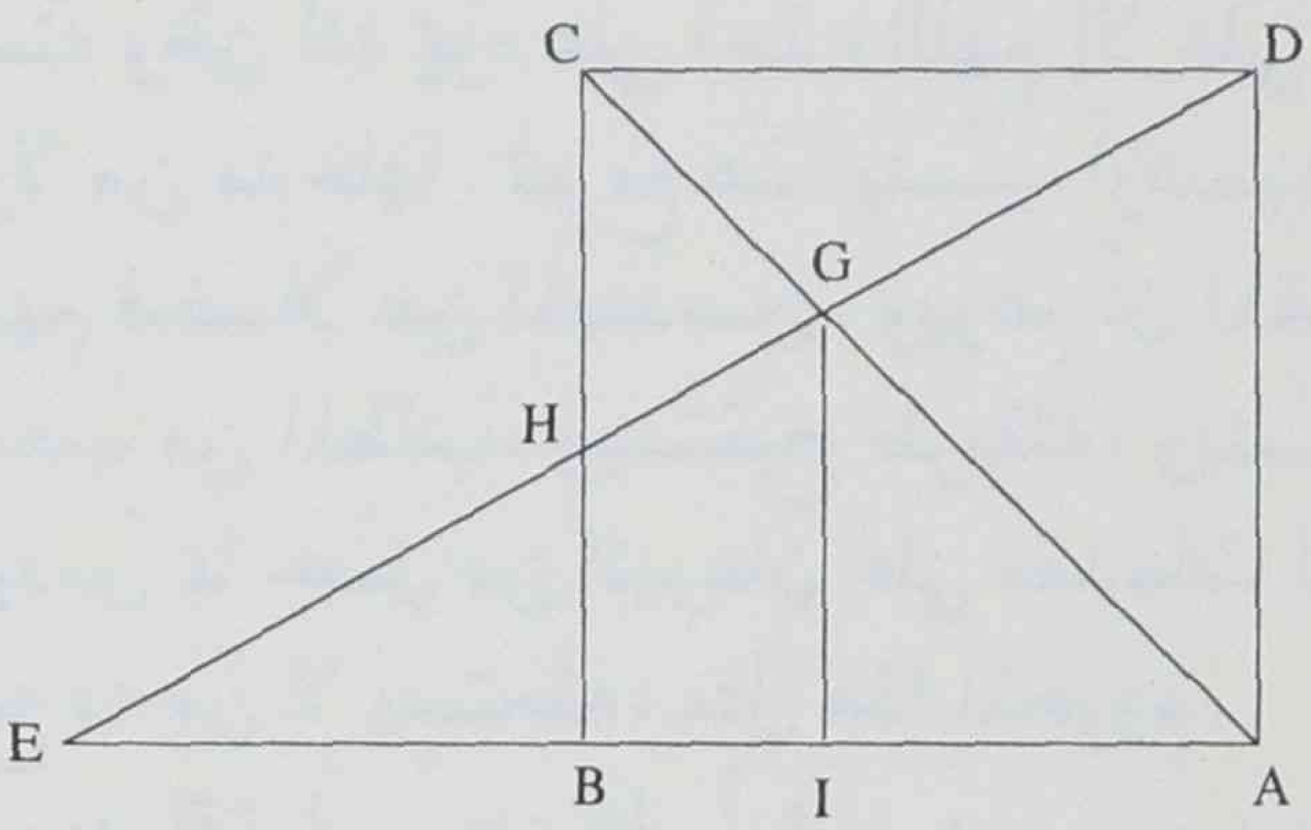


Fig. 1

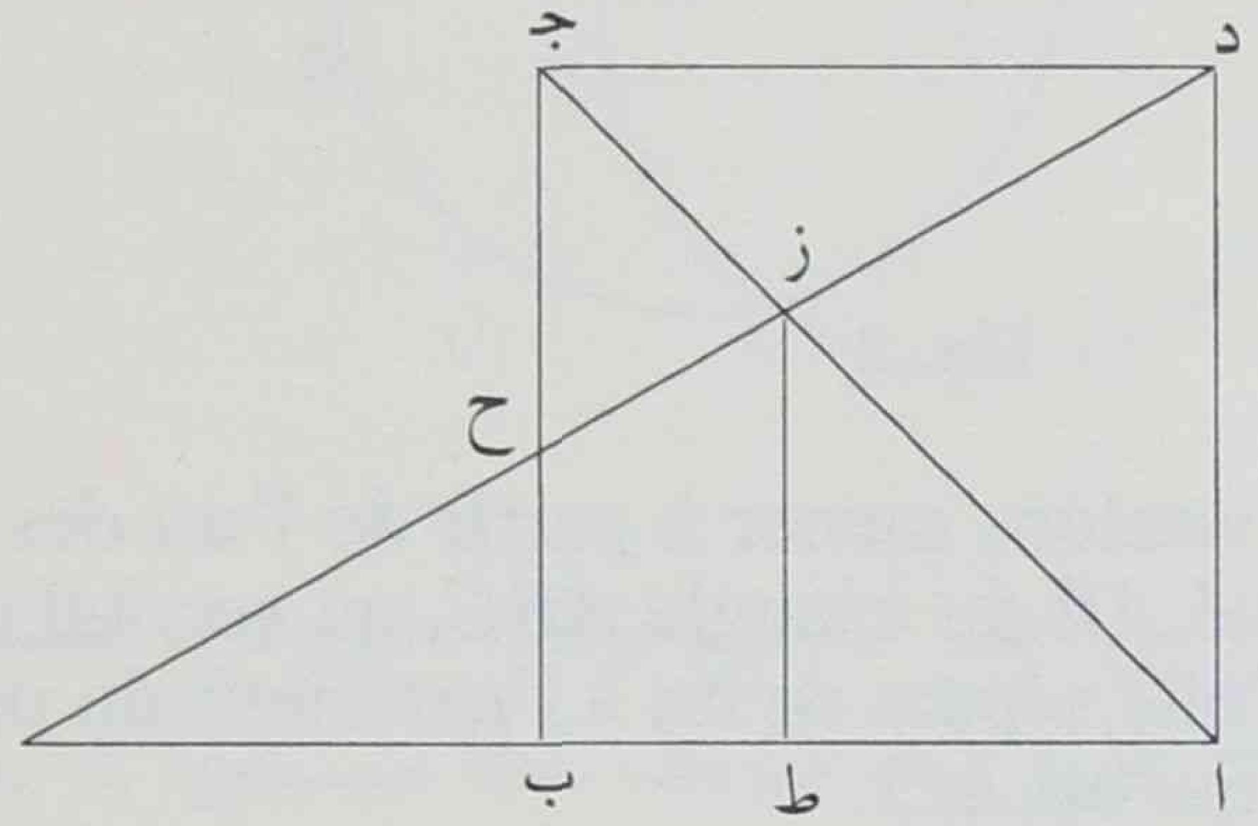
Archimède a voulu — par ce qu'il a imité en cela — mener une perpendiculaire *GI* à *AB* qui partage *AB* en *I* de sorte que le produit de *AI* par *AE* tout entière soit égal au produit de *AB* par *IE* et que le produit de *AB* par
B-12^r *AI* soit égal / au carré de *BE*. Mais la division de *AB* selon cette condition est plus facile à faire et à démontrer que le fait de mener une droite *ED* selon la condition mentionnée par Archimède. Peut-être cela n'est-il pas possible sans diviser la droite *AB* selon la condition mentionnée et peut-être la division de *AB* est-elle de même plus difficile que la division du cercle en sept parties égales.

J'engage ce qui m'est venu à l'esprit pour ce chapitre sur une autre base, une voie plus proche, une construction plus facile et des lemmes moins nombreux et plus aisés.

Le premier est celui-ci : Si on trace un cercle avec la distance d'une perpendiculaire à une droite, alors il est tangent à la droite sur laquelle a été élevée la perpendiculaire, comme la droite perpendiculaire *AB* à *CD* au point

[1] C'est toujours Abū al-Jūd, cité par al-Sijzī.

قال، يعني أرشميدس، قال: لنُخرج قطر مربع ا ب جـ د، وهو ا جـ. ونخرج ا ب إلى ه بلا نهاية، ولنخرج من نقطة من ب ه - ولتكن ه - خطًا مستقيماً إلى زاوية المربع عند نقطة د، يقطع قطر ا جـ على نقطة ز وضلعَ ب جـ على نقطة ح، ويصير مثلث ب ح ه الخارجُ من المربع مساوياً لمثلث جـ د ز.



وإنما أراد أرشميدس بما قلّده من ذلك أن يخرج عمود ز ط على ا ب، فيقسمُ ا ب على ط انقساماً يصير به ضرب ا ط في جميع ا ه مثل ضرب ا ب في ط ه وضربُ ا ب في ا ط مثل/ مربع ب ه. ولكن قسمة ا ب على هذه ب-١٢-و الشريطة أقرب عملاً وبرهاناً من إخراج خط ه د على الشريطة التي ذكرها أرشميدس؛ ولعلّه غير ممكن دون قسمة ا ب على الشريطة المذكورة، ولعلّ قسمة ا ب كذلك أصعب من قسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية.

وأنا متعلق بما حضرني في هذا الباب على أصل آخر وطريق أقرب وعمل أسهل ومقدّمات أقلّ وأيسر.

أولاها هذه: إذا أديرت دائرة ببعد عمود قام على خط، فإنها تماس الخط الذي قام عليه العمود، كخط ا ب قام عموداً على جـ د على نقطة ب

1 قال يعني أرشميدس: ناقصة [ر، ق] / ا جـ: ا ز جـ [ب، ح] - 3-2 من ب ه ... على نقطة: ناقصة [ب] - 3-4 نقطة ز ... على: أثبتها في الهامش مع «صح» [ر] - 7 فيقسم: فتقسم [ر] فينقسم [ح] / انقساماً: انقسام ما [ق] / يصير به: يضربه [ر] / جميع: ناقصة [ق] - 8 ا ط: ط ه [ب] - 9 أقرب ... الشريطة: ناقصة [ب] / الشريطة (الثانية): شريطة [ر] - 12 متعلق بما: معلق ممّا [ر، ق] / حضرني: خطرني [ق] - 13 أسهل: سهل [ر، ق] - 14 أولاها: اولّها [ق] / أديرت: ادرت [ق] - 15 على جـ د: ناقصة [ر، ق].

B ; et si nous traçons avec la distance *AB* un cercle *BEG*, je dis qu'il est tangent à la droite *CD*, la démonstration en est facile.

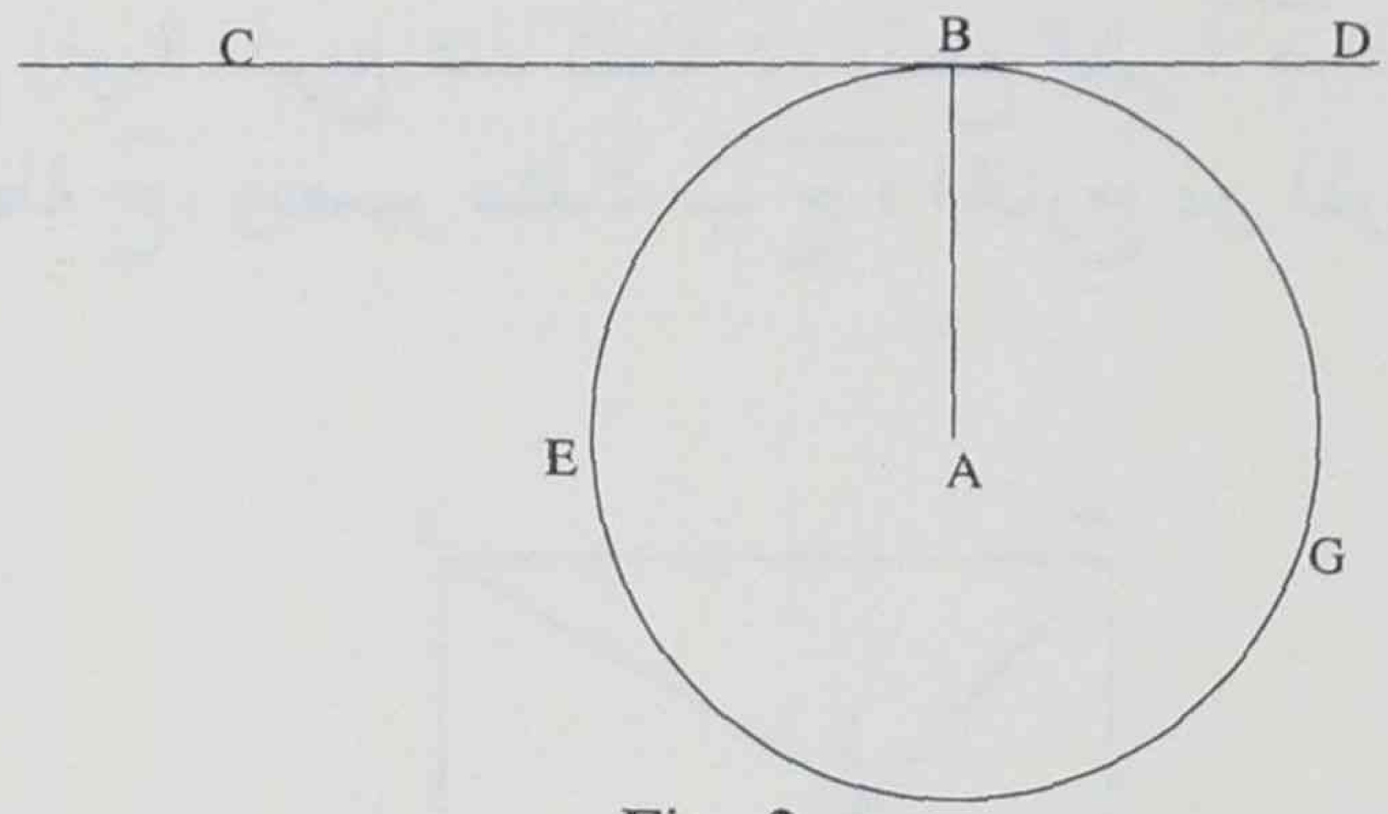


Fig. 2

Deuxième lemme : Nous voulons mener à partir de l'un des côtés d'un triangle donné, comme le côté *AB* du triangle *ABC*, au second côté qui est *BC*, une droite égale à ce qu'elle sépare de lui à l'extérieur du petit triangle et parallèle au troisième côté qui est *AC*.

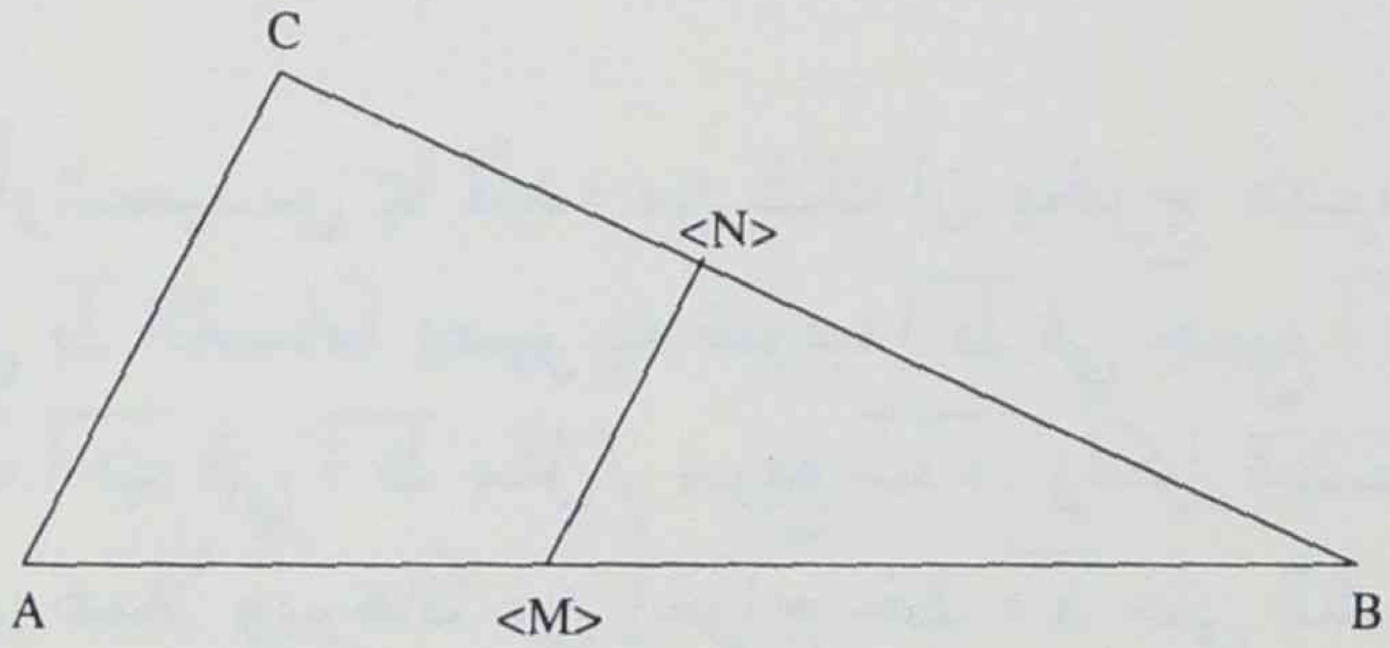


Fig. 3[1]

Troisième lemme : Nous voulons mener une droite dont le rapport à une
R-81v droite connue, / comme la droite *AB*, soit un rapport connu, comme le rapport de *C* à *D*. /

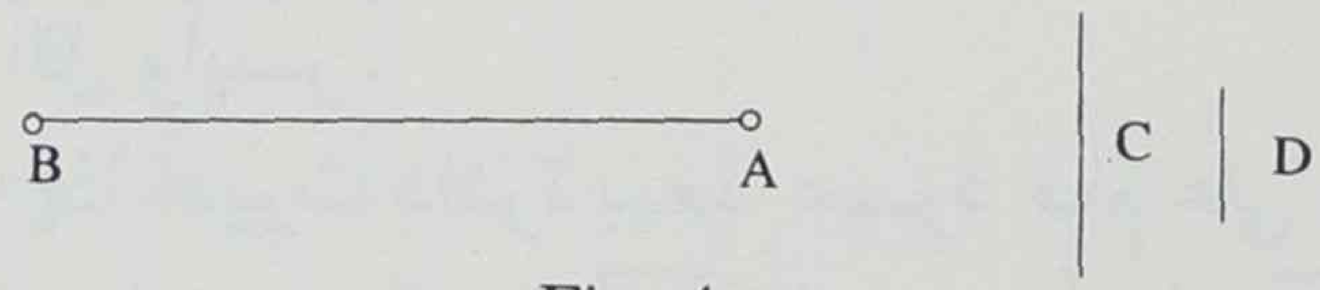


Fig. 4

B-12v Quatrième lemme : Nous voulons partager une droite connue, comme la droite *AB*, en deux parties telles que le produit de la droite tout entière par l'une des deux parties soit égal au carré d'une droite dont le rapport à
Q-114v l'autre partie est un rapport / connu, soit le rapport de *C* à *D*.

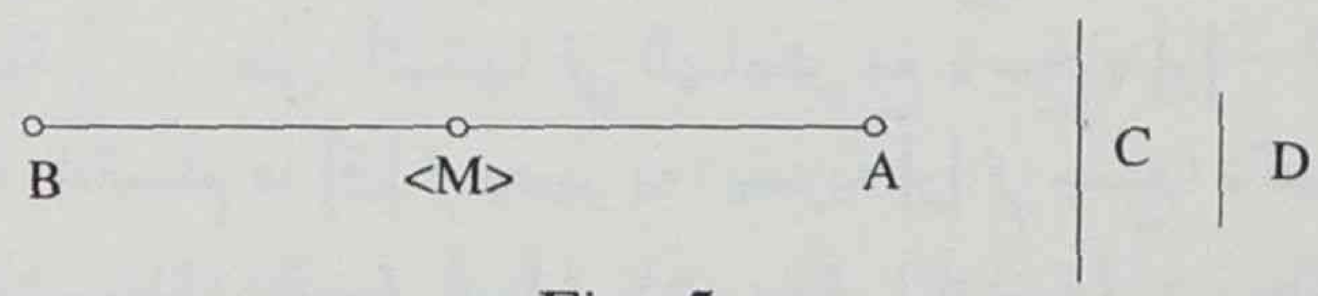
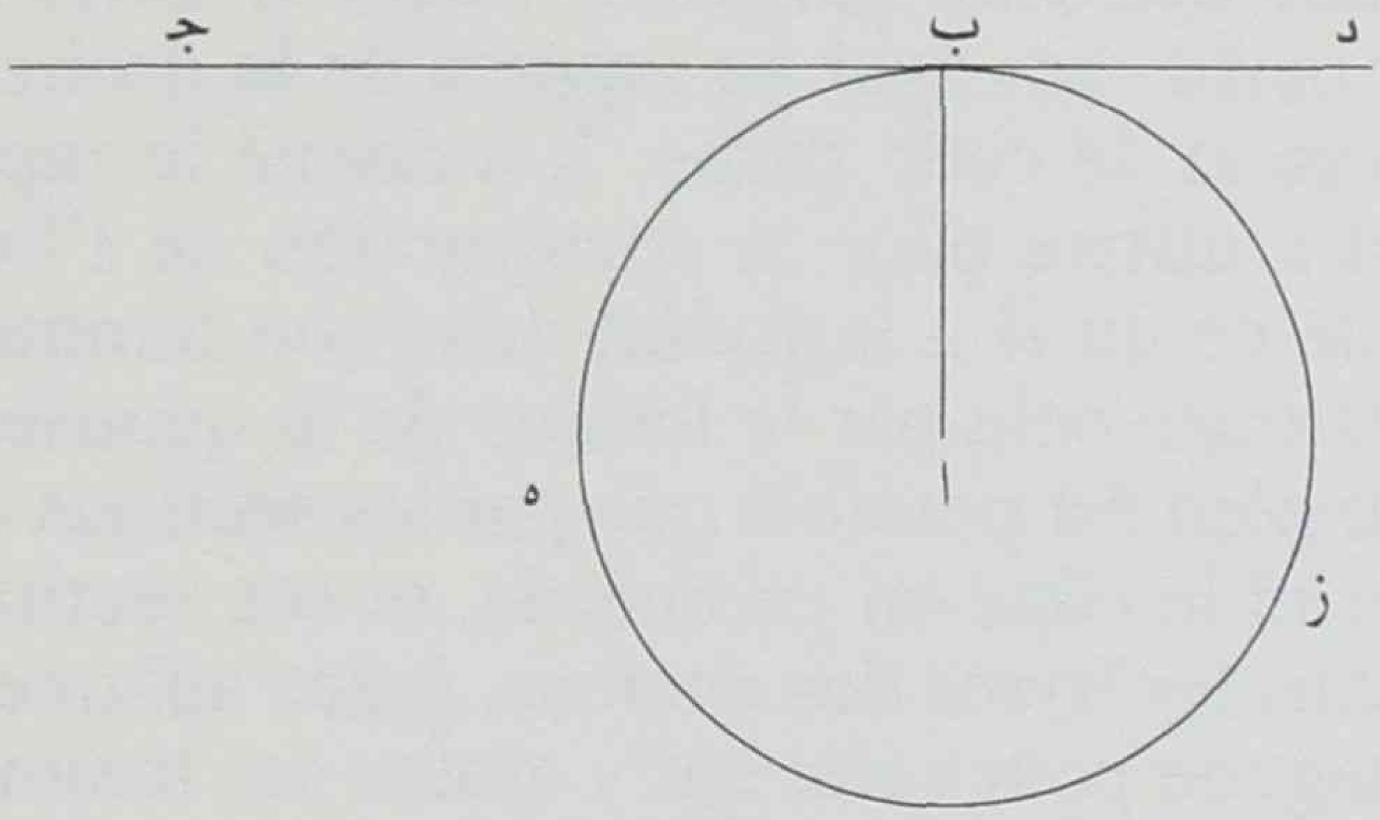


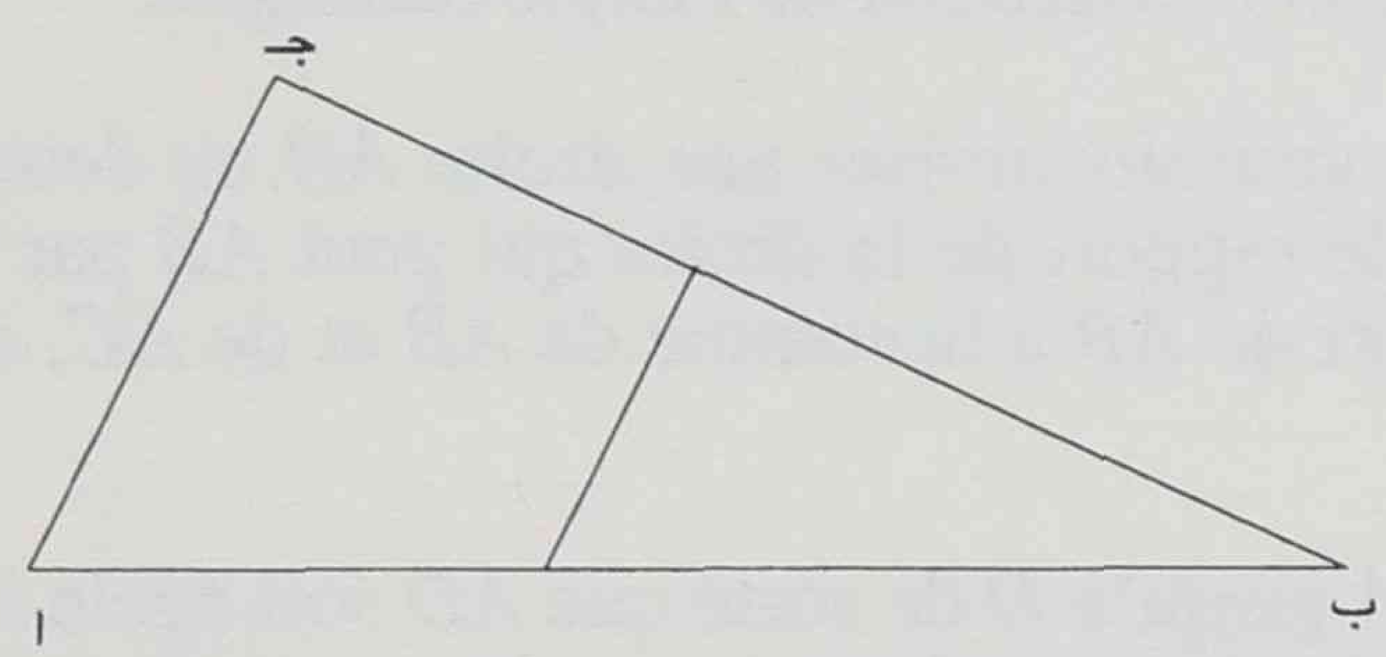
Fig. 5

[1] Dans la figure du manuscrit [B], al-Sijzī (ou le copiste?) trace *DI* — ici *NM* — sans l'utiliser ensuite ; dans le manuscrit [R], on trouve *DE* au lieu de *DI*.

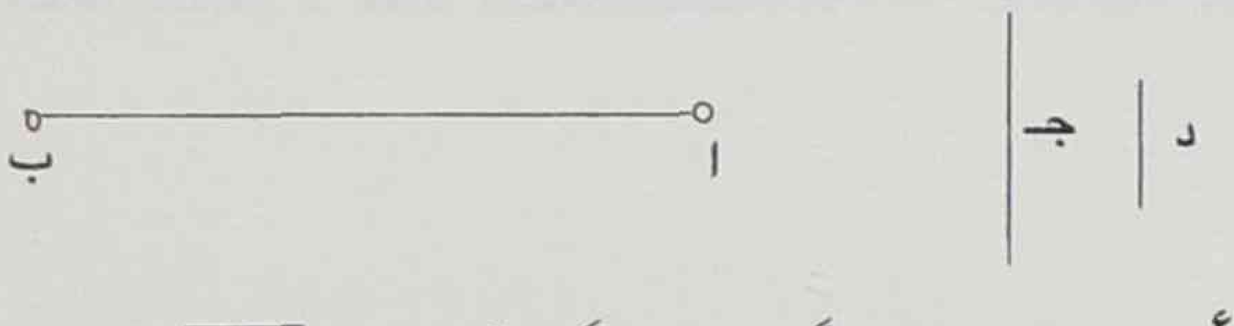
وأدرنا ببعد ا ب دائرة ب ه ز، فأقول: إنها تماس خط جـ د، والبرهان عليه سهل.



الثانية: نريد أن نخرج من أحد أضلاع مثلث مفروض، كضلع ا ب من مثلث ا ب جـ، إلى الضلع الثاني، وهو ب جـ، خطًّا مساويًا لما يفصله منه خارج المثلث الأصغر وموازيًا للضلع الثالث وهو ا جـ.



الثالثة: نريد أن نخرج خطًّا نسبته إلى خط معلوم، / كخط ا ب، نسبة ر-٨١-ظ
معلومة كنسبة جـ إلى د./



الرابعة: نريد أن نقسم خطًّا معلومًا، كخط ا ب، بقسمين، يكون ضرب ب-١٢-ظ
الخط كلّه في أحد القسمين مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر نسبة /
معلومة، ولتكن نسبة جـ إلى د. ق-١١٤-ظ

1 إنها: أنها [ح] – 3 من (الثانية): مثل [ب].

Ces lemmes sont ceux sur lesquels il s'est appuyé lors de la construction de l'heptagone. Puis il a ordonné pour la construction de l'heptagone que l'on divise une droite donnée en deux parties telles que le produit de la droite tout entière par l'une des deux parties soit égal au carré d'une droite dont le rapport à l'autre partie soit égal au rapport de la droite entière à la somme de la droite entière et de cette partie. Il a donné le rapport dans la quatrième proposition et a utilisé pour la construction de l'heptagone un autre rapport, différent de ce qu'il a introduit dans son lemme ; et il a cru qu'il est possible de construire cela par le lemme de la quatrième proposition. Mais la construction n'en est possible que par les sections coniques, et, pour celui qui ne connaît ni le cône en géométrie, ni ses sections, ce serait par les lemmes alignés dans les livres des anciens, grâce auxquels il est possible de construire l'heptagone pour celui qui y ajoute ses lemmes. Mais par ses lemmes, et par leurs analogues, il est difficile de trouver l'hexagone inscrit dans le cercle — ce que les menuisiers façonnent sur les couvercles des chaudrons par une seule ouverture du compas — *a fortiori* s'il s'agit de trouver l'heptagone. C'est cela son erreur et sa duperie à propos des lemmes de l'heptagone et de sa construction.

Commençons maintenant ce que nous avons trouvé à propos de l'hepta-
B-13r gone, ses lemmes / et la trisection de l'angle rectiligne.

Lemme : Nous voulons diviser une droite *AB* en deux parties en *C*, par exemple, tel que le rapport de la droite qui peut *AB* par *BC* à la droite *AC* soit égal au rapport de *AB* à la somme de *AB* et de *AC*, considérés comme une seule droite.

Prolongeons *BA* jusqu'à *D* de sorte que *AD* soit égale à *AB* ; appliquons à *AD* le carré *ADEG* et construisons au point *A* une hyperbole telle que les deux droites *EG* et *ED* ne la rencontrent pas, mais se rapprochent toujours d'elle, selon la <proposition> quatre du <livre> deux de l'ouvrage des *Coniques* de l'éminent Apollonius, et selon la <proposition> un dans la traduction de Isḥāq ; soit *KAH*. Construisons sur l'axe *BD* une parabole telle

هذه المقدّمات هي التي بنى عليها في عمل المسبع، ثم أمر في عمل المسبع أن يقسم خط مفروض بقسمين يكون ضرب الخط كلّه في أحد القسمين مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة الخط كله إلى جميع الخط كلّه مع هذا القسم. فأعطى في الشكل الرابع النسبة واستعمل في عمل المسبع نسبة أخرى خلاف ما قدمه في مقدّمته، وظن أنه يمكن عمل ذلك بمقدمة الشكل الرابع. ولا يتهيأ عمل ذلك إلا بالقطوع المخروطية، ‹و›الذي لا يعرف المخروط في الهندسة ولا قطوعه، فبهذه المقدمات المسطرة في كتب الأوائل التي بها يتهيأ عمل المسبع للذي أضاف مقدماته إليها. فأما بمقدماته وأشباه مقدماته، فإنه عسر وجود المسدّس في الدائرة – وهو الذي عمله النجارون على رؤوس القدور بفتحة واحدة من البركار – فضلاً عن وجود المسبّع، فهذا غلطه ومغالطته في مقدّمات المسبع وعمله.

فأما الآن فلنبتدئ بما وجدنا من أمر المسبع ومقدماته / وقسمة الزاوية ب-١٣-و المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

مقدمة: نريد أن نقسم خط ا ب بقسمين مثلاً على جـ، تكون نسبةُ الخط القويّ على ا ب في ب جـ إلى خط ا جـ كنسبة ا ب إلى مجموع ا ب ا جـ كخط واحد مستقيم.

فنخرج ب ا على استقامته إلى د، على أن يكون ا د مساوياً لـ ا ب، ونضيف إلى ا د مربع ا د ه ز، ونعمل على نقطة ا قطعًا زائداً لا يلقيانه خطا ه ز ه د بل يقربانه دائماً، على ما في الرابع من الثانية من كتاب أبلونيوس الفاضل في *المخروطات*، وفي الأول من نقل إسحاق، وهو كـ ا ح؛ وعلى سهم

1 هي: ناقصة [ق] / أمر: امّ [ر] – 2 يقسم خط مفروض: نقسم خطًا مفروضًا [ق] – 4 النسبة: نسبة [ق] – 6 لا: ناقصة [ب] – 6-7 ‹و›الذي لا يعرف: الذي لا يعرفه [ب، ر، ق] ‹ذلك العمل› الذي لا يعرفه ‹لأنه لا يعرف› [ح] (كذا !) – 7 فبهذه: فهذه [ب] / المسطرة: المسطورة [ب] – 8 بها: راه [ب، ر، ق] ‹زرى عليها› [ح] (كذا !)/ للذي: الذي [ب، ر، ق] / أضاف: إضاف [ح] / إليها: إلى الأوائل [ق] – 9 عسر: عشر [ر] – 12 فأما الآن: فالآن [ق] / وجدنا: وعدنا [ر، ق، ح] – 14 مقدمة: ناقصة [ب، ر، ح] – 16 كخط واحد مستقيم: ناقصة [ب، ر، ح] – 17 ب ا: ا ب [ق] – 18 ا د: ا جـ [ب] / يلقيانه: يلتقيانه [ر] / خطا: خطى [ب، ر، ق] – 19 أبلونيوس: ابللونيوس [ر] – 20 المخروطات: المخروط [ر] / كـ ا ح: ا ح كـ [ب، ر، ح].

que son côté droit soit *AB* ; soit *LBH*. Menons de l'intersection des deux sections, qui est le point *H*, la perpendiculaire *HC* à la droite *AB*.

Je dis que nous avons divisé la droite *AB* au point *C* comme nous le voulions.

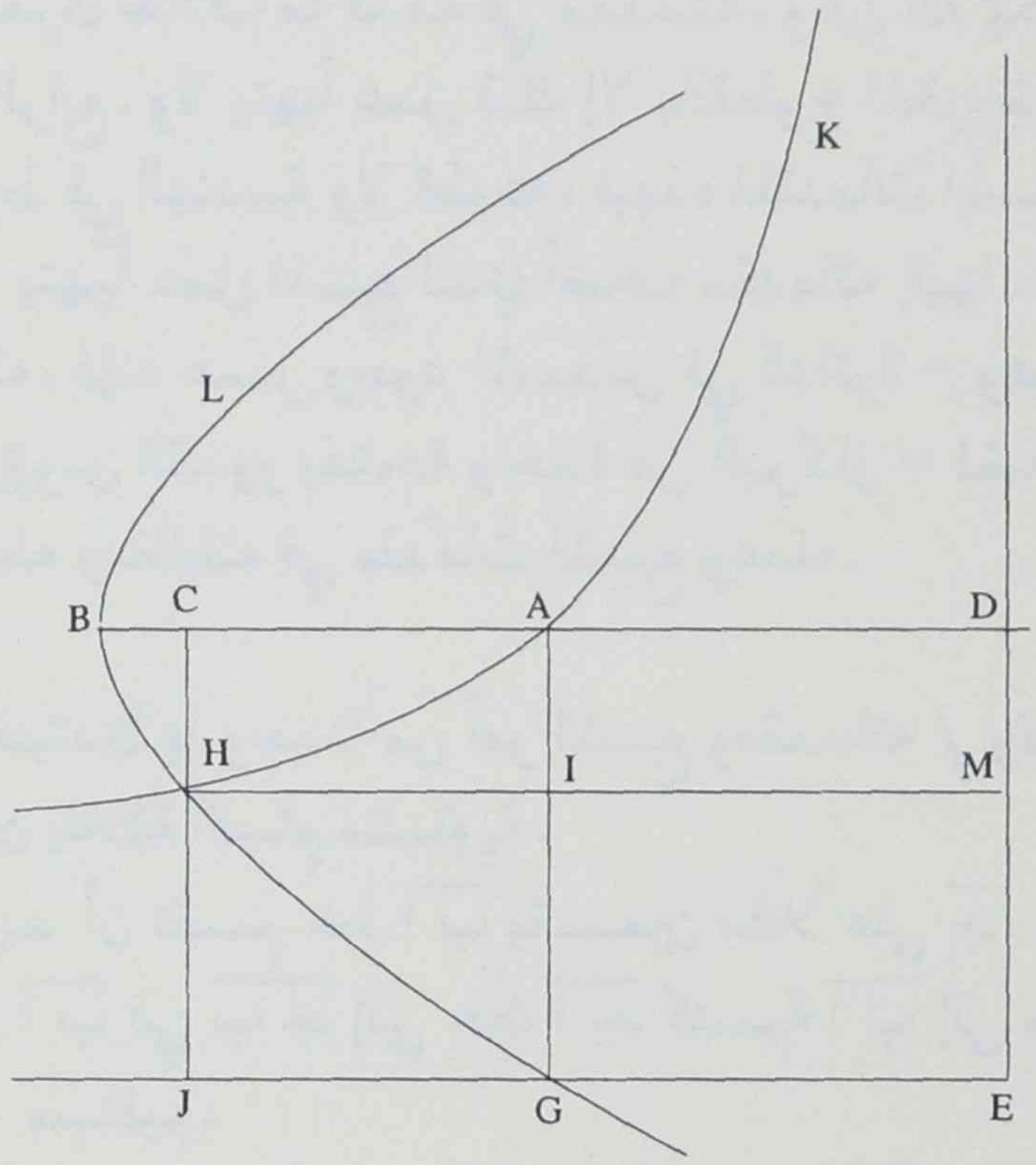
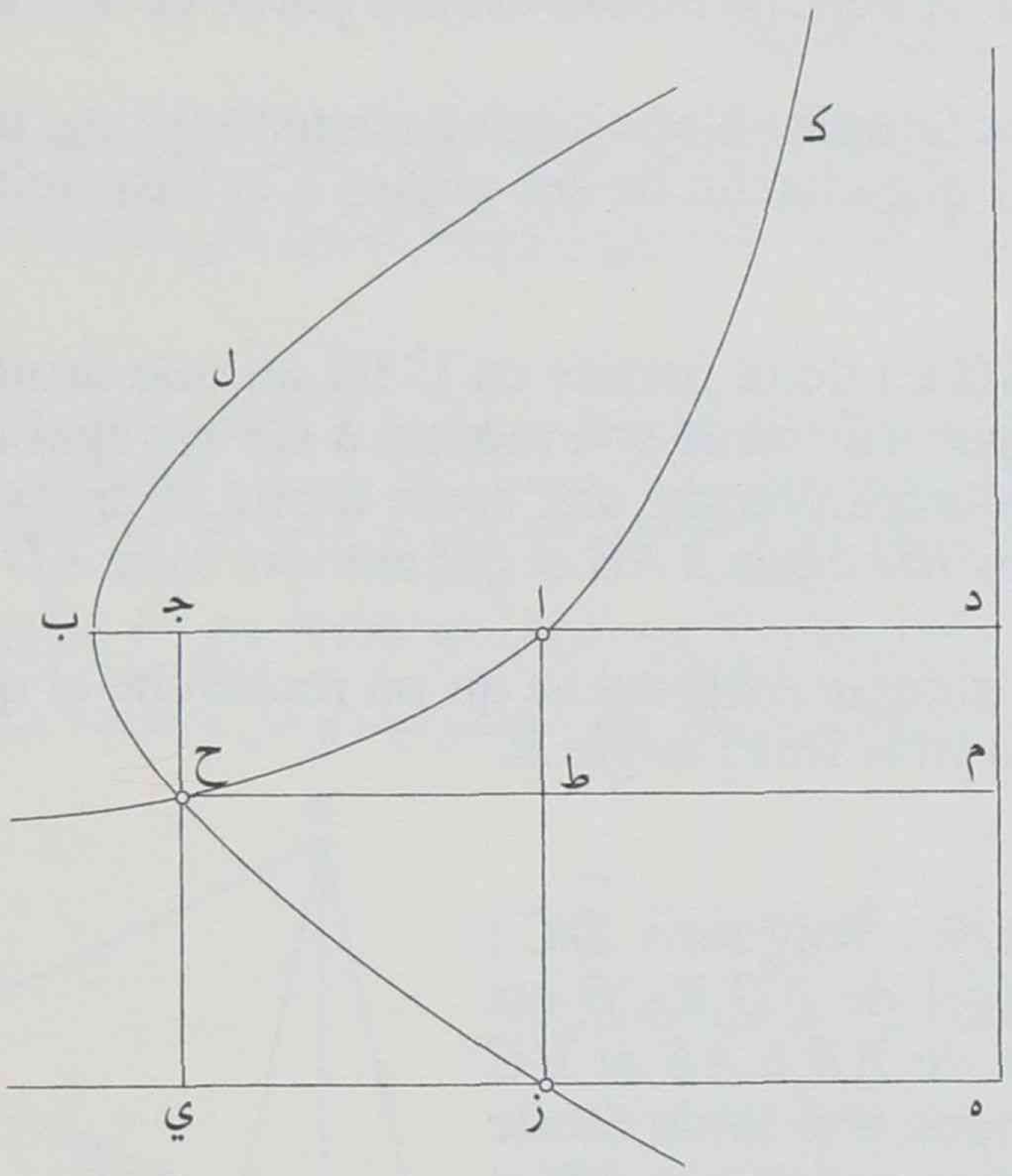


Fig. 6

Démonstration : Prolongeons *EG* et *CH* jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *J* ; menons *HIM* parallèle à *JE* et *AIG* parallèle à *CJ* ; puisque le rectangle *MJ* est égal au carré *GD*, alors *JI* sera égal à *ID*. Prenons le rectangle *IC*
Q-115^{r} commun, / alors le rectangle *JA* est égal au rectangle *HD*. Mais le rectangle /
B-13^{v} *HD* / est <le produit> de la droite *CH* par la droite *CD* et *JA* est *CA* par *AG*,
R-82^{r} c'est-à-dire *AB*, donc *AB* par *AC* est égal à *CH* par *CD*. Le rapport de *CH* à *AC* est donc égal au rapport de *AB* à *CD*, mais *CH* peut *AB* par *BC* puisque *AB* est le côté droit de la parabole *LBH* ; mais *CD* est *AB* plus *CA*, donc le

ب د قطعًا مكافئًا يكون ضلعه المنتصب ا ب، وهو ل ب ح. ونخرج من تقاطع القطعين، وهو نقطة ح، عمود ح جـ على خط ا ب.

أقول: إنا قسمنا خط ا ب على نقطة جـ كما أردنا.



برهان ذلك: أن نخرج ه ز جـ ح على استقامتهما حتى يلتقيا على ي،
ونخرج ح ط م يوازي ي ه وا ط ز يوازي جـ ي. فلأن سطح م ي مساوٍ لمربع
ز د، يكون ي ط مساويًا لـ ط د. فنأخذ سطح ط جـ مشتركًا، / يكون ق-١١٥-و
سطح ي ا مساويًا لسطح ح د. لكن سطح / ح د / هو خط جـ ح في خط ب-١٣-ظ
جـ د، وي ا هو جـ ا في ا ز، أعني ا ب، فـ ا ب في ا جـ مساوٍ لـ جـ ح في ر-٨٢-و
جـ د. فنسبة جـ ح إلى ا جـ كنسبة ا ب إلى جـ د. لكن جـ ح يقوى على ا ب
في ب جـ لأن ا ب كان الضلع المنتصب لقطع ل ب ح المكافئ؛ وجـ د هو ا ب

1 ب د: ب د و [ر] / يكون: ناقصة [ب] / ل ب ح: ب ح ل [ب، ر، ح] – 2 ح جـ: ح جـ ز [ب] / ا ب: ا ر [ب] – 3 إنا: ناقصة [ر] / ا ب: ب ا [ب، ر، ح] – 4 يلتقيا: يلتقيان [ق] – 5 ح ط م: خط [ب] / ي ه: خط ي ه [ق] / وا ط ز: وا ط [ر] وا ه ر [ب] / جـ ي: جـ ب ي [ب] / م ي: م ب ي [ب] – 6 مساويًا: مساوٍ [ب، ر] – 6-7 يكون ... لسطح: فسطح ي ا يساوي سطح [ق] – 7 ح د (الأولى): د ط [ب] / ح د هو خط: ناقصة [ب] / خط (الثانية): ناقصة [ر، ق] – 10 في: ناقصة [ب] / الضلع: ضلع [ب، ر، ق] / ل ب ح: ب ح ل [ر، ح] ب حـ ل [ب].

rapport de la droite qui peut *AB* par *BC* à la droite *CA* est égal au rapport de la droite *BA* à *BA* et *AC* considérées comme une seule droite. Nous avons donc construit ce que nous voulions. Ce qu'il fallait démontrer.

Abū Sa'd al-'Alā' ibn Sahl a établi cette proposition en procédant par la voie de l'analyse et notre synthèse est une partie de son analyse.

Voici un autre lemme : Nous voulons construire sur une droite *AB* un triangle isocèle tel que chacun de ses angles à la base soit le triple de l'angle qui reste.

Partageons *AB* en deux parties en *C* tel qu'une droite, comme la droite *AD*, puisse *AB* par *AC* ; donc son rapport à *CB* est égal au rapport de *AB* à /
B-14r *AB* et *BC* considérées comme une seule droite, d'après la construction qui précède. Menons *BD* égale à *AB* et qui entoure avec *AD* un angle *D*.

Je dis que le triangle *ABD* est ce qu'on recherche et que chacun des deux angles *A* et *D* est trois fois l'angle *B*.

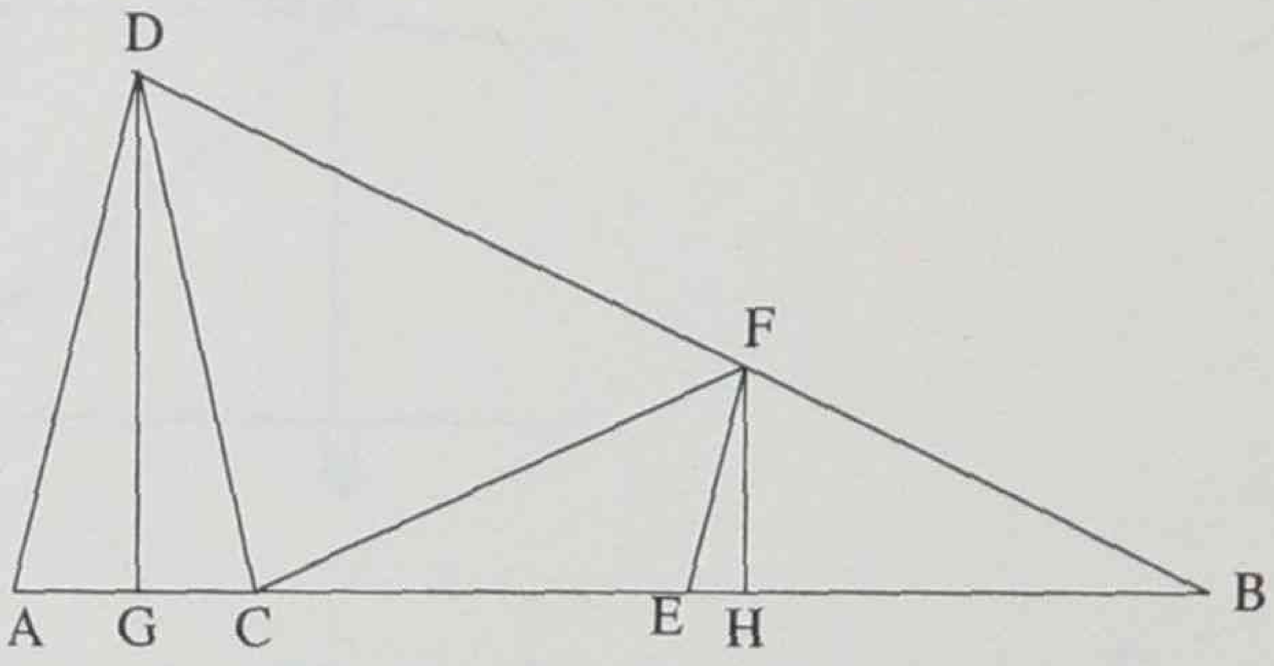


Fig. 7

Démonstration : Joignons *DC* ; puisque le rapport de *AD* à *CB* est égal au rapport de *AB* à *AB* et *BC* considérées comme une seule droite et que *AB* est plus petite que *AB* et *BC* réunies, *AD* est par conséquent plus petite que *CB*. Ôtons de *CB*, *BE* égale à *AD* ; menons *EF* parallèle à *AD* et menons *FH* et *DG* perpendiculaires à *AB*. Puisque le produit de *AB* par *AC* est égal au carré de *AD*, le rapport de *AB* à *AD* du triangle *ABD* est égal au rapport de *AD* à *AC* du triangle *ADC* et l'angle *A* des deux triangles est commun, donc le triangle *ADC* est semblable au triangle *ABD*, la droite *DC* est donc égale à la droite *AD* et *AG* est égale à *GC*. Mais puisque *GC* est la moitié de *AC* et

مع جـ ا، فنسبة الخط القوي على ا ب في ب جـ إلى خط جـ ا كنسبة خط ب ا إلى ب ا ا جـ كخط واحد مستقيم. فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

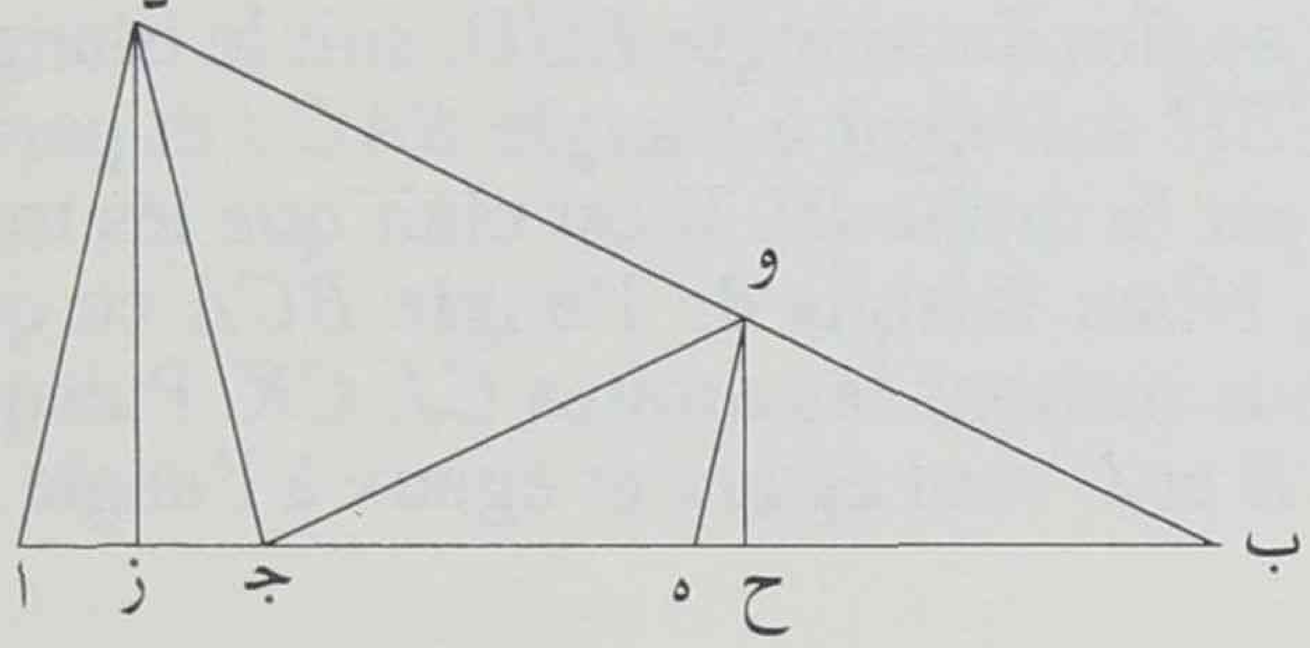
قد بنى أبو سعد العلاء بن سهل هذا الشكل، وسلك فيه طريق التحليل، وتركيبنا قسم من تحليله.

وهذه مقدمة أخرى: نريد أن نعمل على خط ا ب مثلثًا متساوي الساقين، يكون كل واحدة من زاويتيه اللتين على القاعدة ثلاثة أمثال الزاوية الباقية.

فنقسم ا ب بقسمين على جـ، يكون ا ب في ا جـ يقوى عليه خط كخط ا د، فنسبته إلى جـ ب كنسبة ا ب إلى / ا ب ب جـ كخط واحد مستقيم، بما ب-١٤-و قدمنا عمله. ونخرج ب د يساوي ا ب يحيط مع ا د بزاوية د.

أقول: إن مثلث ا ب د هو المطلوب، وكل واحدة من زاويتي ا د ثلاثة أمثال زاوية ب.

برهان ذلك: أنا نصل د جـ.



فلأن نسبة ا د إلى جـ ب كنسبة ا ب إلى ا ب ب جـ كخط واحد، وا ب أصغر من ا ب ب جـ مجموعين، فـ ا د إذن أصغر من جـ ب. فنطرح من جـ ب ب ه مساويًا لـ ا د، ونخرج ه و يوازي ا د ونخرج و ح د ز عمودين على ا ب. فلأن ضرب ا ب في ا جـ مساوٍ لمربع ا د، تكون نسبة ا ب إلى ا د من مثلث ا ب د كنسبة ا د إلى ا جـ من مثلث ا د جـ، وزاوية ا من المثلثين مشتركة، فيكون مثلث ا د جـ يشبه مثلث ا ب د، فخط د جـ مثل خط ا د وا ز مثل

1 خط (الأولى): ناقصة [ق] – 4 سعد: سعيد [ب] – 7 واحدة: واحد [ر] – 9-10 عليه خط كخط ا د، فنسبته: عليه خط نسبته [ق] عليه خط كخط ا د نسبته [ح] على خط نسبته [ر] على خط فنسبته [ب] ونجد «كخط ا د» في الهامش بخط آخر – 11 عمله: كتب بعدها «وليكن الخط القوي على ا ب في ا جـ خط ا د» [ق] – 12 أقول: فأقول [ق] / ا ب د: ا د ب [ب، ر، ح] – 13 زاوية: ناقصة [ر] – 14 برهان ذلك: برهانه [ر] / أنا: إنا [ح] – 18 إذن: اذا، ولن نشير إليها فيما بعد [ر] – 19 فنطرح: فيفرع [ر] فنفصل من [ق] – 23 فيكون مثلث: فمثلث [ق] يكون مثلث [ب، ر] / ا ب د: ا ب جـ [ب] / فخط: وخط [ق] / وا ز: فـ ا ز [ح].

que *CB* est la moitié du double de *CB*, on a *GB* la moitié de *AB* plus la
moitié de *CB* également, et le rapport de *EB*, qui est égale à *AD*, à la moitié
de *CB* est égal au rapport de *AB* à la moitié de *AB* et de *CB*, c'est-à-dire
GB. Mais le rapport de *FB*, qui est égale à *EB*, à *HB*, est égal au rapport de
B-14v *DB*, qui est égale à *AB*, à *GB*. / Le rapport de *EB* à *HB* est donc égal au
rapport de *AB* à *GB*, c'est-à-dire à la moitié de <la somme de> *AB* et de
BC; mais le rapport de *EB* à la moitié de *CB* est aussi égal au rapport de
AB à *BG*. La moitié de *CB* est par conséquent égale à *HB*, donc la droite
FC est égale à la droite *FB*, c'est-à-dire *EB*. Les droites *AD*, *DC*, *FC*, *FB*
sont donc toutes égales, mais l'angle *ACD* est égal à la <somme> des deux
angles *CDF* et *DBC* et l'angle *DFC* est le double de l'angle *B*, l'angle *ACD*,
c'est-à-dire l'angle *CAD*, est donc le triple de l'angle *B*. Chacun des deux
angles *A* et *D* du triangle *ABD* est le triple de l'angle *B*. Nous avons donc
R-82v construit / ce que nous voulions. Ce qu'il fallait construire.

<Proposition>: Nous voulons construire dans un cercle *ABC* un heptagone de côtés et d'angles égaux.

Construisons un triangle *EGD* isocèle tel que chacun des deux angles *E* et
Q-115v *G* soit le triple / de l'angle *D* et construisons dans le cercle *ABCH* un tri-
angle dont les angles sont égaux aux angles du triangle *EGD*, soit le triangle
B-15r *ABC*; menons *BH* tel que l'angle *CBH* soit égal à l'angle *BAC* / et parta-
geons l'angle *HBA* en deux moitiés par la droite *BI*. Il est clair que les trois
angles *CBH*, *HBI*, *IBA* sont égaux. Nous faisons de l'angle *BCA* ce que
nous avons fait de l'angle *CBA* et nous menons les droites *CJ*, *CK*. Puisque
les six angles qui sont aux <points> *B* et *C* sont égaux et égaux à l'angle *A*,

ز جـ. ولأن ز جـ نصف ا جـ وجـ ب نصف ضعف جـ ب، يكون ز ب نصف ا ب ونصف جـ ب أيضًا، ونسبة ه ب المساوي لـ ا د إلى نصف جـ ب كنسبة ا ب إلى نصف ا ب جـ ب، أعني ز ب. لكن نسبة و ب، المساوي لـ ه ب، إلى ح ب، كنسبة د ب، المساوي لـ ا ب، إلى ز ب./ فنسبة ه ب إلى ح ب ب-١٤-ظ كنسبة ا ب إلى ز ب، أعني نصف ا ب ب جـ، ونسبة ه ب إلى نصف جـ ب أيضًا كنسبة ا ب إلى ب ز. فنصف جـ ب إذن مساوٍ لـ ح ب، فخط و جـ إذن مثل خط و ب، أعني ه ب. فخطوط ا د د جـ و جـ و ب كلها متساوية. لكن زاوية ا جـ د مثل زاويتي جـ د و د ب جـ، وزاوية د و جـ ضعف زاوية ب، فزاوية ا جـ د، أعني زاوية جـ ا د ثلاثة أضعاف زاوية ب. فكلّ واحدة من زاويتي ا د من مثلث ا ب د ثلاثة أضعاف زاوية ب. فقد عملنا/ ما أردنا؛ ر-٨٢-ظ وذلك ما أردنا أن نعمل.

نريد أن نعمل في دائرة ا ب جـ مسبعًا متساوي الأضلاع والزوايا.

فنعمل مثلث ه ز د متساوي الساقين، يكون كل واحدة من زاويتي ه ز ثلاثة / أمثال زاوية د، ونعمل في دائرة ا ب جـ ح مثلثًا زواياه مساوية ق-١١٥-ظ لزوايا مثلث ه ز د، وهو مثلث ا ب جـ. ونخرج ب ح، يكون زاوية جـ ب ح مساوية لزاوية ب ا جـ، / ونقسم زاوية ح ب ا بنصفين بخط ب ط. فبين أن ب-١٥-و زوايا جـ ب ح ح ب ط ط ب ا الثلاث متساوية. ونعمل بزاوية ب جـ ا ما عملنا بزاوية جـ ب ا، ونخرج خطي جـ ي جـ ك. فلأن الزوايا التي على ب جـ

1 ا جـ: ا جـ ر [ب] / نصف (الثانية): فنصف [ر] – 2 ونصف جـ ب أيضًا: جـ ب مجموعين [ق] – 3 و ب: ر ب [ر] ر ب الى [ب] / لـ ه ب: لخط ه ب [ق] – 4 ح ب: حـ ب [ب] – 4-6 فنسبة ه ب ... إلى ب ز: فنسبة ه ب إلى نصف جـ ب وإلى ح ب واحدة [ق]، لطول العبارة ربما أراد مصطفى صدقي تلخيصها عند نسخه لها – 4 ح ب: حـ ب [ب] – 5 ونسبة: فنسبة [ب، ر] – 5-6 إلى نصف جـ ب ... فخط و جـ: ناقصة [ب] – 6 إذن (الثانية): ناقصة [ق] – 7 خط: ناقصة [ق] / و ب: د ر [ب] – 7 و جـ: جـ و [ر، ح] حـ ر [ب] / و ب: ر ب [ب] – 8 جـ د و: و جـ د [ب] / د ب جـ: و ب جـ [ق] – 9 أعني زاوية جـ ا د: ا د ب [ب] / أضعاف: أمثال [ق] – 10 ا ب د: ا د ب [ب، ر، ح] / أضعاف: أمثال [ق] – 11 أردنا: اردناه [ر] – 12 ا ب جـ: ناقصة [ق] / الأضلاع: للاضلاع [ب] / والزوايا: ناقصة [ب، ر] – 13 زاويتي: زاويتيه [ق، ح] – 14 ا ب جـ ح: ا ب جـ [ق] – 15 ه ز د: د ه ز [ق] / ب ح: جـ ح [ق]، كتب في هذا الشكل جـ بدلاً من ب والعكس – 16 ح ب ا: حـ ب ا [ب] / فبين: فنبيّن [ق] – 18 عملنا: علمنا [ر].

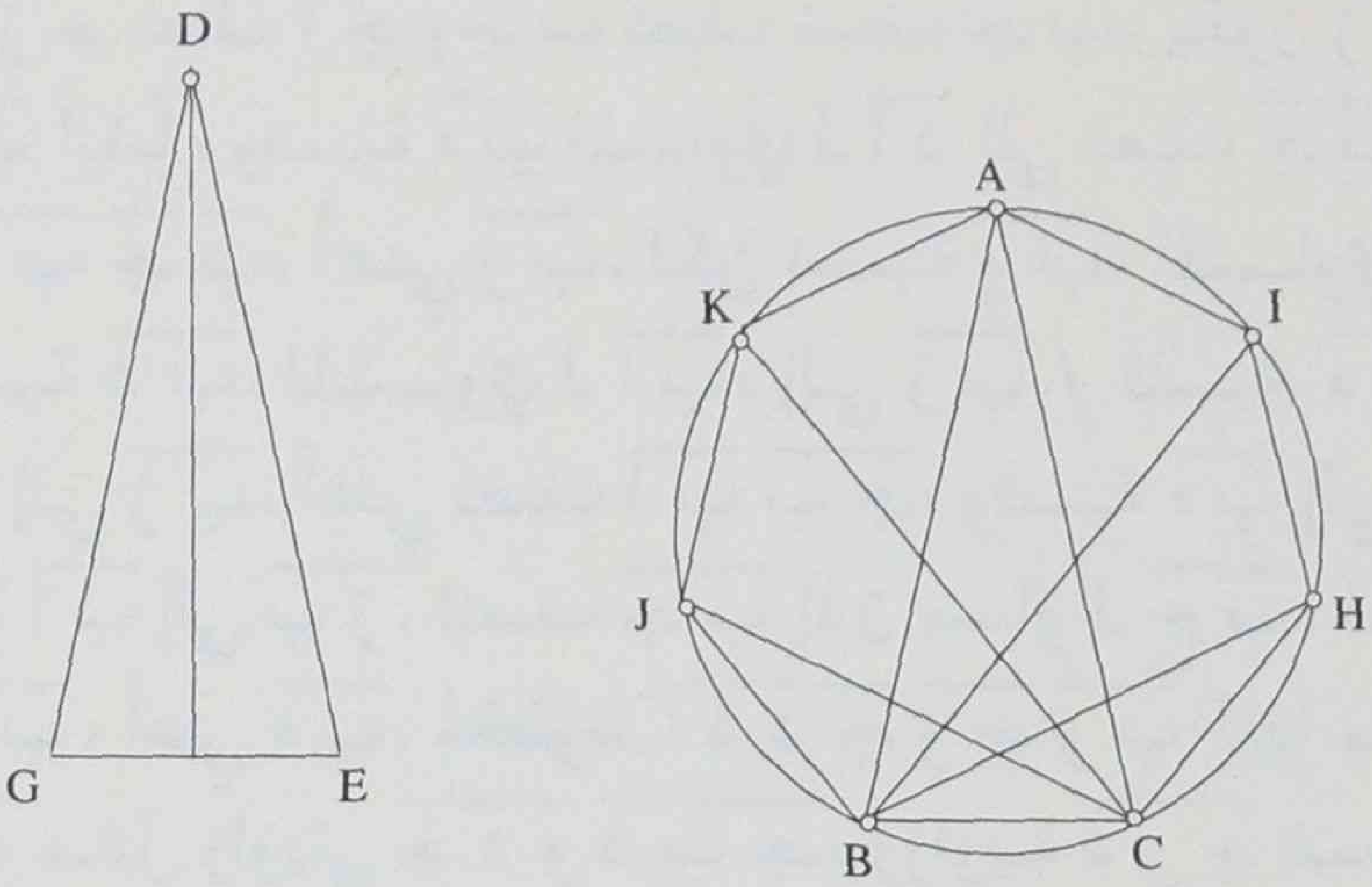


Fig. 8

leurs arcs qui sont *CH, HI, IA, BJ, JK, KA* sont égaux et égaux à l'arc *BC*; nous avons donc construit dans le cercle *ABCH* un heptagone régulier. Ce que nous voulions construire.

Voici un lemme pour la trisection de l'angle rectiligne.

Le demi-cercle *ACB* est donné, la droite *AG* est de position connue, le diamètre est *AB* et le centre est *D*. Nous voulons trouver sur le diamètre *AB*
B-15^v / un point comme le point *E*, tel que si nous menons de ce point jusqu'à la circonférence du demi-cercle *ACB* une droite parallèle à la droite *AG*, comme la droite *EC*, son carré, c'est-à-dire <le carré de> *EC*, soit égal à la droite *BE* par *ED*. Construisons sur le diamètre *DB* une hyperbole telle que son diamètre transverse soit *DB*, que son côté droit soit égal à la droite *DB* et telle que les ordonnées soient suivant des angles égaux à l'angle *GAB*; soit la section *DCH* qui coupe la circonférence du demi-cercle au point *C*. Menons *CE* parallèle à *AG*.

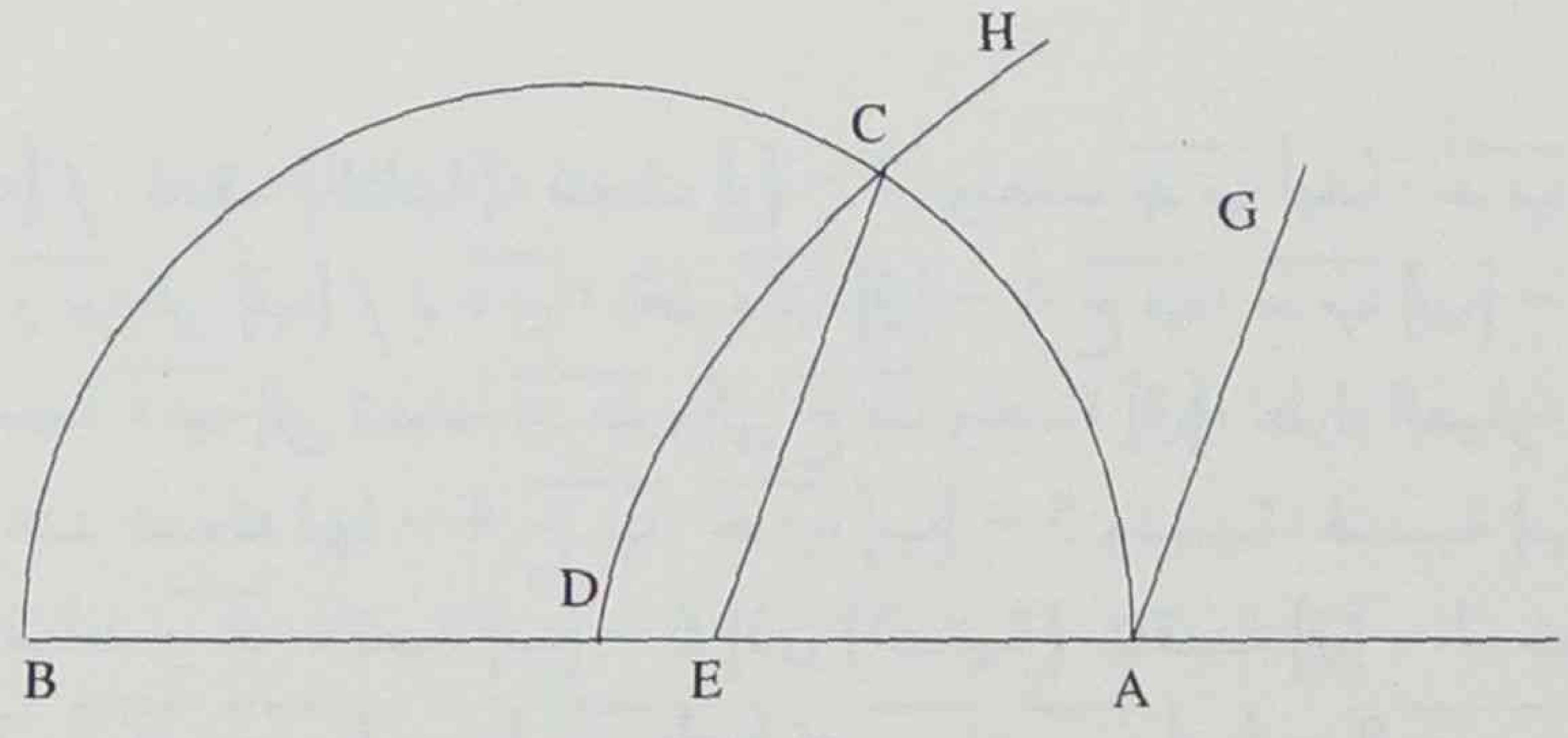
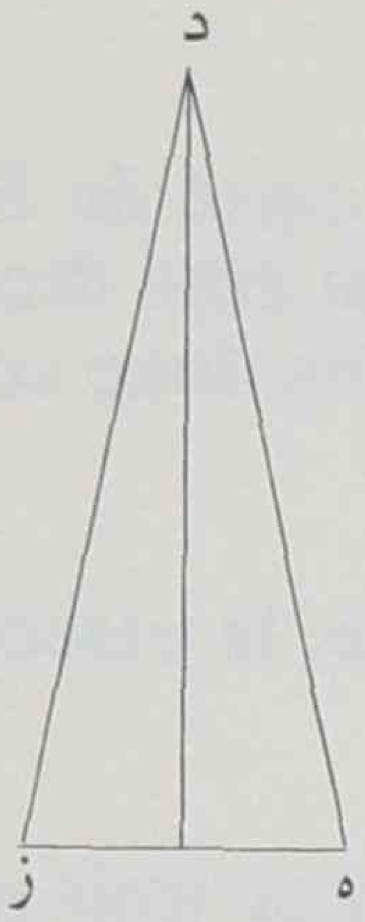
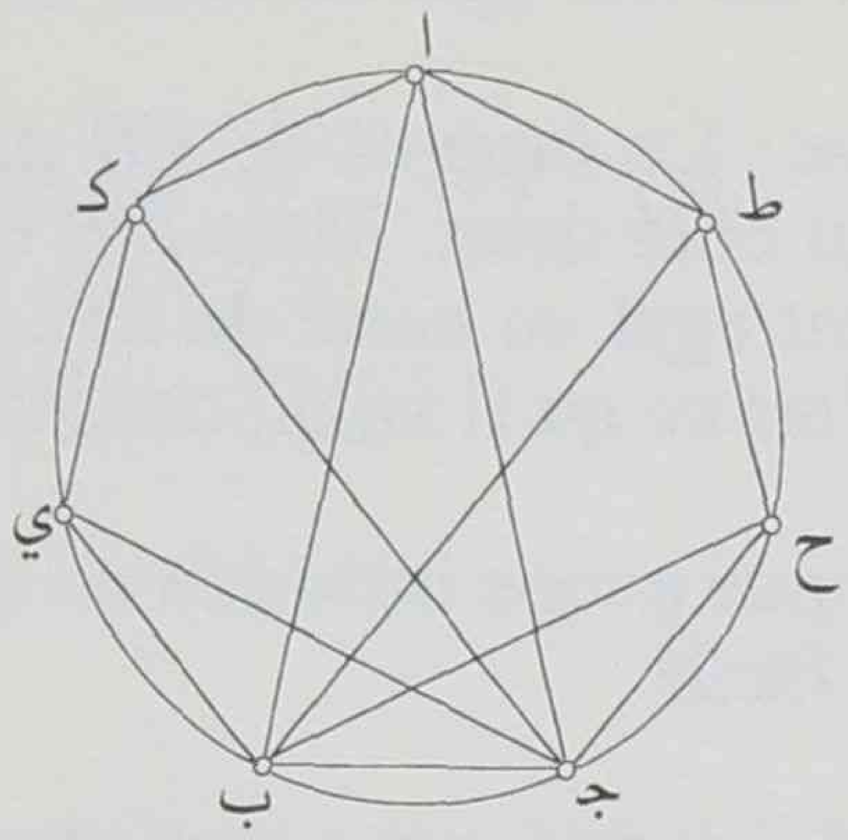


Fig. 9

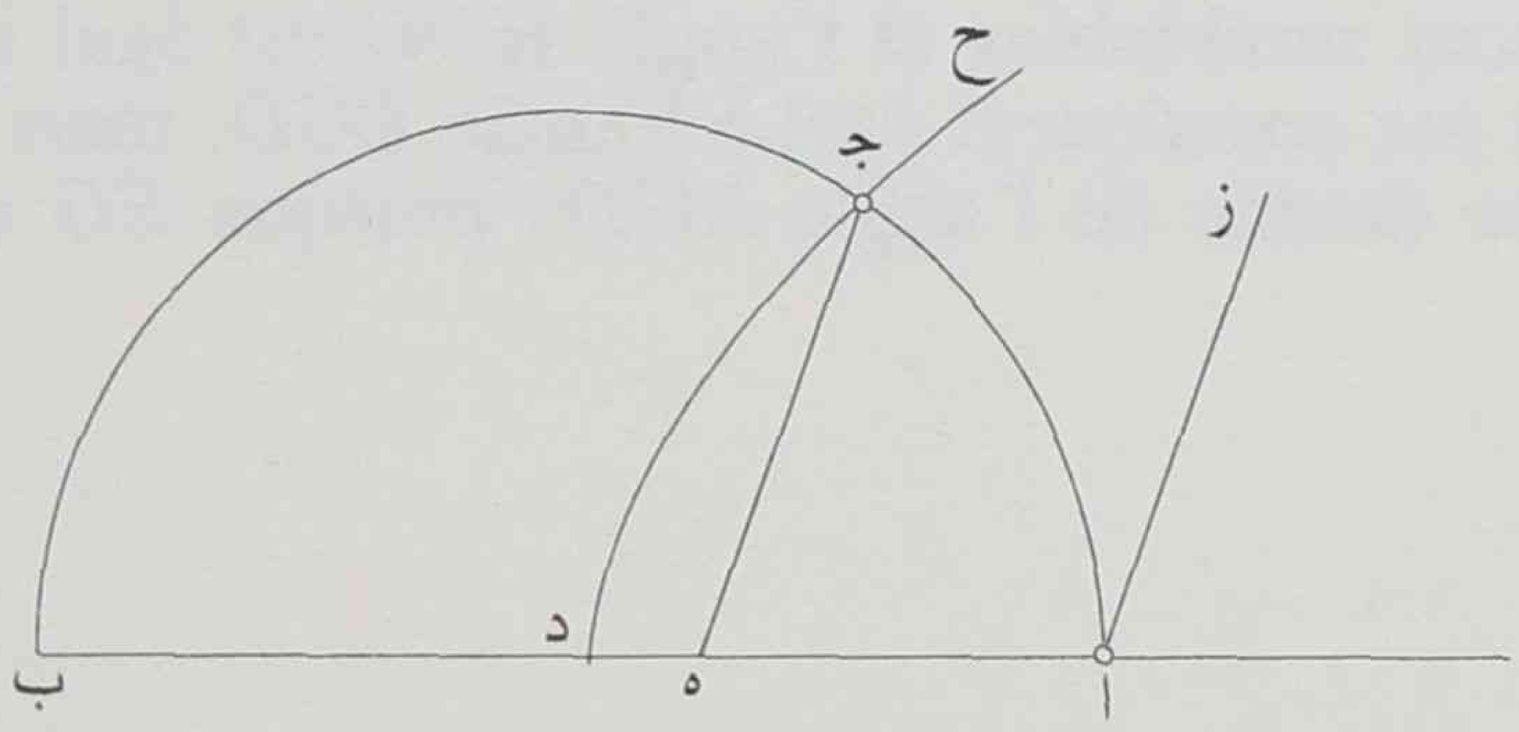




الستة متساوية ومساوية لزاوية آ، يكون قسيها وهي جـ ح ح ط ط ا ا ب ب ي ي ك ك ا متساوية ومساوية لقوس ب جـ. فقد عملنا في دائرة ا ب جـ ح مسبعًا متساوي الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وهذه مقدمة لقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

نصف دائرة ا جـ ب معطى، وخط ا ز معلوم الوضع، والقطر ا ب، والمركز د. ونريد أن نجد على قطر ا ب / نقطة كنقطة ه، إذا أخرجنا منها إلى ب-١٥-ظ محيط نصف دائرة ا جـ ب خطًا موازيًا لخط ا ز، كخط ه جـ، يكون مربعه، أعني ه جـ، مساويًا لخط ب ه في ه د. فلنعمل على قطر د ب قطعًا زائدًا، يكون قطره المجانب د ب وضلعه المنتصب مساويًا لخط د ب وتكون خطوط الترتيب على زوايا مساوية لزاوية ز ا ب، وهو قطع د جـ ح يقطع نصف محيط الدائرة على نقطة جـ. ونخرج جـ ه يوازي ا ز.



1 ح ط ط ا: حـ ط ه ا [ب] – 2 ي ك: ب ك [ب] / ا ب جـ: ا ب جـ ح: ا ب جـ [ق] – 5 معطى: معطاة [ب، ق] – 6 أخرجنا: اخرج [ب، ر، ق، ح] – 7 محيط: المحيط [ت] / خطًا موازيًا: خط مواز [ح] – 9-10 خطوط الترتيب: خطوطه الترتيبية [ب، ح] خطوطه الترتيب [ر، ق] – 9 قطره المجانب د ب و: ناقصة [ر، ق] في الهامش بخط آخر [ب] – 10 د جـ ح: د جـ ز [ب، ر] .

Je dis que *EB* par *ED* est égal au carré de *EC*.

Démonstration : Le rapport de *EB* par *ED* au carré de *EC* est égal au rapport de *DB* au côté droit. Mais *DB* est égale au côté droit, *BE* par *ED* est par conséquent égal au carré de *EC*. Nous avons donc construit ce que nous voulions. C'est ce qu'il fallait construire.

Une fois que nous avons introduit ce qui précède, la trisection de l'angle rectiligne devient facile.

Soit l'angle *BAC* donné, nous voulons le partager en trois parties égales. /
B-16r Prolongeons *BA* jusqu'à *D* de la grandeur que nous voulons et traçons sur le diamètre *AD* un demi-cercle *AGD* de centre *E*. Menons *HG* parallèle à *AC* et telle que *HD* par *HE* soit égal au carré de *HG* selon la construction qui précède. Joignons *GD* et *GE* et menons *AI* parallèle à *EG*.

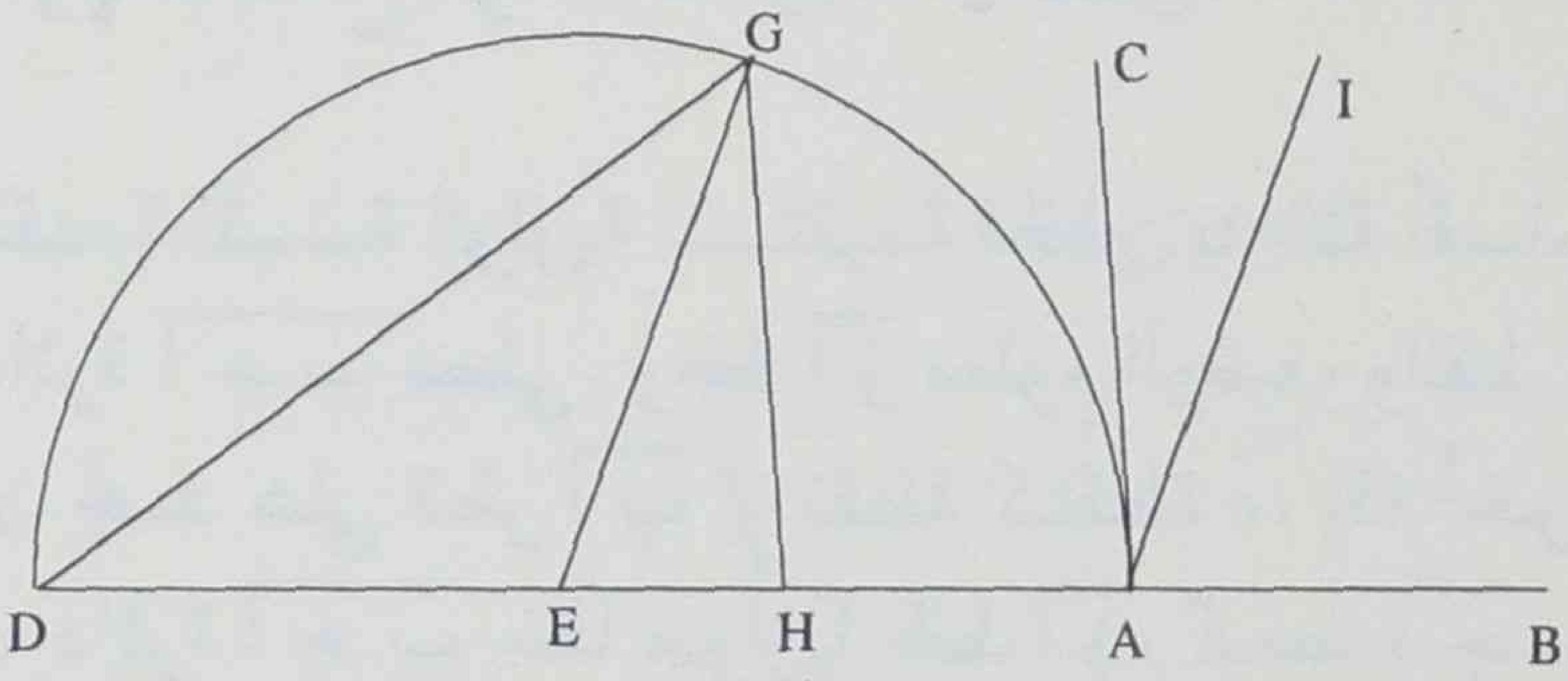


Fig. 10

Je dis que l'angle *BAI* est le double de l'angle *IAC*. /

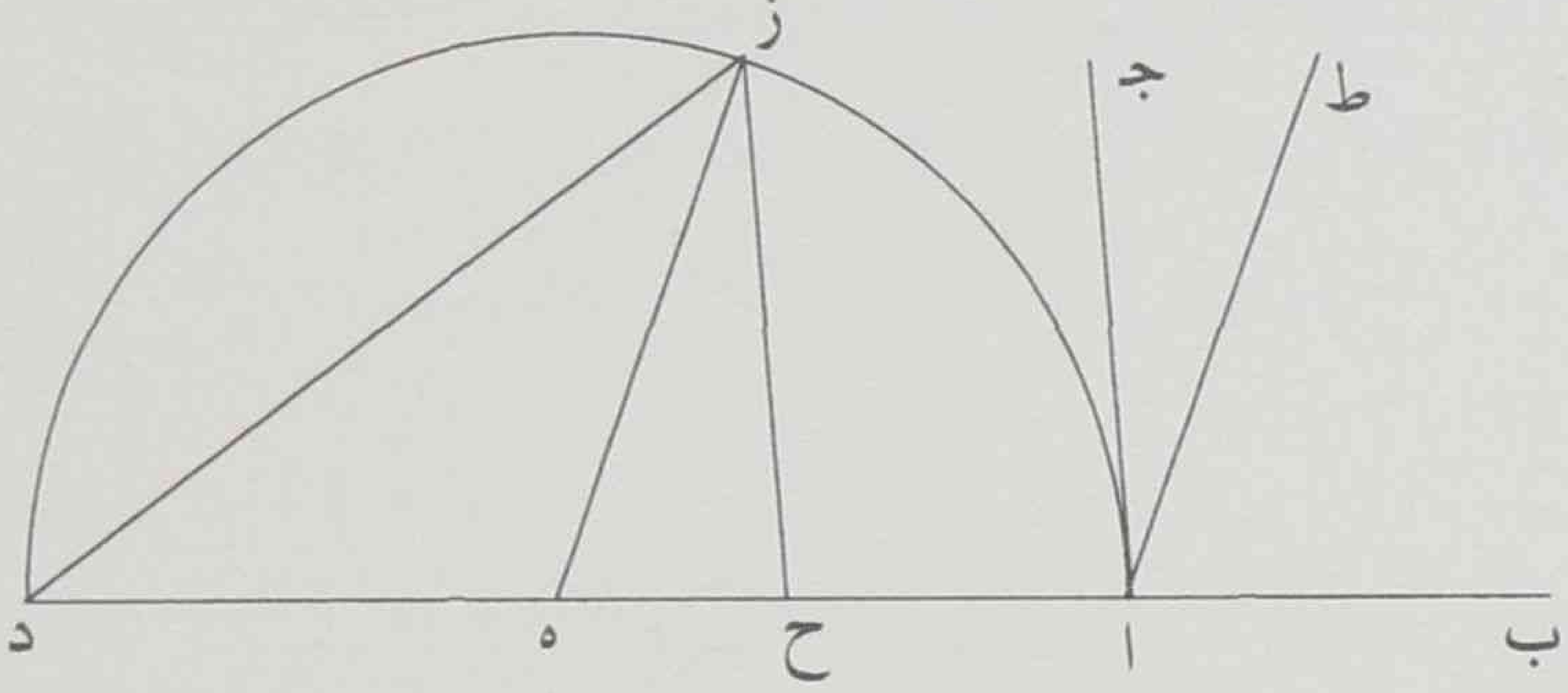
R-83r *Démonstration* : Puisque le produit de *HD* par *HE* est égal au carré de
Q-116r *HG*, on a le rapport de *HD* à *HG* du triangle *HDG* / égal au rapport de *HG* à *HE* du triangle *HGE* ; mais l'angle *H* est commun aux triangles, donc les deux triangles sont semblables et l'angle *HDG* est égal à l'angle *HGE* ; l'angle *HGE* est par conséquent égal à l'angle *EGD*, mais l'angle externe *HEG* est égal au double de l'angle *EGD* ; puisque *EG* est égale à *ED*,

أقول: إن ه ب في ه د مساوٍ لمربع ه جـ.

برهان ذلك: أن نسبة ه ب في ه د إلى مربع ه جـ كنسبة د ب إلى الضلع المنتصب. لكن د ب مساوٍ لضلعه المنتصب، فـ ب ه في ه د إذن مساوٍ لمربع ه جـ. فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

ومن بعد ما قدّمنا، فليسهل بذلك قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

فلتكن زاوية ب ا جـ معطاة. ونريد أن نقسمها بثلاثة أقسام متساوية./ فلنخرج ب ا على استقامته إلى د على أي مقدار أردنا، وندير ب-١٦-و على قطر ا د نصف دائرة ا ز د والمركز ه. ونخرج ح ز يوازي ا جـ، يكون ح د في ح ه مساوياً لمربع ح ز على ما قدمنا عمله. ونصل ز د ز ه ونخرج ا ط يوازي ه ز.



أقول: إن زاوية ب ا ط ضعف زاوية ط ا جـ./

برهان ذلك: لأن ضرب ح د في ح ه مساوٍ لمربع ح ز، يكون نسبة ح د ر-٨٣-و إلى ح ز من مثلث ح د ز / كنسبة ح ز إلى ح ه من مثلث ح ز ه. وزاوية ق-١١٦-و ح مشتركة بين المثلثين، يكون المثلثان متشابهين، فزاوية ح د ز مساوية لزاوية ح ز ه، فزاوية ح ز ه إذن مساوية لزاوية ه ز د. لكن زاوية ح ه ز الخارجة مساوية لضعف زاوية ه ز د؛ لأن ه ز مثل ه د، فزاوية ح ه ز ضعف

1 إن: أن [ح] / مساوٍ: مساوياً [ب] – 3 مساوٍ (الأولى): مساويا [ب، ر] – 4 أردنا: اردناه [ر] – 7 معطاة: معطا ه [ر] – 9 يكون: ويكون [ق] – 10 قدمنا: قدمناه [ر] / ز د ز ه: ز ه ز د [ق] – 12 ضعف: مثلي [ق] – 13 مساوٍ: مساوياً [ب، ر] – 14 ح د ز: د ح ز [ق] / ح ه: حـ ه [ب] / ح ز ه: ه ز ح [ق] – 15 بين: من [ق، ح] / يكون: فيكون [ح] / المثلثان: المثلثين [ق، ح] – 17 لأن: ولأن [ق].

l'angle *HEG* est le double de l'angle *EGH* ; mais l'angle *AHG* qui est égal à
B-16v l'angle *BAC* est égal à la somme des deux angles *HGE* et *GEH* internes / du triangle ; or l'angle *BAI* est égal à l'angle *HEG* ; il reste l'angle *IAC* égal à l'angle *EGH*, donc l'angle *BAI* est le double de l'angle *IAC*. Nous partageons l'angle *BAI* en deux moitiés, on a donc partagé l'angle *BAC* en trois parties égales. Ce qu'il fallait démontrer.

Le livre de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl sur l'heptagone et la trisection de l'angle rectiligne est achevé.

زاوية ه ز ح. لكن زاوية ا ح ز المساوية لزاوية ب ا ج مساوية لزاويتي ح ز ه ز ه ح الداخلتين من / المثلث؛ وزاوية ب ا ط مساوية لزاوية ح ه ز، ب-١٦-ظ تبقى زاوية ط ا ج مساوية لزاوية ه ز ح، فزاوية ب ا ط ضعف زاوية ط ا ج. نقسم زاوية ب ا ط بنصفين، فقد قسمنا زاوية ب ا ج بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تم كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل في المسبع وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

1 ح ز ه: ح د ه [ب] – 3 تبقى: فتبقى [ح] – 4 نقسم: ونقسم [ق] فنقسم [ح] – 5 أردنا أن نبين: أردناه [ر] أردنا أن نعمل [ق] – 6-7 تم ... متساوية: تم الكتاب بحمد الله وعونه وتأييده وحسبنا الله وحده ونعم الوكيل. قد نقل من نسخة سقيمة وقوبل بها ولله الحمد [ب] تم في يوم الثلثاء التاسع من جمادى الأولى لسنة ثلاث وخمسين ومائة وألف [ق] – 7 متساوية: كتب بعدها «بحمد الله. م» [ر].

TEXTE ET TRADUCTION

X

Fī jawāb mas'ala ʿadadiyya ʿalā al-ṭarīq al-kullī, wa-hiya: kayfa najid ʿadadayn murabbayn yakūn majmūʿuhumā ʿadadan murabbaʿan ?

Solution par une méthode universelle d'un problème numérique qui est: comment trouver deux nombres carrés dont la somme est un nombre carré ?

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux
Que Dieu nous assiste

Traité de Aḥmad ibn Muḥammad ʿAbd al-Jalīl:

Solution par une méthode universelle d'un problème numérique qui est :

comment trouver deux nombres carrés dont la somme est un nombre carré ?

Ce problème conduit aux triangles rectangles de côtés rationnels.

Tu m'as interrogé, Honoré Seigneur, que Dieu perpétue ton bonheur, sur le problème numérique qui est l'égalité de la somme de deux nombres carrés à un nombre carré et sur la méthode pour le résoudre. J'y ai pensé et je suis parvenu aux démonstrations géométriques par l'analyse et la synthèse. J'ai proposé des exemples numériques et j'ai posé le problème universel pour que l'utilité devienne plus générale et plus convenable à la méthode de la science. En effet, l'universel embrasse les particuliers, alors que les particuliers peuvent ne pas mener à l'universel. Et par Dieu est la réussite.

Question : comment trouver deux nombres carrés dont la somme est un nombre carré. Supposons par la voie de l'analyse que le carré AC soit la somme de deux carrés et que AD soit l'un de ces deux carrés, il reste le gnomon ED, DC, DB ; alors AG par GB deux fois, auquel on ajoute le carré de GB, est un carré. Nous faisons AH égal à AG, alors le carré de AG plus la surface HB par BG est un carré.

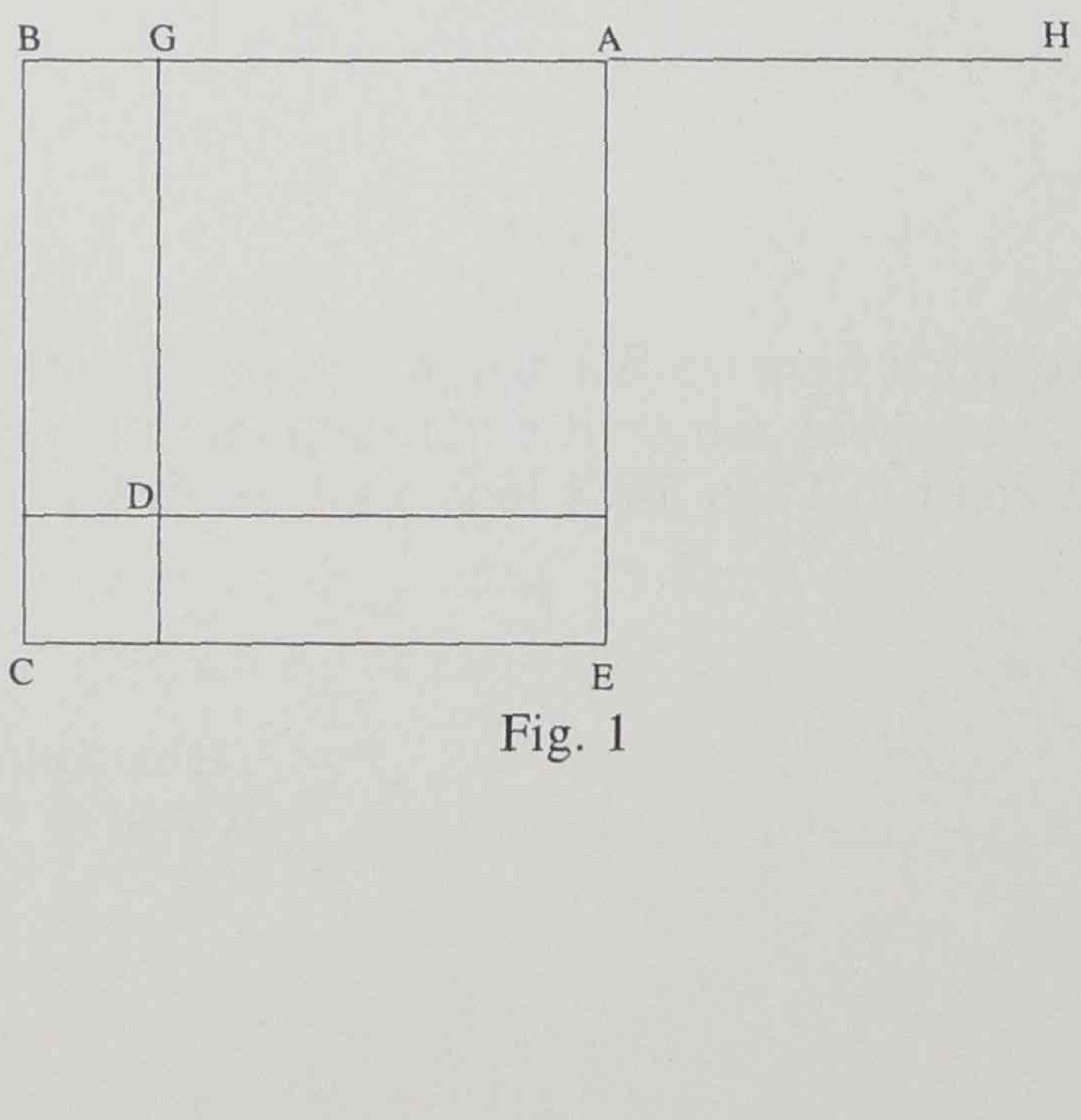


Fig. 1

بسم الله الرحمن الرحيم ٣٤٠
وربّ أعن

رسالة أحمد بن محمد عبد الجليل

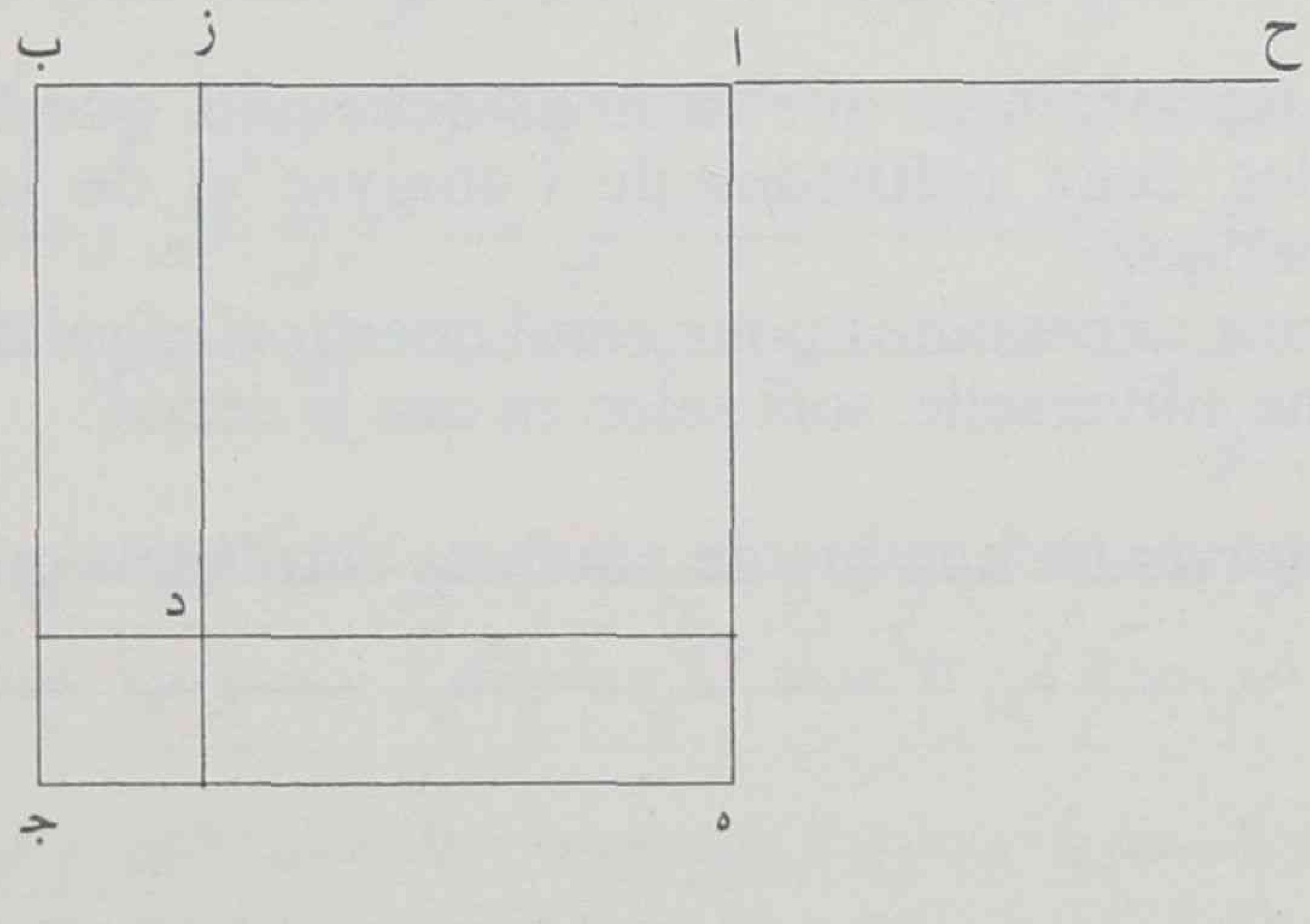
في جواب مسألة عددية على الطريق الكليّ وهي:

كيف نجد عددين مربعين يكون مجموعهما عدداً مربعاً؟

وهذه المسألة تؤدي إلى المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الأضلاع.

سألتَ أيها السيد الشريف، أدام الله سعادتك، عن المسألة العددية التي هي مساواة العددين المربعين عدداً مربعاً، وكيفية الطريق إلى وجدانها. فأجلتُ فكري فيه وأتيتُ بالبراهين الهندسية على جهتي التحليل والتركيب، ووضعتُ له أمثلة عددية، وجعلتُ المسألة كلية لتكون أعم فائدة وأليق بطريق العلم. وذلك أن الكليّ يشمل الجزئيات والجزئيات ربما لا تفيد الكليّ وبالله التوفيق.

السؤال: كيف نجد عددين مربعين يكون مجموعهما عدداً مربعاً. فلنفرض على طريق التحليل مربع ا جـ مجموع المربعين وا د أحد المربعين، يبقى علم ه د د جـ د ب، ⟨فضعف⟩ ا ز في ز ب مضاف إليه مربع ز ب مربع. فنجعل ا ح مثل ا ز، فيصير مربع ا ز وسطح ح ب في ب ز مربعاً.



4 مسألة: مطموسة – 5 عدداً مربعاً: عدد مربع – 15 مربع (الثانية): مربعا.

Synthèse : supposons un nombre carré représenté par le gnomon BD, DC, DE et posons-le un nombre pair, alors on peut trouver la réponse à cette question de deux manières. Si son huitième est pair, alors on trouvera la réponse de trois manières, et ainsi de suite on obtiendra les solutions selon ses parties paires trouvées par l'ordre des divisions par deux. Nous prenons ensuite l'homonyme de cette partie qui est représenté par GB, et nous posons le nombre HB égal à cette partie, dont l'homonyme est pair. Si HG est pair, alors nous le partageons en deux au <point> A, donc AD est un carré et HB par BG est le gnomon BD, DC, DE ; mais leur somme est le carré AC. Nous avons donc trouvé ce que nous voulions par une méthode universelle.

Quant à l'exemple numérique : supposons un nombre carré pair représenté par le gnomon BD, DC, DE, soit 64, et cherchons de combien de manières nous trouvons dans ce nombre ce que nous voulons. Il donne une moitié paire. Si nous en retranchons son homonyme, qui est deux, il reste un nombre pair, qui est 30 ; il donne le quart pair qui est 16. Si nous en retranchons son homonyme, qui est 4, il reste un nombre pair, qui est 12 ; il donne le huitième, qui est 8. Si nous en retranchons son homonyme, qui est 8, il n'en reste rien ; ce nombre, qui est 64, se donne donc selon deux manières, la moitié et le quart. L'une qui est la moitié se décrit comme je l'expose. Nous divisons 64 en deux moitiés et nous retranchons d'une moitié son homonyme qui est représenté par GB, il reste 30 représenté par HG que
341 nous partageons / en deux moitiés, on a 15 représenté par AG que nous multiplions par lui-même, le produit est représenté par AD et sera 225. Nous les additionnons, on aura 289 qui est un carré et sa racine est 17 représenté par AB. Nous avons donc trouvé ce que nous voulions.

Quant à la seconde manière qui a donné le quart, nous divisons 64 en quatre parties, nous retranchons du quart son homonyme représenté par GB, il reste 12 représenté par HG ; nous prenons la moitié qui est 6 représenté par AG, que nous multiplions par lui-même, le produit est représenté par AD, on aura 36 ; nous additionnons les deux ; le résultat est 100 représenté par le carré AC et sa racine est 10 qui est représenté par AB. Nous avons donc résolu le problème de ce carré de deux manières.

Ceci est la réponse à ce que tu m'as demandé, que Dieu vienne à ton secours, par les deux méthodes de l'analyse et de la synthèse et par l'exemple numérique.

Les conditions nécessaires pour cette question et sa simplification pour qu'elle devienne universelle, sont selon ce que je décris :

Comment trouver un nombre de nombres carrés tels que leur somme soit un carré ?

التركيب: نفرض عدداً مربعًا بمنزلة علم ب د د جـ د ه ونجعله عدداً زوجًا. فقد نجد هذا السؤال على وجهين. فإن كان ثمنه زوجًا، فقد نجده على ثلاثة أوجه، وعلى هذا النسق توجد بحسب ما نجد أجزاءه على ترتيب التنصيف زوجًا. ثم نأخذ سمي ذلك الجزء وهو بمنزلة ز ب، ونجعل عدد ح ب مساويًا لذلك الجزء الذي سميّه زوج. فإن ‹كان› ح ز زوجًا، فنقسمه بنصفين على آ، فـ آ د مربع وح ب في ب ز علم ب د د جـ د ه؛ لكن مجموعهما مربع آ جـ. فقد وجدنا ما أردنا بطريق كليّ.

فأما مثاله العددي: فلنفرض عدداً مربعًا زوجًا بمنزلة علم ب د د جـ د ه، وهو ٦٤؛ ونطلب كم وجه نجد فيه ما أردنا. فيعطى النصف زوجًا، فإذا ألقينا منه سميّه، وهو اثنان، فيبقى عدد زوج، وهو ٣٠. ويعطى الربع زوجًا وهو ١٦، فإذا ألقينا سميّه، وهو ٤، يبقى عدد زوج، وهو ١٢. ويعطى الثمن، وهو ٨، فإذا ألقينا منه سميّه، وهو ٨، لم يبق منه شيء. فيعطى هذا العدد، الذي هو ٦٤، على وجهين النصف والربع. وأحدهما الذي هو النصف على الصفة التي أنا ذاكره: نقسم ٦٤ بنصفين ونلقي منه سميّه ‹أيّ› جزئه الذي هو بمنزلة ز ب، يبقى ٣٠ الذي هو بمنزلة ح ز، فنقسمه / بنصفين، فيكون ٢٤١ ١٥ الذي هو بمنزلة آ ز، فنضربه في نفسه الذي هو بمنزلة آ د، يصير ٢٢٥. فنجمعهما، فيصير ٢٨٩ وهو مربع، وجذره ١٧ الذي هو بمنزلة آ ب؛ فقد وجدنا ما أردنا.

وأما الوجه الثاني الذي هو أعطى الربع، فنقسم ٦٤ ‹أربعة أقسام ونلقي من الربع سميّه›، وهو بمنزلة ز ب، يبقى ١٢ الذي هو بمنزلة ح ز، فنأخذ نصفه، وهو ٦ الذي هو بمنزلة آ ز، ونضربه في نفسه الذي هو بمنزلة آ د يصير ٣٦، فنجمعهما، فيكون ١٠٠ الذي هو بمنزلة مربع آ جـ، وجذره ١٠ الذي هو بمنزلة آ ب. فقد وجدنا هذه المسألة في هذا المربع على وجهين.

فهذا جواب ما سألتني، أيدك الله، على طريقي التحليل والتركيب والمثال العددي.

فأما لوازم هذا السؤال وتبسيطه ليصير كليًا فهو على هذه الصفة.

كيف نجد عدّة من الأعداد المربعة يكون مجموعها عدداً مربعًا؟

2 فإن: وان – 5 مساويًا: مساوي / زوج: زوجا – 10 اثنان: اثنين / فيبقى عدد زوج: فبقى عددا زوجا – 11 عدد زوج: عددا زوجا / ١٢: ح آ، ونجد فوقها الصواب، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 12 شيء: شيئا – 14 ذاكره: يعني النصف – 19 ٦٤: ٤ – 20 ح ز: حبر.

Ce problème se décompose en quatre problèmes pour qu'on se ramène à d'autres et pour englober tout ce qui intervient dans la question. L'un est le problème que j'ai donné. Le second est cette recherche : comment trouver trois nombres carrés tels que leur somme soit un carré.

Supposons-le par l'analyse : soit le carré AC, la somme de trois carrés dont l'un est le carré AD de côté AE, l'autre est le carré DC de côté EB et le troisième, les deux compléments, qui sont GD et DB, entouré par le double de AE par EB[1]. Si nous posons BH égal à EB, alors le côté du carré GD, DB peut AE par EH.

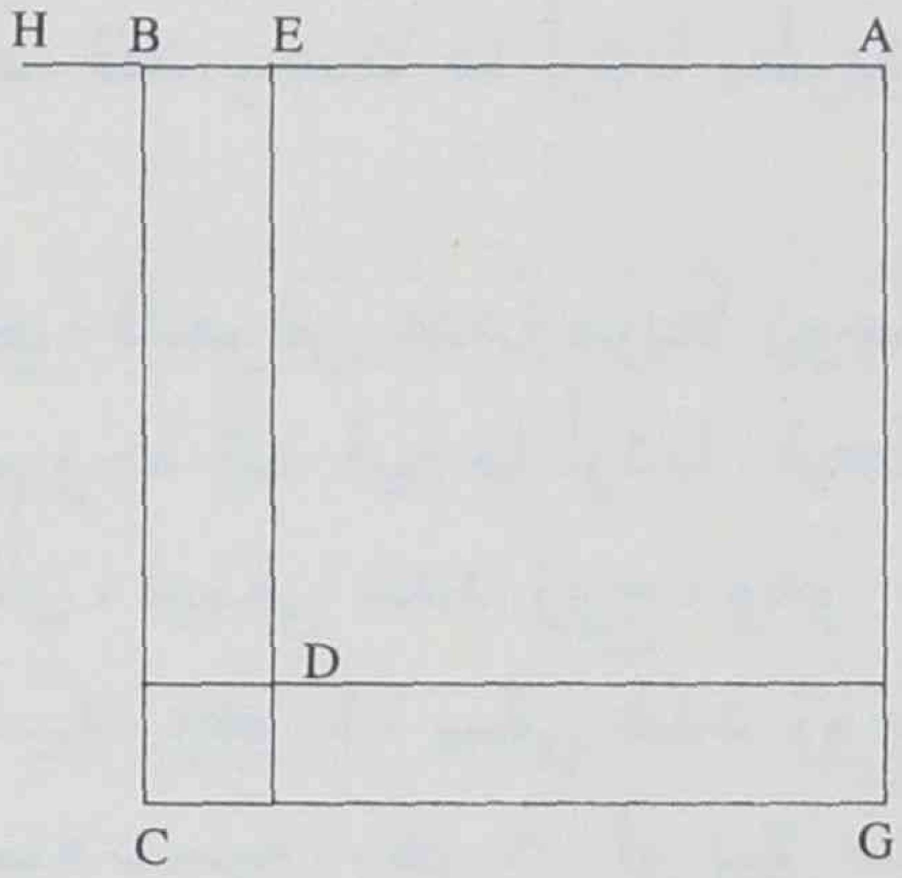


Fig. 2

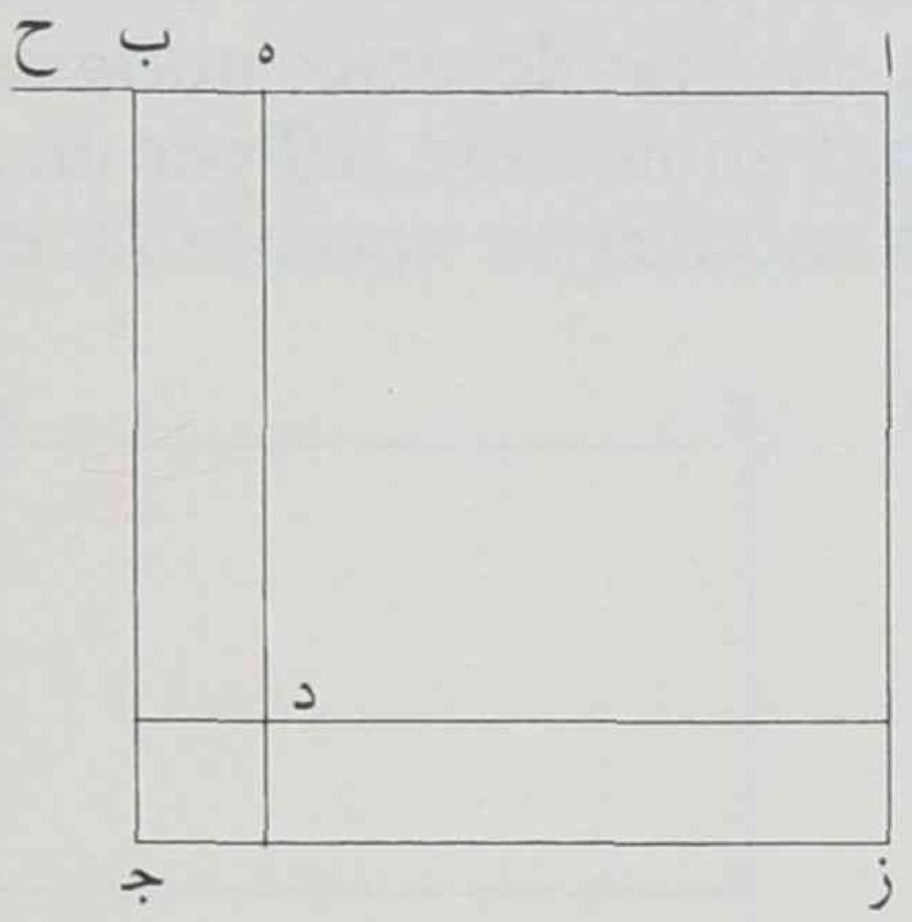
Synthèse : supposons deux nombres qui entourent un nombre carré et dont l'un, ou les deux, est un nombre pair — il est facile de le trouver — représentés par AE et EH. Partageons le nombre pair représenté par EH en deux moitiés, et qu'il soit partagé en B ; additionnons-les[2], la somme est représentée par AB. AB par lui-même est donc égal à la somme de trois carrés : l'un que le nombre supposé peut, nombre qui est pair ou impair et est représenté par AE ; le deuxième est le carré de la moitié du nombre supposé qui reste, et est représenté par EB, et le troisième est le double de l'un par l'autre que nous avons supposé un nombre carré ; ceci, car les carrés de AE et de EB plus le double-produit de AE par EB ont une somme égale au carré de AB. Mais nous avons supposé le double de AE par EB un nombre carré, car nous avons supposé AE par EH un nombre carré. Nous avons donc trouvé ce que nous voulions. Ce qu'il fallait démontrer.

[1] Les rectangles (GD) et (DB) ont des aires égales, dont la somme est égale au produit $2AE \cdot BE$.

[2] C'est-à-dire EB et AE.

فتنحل هذه المسألة إلى أربع مسائل، ليكون مؤدياً إلى ما سواها ويتضمن سائر ما يتداخل ‹في› السؤال. فأحدها هذه المسألة التي أتيتُ بها. والثاني هذا المطلب، وهو: كيف نجد ثلاثة أعداد مربعات يكون مجموعها عدداً مربعاً.

فلنفرضه على جهة التحليل: مربع ا ج، مجموع الثلاثة المربعات، أحدها مربع ا د وضلعه ا ه، والثاني مربع د ج وضلعه ه ب، والثالث المتممان اللذان هما ز د د ب، ويحيط به ضعف ا ه في ه ب. فإذا جعلنا ب ح مثل ه ب، يقوى ضلع مربع ز د د ب على ا ه في ه ح.



التركيب: نفرض عددين يحيطان بعدد مربع، ويكون أحدهما أو كلاهما عدداً زوجًا – ووجودها سهل – بمنزلة ا ه ه ح. ونقسم العدد الزوج بنصفين بمنزلة ه ح مقسوم بنصفين على ب، ونجمعهما بمنزلة ا ب، فـ ا ب في نفسه مجموع ثلاثة مربعات: أحدها الذي يقوى عليه [في] العدد المفروض، إما زوجًا وإما فرداً بمنزلة ا ه، والثاني ‹مربع› نصف العدد الباقي المفروض الذي هو بمنزلة ه ب، والثالث ضعف أحدهما في الآخر الذي فرضناه عدداً مربعاً؛ وذلك لأن مربعي ا ه ه ب وضعف ا ه في ه ب يعدل مربع ا ب. وقد فرضنا ضعف ا ه في ه ب عدداً مربعًا، لأنا فرضنا ا ه في ه ح عدداً مربعاً. فقد وجدنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

2 فأحدها: يعني أحد ما يتداخل في السؤال – 5 الثلاثة: الثلث – 6 المتممان اللذان: المتممين اللذين – 11 مقسوم: تركناها، ومثلها كما هي، على تقدير أن «بمنزلة» ظرف، فرفع بعدها ه ح بالإبتداء وخبره – 12 ثلاثة: ثلث.

342 Quant à son exemple numérique, / nous supposons *AE* un nombre quelconque, soit 9, et nous cherchons un autre nombre qui entoure avec 9 un nombre carré et tel que ce nombre soit pair, qui est 4 et qui est représenté par *EH*. Or 9 et 4 entourent un nombre carré, qui est 36, représenté par les deux compléments. Nous retranchons la moitié de 4, comme nous l'avons mentionné, il reste 2 représenté par *EB*; nous multiplions neuf par neuf, on a 81, qui est représenté par le carré *AD*; nous multiplions 2 par lui-même, on a 4 représenté par le carré *DC*; nous multiplions neuf par le double de deux, on a 36 représenté par les deux qui complètent. Nous les additionnons, on aura 121 dont la racine est 11, qui mène à ce que nous cherchons. Ce qu'il fallait démontrer.

La troisième est : comment trouver quatre nombres carrés dont la somme est un carré. Nous le supposons par la méthode de l'analyse et nous supposons en même temps *AE* la somme de deux nombres carrés. Nous cherchons un nombre carré produit du nombre *AB* par un nombre pair, soit *BC*, que nous partageons en deux moitiés au <point> *D*, et nous appliquons sur *AD* le carré *AG*.

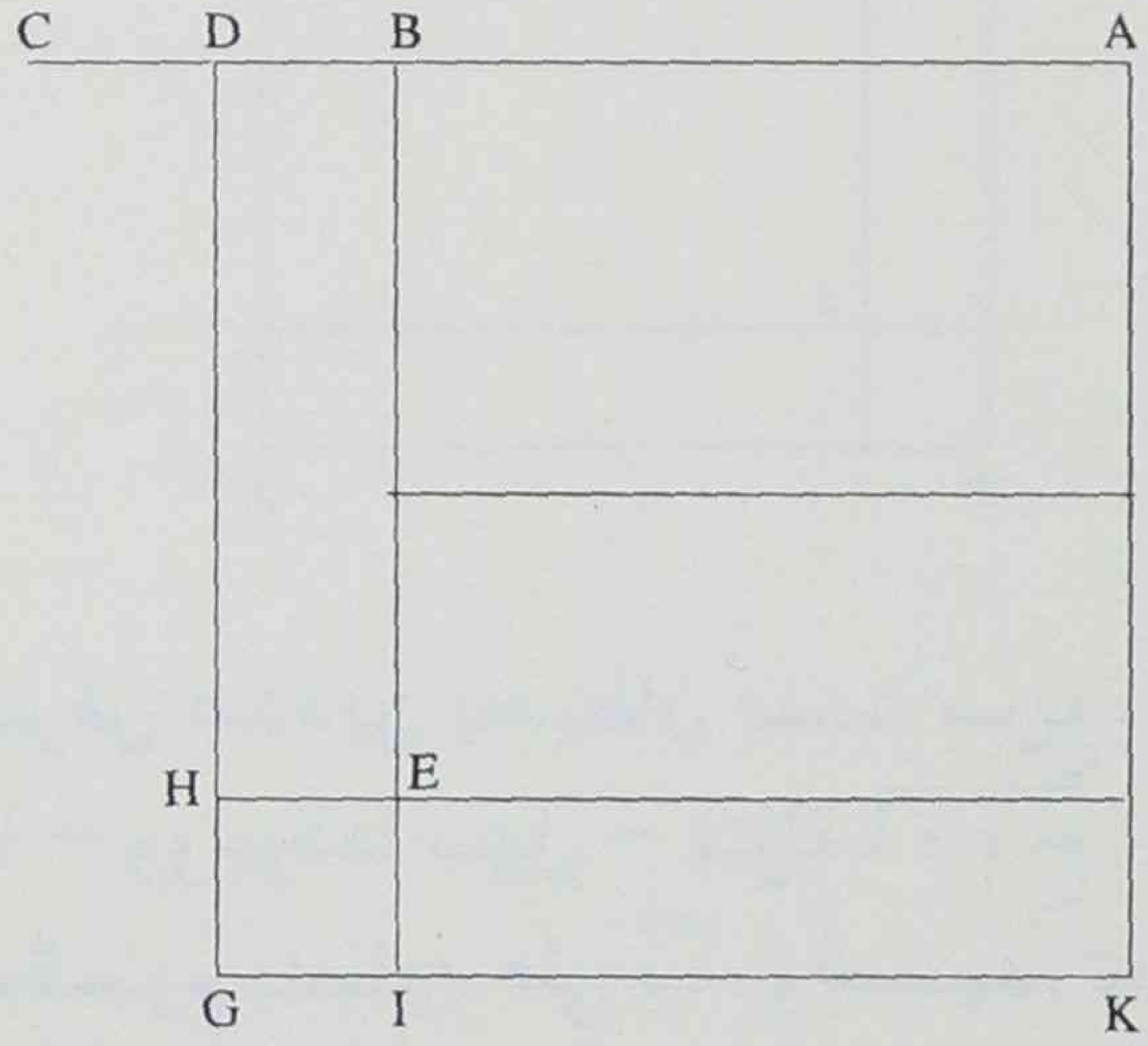
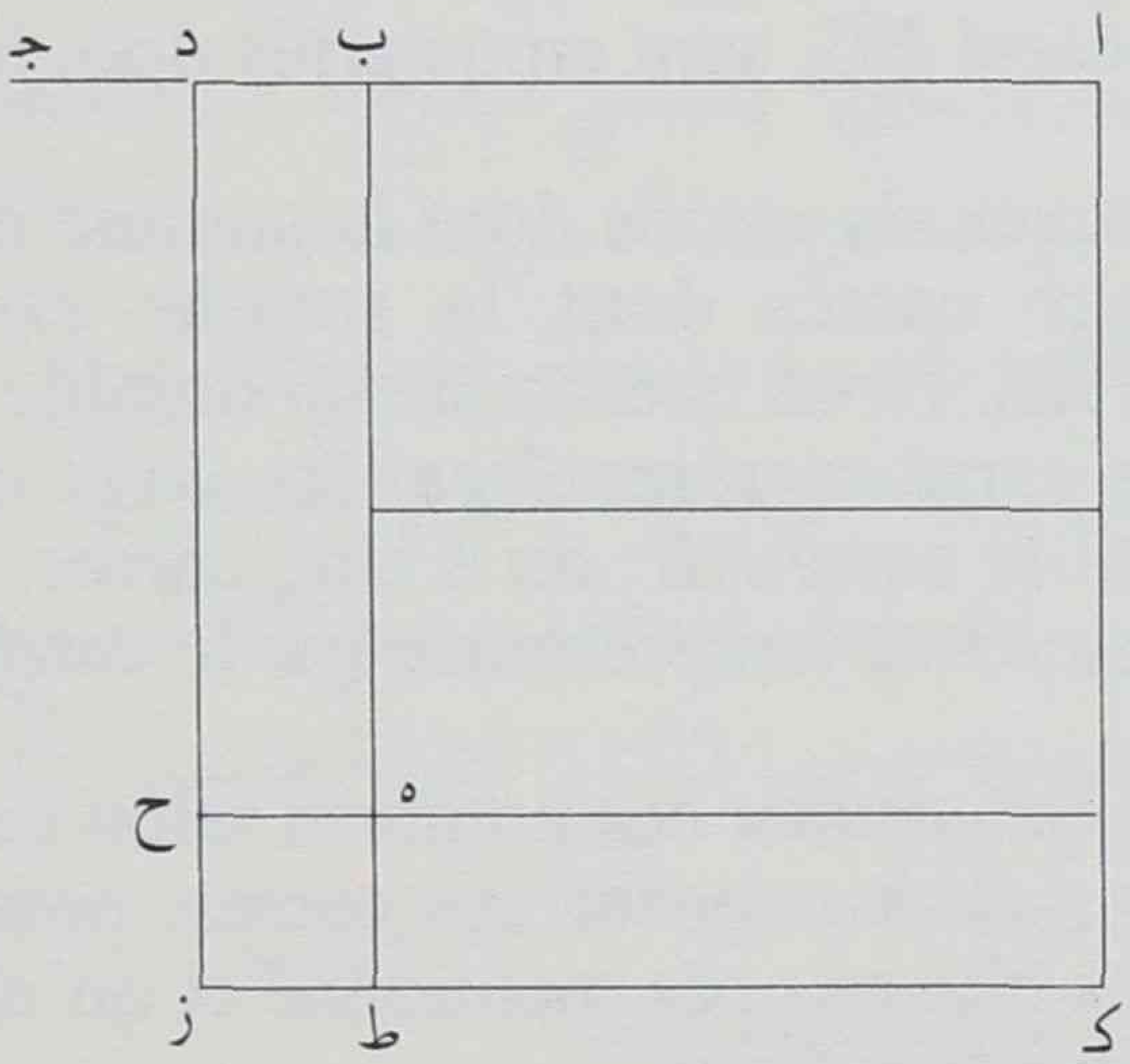


Fig. 3

La synthèse : le carré de *AB* est la somme de deux nombres carrés et le carré de *BD* est *EG*. Mais *AB* par *BC* est un nombre carré et *AB* par *BC* est égal au double de *AB* par *BD* ; mais le double de *AB* par *BD* est les deux qui complètent, *KE* et *ED*, donc la somme des deux compléments est égale à un nombre carré ; le carré *AG* est donc composé de quatre carrés, deux d'entre eux <ont pour somme> le carré *AE*, le troisième est le carré *EG* et le reste est les deux compléments *KE* et *EG*. Ce qu'il fallait démontrer.

وأما مثاله العددي: / فنفرض ا ه عدداً ما كيفما اتفق، وهو ٩، ونطلب ٣٤٢ عدداً آخر يحيط مع ٩ بعدد مربع ويكون ذلك العدد زوجًا، وهو ٤ بمنزلة ه ح. فيحيط ٩ و٤ بعدد مربع، وهو ٣٦ الذي هو بمنزلة المتممين. فنلقي نصف ٤، كما ذكرنا، يبقى ٢ الذي هو بمنزلة ه ب؛ ونضرب تسعة في تسعة، فيكون ٨١ الذي هو بمنزلة مربع ا د؛ ونضرب اثنين في نفسه، فيكون ٤ الذي هو بمنزلة د ج؛ ونضرب تسعة في الاثنين مرتين، فيكون ٣٦ الذي هو بمنزلة المتممين؛ فنجمعها، فيكون ١٢١ وجذره ١١. فقد أدّى ما طلبنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

والثالث: كيف نجد أربعة أعداد مربعات يكون مجموعها مربعًا؟ فلنفرضه على جهة التحليل مع ا ه ونجعله مجموع عددين مربعين، ونطلب عدداً مربعًا يحيط به عدد ا ب وعدد زوج، وهو ب ج، ونقسمه بنصفين على د، ونضيف إلى ا د مربع ا ز.



التركيب: فمربع ا ب مجموع عددين مربعين ومربع ب د، وهو ه ز. لكن ا ب في ب ج عدد مربع، وا ب في ب ج يساوي ضعف ا ب في ب د. ولكن ضعف ا ب في ب د متمما كـ ه ه ز. فالمتممان يساويان عدداً مربعًا، فقد ألف مربع ا ز من أربع مربعات، الاثنان منها مربع ا ه، والثالث مربع ه ز، والباقي متمما كـ ه ه د. وذلك ما أردنا أن نبين.

1 فنفرض: نفرض / عدداً ما: عدد ما – 5 ٨١ ... فيكون: مكررة – 15 متمما: متممي / ه ز: ه د / فالمتممان: فالمتممين / عدداً مربعًا: عدد مربع – 16 الاثنان: الاثنين – 17 متمما: متممي.

Quant à son exemple numérique, nous supposons un côté d'un nombre carré composé de deux nombres carrés, soit dix, comme nous l'avons mentionné précédemment, et qui est représenté par AB ; nous cherchons un nombre pair dont le produit par dix est un nombre carré, soit 40 représenté par BC ; BC est donc un nombre pair. Nous le partageons en deux moitiés, on a 20 représenté par BD ; nous le multiplions par lui-même, on a 400 représenté par EG ; nous multiplions 10 par 20 deux fois, on a 400 représenté par les deux compléments, KE et ED ; nous les additionnons, on a 900 qui est représenté par le carré AG dont la racine est 30, qui est AD ; nous avons donc trouvé ce que nous voulions. Ce qu'il fallait démontrer.

La quatrième se ramène à ces trois problèmes comme la troisième s'est ramenée aux deux premiers. En général, tous les problèmes de cette
343 recherche se ramènent aux deux premiers problèmes / suivant cet exemple.

Trouver cinq nombres carrés tels que leur somme soit un nombre carré.

Nous supposons un nombre carré composé de trois nombres carrés et représenté par le carré AE du cas précédent. Nous cherchons un nombre pair dont le produit par AB donne un nombre carré, comme nous l'avons expliqué précédemment ; son carré sera donc égal aux deux compléments, BH et EK. Nous obtiendrons dès lors un autre carré qui est EG. Le carré AE composé de trois carrés, les deux qui complètent KE, ED et ont pour somme un carré, et le carré EG, sont cinq carrés dont la somme est le carré AG.

Si nous voulons trouver six carrés dont la somme est un nombre carré, nous supposons quatre carrés dont la somme est un nombre carré représenté par le carré AE. Nous cherchons un nombre pair dont le produit par AB est un nombre carré représenté par les deux compléments, ED et KE, auxquels on ajoute le carré AE ; on a cinq carrés, plus le carré HI qui est le sixième, <la somme> sera représentée par le carré AG, carré composé de six carrés.

Ceci est la voie pour déterminer ces nombres selon cette méthode. Posons maintenant des tables pour composer ces carrés, pour qu'elles soient un exemple de ce que nous n'avons pas mentionné et qu'elles mènent à ce que nous y avons inséré ; voici leur figure.

وأما مثاله العددي: فنفرض ضلعَ عدد مربع مؤلف من عددين مربعين، وهو عشرة، كما ذكرنا متقدماً، وهو بمنزلةً ا ب؛ ونطلب عدداً زوجاً يحيط مع عشرة بعدد مربع، وهو ٤٠ وهو بمنزلة ب ج. فـ ب ج عدد زوج. ونقسمه بنصفين، فيكون ٢٠ وهو بمنزلة ب د؛ ونضربه في نفسه، فيكون ٤٠٠، وهو بمنزلة ه ز؛ ونضرب ١٠ في ٢٠ مرتين، فيصير ٤٠٠ الذي هو بمنزلة متممي كـ ه د؛ فنجمعها، فيكون ٩٠٠ الذي هو بمنزلة مربع ا ز وجذره ٣٠ الذي هو ا د. فقد وجدنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

والرابع يؤدي إلى هذه الثلاث المسائل، كما أدّى الثالث إلى تينك المسألتين، ⟨و⟩في الجملة فإن مسائل هذا المطلب كلها تؤدي إلى المسألتين الأولتين / على هذا المثال. ٣٤٣

نريد أن نجد خمسة أعداد مربعات يكون مجموعها عدداً مربعاً.

فنفرض عدداً مربعاً يأتلف من ثلاثة أعداد مربعات بمنزلة مربع ا ه في الصورة المتقدمة؛ ونطلب عدداً زوجاً يحيط مع ا ب بعدد مربع، كما ذكرنا متقدماً، فيكون مربعه مساوياً لمتممي ب ح ه كـ. فنحصّل هناك مربعاً آخر، وهو ه ز؛ فمربع ا ه مؤلف من ثلاثة مربعات ومتمما كـ ه د مجموعهما مربع، ومربع ه ز ⟨و⟩هو خمسة مربعات مجموعها مربع ا ز.

وإن أردنا أن نجد ستة مربعات، يكون مجموعها عدداً مربعاً، فنفرض أربعة مربعات، يكون مجموعها عدداً مربعاً بمنزلة مربع ا ه؛ ونطلب عدداً زوجاً يحيط مع ا ب بعدد مربع، فيكون بمنزلة متممي ه د كـ ه مضاف إليهما مربع ا ه، ⟨فتكون⟩ خمسة مربعات، ومربع ح ط سادسها، فيكون بمنزلة مربع ا ز، مربع مؤلف من ستة مربعات.

فهذا طريق استخراج هذه الأعداد على هذا المنهاج. فلنضع الآن جداول لتركيب هذه المربعات، ليكون مثالاً على ما تركنا ذكره، ويكون مؤدياً إلى ما ضمّناه، وهذه صورتها.

1 فنفرض: نفرض – 8 الثالث: الثالثة – 12 يأتلف: يأخذ بـ يتألف وبـ يأتلف، انظر إلى استعمال الفعل الأخير في الرياضيات التحليلية، جـ. ٤، ص. ٧٧١. ولكنه لجأ من قبل إلى فعل «ألف»، ويكتب فيما يلي «مؤلف» – 14 مساوياً: مساو – 15 ثلاثة: ثلث – 16 هو: هي / خمسة: خمس – 17 ستة: ست – 18 أربعة: اربع – 20 خمسة: خمس / مربعات: مربعا – 21 ستة: ست – 24 ضمّناه: تضمناه.

Table: exemple de carrés composés à partir des carrés successivement

ligne des racines	ligne du carré à partir de la somme des carrés	ligne des carrés séparés	ligne: composition d'un carré à partir des carrés successivement
10	100	36 64	carré à partir de deux carrés
11	121	4 81 36	carré à partir de trois carrés
30	900	400 400 64 36	carré à partir de quatre carrés
9	81	36 36 1 4 4	carré à partir de cinq carrés
45	2025	225 400 400 36 64 900	carré à partir de six carrés
11	121	4 36 36 36 1 4 4	carré à partir de sept carrés
55	3025	100 900 225 400 400 36 64 900	carré à partir de huit carrés
33	1089	484 484 4 36 36 36 1 4 4	carré à partir de neuf carrés

Comme nous avons répondu à la demande de l'éminent Seigneur, que Dieu l'assiste, de trouver deux nombres carrés dont la somme ait une racine, c'est-à-dire soit un nombre carré, comme nous avons rendu le problème universel en groupant trois carrés, ou quatre, ou cinq, jusqu'à un nombre à
344 volonté tels que <la somme> ait une racine ; / comme nous y sommes par-
venus par les deux méthodes de l'analyse et de la synthèse et par les exemples numériques, et comme notre réponse ne contient pas l'ensemble de leurs cas, nous avons remis leur examen jusqu'à ce que nous ayons fait surgir leurs cas par deux voies, dont l'une est géométrique et l'autre numérique. Mais puisque le rapport <des cas> numériques est mêlé pour certaines choses avec le rapport <des cas> géométriques et différent pour d'autres, alors chaque fois qu'il est associé <au rapport des cas géométriques> dans ce problème, nous le prouvons par la géométrie et nous en donnons un exemple numérique et le cas où le rapport géométrique n'est pas associé, nous le prouvons selon les exigences du rapport numérique, car le rapport numérique est autre que le rapport géométrique et chacun d'eux est autre que le rapport musical.

La question de l'éminent Seigneur, que Dieu l'assiste, mène aux triangles rectangles de côtés rationnels. En effet, si nous voulons trouver deux nombres carrés à partir desquels se compose un nombre carré, ceci mène à deux nombres dont les racines entourent un angle droit tel que sa corde soit un nombre rationnel. Nous disons que ces triangles ont des genres et des

جدول مثال مربعات من تركيب المربعات على التوالي

سطر تركيب مربع من المربعات على التوالي	سطر المربعات المنفصلة	سطر مربع من اجتماع المربعات	سطر الجذور
مربع من مربعين	٦٤ ٣٦	١٠٠	١٠
مربع من ثلاثة مربعات	٣٦ ٨١ ٤	١٢١	١١
مربع من أربع	٣٦ ٦٤ ٤٠٠ ٤٠٠	٩٠٠	٣٠
مربع من خمس	٤ ٤ ١ ٣٦ ٣٦	٨١	٩
مربع من ست	٩٠٠ ٦٤ ٣٦ ٤٠٠ ٤٠٠ ٢٢٥	٢٠٢٥	٤٥
مربع من سبع	٤ ٤ ١ ٣٦ ٣٦ ٣٦ ٤	١٢١	١١
مربع من ثمانٍ	٩٠٠ ٦٤ ٣٦ ٤٠٠ ٤٠٠ ٢٢٥ ٩٠٠ ١٠٠	٣٠٢٥	٥٥
مربع من تسع	٤ ٤ ١ ٣٦ ٣٦ ٣٦ ٤ ٤٨٤ ٤٨٤	١٠٨٩	٣٣

وإنّا لما أجبنا سؤال السيد الجليل- أيده الله - عن وجدان عددين مربعين مجموعهما مجذوراً، أعني عدداً مربعاً، وجعلنا المسألة كلية: نحو اجتماع ثلاثة مربعات وأربع وخمس إلى أي عدد نريد، ويكون مجذوراً، / ٣٤٤
وأتينا به على طريقي التحليل والتركيب والمثالات العددية، ولم يكن جوابنا منحصراً حاوياً على جملة وجوهها، أجلنا الفكر فيها حتى أحضرنا وجوهها بطريقين، أحدهما هندسي والآخر بطريق عددي. ولما كان تناسب العددية مشوباً في بعض الأمور بتناسب الهندسية ومبايناً في بعضه، فكل ما يشاركه في هذه المسألة، بيناه بالهندسة ومثلناه بالعدد، وما لا يشاركه الهندسية، بيناه على ما يقتضي التناسب العددية، لأن النسبة العددية غير النسبة الهندسية، وكل واحدة منهما غير النسبة التأليفية.

فأما سؤال السيد الفاضل - أيده الله - فهو يؤدي إلى المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الأضلاع، وهو أنّا إذا أردنا أن نجد عددين مربعين يأتلف منهما عدد مربع، فإنه يؤدي إلى عددين يحيط جذراهما بزاوية قائمة ويكون وترها عدداً منطقاً؛ فنقول: إن لهذه المثلثات أجناس وأنواع،

سطر ١١ من الجدول (مربع من ست): كتب ٤٠٠ ثلاث مرات - سطر ١٣ من الجدول (مربع من ثمان) ٣٠٢٥: ١٢٣٥ / ٥٥: ٣٥ - 2 مجذوراً: مجذور - 3 ثلاثة: ثلث - 6 بطريقين: بطريق / تناسب العددية: يأخذ بمثل هذه العبارة، والمعنى واضح - 7 ومبايناً: ومباين / فكل ما: فكلما - 8 بيناه: اتيناه - 9 بيناه: اتيناه- 13 جذراهما: جذريهما.

espèces. Leurs genres ont des principes et des dérivations. Quant aux principes, ce sont les primitifs ; quant aux dérivations, ce sont ceux qui se développent à partir des primitifs, selon l'ordre de leur espèce ; ils sont ordonnés jusqu'à l'infini et chaque espèce a un arrangement naturel et un ordre qui se répète en lui-même, et pour toutes les espèces il y a aussi un arrangement de succession naturel comme nous allons en donner des exemples ensuite.

Commençons maintenant par exposer les lemmes que nous avons besoin d'introduire.

Si un nombre est multiple impair d'un nombre donné et est le côté d'un carré impair, nous retranchons le carré du nombre donné du carré tout entier ; le reste est nécessairement un nombre pair, alors sa moitié sera divisible par les parties du nombre homonyme du nombre donné.

Exemple : Supposons un nombre AC et posons le nombre AB multiple de AC, la multiplicité étant impaire. Si nous appliquons à AB un carré comme AD, et si nous en retranchons le carré de AC, qui est AE, je dis que la moitié de ce qui reste du carré AD se partage en nombres dont la multiplicité est homonyme du nombre AC.

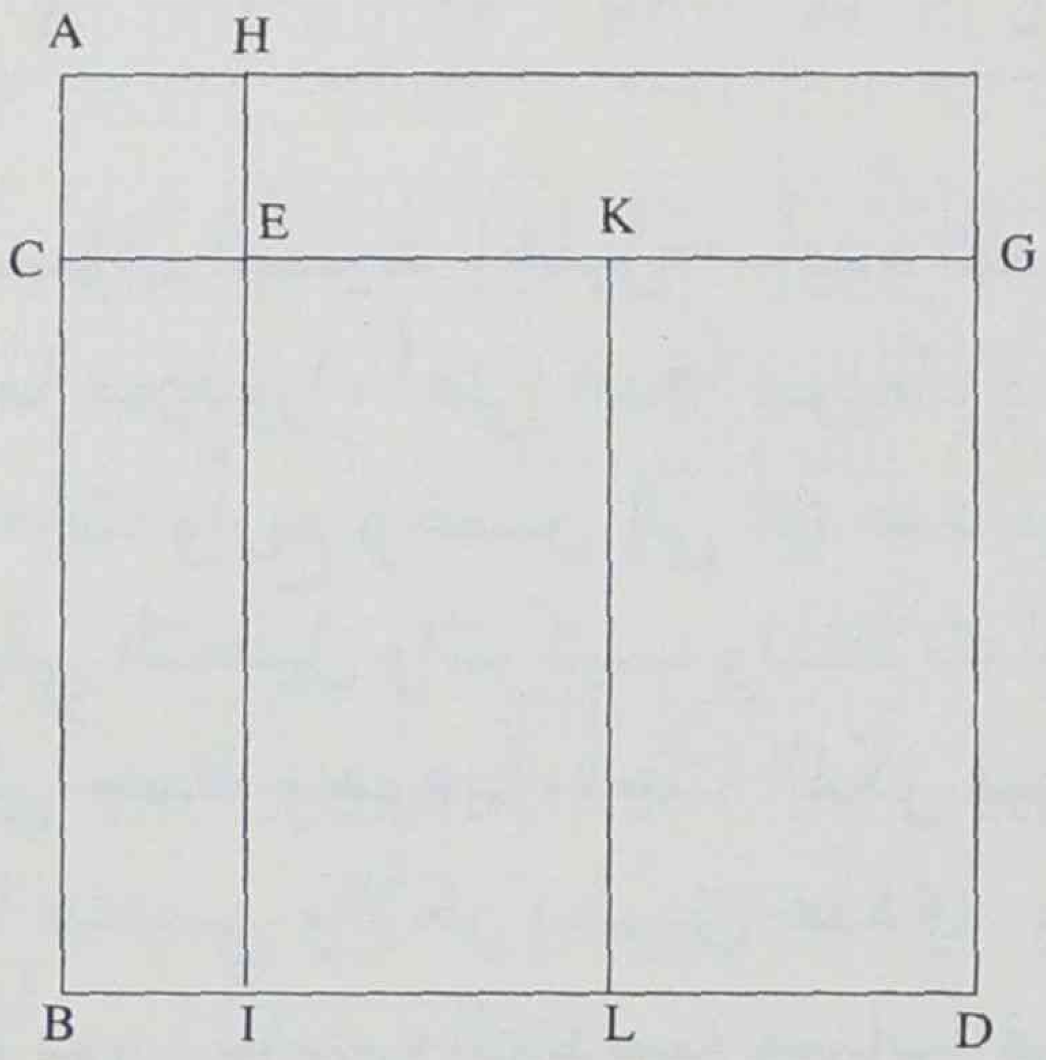


Fig. 4

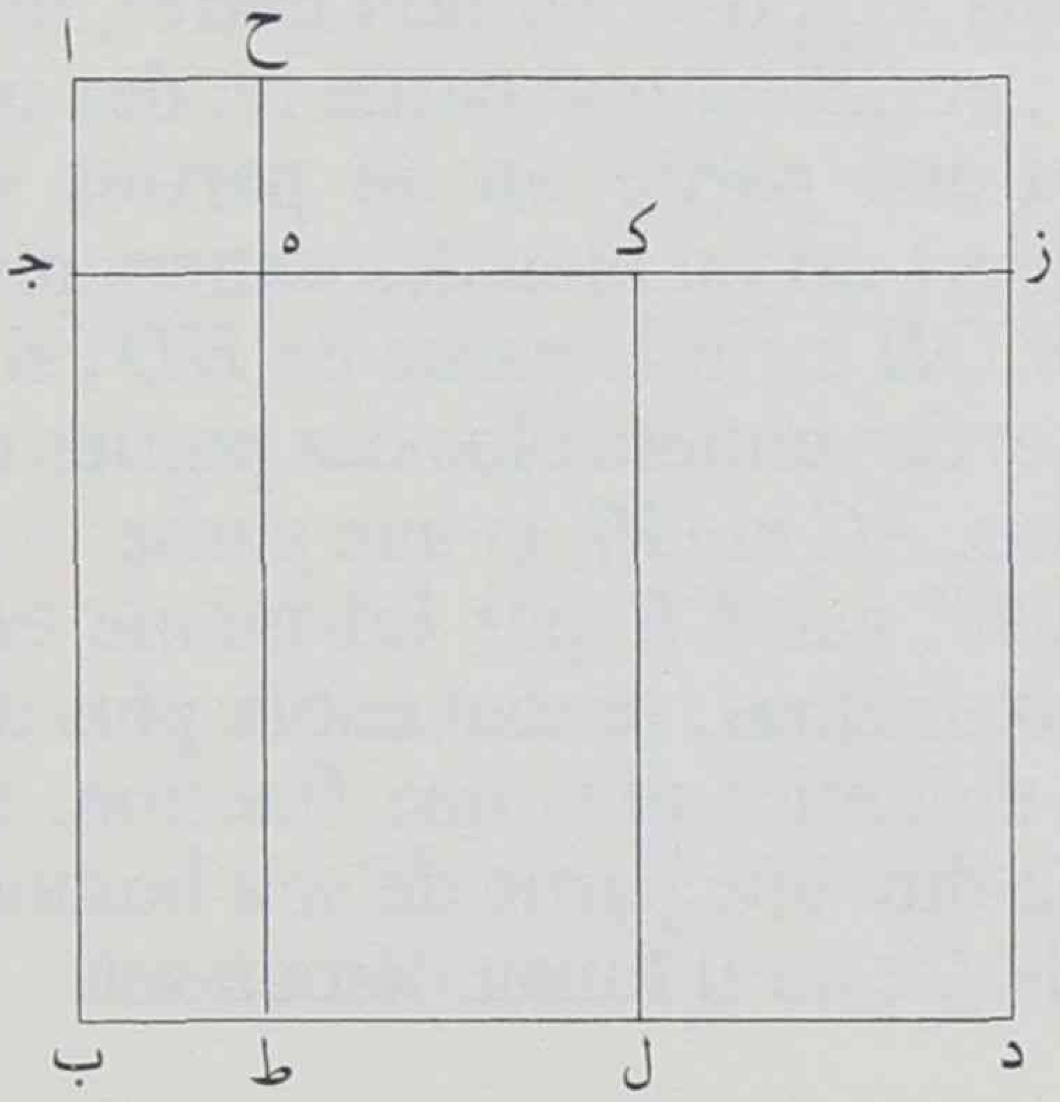
Démonstration : Menons CE jusqu'à G et HE jusqu'à I. Mais puisque AB est impair et que AC est impair, <le carré> AE est impair ; il reste le gnomon HG, GI, IC qui est pair et il reste également le nombre BC qui est un nombre pair ; EB est donc pair, HG est pair, il reste GI qui est pair. Partageons EG en deux moitiés en K et DL en L et joignons KL. Puisque CB est composé d'un multiple de AC, alors il comprend l'homonyme de AC ; la surface KB comprend donc l'homonyme de AC. Mais la surface KB est égale <à la somme> des deux surfaces HG et KD, donc chacune des moitiés de l'excédent du carré de AB sur le carré de AC comprend <les parties de> l'homonyme du nombre AC. Ce qu'il fallait démontrer. /

ولأجناسها أصول وفروع. فأما الأصول فهي الأوائل، وأما الفروع فما ينمو منها – على النسق – التي هي من جنسها، وهي منسقة إلى ما لا نهاية لها، ولكل جنس منها أيضاً نظم طبيعي ونسق متوالٍ على حده، ولجميع الأجناس نظم متوالٍ طبيعي أيضاً على ما سنمثله فيما بعده.

فلنتبدئ الآن بذكر المقدمات التي نحتاج أن نقدمها.

〈آ〉 وهو أن كل عدد مضعف من عدد مفروض فرد ويكون ضلعاً لعدد مربع فرد، فنلقي مربع العدد المفروض من جميع المربع، وما يبقى منه 〈يكون〉 عدداً زوجاً لا محالة، فيصير نصفه مقسوماً بأقسام سمي العدد المفروض.

مثاله: أنّا نفرض عدد ا جـ ونجعل عدد ا ب أضعاف ا جـ، ولتكن عدّتها فرداً. فإذا أضفنا إلى ا ب مربعاً مثل ا د، وألقينا منه مربع ا جـ، الذي هو ا ه، فأقول: إن الذي يبقى من مربع ا د ينقسم نصفه بأعداد عدّتها سميّ عدد ا جـ.



برهان ذلك: أنّا نخرج جـ ه إلى ز، وح ه إلى ط. فمن أجل أن ا ب فرد وا جـ فرد، يكون ا ه فرداً؛ يبقى علم ح ز ط جـ عدداً زوجاً ويبقى أيضاً عدد ب جـ عدداً زوجاً، فـ ه ب زوج وح ز زوج، يبقى ز ط زوجاً. فنقسم ه ز بنصفين 〈على ك ود ل على ل〉، ونصل ك ل. فمن أجل أن جـ ب مركب من أضعاف ا جـ، ففيه سميّ ا جـ، ففي سطح ك ب إذاً سمي ا جـ. لكن سطح ك ب مثل سطحي ح ز ك د، ففي كل واحد من نصف فضل مربع ا ب على مربع ا جـ سميّ عدد ا جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

1 ينمو: ينموا – 5 نقدمها: نقدمه – 10 ولتكن: لكن – 15 فرداً: فرد / عدداً زوجاً: عدد زوج – 16 عدداً زوجاً: عدد زوج / زوجاً: زوج.

345 Si un nombre donné est non carré, alors il ne peut pas avoir de racine, c'est-à-dire que son côté est irrationnel.

Supposons ce nombre le carré AB. Je dis que son côté, qui est BC, est irrationnel.

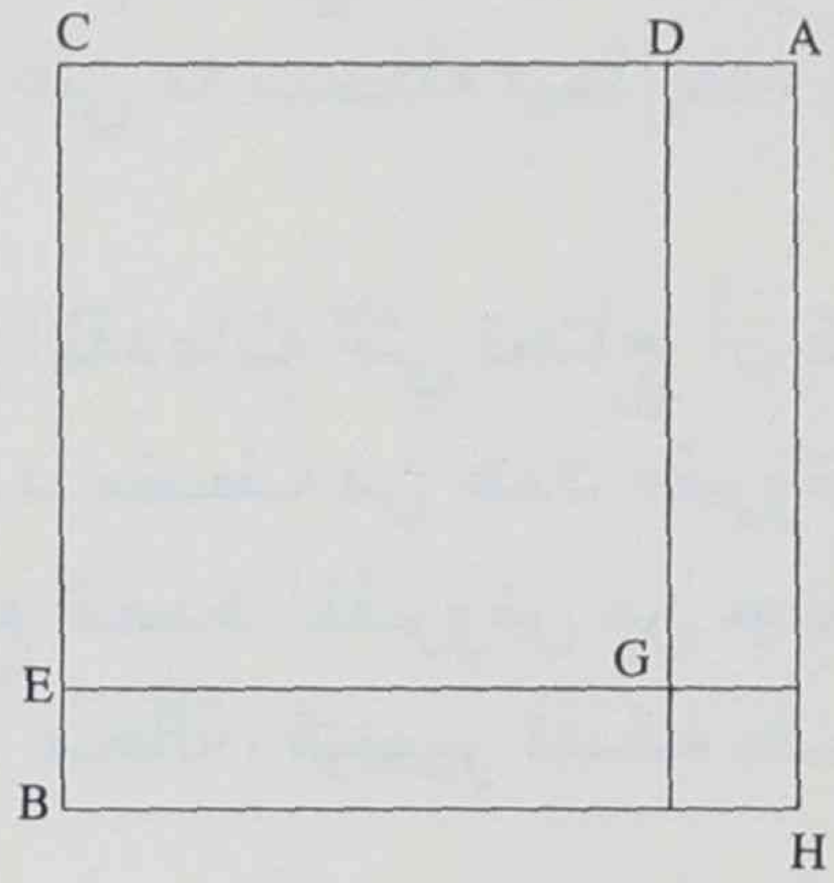


Fig. 5

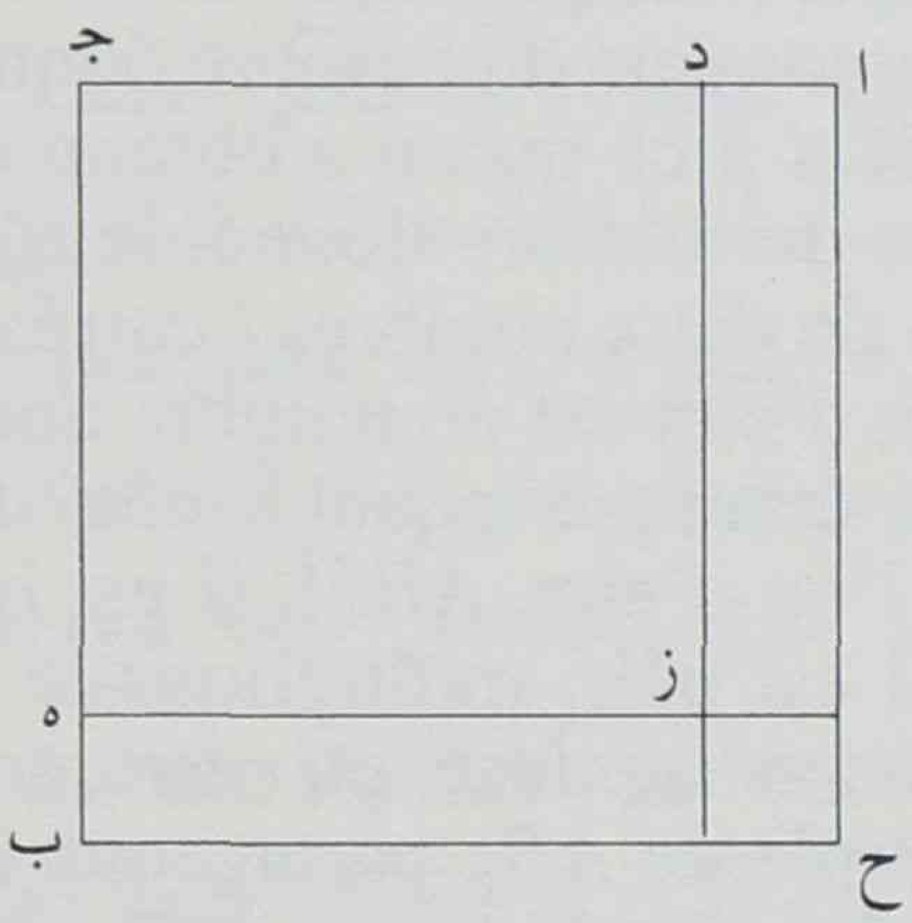
Démonstration: Séparons de ce nombre un nombre carré le plus grand possible, soit le carré DE ; il reste le gnomon AG, GH, GB qui est[3] un nombre entier. Puisque le carré AB est composé de nombres, il faut que le carré GH soit une partie ou des parties de l'unité, car si GH était un, alors GB, GH et GA seraient des nombres qui compléteraient un nombre carré qui est AB ; or nous avons supposé AB non carré[4], donc GH est une partie ou des parties de l'unité ; et EB est une partie ou des parties de l'unité ; mais le double du produit d'une partie ou de parties <de l'unité> par des nombres qui sont des entiers est ou bien des entiers plus des parties, ou bien des parties de l'unité. Or GH est une partie de HD ; si donc on compose les entiers, c'est-à-dire DE, et des entiers plus des parties ou des parties, c'est-à-dire les deux compléments, AG et GB, et une partie, c'est-à-dire GH, il ne se forme pas un entier carré, car CB par lui-même est un entier plus une fraction multipliés par eux-mêmes ; or tout entier plus une fraction, multipliés par eux-mêmes, donne un entier plus une fraction, ou un entier plus une partie de fraction, c'est-à-dire une partie de son homonyme, par conséquent le côté AC est irrationnel[5]. Ce qu'il fallait démontrer.

Le côté d'un nombre carré, somme de deux carrés, ne peut excéder le côté de chacun d'eux que d'un, de deux, de trois, de quatre, ou de cinq jusqu'à une certaine fin. Les nombres impairs sont les principes de leurs espèces, car les nombres pairs ont des moitiés et leurs moitiés sont les principes de leurs espèces. Si l'on trouve ces carrés successifs, on saisit tous leurs genres et toutes leurs espèces.

[3] Litt. : composé.
[4] Voir commentaire.
[5] Litt. : on ne peut pas dire le côté AC (traduction littérale de ἄλογος).

كل عدد مفروض غير مربع، فإنه لا يمكن أن يكون له جذر، أعني أن ٣٤٥ ضلعه غير منطق.

فلنفرض ذلك العدد مربع ا ب؛ فأقول: إن ضلعه الذي هو ب جـ غير منطق.



برهانه: أنّا نفصل منه عدداً مربعًا أكثر ما يمكن وهو مربع د ه، فيبقى علم ا ز ز ح ز ب مؤلفًا من عدد صحيح. فلأن مربع ا ب مؤلف من أعداد، فلا بدّ من أن يكون مربع ز ح جزءاً أو أجزاءً من واحد، لأنه إن كان ز ح واحداً، فـ ز ب وز ح وز ا أعداد متممة لعدد مربع، وهو ا ب؛ وقد فرضنا ا ب عدداً غير مربع، فـ ز ح جزء أو أجزاء من واحد، وه ب جزء أو أجزاء من واحد. لكن ضعف ضرب جزء أو أجزاء في أعداد، هي إما: أعداد أو أعداد وأجزاء أو أجزاء من واحد. وز ح هو جزء ح د، فمن تركيب أعداد، أعني د ه، وأعداد وأجزاء أو أجزاء، أعني متممي ا ز ز ب، وجزء، أعني ز ح، لا يلتئم عدد مربع، لأن جـ ب في نفسه هو عدد وكسر في نفسه، وكل عدد وكسر، إذا ضرب في نفسه، يجتمع عدد وكسر أو عدد وجزء كسر، أعني جزء سميّه. فإذاً لا يمكن أن ينطق بضلع ا جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<ب> العدد المربع من اجتماع عددين مربعين لا يعدو من أن يفضل ضلعه على ضلع كل واحد منهما بواحد أو اثنين أو ثلاثة أو أربعة أو خمسة إلى غاية ما. والأفراد أصول لأجناسها، لأن للأزواج أنصافًا وأنصافها أصول لأجناسها، وتنحصر بوجدان هذه المربعات المتوالية جميع أجناسها وأنواعها.

5 عدداً مربعًا: عدد مربع – 6 مؤلفًا: مؤلف – 8 واحداً: واحد / متممة: متمم – 9 عدداً: عدد – 12 جزء: مكررة – 14 يجتمع: يحمع – 17 يعدو: يعدوا.

Trouver deux nombres carrés tels que leur somme ait une racine et que le côté de leur somme excède le côté de l'un d'eux d'un nombre donné.

Supposons <connu> le nombre qui est l'excédent du côté de la somme sur le côté de l'un d'eux et prenons le multiple ; s'il est impair, son multiple sera d'ordre impair et s'il est pair son multiple sera d'ordre pair. Multiplions ensuite le multiple obtenu par lui-même et retranchons le carré du nombre donné du carré de son multiple ; ce qui reste est un nombre pair. Retranchons sa moitié, prenons l'homonyme du nombre donné[6], appliquons-lui un carré, ajoutons ce qu'on obtient à ce qu'on a obtenu du carré de son multiple, c'est-à-dire du multiple du nombre donné, le résultat est un nombre
346 carré, obtenu de <la somme> de deux nombres / carrés et tel que l'excédent de son côté sur le côté de l'un d'eux est un nombre donné.

Géométrie : supposons le nombre par lequel le côté de la somme des deux carrés excède le côté *DE* de l'un d'eux, *AB*. S'il est impair, multiplions-le par un nombre impair et s'il est pair, multiplions-le par un nombre pair. Appliquons à *AB*, que nous avons supposé, un carré, soit *KB*, et retranchons le carré *KB* du carré du multiple de *AB* ; partageons en deux ce qui reste. Prenons l'homonyme du nombre supposé, soit *DE*[7] ; complétons le gnomon *AL*, *LI*, *IM*.

Je dis que le nombre carré *GB* est la somme de deux carrés et que son côté excède le côté de l'un d'eux d'un nombre donné qui est *AB*.

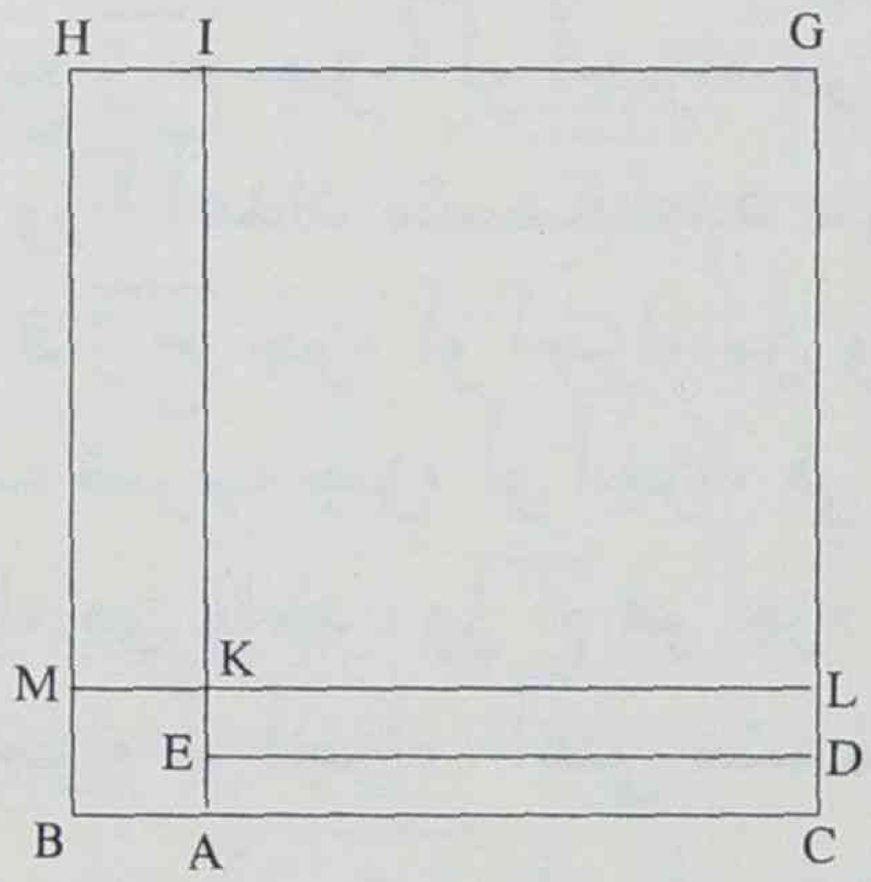


Fig. 6

Démonstration : Puisque *DE* est une partie homonyme de ce que *AL* contient d'unités <qui sont> la moitié de ce qui reste du carré du multiple de *AB*, une fois retranché le carré *IL*, alors on a *LA*, *IM*, *KB*, qui est égal à un carré multiple <du carré> de *AB*. Mais *GK* est le carré de *LK*, *GB* est un carré et la différence du côté du carré, *CB*, et du côté du carré, *CA*, est le nombre *AB*. Ce qu'il fallait démontrer.

[6] C'est-à-dire le quotient du nombre obtenu par le nombre donné.

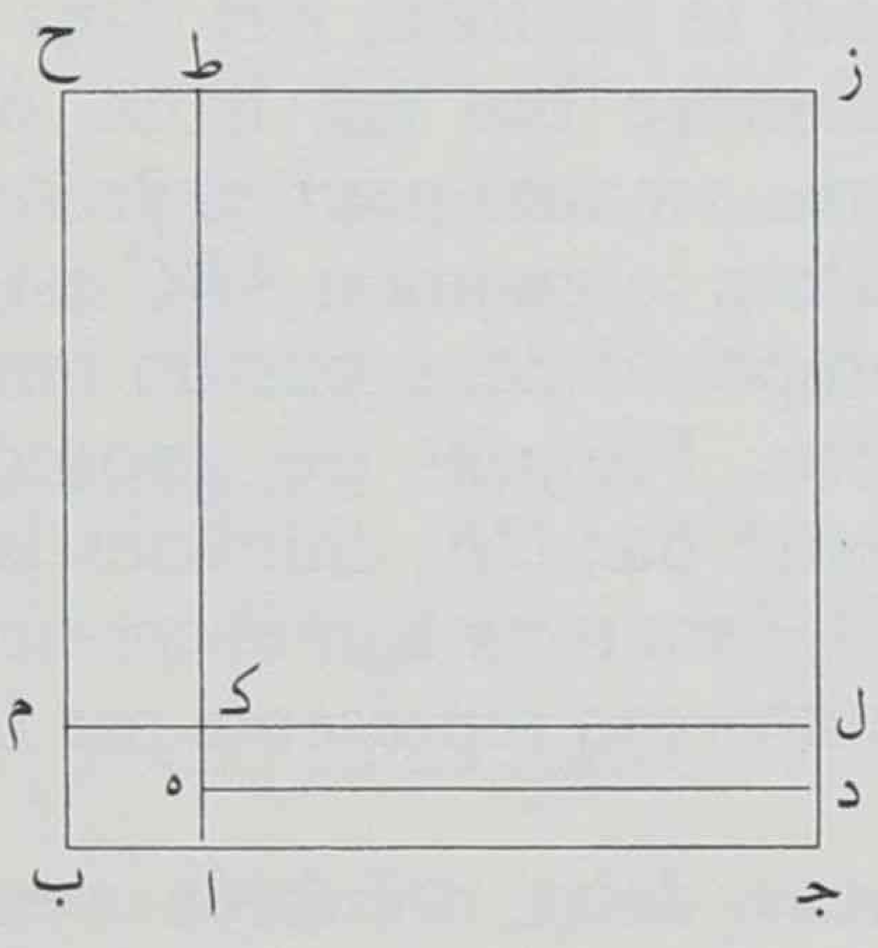
[7] Le segment *DE* est égal au segment *AC*, longueur du rectangle (*AL*) ; voir le commentaire.

نريد أن نجد عددين مربعين يكون مجموعهما مجذوراً، ويفضل ضلع مجموعهما على ضلع أحدهما بعدد مفروض.

فلنفرض العدد الذي هو فضل ضلع مجموعهما على ضلع أحدهما، ونضعفه إن كان فرداً، فتكون مرات تضعيفه فرداً، وإن كان زوجاً فزوج. ثم نضرب ما يجتمع من التضعيف في نفسه، ونلقي مربع العدد المفروض مما اجتمع من مربع تضعيفه، فما بقي فهو عدد زوج. فنلقي نصفه، ونأخذ سميّ العدد المفروض ونضيف إليه مربعًا، فما اجتمع فنضيفه إلى ما اجتمع من مربع تضعيفه، أعني تضعيف العدد المفروض، فما حصل فهو عدد مربع يحصل من عددين / مربعين، يكون فضل ضلعه على ضلع أحدهما بعدد مفروض. ٣٤٦

هندسة: أن نفرض العدد الذي يتفاضل ‹به› ضلع مجموع المربعين على ضلع أحدهما د ه، ا ب. ونضعفه إن كان فرداً، فبعدد فرد، وإن كان زوجاً فبعدد زوج. ونضيف إلى ا ب، الذي فرضناه، مربعًا وهو ك ب، ونلقي مربع ك ب من مربع أضعاف ا ب، فما بقي فننصّفه. ونأخذ سميّ العدد المفروض، وهو د ه، فنتمم علم ا ل ل ط ط م.

فأقول: إن عدد مربع ز ب مجتمع من عددين مربعين، يكون فضل ضلعه على ضلع أحدهما بعدد مفروض، وهو ا ب.



برهان ذلك: أنّه من أجل أن د ه جزء سميّ ما في ا ل من الآحاد من نصف ما بقي من مربع أضعاف ا ب، بعد طرح مربع ط ل، فإن ل ا ط م ك ب مربع أضعاف ا ب. وز ك مربع ل ك وز ب مربع وفضل ‹ضلع› مربع جـ ب على ‹ضلع› مربع جـا عدد ا ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

3 ضلع مجموعهما: ضلعهما – 4 فرداً (الثانية): فرد – 14 د ه: له – 17 د ه: له – 19 وز ك: وز ل.

Autrement. Supposons le nombre multiple parmi les nombres donnés, qui est l'excédent du côté de la somme de deux carrés sur le côté de l'un d'eux, représenté par le gnomon *ABC*; prenons à partir de ceux-ci l'homonyme du nombre *KH*. Il est clair que le gnomon *ABC* est composé des unités de l'homonyme de *KH*; soit *ME*. Menons *IL* parallèle à *HE*; il est donc clair que *ML* est égal à *LD*. Retranchons de *ME* le nombre supposé qui est *DE*; de ce qui reste enlevons la moitié; <il reste> *LD*; construisons sur elle un carré; soit *GL*. Il est donc clair que *LH* est un carré composé de deux carrés. Ce qu'il fallait démontrer.

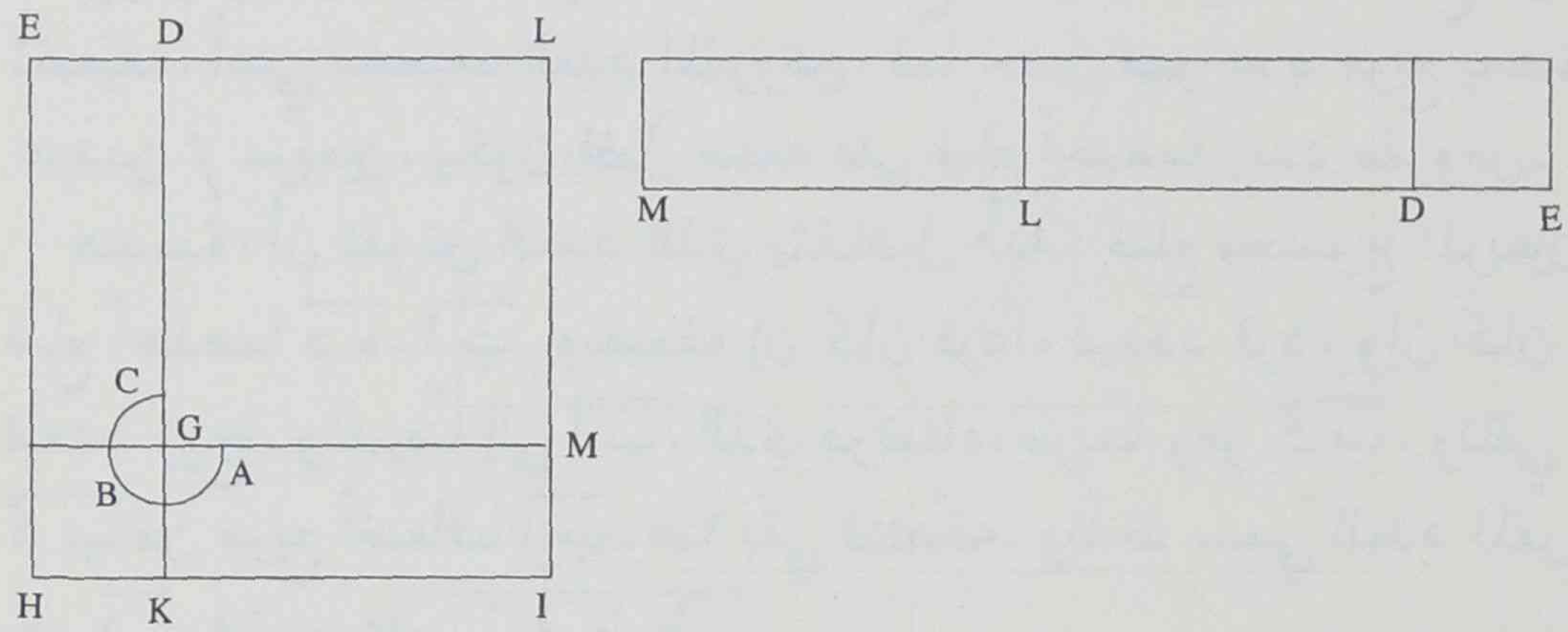
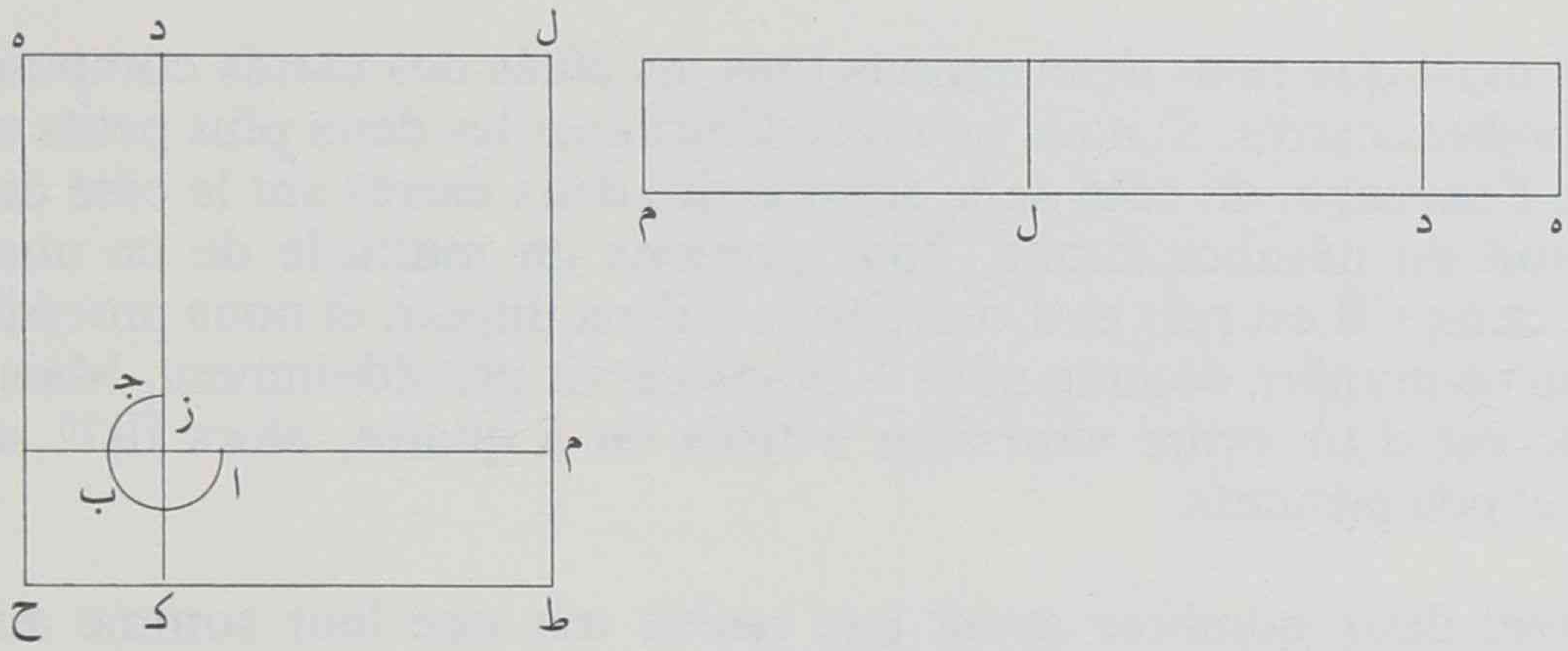


Fig. 7

Mode de son calcul: Trouver deux nombres carrés tels que leur somme ait une racine et tels que le côté de la somme excède le côté de l'un d'eux de un, qui est représenté par le segment *KH* dans cette figure. Multiplions l'unité par un certain nombre qui est trois, car l'unité est impaire; multiplions-le par lui-même, on aura neuf, représenté par le gnomon *ABC*. Mais puisque *GH* est un, alors le gnomon *ABC* est composé d'unités et non pas de nombres; il ne comprend donc pas un homonyme du nombre, car *GH* n'est pas un nombre. Prenons ce gnomon représenté par *ME*, retranchons-en un représenté par *DE*, enlevons la moitié du reste, qui est
347 quatre, représenté par *LD*, ajoutons son carré au carré qui est neuf; / ce qu'on obtient sera donc vingt-cinq représenté par *LH*.

Si nous voulons trouver deux nombres ayant une racine tels que l'excédent du côté de leur somme sur le côté de l'un d'eux soit trois, alors nous prenons un multiple d'ordre impair de trois, comme nous l'avons décrit, soit neuf; nous le multiplions par lui-même, on a 81; nous en prenons l'homonyme du nombre supposé qui en est le tiers, on aura 27; nous en enlevons le nombre supposé qui est trois, il reste 24; nous enlevons sa moitié, il reste 12, qui est le côté du deuxième carré; nous le multiplions par lui-même, on a 144; nous les additionnons, il vient 225, qui est un nombre ayant une racine et dont la racine est 15.

وعلى جهة أخرى: وهو أن نفرض العدد المضعف من الأعداد المفروضة الذي هو فضل ضلع مجموع المربعين على ضلع أحدهما بمنزلة علم ا ب جـ، ونأخذ سميّ عدد كـ ح منها. فبيّن أن علم ا ب جـ مؤلف من آحاد سمي كـ ح، وهو م ه. ونخرج ط ل موازياً لـ ح ه، فبين أن م ل مساوٍ لـ ل د. ونلقي من م ه العدد المفروض وهو د ه، فما بقي فنلقي نصفه وهو ل د ونعمل عليه مربعاً وهو ز ل، فبين أن ل ح مربع مؤلف من عددين مربعين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



باب حسابه: نريد أن نجد عددين مربعين يكون مجموعهما مجذوراً، ويكون فضل ضلع مجموعهما على ضلع أحدهما بواحد بمنزلة خط كـ ح في هذا الشكل. فنضعف الواحد أضعافاً وهو ثلاثة، لأن الواحد فرد؛ ونضربه في نفسه، فيصير تسعة بمنزلة علم ا ب جـ. ولما كان ز ح واحداً، فإن علم ا ب جـ مؤلف من آحاد لا من أعداد، فليس فيه سميّ عدد، لأن ز ح ليس بعدد. فنأخذ ذلك العلم بمنزلة م ه ونلقي منه واحداً بمنزلة د ه، فما بقي فنلقي نصفه وهو أربعة بمنزلة ل د، فنضيف مربعه إلى المربع الذي هو تسعة، / ‹...› فما يحصل مما اجتمع فيكون ٢٥ بمنزلة ل ح. ٣٤٧

وإن أردنا أن نجد عددين مجذورين يكون فضل ضلع مجموعهما على ضلع أحدهما بثلاثة، فنضعف الثلاثة تضعيفاً فرداً على ما وصفنا، وهو تسعة؛ ونضربه في نفسه، فيكون ٨١؛ ونأخذ منه سميّ العدد المفروض، وهو الثلث، فيكون ٢٧؛ ونلقي منه العدد المفروض الذي هو ثلاثة، يبقى ٢٤، ونلقي نصفه، يبقى ١٢، وهو الضلع من المربع الأخير؛ فنضربه في نفسه، فيكون ١٤٤ ونجمعهما، يصير ٢٢٥، وهو عدد مجذور وجذره ١٥.

1 نفرض: نضرب – 9 خط: علم، أخذ هنا بالواحد لا بمربعه – 15 ‹...›: قد تقرأ «بمنزلة لد» – 20 ٢٤: ٨٤ – 21 ٢٢٥: ٨٨٥.

Nous voulons trouver deux nombres carrés tels que leur somme ait une racine et que l'excédent du côté de leur somme sur le côté de l'un d'eux soit deux.

Nous prenons un multiple d'ordre pair de deux, car deux est un nombre pair, on a 4 ; nous le multiplions par lui-même, on a seize ; nous en retranchons le quatre suivant la première méthode, il reste douze ; nous enlevons sa moitié, il reste six. Nous prenons son homonyme[8], qui est trois et qui est le côté du deuxième carré. Nous additionnons les deux carrés[9], ce qui donne vingt-cinq ; nous prenons sa racine qui est cinq, on aura l'excédent de cinq sur trois égal à deux, qui est le nombre supposé. Ce qu'il fallait démontrer.

C'est ainsi que nous déterminons tous les côtés des carrés composés de deux nombres carrés. Si nous voulons déterminer les deux plus petits carrés tels que l'excédent du côté de la somme des deux carrés sur le côté de l'un d'eux soit un nombre donné, nous prenons un multiple de ce nombre, d'ordre deux s'il est pair et d'ordre trois s'il est impair, et nous procédons à partir de ce nombre comme nous l'avons décrit précédemment. Mais si le multiple est d'un ordre supérieur à trois ou à quatre, alors ils[10] seront dérivés et non primitifs.

Trouver deux nombres ayant une racine tels que leur somme ait une racine et que l'excédent du côté de l'un sur le côté de l'autre soit un nombre donné.

Considérons d'abord ces lemmes.

Si un nombre ayant une racine est la somme de deux nombres ayant une racine, alors la somme des carrés des doubles des côtés de ces deux nombres est un carré dont la racine est le double de la racine du nombre donné d'abord.

Supposons un nombre carré HE, somme de deux nombres carrés ; HB est un carré et le gnomon AD, DC, CG est un nombre carré.

Je dis que si nous doublons AB et BC et si nous construisons sur eux[11] un carré, on aura un nombre carré, somme de deux nombres carrés.

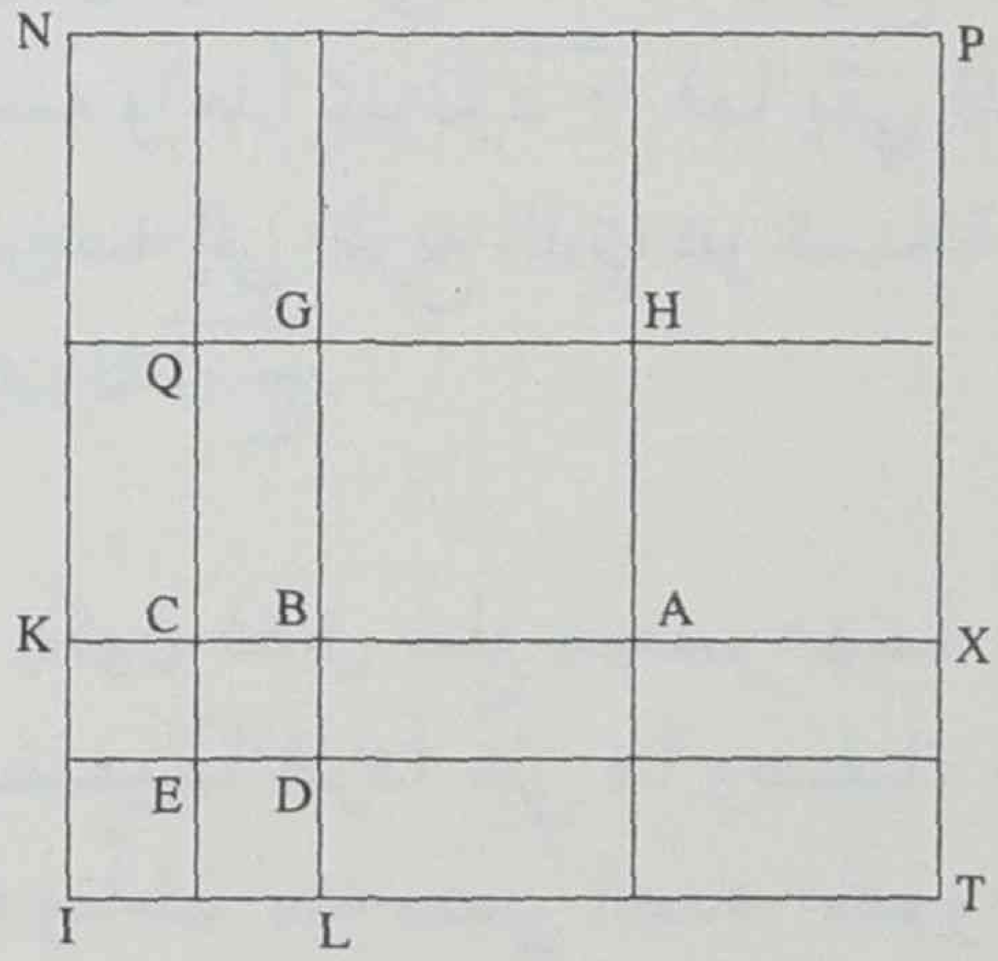


Fig. 8

[8] Il sous-entend l'homonyme de deux.

[9] Litt. : nous les additionnons.

[10] Il entend les triangles rectangles numériques.

[11] Sur le segment KX double de la somme $AB + BC$.

نريد أن نجد عددين مربعين يكون ⟨مجموعهما⟩ مجذوراً، ويكون فضل ضلع مجموعهما على ضلع أحدهما باثنين.

فنضعف اثنين تضعيفاً زوجاً لأنه عدد زوج، فيكون ٤؛ ونضربه في نفسه، فيكون ستة عشر؛ فنلقي الأربعة منه على طريق الأول، فيبقى اثنا عشر؛ فنلقي نصفه، يبقى ستة، ونأخذ سميّه، وهو ثلاثة، وهو ضلع المربع الثاني، فنجمعهما وهو خمسة وعشرون، فنأخذ جذره، وهو خمسة، فيكون فضل خمسة على الثلاثة اثنين، وهو العدد المفروض؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وعلى هذا نستخرج جميع أضلاع المربعات المؤلفة من العددين المربعين.

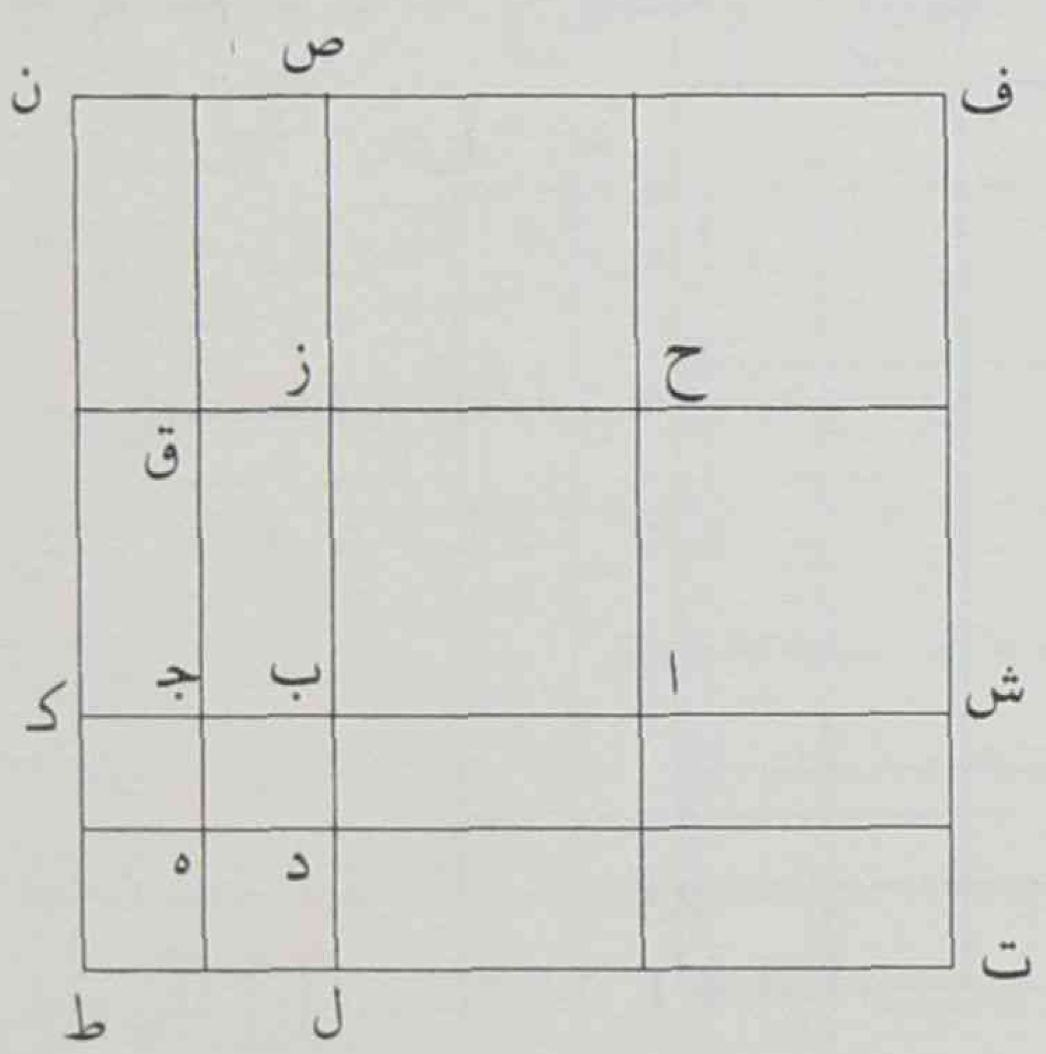
فإن أردنا أن نستخرج أقل عددين مربعين يكون فضل ضلع ⟨مجموع⟩ المربعين على ⟨ضلع⟩ أحدهما بعدد معلوم، فلنضعف ذلك العدد إن كان زوجاً فبضعف، وإن كان فرداً فبثلاثة أضعافه، ولنعمل به كما وصفنا ذكره قُبيل. فأما إضعافه فوق الثلاثة والأربعة، فإنها تكون فروعاً لا أصولاً.

نريد أن نجد عددين مجذورين يكون مجموعهما مجذوراً، ويكون فضل ضلع أحدهما على ضلع الآخر بعدد معلوم.

فنأخذ أولاً في مقدماته.

⟨آ⟩ كل عدد مجذور مؤلف من عددين مجذورين، فإن اجتماع مربع ضعفي ضلعيهما يكون مربعاً وجذره يكون ضعف جذر العدد المفروض أولاً.

فليفرض عدد مربع مؤلف من عددين مربعين ح ه، وح ب مربع، وعلم ا د جـ جـ ز عدد مربع.



فأقول: إنا إن ضاعفنا ا ب وب جـ وعملنا عليهما مربعاً، فيكون مجموعهما عدداً مربعاً مجتمعاً من عددين مربعين.

3 ونضربه: كتب أولاً «ويكون»، ثم ضرب عليها بالقلم – 4 فيبقى: فبقى / اثنا: اثني – 11 فبضعف: فضعف / فبثلاثة: فثلثه – 23 عدداً مربعاً مجتمعاً: عدد مربع مجتمع.

Posons *BX* double de *BA* et *BK* double de *BC* et complétons le carré de *XK* qui est *PI*. Complétons le tracé de la figure. Il est clair que les parties *XL* et *BN* de ce qui complète sont égales, que les parties du carré *PB* sont égales et que les parties du carré *BI* sont égales. Il est clair aussi que quatre fois le carré *HB* est le carré *PB* et que son côté est le double du côté du
348 premier, la surface *TE* est égale au carré *AD*, *DC*, *CG* et *TE* / est égale à *NE*. Or la somme[12] de *XD* et de *EI* est égale à *NE*, donc le gnomon *XL*, *LK*, *KU* est quatre fois le carré *AD*, *DC*, *CG*. Mais *PB* est quatre fois *HB*, *PI* est un carré et le côté du carré *PB* est le double du côté du carré *HB* ; c'est pourquoi le côté du carré *XL*, *LK*, *KU* est le double du côté du carré *AD*, *DC*, *CG*. C'est pourquoi on a montré que l'excédent du côté du carré, somme de deux carrés sur le côté de l'un d'eux, sera le double, représenté par *BK*, puisqu'il est le double de *BC*. Ce qu'il fallait démontrer.

Si un nombre ayant une racine est somme de deux nombres ayant une racine, alors la somme des carrés de trois fois leurs côtés sera un carré dont la racine est trois fois la racine du nombre donné d'abord.

Supposons le carré *HE*, somme du carré *HB* et de *DB*, *BE*, *BG*. Prenons *KO* le triple de *AC* ; il est clair que neuf fois le nombre carré est un carré et que son côté est le triple du côté du premier carré. Construisons sur *KO* le carré *IS* et complétons son tracé. Les surfaces *US* et *UC* sont le triple du carré *DB*, *BE*, *BG* ; de même les deux surfaces *LH′* et *TE* sont le triple de ce carré et les surfaces *KZ*, *ZC*, *MC*, *NC* sont le triple de ce carré ; le gnomon

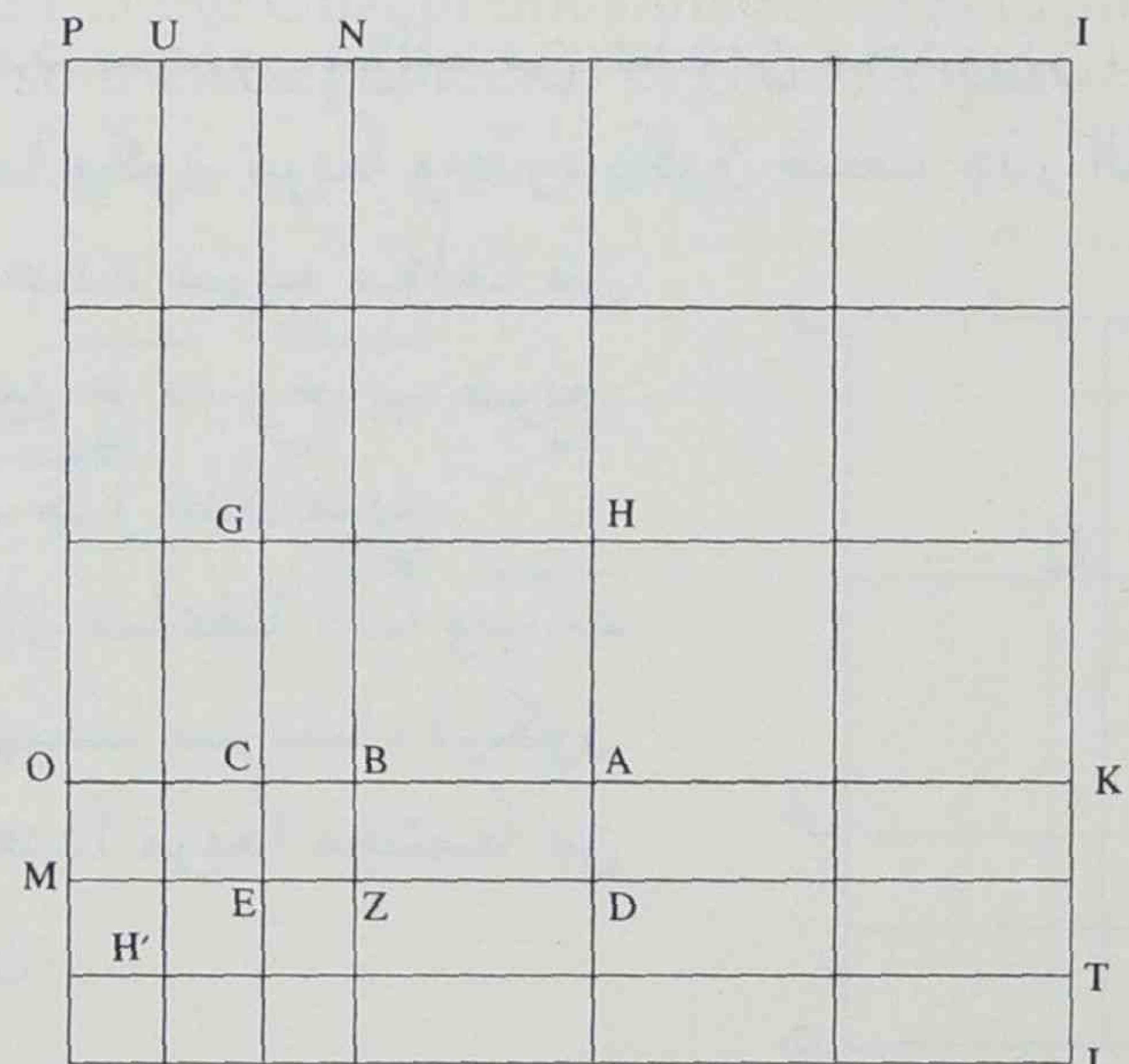


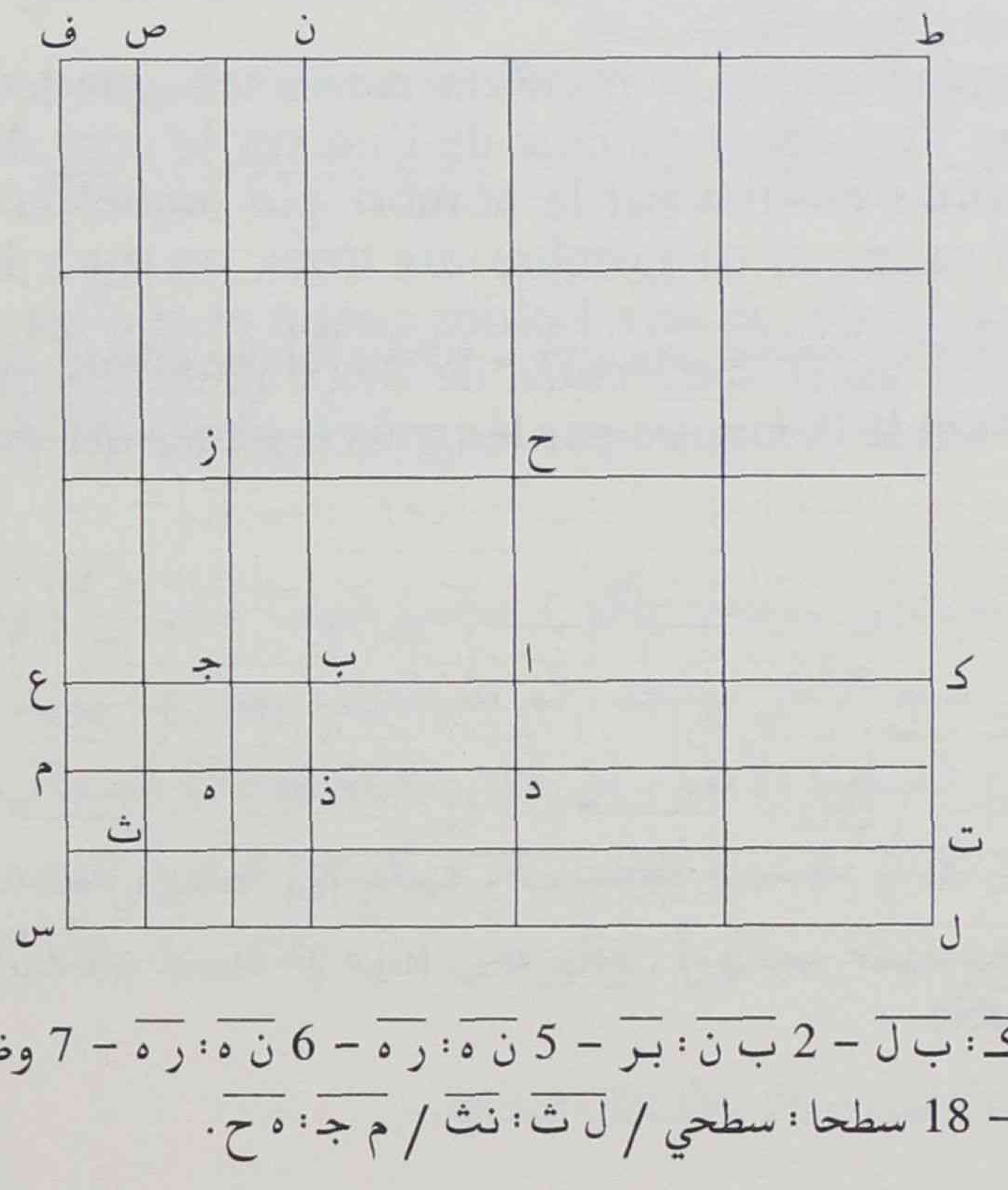
Fig. 9

[12] Litt. : chacun.

فلنجعل ب ش ضعف ب ا وب ك ضعف ب جـ، ونتمّ مربع ش ك وهو ف ط، ونتمّ تخطيط الشكل. فبيّنٌ أن أقسام متمم ش ل ب ن متساوية وأقسام مربع ف ب متساوية وأقسام مربع ب ط متساوية. وبيّنٌ أيضًا أن أربعة أمثال مربع ح ب ‹هو مربع ف ب› وضلعه ضعف ضلعه، فسطح ت ه مثل مربع ا د د جـ جـ ز، وت ه مثل / ن ه. وكل واحد من ش د وه ط مثل ن ه، فعلم ش ل ل ك ك ص أربعة أمثال مربع ا د د جـ جـ ز. ولكن ف ب أربعة أمثال ح ب، وف ط مربع، وضلع مربع ف ب ضعف ضلع مربع ح ب؛ ولذلك ضلع مربع ش ل ل ك ك ص ضعف ‹ضلع› مربع ا د د جـ جـ ز. ولهذا تبين أن زيادة ضلع مربع، اجتماع المربعين، على ‹ضلع› أحدهما، يصير مضعفًا بمنزلة ب ك، لأنه ضعف ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ٣٤٨

‹ب› كل عدد مجذور مؤلف من عددين مجذورين، فإن اجتماع مربع ثلاثة أضعاف ضلعيهما يكون مربعًا وجذره ثلاثة أضعاف جذر العدد المفروض أولاً.

فلنفرض مربع ح ه مؤلفًا من مربعي ح ب د ب، ب ه ب ز. ونضعف ك ع ثلاثة أضعاف ا جـ، فبيّن أن تسعة أضعاف العدد المربع يكون مربعًا ويكون ضلعه ثلاثة أضعاف ضلع المربع الأول. فنعمل على ك ع مربع ط س ونتمّ تخطيطه. فسطحا ص س ص جـ ثلاثة أضعاف مربع د ب ب ه ب ز؛ وكذلك سطحا ل ث ت ه ثلاثة أضعاف ذلك المربع، وسطوح ك ذ ذ جـ م جـ



1 ب ش: بس / ب ك: ب ل – 2 ب ن: بر – 5 ن ه: ر ه – 6 ن ه: ر ه – 7 وضلع: فضلع – 17 فسطحا: فسطح – 18 سطحا: سطحي / ل ث: نث / م جـ: ه ح.

LB, *BS*, *BP* est neuf fois le carré *DB*, *BE*, *BG*. Le gnomon est par conséquent un carré, son côté est le triple du côté du carré *DB*, *BE*, *BG* et le carré *IB* est neuf fois le carré *HB* ; son côté qui est la droite *KB* est donc le triple de la droite *AB*. Ce qu'il fallait démontrer.

On a donc montré par ce procédé que si on additionne deux nombres ayant des racines tels que leur somme ait une racine, alors les carrés du multiple de leurs côtés sont composés de deux nombres ayant une racine et leur somme a une racine.

Nous nous sommes limité à ces deux propositions à l'exclusion de celles qui les suivent, car la méthode est la même.

Soit deux nombres différents et tels que l'un excède l'autre de un ; si on
349 les double, / alors l'un excède l'autre de deux ; si on les triple[13], l'un excède l'autre de trois ; nous continuons ensuite à les multiplier, pour que le multiple de l'un excède le multiple de l'autre de un en un à l'infini.

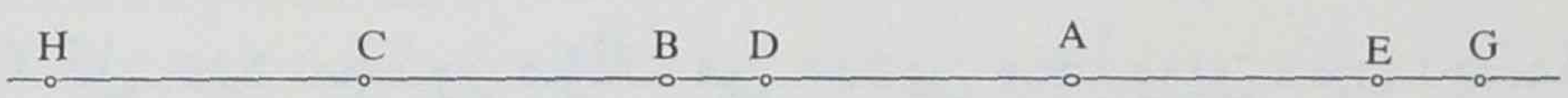


Fig. 10

Supposons les deux nombres *AB* et *BC* ; que *AB* excède *BC* de un, soit *DB* ; on a *AD* égal à *BC*. Posons *AG* égal à *AB*, *GE* égal à *DB* et *CH* égal à *BC*, alors *GB* excède *BH* de deux car <la somme de> *AD* et de *BC* est égale à *BH*, et *GE* plus *DB* est égal à deux, donc *GB* excède *BH* de deux. Et de même selon cet exemple, le multiple de *AB* excède le multiple de *BC* de un en un. Ce qu'il fallait démontrer.

Trouver deux nombres ayant une racine tels que leur somme ait une racine, que le côté de l'un excède le côté de l'autre d'un nombre donné et que ce nombre soit un générateur.

Supposons un premier couple de nombres carrés tels que leur somme ait une racine et tels que l'excédent du côté de l'un sur le côté de l'autre soit un. Nous les multiplions ensuite par le nombre par lequel le côté de l'un excède le côté de l'autre ; si ce nombre est trois, on aura les multiples d'ordre trois ; si c'est quatre, ce sera l'ordre quatre et si c'est cinq, ce sera l'ordre cinq et on aura ainsi deux côtés de deux nombres carrés dont la somme a une racine. On le démontre par les trois lemmes qui précèdent.

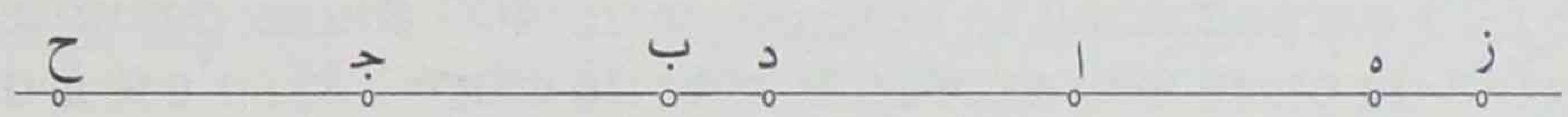
[13] Litt. : si on les double.

⟨ن جـ⟩ ثلاثة أضعاف ذلك المربع ؛ فعلم ل ب ب س ب ف تسعة أمثال مربع د ب ب ه ب ز. فالعلم إذاً مربع وضلعه ثلاثة أضعاف ضلع مربع د ب ب ه ب ز، ومربع ط ب تسعة أمثال مربع ح ب، فضلعه الذي هو خط كـ ب ثلاثة أمثال خط ا ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فقد تبين بهذا العمل أن كل عددين مجذورين إذا جمعا يكون مجموعهما مجذوراً، فإن مربع أضعاف أضلاعهما مؤلف من عددين مجذورين ويكون مجموعهما مجذوراً.

وقد اقتصرنا بهذين الشكلين على ما يتلوه من الأشكال، فإن الطريق فيها واحد بعينه.

⟨جـ⟩ كل عددين مختلفين يفضل أحدهما على الآخر بواحد، فإذا ضاعفناهما، / فإن أحدهما يفضل على الآخر باثنين، فإذا ضاعفناهما فإن ٣٤٩
أحدهما يفضل على الآخر بثلاثة؛ ثم لا نزال نضاعفهما ولا يزال يزيد تضعيف أحدهما على الآخر بواحد فواحد إلى ما لا نهاية له.



فلنفرض عددي ا ب ب جـ، وليكن ا ب زائداً على ب جـ بواحد، وهو د ب؛ فيكون ا د مثل ب جـ. فنجعل ا ز مثل ا ب وز ه مثل د ب وجـ ح مثل ب جـ. فيكون ز ب زائداً على ب ح باثنين لأن ا د ب جـ مثل ب ح، وز ه ود ب اثنين، فـ ز ب زائد على ب ح باثنين. وكذلك على هذا المثال تتزايد أضعاف ا ب على ب جـ بواحد ⟨واحد⟩؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

نريد أن نجد عددين مجذورين يكون مجموعهما مجذوراً، ويزيد ضلع أحدهما على ⟨ضلع⟩ الآخر بعدد مفروض، ويكون ذلك العدد أصلاً لجنسه.

فلنفرض أول عددين مربعين يكون مجموعهما مجذوراً، ويكون فضل ضلع أحدهما على ضلع الآخر بواحد. ثم نضعفهما بعدّة ما يزيد من تفاضل ضلع أحدهما على ⟨ضلع⟩ الآخر، إن كان ثلاثة فثلاثة أضعاف، وإن كان أربعة فأربعة، وإن كان خمسة فخمسة، فيكونان ضلعين للعددين المربعين اللذين يكون مجموعهما مجذوراً. والبرهان عليه بما قدمنا بالأشكال الثلاثة.

16 ا د: ه د – 20 أصلاً: اصل – 26 بالأشكال: الاشكال.

Quant aux exemples numériques, c'est comme je vais les décrire.

Trouver deux nombres ayant des racines tels que leur somme ait une racine et que le côté de l'un excède le côté de l'autre de cinq.

Prenons les deux plus petits nombres carrés tels que leur somme ait une racine et tels que le côté de l'un excède le côté de l'autre de un ; ce sont neuf et seize et leurs racines sont trois et quatre. Nous multiplions trois et quatre par cinq, on a quinze et vingt, alors quinze sera le côté d'un nombre carré et vingt le côté d'un nombre carré, qui excède quinze de cinq ; leurs carrés sont 225 et 400 que nous additionnons ; on a 625 dont la racine est 25. Mais d'après les deux lemmes précédents, on montre que pour les deux plus petits nombres ayant des racines tels que la différence du côté de l'un et du côté de la somme soit un nombre, alors le côté de l'un des deux nombres ayant une racine diffère de l'autre de la même grandeur[14]. Ce qu'il fallait démontrer.

Prenons un exemple numérique de cela.

Supposons deux nombres ayant une racine tels que le côté de l'un diffère du côté de leur somme de cinq. Nous considérons cinq et nous prenons son
350 triple, / on a 15 ; nous le multiplions par lui-même, on a 225 ; nous en retranchons le carré de cinq, il reste 200 ; nous considérons sa moitié qui est 100 ; nous enlevons son homonyme, c'est-à-dire l'homonyme de cinq, on a 20 et on a la somme des deux carrés de 15 et de 20, 625, dont la racine est 25. Le côté du carré 625 excède donc le côté du carré 400 d'une quantité égale à celle dont le côté du carré 400 excède le côté du carré 225, c'est-à-dire de 5. On a donc ainsi montré que si deux nombres ayant une racine sont tels que la différence entre le côté de l'un d'eux et le côté de leur somme est un nombre donné et que ce nombre soit générateur, alors le rapport du côté de l'un des deux carrés au côté de l'autre carré est égal au rapport de ce côté au côté du carré qui est leur somme et ce rapport est un rapport numérique. Ce qu'il fallait démontrer.

Ces carrés générateurs s'ordonnent selon un ordre naturel suivant le rapport numérique ; ainsi on commence par prendre le premier côté de l'un des deux carrés à partir de trois, le deuxième à partir de quatre et le troisième à partir de cinq et la différence entre l'un et l'autre est un ; cette différence croîtra successivement. Quant au premier, il croît de trois en trois, le deuxième de quatre en quatre et le troisième de cinq en cinq et ainsi de suite indéfiniment.

[14] Voir commentaire.

فأما مثاله من الأعداد فهو كما أصف.

نريد أن نجد عددين مجذورين يكون مجموعهما مجذوراً، ويكون ضلع أحدهما زائداً على ضلع الآخر بخمسة.

فنأخذ أقل عددين مربعين يكون مجموعهما مجذوراً ويزيد ضلع أحدهما على ⟨ضلع⟩ الآخر بواحد، وهما تسعة وستة عشر، وجذراهما ثلاثة وأربعة. فنضعف ثلاثة وأربعة بخمسة أضعاف، فيكون خمسة عشر وعشرين، فيكون خمسة عشر ضلع عدد مربع، وعشرون ضلع عدد مربع، ويزيد على خمسة عشر بخمسة، ومربعاهما ٢٢٥ و ٤٠٠، فنجمعهما فيكون ٦٢٥ وجذره ٢٥. وبما قدمنا بالشكلين المتقدمين، يتبين أن أقل عددين مجذورين يكون فضل ضلع أحدهما على ضلع جميعهما بعدد، فإن ضلع أحد العددين المجذورين يفضل على الآخر بذلك المقدار؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ونمثل لذلك مثالاً عددياً.

وهو أن نفرض عددين مجذورين يزيد ضلع أحدهما على جميعهما بخمسة. فنأخذ خمسة ونضعفه بثلاثة أضعافه، / فيكون ١٥، فنضربه في ٢٥٠
نفسه فيكون ٢٢٥، فنلقي منه مربع خمسة، يبقى ٢٠٠؛ فنأخذ نصفه وهو ١٠٠، ونلقي منه سميّه، وهو خمسة، يبقى ٢٠، فيكون ⟨مجموع⟩ مربعي ١٥ و٢٠، ٦٢٥ وجذره ٢٥. فقد يزيد ضلع ⟨مربع⟩ ٦٢٥ على ⟨ضلع⟩ مربع ٤٠٠ بمقدار ما يزيد ضلع مربع ٤٠٠ على ⟨ضلع⟩ مربع ٢٢٥، وهو ٥. فقد تبين من هذا أن كل عددين مجذورين يكون فضل ضلع أحدهما على ⟨ضلع⟩ جميعهما بعدد معلوم، ويكون أصلاً لجنسه، فإن نسبة ضلع أحد المربعين إلى ضلع المربع الآخر كنسبة ذلك الضلع إلى ضلع مربع جميعهما نسبة عددية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد تنسق هذه المربعات التي هي أصول لأجناسها نسقًا طبيعيًا على النسبة العددية، وذلك أنه نبتدئ ⟨بأخذ⟩ أول ضلع أحد المربعين من ثلاثة والثاني من أربعة والثالث من خمسة، ويكون تفاضل أحدهما على الآخر واحداً، ثم يتزايد على الولاء؛ أما الأول فثلاثة ثلاثة والثاني فأربعة أربعة والثالث فخمسة خمسة على الولاء إلى ما لا نهاية له.

5 وجذراهما: وجذريهما – 6 وعشرين: وعشرون – 7 وعشرون: وعشرين – 8 ومربعاهما: ومربعيهما / ٢٢٥: ٦٨٥ /و٤٠٠: و٤٠ – 9 وبما: ومما / بالشكلين: الشكلين – 17 ١٥: ٢٥ / ٦٢٥: ٦٥٥ – 18 ٢٢٥: ٦٢٥.

Il peut se trouver un autre ordre de ces carrés à partir de la proportionnalité de nombres par une autre voie. On peut donner l'exemple de cela par des figures géométriques.

Trouver deux nombres carrés tels que leur somme ait une racine et que la différence du côté de l'un sur le côté de l'autre soit deux.

Prenons un nombre tel que son quart soit deux, soit huit, et qui est le côté de l'un des deux carrés. Prenons ensuite toujours ses trois quarts, on a six, qui est le côté du deuxième carré. La somme de leurs carrés a donc une racine et sa racine est la somme du côté du plus grand des deux carrés et de son quart.

Exemple : si nous ajoutons à huit son quart, qui est deux, on a dix, qui est la racine de la somme des deux carrés de huit et de six. Ainsi on a montré que si on a un nombre, si on retranche de ce nombre son quart, si on multiplie ce nombre par lui-même et si on multiplie le nombre obtenu en retranchant par lui-même, alors la somme des deux carrés a une racine et sa racine est la somme du nombre donné et de son quart.

En géométrie : Soit *AB* un nombre donné ; appliquons à *AB* un carré, soit *BC* ; partageons *AB* en *E* tel que *AE* soit le quart de *AB* ; appliquons à *BE* le carré *EF* et posons *GE* égal à *EA*, menons *GH* parallèle à *AB* et *IJ* parallèle à *AB* à condition que *GI* soit égal à *IK* et posons *BL* égal à *BG* ; la somme des surfaces *BL* et *BG* est donc égale à la surface *KH* ; achevons les carrés *AG*, *BM* et *DL*, puisque *IJ* est le triple de *AE* et *IK* est égal à *AE*, alors *IF*
351 est égal à *AE* par *EG* plus *BH* par *HM* / et *DN* par *NL* ; la somme des carrés

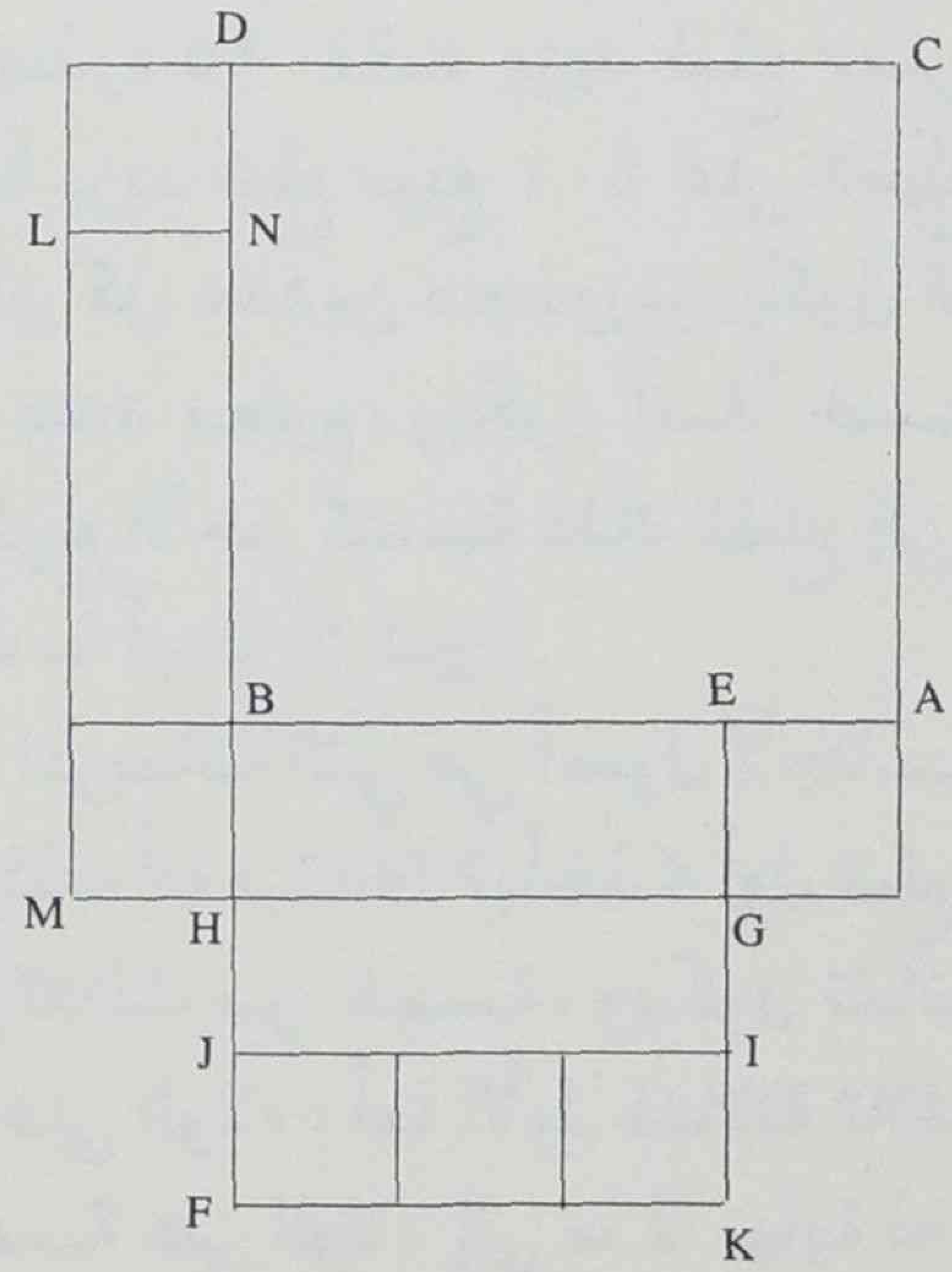


Fig. 11

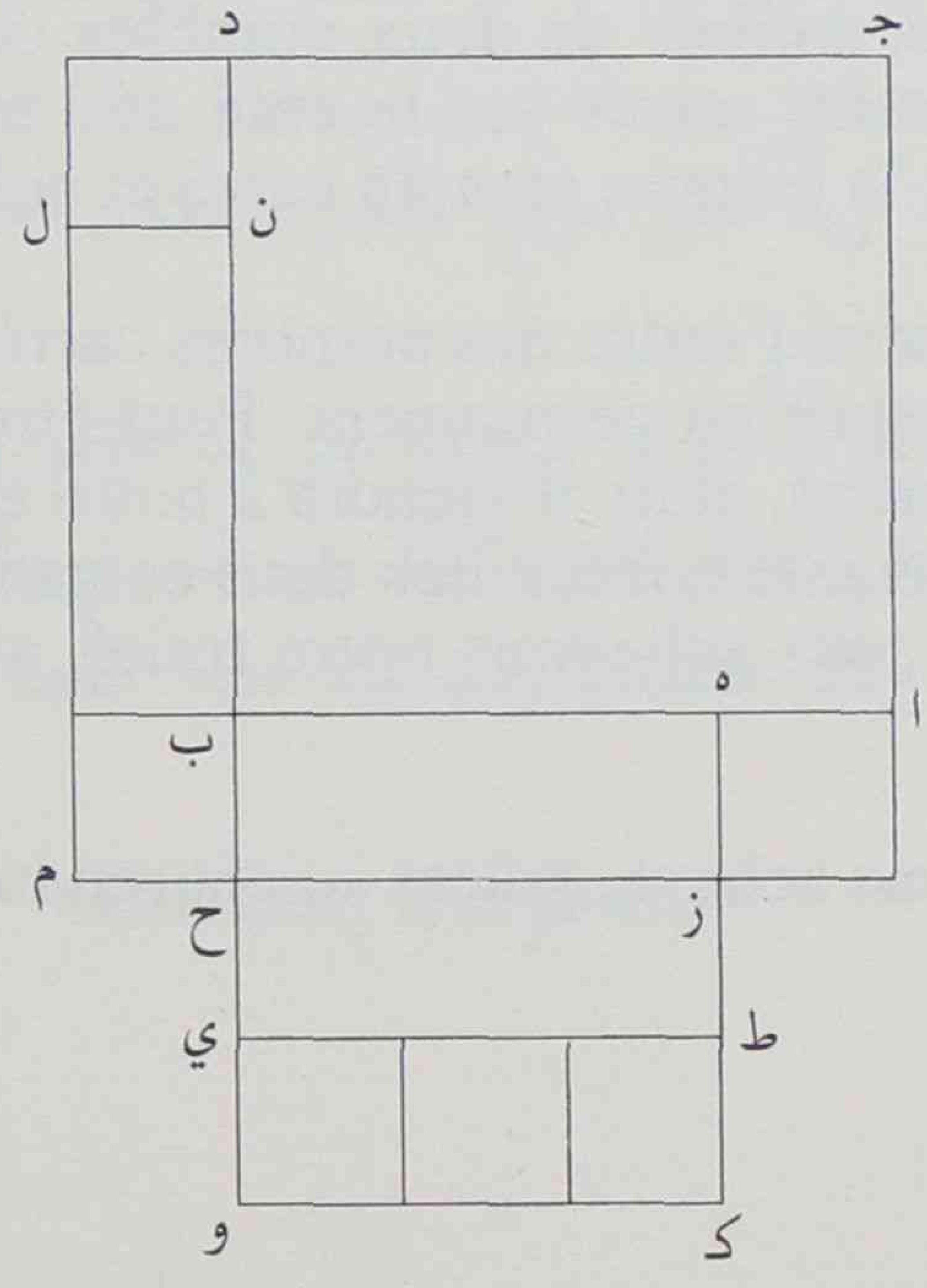
وقـد يوجـد نسق هذه المربعـات من تناسب الأعـداد على طريق آخـر، ويمكن مثالها بالأشكال الهندسية.

وذلك أنّا نريد أن نجد عـددين مـربعين يكون مجمـوعهـمـا مجذوراً، ويكون فضل ضلع أحدهما على ‹ضلع› الآخر باثنين.

فنأخذ عدداً يكون ربعه اثنين، وهو ثمـانية، وهو ضلع أحد المربعين. ثم نأخذ ثلاثة أرباعه أبداً، وهو ستة، وهو ضلع المربع الثاني، فيكون مجموع مربعيهما مجذوراً وجذره مجموع ضلع المربع الزائد منهما وزيادة ربعه عليه.

مثاله: أنّا إذا زدنا على ثمانية ربعه، وهو اثنين، فيكون عشرة، وهو جذر مربعي ثمانية وستة. فقد تبين إذاً أن كل عدد إذا نقص منه ربعه وضرب العدد في نفسه وضرب العدد الناقص في نفسه، فيكون اجتماع المربعين مجذوراً وجذره اجتماع ضلع العدد المفروض وربعه.

هندسته: عدد ا ب مفروض، نضيف إليه مربعًا وهو ب ج، ونقسم ا ب على ه، يكون ا ه ربع ا ب، ونضيف إلى ب ه مربع ه و، ونجعل ز ه مثل ه ا، ونخرج ز ح يوازي ا ب وط ي يوازي ا ب، على أن ز ط مثل ط ك، ونجعل ب ل مثل ب ز، فسطحا ب ل ب ز يعدلان سطح ك ح؛ ونتمّ مربعات ا ز ب م د ل. فمن أجل أن ط ي ثلاثة أضعاف ا ه وط ك مثل ا ه، ‹فـ ط و مثل ا ه› في ه ز وب ح في ح م / ود ن في ن ل، فمربعات ا ز ب م د ل تعدل ٣٥١



14 ه و: ه ر / ز ه: ر ح – 15 ط ك: ط ل – 16 فسطحا: فسطحي / ك ح: ه ح – 17 ب م: به / ا ه: ا ر / ط ك: ط ل.

AG, *BM* et *DL* est donc égale à la surface *IF* et le carré *CM* est égal à la somme des carrés *CB* et *EF*. Il est clair également que l'excédent du côté du carré *CM* sur le côté du carré *CB* est égal à l'excédent du côté du carré *CB* sur le côté du carré *EF*. Ce qu'il fallait démontrer.

Quant à ce qui s'ordonne à partir de cela suivant l'ordre numérique, c'est de cette manière :

Si on additionne deux nombres différents et si on multiplie leur somme par leur différence, alors le nombre obtenu est un côté d'un triangle rectangle dont les côtés sont rationnels ; si on prend le double-produit de l'un par l'autre, il en résulte le second côté de ce triangle ; et si on multiplie chacun d'eux par lui-même et si on les additionne, on a l'hypoténuse de ce triangle.

Soient trois nombres successifs selon le rapport numérique, alors le produit de l'une des extrémités par l'autre est le côté d'un triangle rectangle dont les côtés sont rationnels et le double du terme du milieu est le deuxième côté de ce triangle.

Soient quatre nombres successifs, alors le double-produit de l'un des termes du milieu par l'autre est le côté d'un triangle rectangle dont les côtés sont rationnels, et si on additionne les deux termes extrêmes, on obtient l'autre côté de ce triangle.

Et suivant cet ordre, si on se donne six nombres <consécutifs> ou huit nombres ou dix nombres, alors le double-produit de l'un des termes du milieu par l'autre est le côté d'un triangle et la somme des deux extrêmes est l'autre côté du triangle.

Soient trois nombres impairs[15], alors quatre fois le terme du milieu est le côté d'un triangle rectangle et le produit d'un terme extrême par l'autre est le second côté.

Soit un nombre carré, somme de deux nombres carrés, alors le double-produit du côté de l'un des carrés par le côté de l'autre est tel que, si on l'ajoute au carré initial, la somme sera un carré et si l'on retranche, il reste un carré.

Nous avons donc achevé l'ordre des nombres carrés, dans la limite de ce qui nous est venu à l'esprit en ce moment. Peut-être, lorsque le temps le permettra, nous y penserons, alors il viendra à notre esprit <des propriétés> d'ordre et de proportionnalité qui ont lieu dans ce genre ; ce que nous expliquerons. C'est ici que nous achevons notre traité, avec la bénédiction de Dieu le Très Haut.

Le traité est achevé, grâces soient rendues à Dieu.

[15] Voir commentaire.

سطح ط و، فمربع جـ م يعدل مربعي جـ ب ه و. وبيّن أيضًا أن زيادة ضلع مربع جـ م على ‹ضلع› مربع جـ ب ‹مثل زيادة ضلع مربع جـ ب› على ‹ضلع› مربع ه و؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأما ما ينسق من ذلك على النظم العددي فعلى هذا النحو:

كل عددين مختلفين إذا جمعا وضربا مجموعين في فضل ما بينهما، فيجتمع عدداً يكون ضلعًا للمثلث القائم الزاوية المنطق الأضلاع؛ وإذا ضرب أحدهما في الآخر مرتين، يحصل من ذلك الضلع الثاني من ذلك المثلث؛ وإذا ضرب كل واحد منهما في نفسه وجمعا، يحصل قطر ذلك المثلث.

وكل ثلاثة أعداد متوالية على النسبة العددية، فإن أحد الحاشيتين في الآخر ضلع المثلث القائم الزاوية المنطق الأضلاع، وضعف الأوسط يكون ضلع المثلث الثاني منه.

وكل أربعة أعداد متوالية، فإن ضعف أحد الأوسطين في الآخر ضلع المثلث القائم الزاوية المنطوق الأضلاع، وإذا جُمع الطرفان منها، يحصل ضلع الآخر من ذلك المثلث.

وعلى هذا النسق إذا فرض ستة أعداد وثمانية وعشرة، فإن ضعف أحد الأوسطين في الآخر يكون ضلع المثلث والطرفين مجموعين ضلع الآخر من المثلث.

كل ثلاثة أعداد أفراد، فإن أربعة أضعاف [مربع] الأوسط ضلع المثلث القائم الزاوية وأحد الطرفين في الآخر الضلع الثاني منه.

كل عدد مربع مجتمع من عددين مربعين، فإن ضعف أحد ضلع المربعين في ‹ضلع› الآخر إذا زيد على مربع الأصل، تكون الجملة مربعًا، وإذا نقص منه، يبقى عدداً مربعاً.

فقد أتينا على نسق الأعداد المربعة على ما خطر ببالنا في الوقت، ولعل عند الفراغ نجيل الفكر فيه فيخطر بالبال من النسق والتناسب الواقعة في هذا الجنس ما سنبينه. وقد ختمنا رسالتنا هذه هاهنا على بركة الله تعالى وحسن توفيقه.

تمت الرسالة بحمد الله.

6 المنطق: المنطقة – 10 المنطق: المنطقة – 13 المنطوق: المنطوقة / الطرفان: الطرفين.

TEXTE ET TRADUCTION

XI

*Fragment de l'*Anthologie de problèmes *en théorie des nombres*

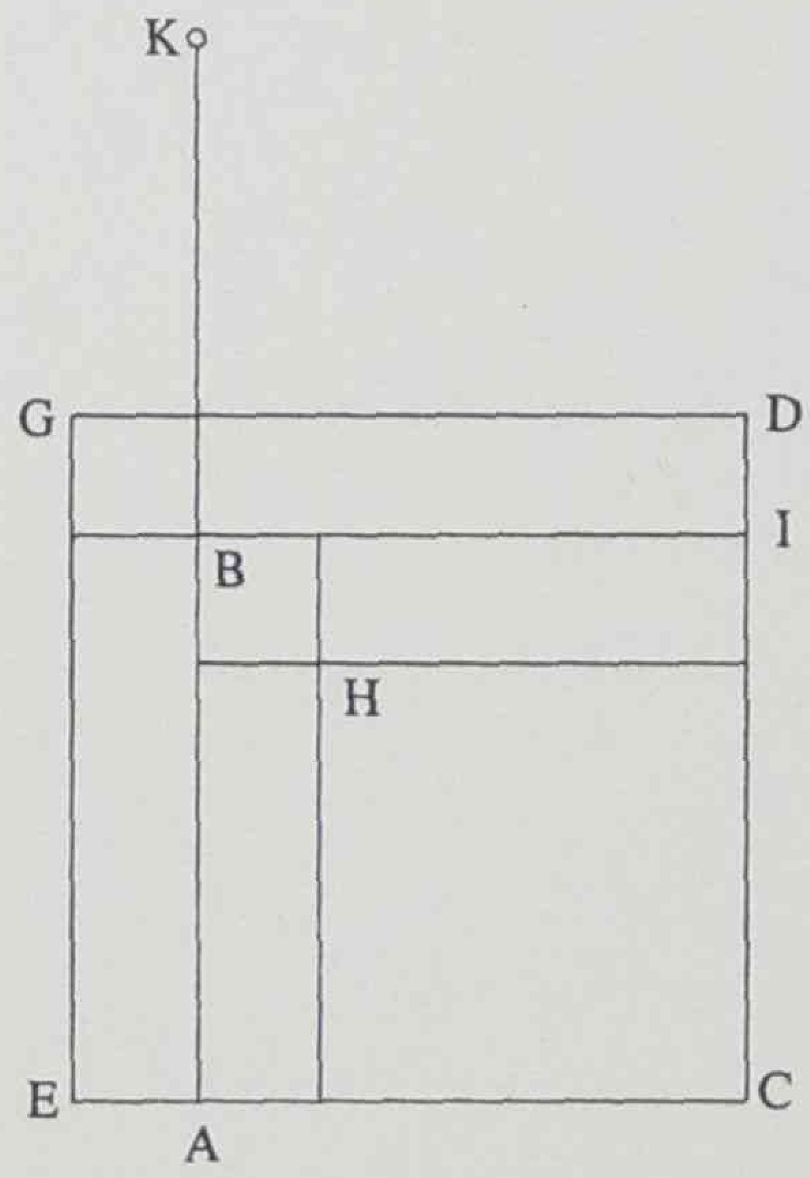
Fragment cité par al-Samaw'al en théorie des nombres

Fragment de l'*Anthologie de problèmes* en théorie des nombres

Trouver un nombre tel que, si on lui ajoute un nombre connu, on aura un
C-43r carré et si on en retranche / le même nombre, il deviendra un carré.

Supposons le nombre connu le nombre *AK*. Partageons-le en deux moitiés en *B*. Multiplions *AB* par lui-même, soit *BC*. Ajoutons à celui-ci toujours 1, soit *BG*. Si nous ajoutons aux nombres *BC*, *BG*, le nombre *AK*, on aura le carré *CG*, car *BD*, *BE* qui sont les compléments sont égaux à *AK*. Si nous en retranchons *BD*, *BE*, c'est-à-dire *IH*, *HB*, *HA*, *BG*, puisque *HB* est deux fois, il reste *CH*, qui est un carré.

Exemple : *AK* est dix. Trouver un nombre tel que si on lui ajoute dix et si on lui en retranche dix, on ait un carré.

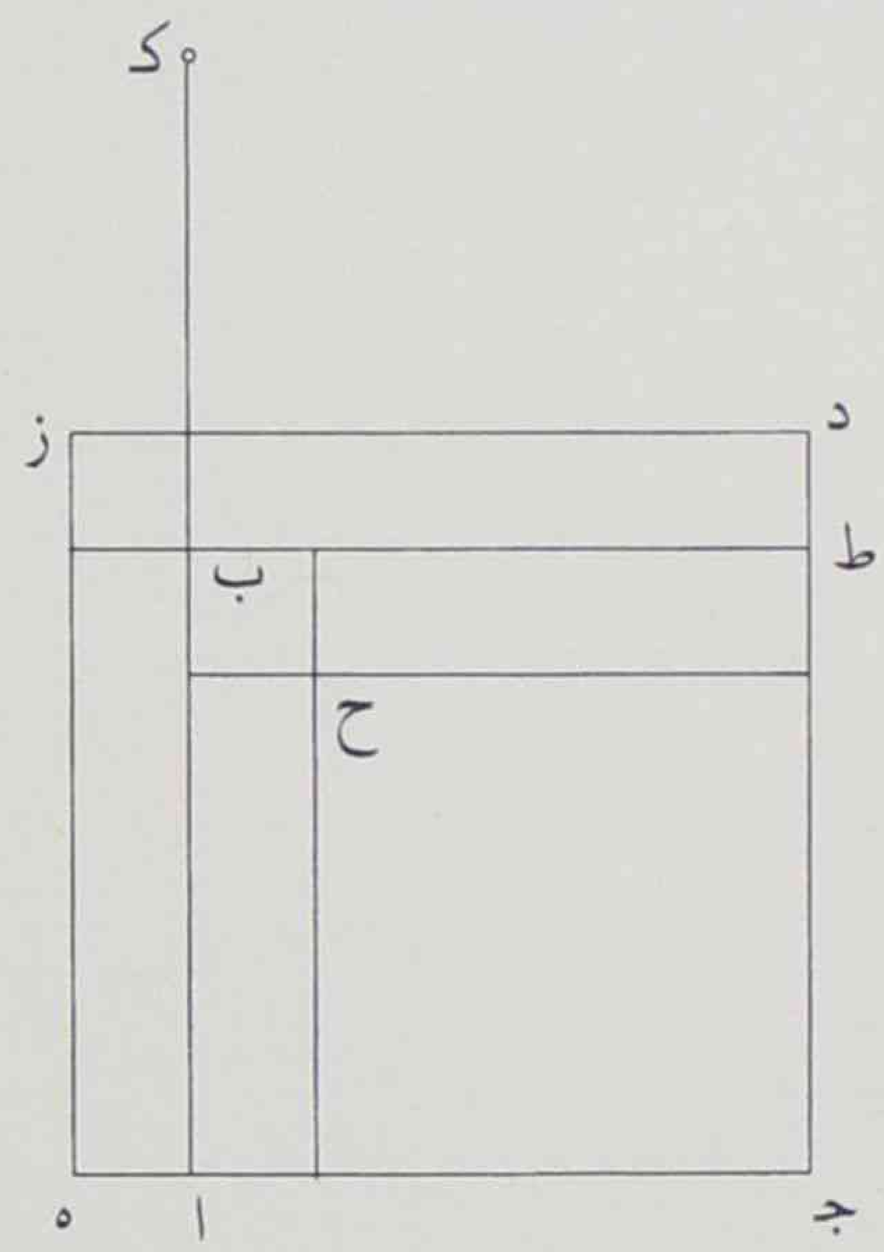


Partageons dix en deux moitiés. On a *AB*, cinq ; multiplions-le par lui-même, on a *BC*, vingt-cinq. Ajoutons à celui-ci *BG* qui est un. Si nous lui ajoutons *BE*, *BD* — cinq, cinq —, on a trente-six, qui a une racine. Si nous
en retranchons *IH*, qui est quatre et *HA* qui est quatre et le double de *HB*, /
D-86r qui est deux, on a seize, qui a une racine. Ce qu'il fallait démontrer.

‹فقرة من المسائل المختارة في نظرية الأعداد›

نريد أن نجد عدداً إذا زدنا عليه عدداً معلوماً، يكون مربعًا، وإذا نقصنا / منه ذلك العدد بعينه، يصير مربعًا. جـ-٤٣-و

فنفرض العدد المعلوم عدد ا ك، ونقسمه بنصفين على ب. ونضرب ا ب في نفسه، وهو ب جـ، ونزيد عليه واحداً أبداً، وهو ب ز. فإذا زدنا على عددي ب جـ ب ز عدد ا ك، يصير مربع جـ ز، لأن ب د ب ه المتممين يعدلان ا ك. وإذا نقصنا منه ب د ب ه، أعني ط ح ح ب ح ا ب ز لأن ح ب يكون مرتين، يبقى جـ ح، وهو مربع.



مثاله: أن ا ك عشرة؛ نريد أن نجد عدداً إذا زدنا عليه عشرة أو نقصنا منه عشرة، يكون مربعًا. فنقسم عشرة بنصفين، يكون ا ب خمسة، ونضربه في نفسه، يكون ب جـ كه. ونزيد عليه ب ز، وهو واحد. فإذا زدنا عليه ب ه ب د - خمسة خمسة - يكون لو، وهو مجذور. وإذا نقصنا منه ط ح، وهو أربعة، وح ا، وهو أربعة، وضعف ح ب، / وهو اثنان، يصير يو، وهو مجذور؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. د-٨٦-و

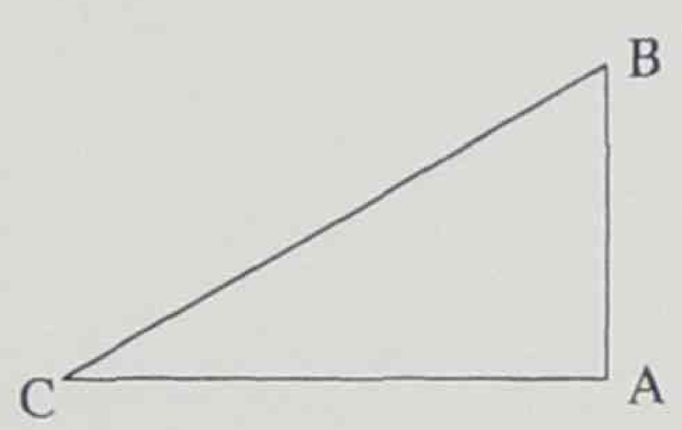
2 عدداً معلوماً: عدد معلوم [د، جـ] - 3 يصير: يصر [د] - 4 ا ك: ا ل [د]، ولن نشير إليها فيما بعد - 7 وإذا: فاذا [جـ] - 8 مربع: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [د] - 13 وهو (الثانية): هو [جـ] / اثنان: اثنين [د] / يصير: نصير [د، جـ].

Fragment cité par al-Samaw'al en théorie des nombres

قال أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي : كل مثلث قائم الزاوية ، فإنه إذا زيد على مربع وتر زاويته القائمة ضعف السطح الذي يحيط به الخطان المحيطان بالقائمة ، كان المجتمع مربعًا ، وإن نقص من مربع وتر الزاوية القائمة ضعف السطح الذي يحيطان به ، كان الباقي مربعًا .

Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī a dit : Si on ajoute au carré de la diagonale de tout triangle rectangle le double du rectangle entouré par les deux droites qui entourent l'angle droit, la somme est un carré ; et si on retranche du carré de la diagonale le double du rectangle qui entoure l'angle droit, la différence est un carré.

Il s'agit donc : $BC^2 \pm 2\, AB \cdot AC$ est un carré, qu'al-Samaw'al démontre.



GLOSSAIRE ARABE-FRANÇAIS

Lorsque le mot se répète un grand nombre de fois en conservant le même sens, nous n'avons cité qu'une dizaine d'occurrences. Chacune de ces occurrences est indiquée par le numéro du traité en chiffre romain, les numéros de page et de ligne en chiffre arabe :

(I) *Sur les propriétés de la coupole hyperbolique et de la coupole parabolique*
(II) *Sur les propriétés des solides elliptique, hyperbolique et parabolique*
(III) *Sur la description des sections coniques*
(IV) *Sur la construction du compas parfait*
(V) *Comment concevoir les deux lignes qui se rapprochent et qui ne se rencontrent pas*
(VI) *Toutes les figures sont à partir du cercle*
(VII) *Sur la division de l'angle à côtés droits en trois parties égales*
(VIII) *Sur la détermination des deux moyennes par la géométrie*
(IX) *Sur la construction de l'heptagone régulier et la trisection de l'angle*
(X) *La solution par une méthode universelle d'un problème numérique*
(XI) Fragment de l'*Anthologie de problèmes* en théorie des nombres

أبد

أبداً — toujours (VIII) 391, 11 ; (X) 451, 6, (XI) 457, 5

أبر

إبرة — aiguille (III) 247, 10, 11

أتى

أتى — donner, présenter (IX) 401, 7 ; (X) 427, 2 ; produire (V) 295, 11 ; 297, 22 ; (VI) 323, 19 ; 331, 17 ; parvenir (X) 423, 9 ; 433, 4 ; achever (X) 453, 23

أجل

من أجل هذا — en raison de, étant donné que (I) 193, 25 ; (IV) 285, 10 ; (VI) 319, 12 ; (VII) 337, 11 ; (X) 435, 14, 17 ; 439, 17 ; 451, 17

أحد

ج آحاد — unité 439, 17 ; 441, 3, 11…

أخذ

أخذ — prendre, considérer (I) 195, 19 ; (III) 261, 17, 18, 25 ; 265, 7, 22 ; 269, 15, 25 ; 271, 7, 18 ; 273, 8… ; (V) 297, 11 ; (IX) 409, 6 ; (X) 425, 4, 20 ; 439, 6, 13 ; 441, 3, 13, 18 ; 443, 5, 6…

أخْذ — le fait de tenir (III) 241, 11, 15

مأخذ ج مآخذ — chemin (I) 195, 19 ; (VI) 323, 14 (IX) 399, 8

اتّخذ — prendre (IV) 289, 15

اتّخاذ — le fait de prendre (III) 261, 6, 10

أخر

آخَر م أخرى — autre (II) 217, 24 ; (III) 231, 22 ; 233, 2 ; 237, 23, 24 ; 239, 8, 12 ; 241, 2, 22 ; 247, 5 ; 249, 2 ; … ; (IV) 287, 10 ; 289, 15 ; (V) 295, 7, 8 ; 297, 9, 10, 12 ; 301, 20 ; 303, 8 ; (VI) 313, 16, 23 ; 319, 9, 13 ; 321, 4 ; 329, 9 ; (VII) 345, 11 ; 347, 3 ; 349, 1 ; 367, 2 ; 369, 11, 16 ; 379, 7 ; (IX) 403, 12 ; 405, 9 ; 407, 3, 5 ; 411, 6 ; (X) 427, 14 ; 429, 2 ; 431, 14 ; 433, 6 ; 443, 14 ; 447, 10-13, 23, 24 ; …

أخير — dernier (X) 441, 20

المتأخرون — les modernes (VII) 335, 15 ; (IX) 399, 17

أدب

تأديب — leçon (IX) 401, 17

أدو

أدوات — instruments (IX) 399, 18

أدى

أدّى — mener, conduire (V) 301, 20, 21 ; (VII) 379, 3 ; (X) 423, 6 ; 429, 7 ; 431, 8, 9 ; 433, 11, 13

مؤدٍ — qui se ramène, qui mène (X) 427, 1 ; 431, 23

أسر

بأسر — tout (VI) 315, 20

أسطرلاب

أسطرلاب (أصطرلاب) مسطح — astrolabe plan (III) 249, 11, 12 ; (IV) 285, 7

أصل

أصَل — être fondé (VI) 321, 24

أصلٌ — principe (III) 249, 13 ; (X) 435, 1 ; 437, 19 ; base (IX) 403, 12 ; initial (X) 453, 21

أصل لجنسه — générateur (X) 447, 20-21 ; 449, 20, 23

أصول — primitifs (X) 443, 12

الأصول — *Les Éléments* (III) 255, 26 ; (V) 299, 11 (VIII) 391, 17 ; (IX) 399, 12

أفق

أفق — horizon (III) 261, 3 ; 273, 15

ألف

ألّف (تأليف) — composer (X) 429, 16

مؤلّف — composé (VI) 313, 14 ; 321, 12 ; (X) 431, 1, 15, 21 ; 437, 6 ; 441, 3, 6, 12 ; 443, 8, 16, 18 ; …

être composé (X) 431, 12 ; 433, 12 — ائتلف

ellipse (IV) 285, 16 — إليبسيس

أمر

ordonner (III) 231, 8 ; (IX) 407, 1 — أمَرَ
chose, question, à propos (I) 191, 12 ; (III) 255, 9 ; (V) 295, 6, 10, 12 ; 297, 3 ; 301, 19 ; (VI) 315, 27 ; 317, 5 ; (IX) 407, 12 ; (X) 433, 7 — أمْر
il n'en est pas ainsi (VI) 317, 8 — ليس الأمر كذلك

أمل

méditer (I) 193, 4 ; (VII) 379, 3 — تأمّل
celui qui médite (VI) 317, 2 — متأمل

tube (III) 239, 7 ; (IV) 287, 9-12 ; 289, 15-19 ; 291, 3, 7 — أنبوبة

أنس

les gens (VI) 323, 2 — ج الناس
trouver plaisir (I) 193, 6 — استأنس

أول

premier (I) 197, 14 ; 199, 6 ; 201, 9, 22 ; 203, 2 ; 207, 10 ; (III) 255, 25 ; 263, 8 ; 269, 27 ; 273, 4, 22 ; (IV) 291, 5 ; (V) 299, 10 ; 307, 3 ; (VII) 351, 18 ; 359, 7 ; 367, 1, 11 ; 369, 18 ; 373, 6 ; 381, 5 ; (IX) 401, 14 ; 403, 14 ; 407, 20 ; (X) 431, 10 ; 443, 4 ; 445, 16 ; 447, 22 ; 449, 24 — أوّل م أولى
débuts (III) 249, 7 ; (IX) 401, 3 ; primitifs (X) 435, 1 — أوائل
les anciens (IX) 407, 8 — الأوائل
Définitions des Éléments de physique (V) 297, 3 — *حدود أوائل الطبيعيات*
d'abord (I) 197, 5 ; (III) 249, 14 ; 261, 12 ; (V) 297, 22 ; (VII) 337, 2 ; 355, 5 ; (X) 443, 15, 17 ; 445, 13 — أوّلاً

instrument (III) 273, 15 ; (IV) 285, 2, 5, 6 ; 287, 6, 7 ; machines (IX) 399, 18 — آلة

أون

maintenant (III) 249, 2 ; (IV) 287, 8 ; (VI) 313, 11 ; 323, 19 ; (IX) 401, 16 ; 407, 12 ; (X) 431, 22 ; 435, 5 — الآن

بأس

misérable égaré (IX) 401, 2 — بائس ضال

بت

pas du tout (VI) 317, 18 ; 319, 10 ; 321, 5 — البتّة

بدّ

لا بدّ	il est nécessaire ((III) 255, 8 ; (VII) 367, 10 ; (VIII) 391, 12 ; (X) 437, 6-7

بدأ

بدأ	commencer (III) 231, 19
مبدأ ج مبادئ	principes (V) 295, 13
– فلسفية	– philosophiques (V) 297, 1
ابتدأ	commencer (I) 195, 22 ; (III) 249, 14 ; (VII) 337, 1 ; (IX) 407, 12 ; (X) 435, 5 ; 449, 24
ابتداء	début, commencement (III) 241, 13, 14 ; (IX) 401, 20
مبتدئ	débutant (IX) 399, 6 ; 401, 17

بدل

إبدال	permutation (II) 225, 6 ; (VII) 373, 8
تبادل	le fait d'être alternes-internes (VII) 337, 13 ; 369, 4-5

برج

برج ج بروج	signes du zodiaque (III) 249, 7 ; 279, 14
رأس برج ج رؤوس البروج	débuts des signes du zodiaque (III) 261, 4-5, 17
فلك البروج	écliptique (III) 261, 5
الأسد	Lion (III) 261, 7 ; 265, 17 ; 269, 20 ; 273, 7, 10, 12 ; 275, 3 ; 277, 2, 6, 15
الثور	Taureau (II) 261, 8 ; 265, 19, 20; 269, 22 ; 273, 10, 11 ; 277, 7, 11, 16, 20
الجدي	Capricorne (III) 261, 7 ; 263, 6 ; 265, 15 ; 269, 19, 27 ; 271, 23-25 ; 273, 6, 9, 12…
الجوزاء	Gémeaux (III) 261, 7 ; 265, 17 ; 269, 20 ; 273, 7, 8, 10, 12 ; 275, 3 ; 277, 2, 4, 6, 15
الحمل	Bélier (III) 261, 9 ; 277, 21, 23 ; 279, 1
الحوت	Poissons (III) 261, 9 ; 265, 19 ; 269, 23 ; 273, 11 ; 277, 8, 9, 12, 14, 24, 25
الدلو	Verseau (III) 261, 8 ; 267, 4 ; 269, 21 ; 273, 8 ; 275, 4, 5, 9 ; 277, 8
السرطان	Cancer (III) 261, 7, 18, 19 ; 263, 5 ; 265, 15 ; 269, 19 ; 271, 23 ; 273, 6, 9, 12…
السنبلة	Vierge (III) 261, 8 ; 265, 19 ; 269, 22 ; 273, 10 ; 277, 7, 12, 16, 20
العقرب	Scorpion (III) 261, 9 ; 265, 19 ; 269, 22 ; 273, 11 ; 277, 7, 9, 12, 14
القوس	Sagittaire (III) 261, 8 ; 273, 7, 8 ; 275, 4, 5, 9 ; 277, 9
الميزان	Balance (III) 261, 9 ; 277, 23 ; 279, 1

برز

مبرّز	qui se distingue (IX) 399, 12

بركار

بركار compas (III) 239, 6, 8, 11, 12 ; 241, 20 ; 255, 15, 16, 21, 23 ; 271, 25 ; 275, 4, 6 ; … ; (IV) 283, 5, 6, 19 ; 285, 1, 8 ; 287, 8, 13 ; 289, 7, 8, 12, 15 ; … ; (IX) 407, 10

– تامّ – parfait (IV) 283, 2

– المخروط – du cône (IV) 283, 2 ; 291, 19

– مخروطيّ – conique (III) 239, 9, 13 ; 255, 11, 12

برهن

بَرْهَنَ démontrer (II) 227, 8 ; (VII) 337, 4 ; 349, 13 ; 351, 12 ; (IX) 401, 22

بُرهان براهين، برهانات démonstration (I) 197, 3 ; 199, 7 ; 201, 1, 17 ; 205, 4 ; 207, 2, 8 ; 209, 4 ; (II) 215, 11, 15 ; 217, 3, 15 ; 219, 12 ; 221, 13, 14 ; 223, 3, 9 ; … ; (III) 231, 9 ; (V) 295, 12, 14-16 ; 297, 5, 8, 13, 16 ; 299, 10, 14 ; … ; (VI) 319, 16 ; (VII) 335, 16 ; 337, 3 ; 339, 9 ; 351, 13, 18 ; 355, 1 ; 357, 1, 9, 15 ; 359, 2… ; (VIII) 391, 16 ; (IX) 401, 9, 23 ; 405, 1 ; 409, 4 ; 411, 14 ; 417, 2, 13 ; (X) 435, 14 ; 437, 5 ; 439, 17 ; 447, 26

– هندسية – géométriques (III) 249, 12 ; (V) 295, 11 ; (VII) 335, 19 ; (X) 423, 9

العلوم البرهانية les sciences démonstratives (III) 231, 5

قام البرهان démontrer (V) 295, 15

بسط

بسيط ج بسط surface latérale (I) 197, 9, 10 ; (III) 231, 20 ; 233, 5, 11 ; 235, 7, 13 ; 237, 3, 8, 14 ; 255, 12 ; (IV) 283, 7, 9, 11, 14, 17 ; 287, 13 ; plan (I) 197, 10 ; (III) 255, 18

simplicité (VI) 313, 21 ; simplification (X) 425, 26

– مخروطي surface conique (IV) 285, 11

– مسطح surface plane (I) 193, 3 ; (VI) 313, 17-18

– مسطح مستوٍ surface plane régulière (III) 273, 17

– مستوٍ surface plane (IV) 255, 14

بسيط plan (III) 241, 5

رخامات مبسوطة (انظر رخامة) cadrans solaires plans

بصر

أبصار yeux (VI) 323, 17

بعد

بَعُدَ s'éloigner (V) 305, 10 ; dépasser (IX) 399, 8

بُعْد distance (III) 247, 13 ; 257, 6 ; 259, 3 ; 271, 9 ; (IV) 287, 13 ; 289, 7 ; 291, 4 ; (VI) 325, 7 ; (VII) 341, 9 ; 349, 18 ; 357, 4 ; 361, 11 ; 363, 11 ; 367, 9 ; 379, 10 ; (IX) 403, 14 ; 405, 1 ; éloignement (VI) 321, 10

بعد après, une fois que (I) 191, 7 ; (III) 255, 11 ; 257, 2 ; (V) 297, 12, 16 ; (VII) 335, 14 ; 373, 4 ; (IX) 401, 11 ; 417, 5 ; (X) 435, 4 ; 439, 18

بعيد loin, éloigné (III) 255, 8 ; (V) 295, 9 ; 297, 17 ; (IX) 401, 3

أبعد plus éloigné (V) 303, 9 ; (VI) 329, 17 ; 331, 1, 10 ; (X) 401, 23

بعض

بعض partie (VI) 313, 12 ; 315, 29 ; (IX) 399, 11 ; certain, autre (I) 191, 11 ; 209, 2, 5 ; (III) 235, 9 ; 249, 9 ; 267, 8, 9 ; (V) 295, 13-16 ; (VI) 313, 10, 11 ; 317, 6 ; 321, 7, 11 ; (VII) 347, 3 ; (X) 433, 7

بغي

ينبغي أن il faut que (I) 197, 6 ; (III) 241, 7, 10, 12, 17, 18, 20 ; 251, 11, 19 ; 253, 7 ; 255, 5 ; … ; (IV) 283, 6 ; 285, 5 ; 287, 8 ; 291, 1, 15 ; (VI) 313, 13 ; 321, 10 ; 323, 17 ; (VII) 343, 6 ; 347, 4 ; 379, 3

بقي

بقي rester (I) 203, 5 ; (III) 249, 2 ; 255, 20 ; 261, 2 ; 267, 13 ; 269, 6, 7, 10 ; 273, 14 ; (IX) 419, 3 ; (X) 423, 15 ; 425, 10-12, 15, 20 ; 429, 4 ; 435, 7, 12, 15, 16…

باقٍ qui reste (III) 241, 14 ; 265, 25 ; 273, 8 ; (V) 297, 6 ; (IX) 411, 8 ; (X) 427, 13 ; 429, 17 ; (XI) 457, 8

بلد

بلد lieu (III) 261, 26 ; 267, 2, 3 ; 271, 24

بلغ

بلغ atteindre (III) 273, 2 ; 275, 6, 7 ; 277, 3, 10, 11, 17, 22, 25 ; 279, 3… ; (IX) 399, 15

بني

بنى bâtir (III) 247, 6 ; établir (IX) 399, 19 ; 411, 4 ; s'appuyer (IX) 407, 1

بوب

باب chapitre (IX) 403, 12 ; mode (X) 441, 8

بيض

بيضي (انظر مجسم، شكل) ovale

بال

خطر ببال (انظر خطر) venir à l'esprit

بين

بيِّن clair (I) 197, 10 ; 201, 10 ; (II) 217, 17, 20 ; 223, 17 ; 227, 1 ; (III) 255, 22 ; 261, 20 ; 273, 3 ; (V) 303, 4, 6 ; (VI) 315, 23 ; (VII) 341, 9 ; 353, 12 ; 381, 24 ; (VIII) 391, 4 ; (IX) 413, 16 ; (X) 441, 3, 4, 6 ; 445, 2, 3, 15 ; 453, 1

أبين plus clair (VII) 335, 16

بَيَّن montrer, indiquer (I) 197, 6, 14 ; 199, 9 ; 201, 6, 9 ; 203, 1 ; (II) 219, 15, 17 ; 225, 4 ; (III) 249, 12 ; 261, 12 ; 265, 11 ; 267, 1, 6, 8 ; 271, 5 ; (IV) 283, 10 ; 287, 8 ; 291, 15 ; (V) 297, 2, 13 ; 301, 3 ; 305, 11 ; (VI) 313, 4, 6 ; 315, 16 ; 321, 17, 21 ; (VII) 353, 13 ; 357, 8, 9, 13 ; 359, 6 ; 361, 4 ; 365, 15 ; 381, 11, 13 ; (VIII) 391, 1, 3, 16 ; 393, 14 ; (IX) 401, 17, 22 ; (X) 453, 25 ; prouver (X) 433, 8, 9 ; exhiber (III) 267, 8

وذلك ما أردنا بيانه Ce qu'il fallait démontrer (I) 201, 12 ; (III) 255, 19 ; (VII) 353, 9, 16 ; 355, 16 ; 357, 14 ; 359, 6 ; 361, 5 ; 365, 3, 16…

وذلك ما أردنا أن نبيّن Ce qu'il fallait démontrer (I) 207, 14 ; (II) 215, 16-17 ; 217, 9-10 ; 219, 5 ; 225, 11, 16 ; (III) 265, 25 ; 269, 18 ; 273, 12 ; (IV) 291, 17-18 ; (V) 301, 9 ; 305, 11 ; 307, 10 ; 309, 5 ; (VI) 331, 7, 15-16 ; (VII) 363, 4 ; 381, 27 ; 385, 7 ; (VIII) 393, 6 ; 395, 4 ; (IX) 411, 2-3 ; 419, 5 ; (X) 427, 17 ; 429, 7-8, 17 ; 431, 7 ; 435, 20 ; 437, 15-16 ; 439, 20 ; 441, 6-7 ; 443, 7 ; 445, 10 ; … ; (XI) 457, 14

تبيّنَ montrer, établir (I) 203, 10 ; (II) 221, 10 ; 227, 9 ; (III) 237, 6, 26 ; 257, 8 ; 263, 7, 12 ; 267, 6; 271, 15 ; 273, 4 ; (V) 301, 8 ; (VI) 315, 19 ; (VII) 363, 3 ; (X) 445, 9 ; 447, 5 ; 449, 9 ; 451, 10

مباين différent (X) 433, 7

تباين différence (VI) 323, 14

تبع

اتّبع poursuivre, suivre (VI) 315, 27, 29 ; (VII) 351, 12 ; (IX) 401, 18

تحت

تحت sous (V) 303, 7

ترك

ترك laisser (I) 195, 18

ترك ذكر ne pas exposer, mentionner (II) 221, 15 ; (VI) 321, 9 ; (X) 431, 23

تسع

تسعة neuf (X) 429, 4, 6 ; 441, 11, 14, 18

تسعة أضعاف، أمثال neuf fois (X) 445, 15 ; 447, 1, 3

تاسع neuvième (III) 271, 15

تلو

تلا poursuivre, suivre (VI) 317, 1 ; (X) 447, 8

تمّ

تمّ achever, compléter (II) 227, 14 ; (III) 279, 15 ; (IV) 291, 19 ; (V) 309, 6 ; (VI) 323, 21 ; 331, 20 ; (VII) 369, 9 ; (VIII) 391, 9 ; 395, 5 ; (IX) 419, 6 ; (X) 445, 1, 2, 17 ; 451, 16 ; 453, 27

تمّم compléter (I) 209, 4 ; (V) 307, 5 ; (X) 439, 14

تامّ (انظر بركار) parfait

أتمّ	plus parfait (VI) 313, 19
متمم	complément (X) 427, 6 ; 429, 3, 7, 15 ; 431, 6, 15, 19 ; 437, 8, 12 ; 445, 2… ; (XI) 457, 6

ثبت

أثبت	établir (III) 231, 9 ; fixer (III) 233, 2
بثبات	étant fixé, fixe (IV) 285, 10, 14 ; 287, 2 ; (VI) 313, 15, 19, 23

ثقب

ثقب	percer (III) 247, 9
ثُقْبة الإبرة	chas de l'aiguille (III) 247, 10-11

ثلث

ثُلْث ج أثلاث	tiers (IV) 291, 1 ; (VII) 337, 14 ; 339, 7, 8 ; 341, 16 ; 345, 9 ; 347, 1, 14 ; 349, 11 ; 351, 10 ; 353, 13 ; … ; (X) 441, 19
ثلاثة (انظر أيضًا قسم)	trois (III) 261, 6, 12 ; 273, 14 ; (V) 297, 13 ; (VI) 317, 17, 19 ; 319, 4 ; (VII) 355, 10 ; (X) 425, 3 ; 427, 3, 12 ; 431, 8, 12 ; 437, 18 ; 441, 17, 19 ; 443, 5, 7…
ثلاثة أمثال	triple (IX) 411, 7, 12-13 ; 413, 14 ; (X) 447, 3-4
ثلاثة أضعاف	triple (IX) 413, 9, 10 ; (X) 445, 12, 15-18 ; 447, 1, 2, 24 ; …
ثالث	troisième (I) 201, 6 ; 205, 8 ; (III) 255, 26 ; 261, 8 ; 263, 12 ; 279, 8 ; (IV) 291, 6 ; (VII) 343, 4 ; 355, 1 ; 371, 9 ; 377, 4 ; 383, 1 ; (IX) 405, 5, 6 ; 427, 6, 14 ; 429, 9, 16 ; 431, 8 ; (X) 449, 25, 27
رابع وثلاثون	trente-quatrième (III) 263, 12
ثالث وأربعون	quarante-troisième (V) 299, 10
مُثلّث ج ات	triangle (I) 195, 15 ; (III) 231, 18-20 ; 233, 9, 10 ; 235, 1, 2, 5, 6, 11, 12 ; … ; (IV) 291, 16, 17 ; (V) 297, 6, 13 ; (V) 315, 28 ; 317, 5, 8, 9, 11, 13, 18, 19 ; 319, 6, 7… ; (VII) 339, 2-5 ; 341, 1 ; 343, 1-2 ; 345, 6, 8, 9 ; … ; (VIII) 393, 3, 4, 16 ; (IX) 403, 4 ; 405, 3-5 ; 411, 12, 21-23 ; 413, 14, 15 ; … ; (X) 433, 14 ; 453, 7, 8, 11, 14, 16, 17
– الحاد الزاوية	– à angle aigu (VI) 321, 8
– المنفرج الزاوية	– à angle obtus (VI) 321, 8
– المخروط	– du cône (III) 233, 9-10 ; 235, 4 ; 261, 24
– متساوي الساقين	– isocèle, à côtés égaux (III) 261, 23 ; (V) 297, 6-7 ; (VII) 339, 12 ; 341, 5 ; 359, 8-9 ; 361, 7 ; 369, 19 ; 371, 9, 12 ; 377, 6-7 ; 381, 5 ; 385, 2-3 ; (VIII) 395, 1 ; (IX) 411, 6-7 ; 413, 13
– قائم الزاوية	– rectangle, à angle droit (I) 193, 8 ; (III) 231, 17 ; (VI) 321, 9 (VII) 373, 1 ; (X) 453, 18-19
– مستقيم الخطوط	– rectangle (IV) 283, 9
المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الأضلاع	triangles rectangles de côtés rationnels (X) 423, 6 ; 433, 11-12 ; 453, 6, 10, 12-13

ثمن

ثُمْن huitième (X) 425, 2, 11
ثمانية huit (X) 451, 5, 9, 10, 15

ثنى

اثنان deux (X) 425, 10 ; 429, 5, 6, 16 ; 437, 18 ; 443, 2, 3, 7... ; (XI) 457, 13
ثان second (III) 231, 19 ; 233, 3, 6 ; 257, 16 ; 261, 7 ; 265, 11 ; 273, 4 ; 279, 8 ; (V) 295, 5 ; 307, 11 ; (VII) 341, 17 ; 357, 15 ; 367, 11 ; 371, 1 ; 375, 6 ; 381, 19 ; (VIII) 391, 4 ; 393, 14 ; (IX) 405, 3, 4 ; 407, 19 ; (X) 425, 19 ; 427, 3, 6, 13 ; 443, 5 ; 449, 25, 26
اثنا عشر douze (III) 271, 2, 3 ; 279, 4 ; (X) 443, 4

جد

جدًا très (III) 241, 19 ; 247, 9
علو جدّه hauteur de son rang (III) 231, 14

جدل

جدول ج جداول tables (X) 431, 22

جذر

جذر ج جذور racine (X) 425, 17, 22 ; 429, 7 ; 431, 7 ; 433, 13 ; 437, 1 ; 441, 21 ; 443, 17 ; 445, 12
مجذور ayant une racine (X) 433, 2, 3 ; 439, 1 ; 441, 8, 16, 21 ; 443, 1, 13, 16 ; 445, 11 ; ... ; (XI) 457, 12, 14

جرم

أجرام عالية corps célestes (VI) 313, 21

جرى

جرى (جري) glisser (IV) 287, 12 ; 289, 4

جزأ

جزء ج أجزاء partie (III) 249, 6 ; 271, 2, 3 ; 279, 4 ; (VI) 315, 19, 20 ; (X) 425, 3-5 ; 437, 7, 8-12 ; 439, 17 ; point (III) 261, 5 ; tome (VII) 335, 19
جزئيات particuliers (X) 423, 11

جسم

جِسْم ج أجسام corps (VI) 313, 18 ; solides (V) 297, 10
مجسم ج ات solide (I) 191, 8, 14 ; 193, 8, 10, 19, 23 ; 195, 1 ; 209, 1, 3 ; (II) 223, 10, 13-17 ; (VI) 315, 19-21
– بيضي – ovale (I) 195, 4
– مخروطي – conique (I) 195, 13, 18

- دوري – de révolution (I) 193, 17, 21
- زائد – hyperbolique (II) 213, 3, 18 ; 215, 2-4 ; 223, 1 ; 227, 11
- أسطواني – cylindrique (I) 195, 7
- عدسي – lenticulaire (I) 195, 4
- قائم – droit (II) 213, 12
- مكافئ – parabolique (II) 213, 3, 18 ; 215, 2, 4 ; 223, 1 ; 227, 12
- مائل – oblique (II) 213, 12, 13
- ناقص – elliptique (II) 213, 3, 4 ; 215, 6, 7, 18, 20 ; 217, 5, 11, 13, 21-22 ; …

جعل

جعَل poser, faire, placer, considérer (I) 199, 7 ; 203, 3, 6 ; 207, 9, 12 ; (II) 225, 2, 12 ; 227, 5 ; (III) 239, 6 ; 247, 9 ; 251, 8, 12, 13, 16 ; 253, 4, 9 ; 255, 2… ; (IV) 287, 9 ; 289, 17 ; (V) 303, 3 ; 305, 1 ; (VI) 321, 15 ; 325, 11 ; (VII) 341, 6 ; 345, 14 ; 347, 7 ; 367, 11, 12 ; 369, 21 ; 375, 8 ; 381, 6 ; (VIII) 389, 8, 10 ; (X) 423, 10, 16 ; 425, 1, 4 ; 427, 7 ; 429, 10 ; 433, 2 ; 435, 10 ; 445, 1 ; 447, 15 ; 451, 14, 15 ; …

جعل تحفة faire un présent (VII) 335, 19

جعل دستوراً instituer comme règle (I) 195, 17 ; faire une loi (III) 241, 24

جمع

جمع réunir (III) 231, 11 ; (VII) 335, 19 ; additionner (III) 271, 24 ; (X) 425, 17, 22 ; 427, 11 ; 429, 7 ; 431, 6 ; 441, 21 ; 447, 5 ; 449, 8 ; 453, 5, 13… ; regrouper (VI) 313, 5

جامع qui englobe (I) 195, 15, 20

مجمع rencontre (VI) 317, 7

مجموع somme (III) 247, 14 ; (IX) 407, 15 ; 411, 18 ; (X) 423, 5, 13 ; 425, 7, 27 ; 427, 4, 5, 12 ; 429, 9, 10, 13 ; …

جميع tous, tout entier, somme (I) 193, 12, 20 ; (III) 261, 21 ; 265, 21 ; 269, 14 ; (VI) 315, 22 ; 325, 13 ; (IX) 403, 7 ; 407, 3 ; (X) 435, 3, 7 ; 437, 20 ; 443, 8 ; 449, 10, 13, 21

اجتمع obtenir (somme, produit) (III) 269, 11, 12 ; 271, 19 ; (X) 439, 5, 7 ; 441, 15 ; se rencontrer (VI) 317, 18 ; 319, 1, 14 ; donner (X) 437, 14

اجتماع le fait de se rencontrer, rencontrer (VI) 317, 6, 12 ; 319, 2 ; le fait de grouper (X) 433, 3 ; somme (X) 437, 17 ; 443, 16 ; 445, 9, 11 ; 451, 11, 12

مجتمع somme (X) 439, 15 ; 443, 23 ; 453, 20

جل

أجلّ placer au-dessus (III) 231, 10

جلو

جلاء le fait de faire briller (III) 231, 10

جمل

جملة ensemble (X) 433, 5 ; somme (X) 453, 21

في الجملة en général (X) 431, 9

جمال	beauté (VI) 313, 21
أجملَ	rassembler (VI) 313, 12
إجمال	résumé (VI) 313, 5

جنب

جانب	côté (VI) 323, 9
مجانب (انظر قطر)	diamètre transverse

جنس

جنس ج أجناس (انظر أيضًا أصل)	genre (X) 433, 14 ; 435, 1-3 ; 437, 19, 20 ; 453, 25

جهد

اجتهاد	application (IX) 399, 17 ; 401, 1

جهل

مجهول	inconnu (III) 267, 15

جوب

جواب	solution, réponse (X) 423, 4 ; 425, 24 ; 433, 4
أجاب	répondre (X) 433, 1

جود

أجاد	satisfaire (III) 231, 14

جور

تجاور	être adjacent (VI) 319, 17

جوز

جاز	passer (II) 223, 9 ; (III) 249, 16 ; 251, 1, 9 ; 253, 6 ; (IV) 283, 8 ; (V) 301, 11 ; 303, 10 ; 307, 2, 4 ; 309, 3 ; (VI) 323, 20 ; 325, 8, 9 ; 329, 3 ; 331, 6 ; être permis (III) 241, 15
أجاز	faire passer (III) 265, 23, 24 ; 269, 16, 17 ; (V) 305, 3
جائز	qui passe (I) 207, 1 ; (II) 215, 18, 21 ; 223, 11, 15 ; (III) 233, 9, 11 ; 235, 1 ; 237, 18, 19, 21, 28 ; (IV) 283, 9, 15 ; (VI) 325, 14 ; 327, 4, 7 ; 329, 13 ; 331, 8, 12, 15
جاوز	surpasser (III) 231, 7

جوف

في جوف	à l'intérieur (IV) 287, 12

جيب

جيب ج جيوب	sinus (III) 267, 10-13 ; 269, 5, 6

حد

حدود	définitions (V) 297, 3
حادّ (انظر زاوية)	aigu
محدود	limité (I) 195, 2, 4, 7 ; (III) 235, 9 ; déterminé (VII) 343, 7
غير محدود	non limité (V) 299, 7 ; illimité (I) 195, 7-8, 13, 14
حديد	fer (III) 241, 6
حديد فولاذ	acier (III) 241, 19

حدب

حدبة	convexité (III) 273, 20, 23 ; 275, 8 ; 277, 5, 13, 18
محدّب (انظر أيضًا خط)	convexe (IV) 283, 13

حدث

حدثَ	résulter (I) 191, 15 ; former, engendrer (I) 193, 10, 17 ; 209, 2 ; (II) 213, 4, 15 ; (III) 233, 5, 7 ; 237, 17, 26, 28 ; 239, 2 , 4 ; 249, 3, 5 ; 251, 18 ; … ; (IV) 283, 9 ; (VI) 315, 4, 5, 8, 12, 18, 22 ; 319, 6 ; 325, 6 ; (VII) 381, 21
حدوث	survenue (III) 231, 9 ; le fait d'engendrer (III) 231, 12 ; génération (VI) 319, 7 ; 323, 1
حادث	engendré (I) 191, 8, 10 ; 193, 1, 8, 10, 11, 19, 23, 24 ; 209, 1 ; (II) 213, 18 ; (III) 233, 9 ; 237, 22 ; 239, 11 ; 241, 25 ; (VI) 323, 5
إحداث	formation (III) 239, 10
المحدثون	les modernes (III) 249, 9 ; (VII) 337, 2 ; (IX) 401, 12

حدس

حَدْس	intuition (IX) 399, 10

حذو

بحذاء	vis-à-vis (III) 247, 2

حرف

حرف	bord (III) 241, 7, 10, 15, 17, 18
انحراف	inclinaison (IV) 289, 8
منحرف	trapèze (VII) 371, 1, 8 ; 375, 7

حرك

حركة	mouvement (I) 193, 2, 8 ; 209, 1 ; (II) 233, 5 ; 237, 17, 26, 28 ; (III) 241, 13, 14 ; 249, 5 ; (IV) 285, 12 ; 291, 10 ; (VI) 313, 15, 16, 18, 22 ; 315, 6, 7, 16, 26 ; le fait de se mouvoir (III) 231, 19

- دورية	– de rotation (IV) 285, 11
حرّك	faire glisser (III) 239, 7 ; déplacer (VII) 347, 8
تحرّك	se mouvoir (IV) 285, 10, 14 ; glisser (IV) 289, 17
متحرّك (خط)	droite mobile (III) 233, 4-5
حرم	
محروم	malheureux (IX) 401, 10
حسب	
بحسب	selon (X) 425, 3
حساب	calcul (III) 265, 26 ; 269, 26, 29 ; 271, 3, 17, 28 ; (X) 441, 8
حسن	
أحسن	meilleur (VII) 335, 16
لا يحسن شيئًا	ne rien faire de bien (IX) 401, 5
استحسن	trouver bien (I) 191, 13
حشو	
حاشية	limite (III) 241, 8 ; extrémité (X) 453, 9
حصر	
انحصر	être cerné (VI) 313, 18 ; saisir (X) 437, 20
لم يكن منحصرًا حاويًا على	ne contient pas (X) 433, 4-5
حصل	
ما حصل	ce qu'on obtient, le résultat (X) 439, 8 ; 441, 15 ; 453, 7, 8
حصّل	obtenir (III) 271, 25 ; (VI) 315, 10 ; 331, 18 ; (IX) 401, 9 ; (X) 431, 14 ; 439, 8 ; 453, 13
تحصيل	le fait de trouver (III) 255, 11 ; étude (VI) 331, 19
حضر	
حضر	venir à l'esprit (IX) 403, 12
أحضر	faire surgir (X) 433, 5
حق	
حقيقي، بالحقيقة	exact (III) 247, 4, 11
على الحقيقة	exactement (III) 273, 17
حقّق	vérifier (V) 295, 16
استحقّ	mériter (IX) 401, 10

حكم

حكم — le fait d'affirmer (VII) 353, 6

حكى

حكى — raconter (IV) 285, 2

حل

تحليل — analyse (V) 297, 14 ; (VII) 337, 2, 7 ; 341, 16 ; 349, 1 ; 373, 4, 6, 12 ; 375, 6, 10 ; 377, 4, 14 ; … ; (IX) 411, 5 ; (X) 423, 14 ; 427, 5 ; 429, 10

تحليل وتركيب — analyse et synthèse (IX) 411, 4-5 ; (X) 423, 9 ; 425, 24 ; 433, 4

انحلّ — se décomposer (X) 427, 1

حلق

حلقة — anneau (III) 247, 1, 2

حنا

خط منحنٍ (انظر خط) — ligne courbe

حوج

حاجة — besoin (III) 261, 9 ; (IV) 285, 5

احتاج إلى — falloir, avoir besoin (III) 267, 5, 8 ; (IV) 283, 6, 21 ; 285, 1 ; 291, 3, 11, 15 ; (V) 297, 2 ; (X) 435, 5

حور

مِحْوَر — axe (I) 193, 1, 11 ; 199, 15 ; (II) 213, 13-16 ; 215, 8, 18-21 ; 217, 4, 21 ; … ; (III) 231, 18, 20, 21 ; 233, 9 ; 237, 13, 15 ; 239, 6, 9 ; 251, 12 ; 253, 10 ; … ; (VIII) 389, 11

محور المجسم — axe du solide (II) 213, 7

حوز

حيز — domaine (III) 235, 8

حوط

أحاط — comprendre (III) 231, 6 ; entourer (IV) 285, 9 ; 289, 18 ; (V) 303, 1 ; 305, 1 ; 307, 12 ; (VI) 323, 2 ; (VII) 337, 17 ; 351, 14 ; 357, 11 ; 365, 10 ; 367, 3, 6 ; (VIII) 391, 7 ; (IX) 411, 11 ; (X) 427, 7, 9 ; 429, 2, 3, 11 ; 431, 2, 13, 19 ; 433, 13 ; être circonscrit (VI) 321, 4, 5 ; (VII) 357, 11 ; (VIII) 391, 12 ; être inscrit (VI) 317, 11 ; 319, 9-11 ; 325, 6

إحاطة — contour (III) 235, 9

تام الإحاطة — de contour fermé (III) 237, 8-9

محيط — circonférence (I) 193, 2 ; (II) 219, 22 ; 221, 8 ; (III) 233, 1 ; 237, 17 ; 253, 11 ; 261, 20 ; 263, 11 ; 267, 10 ; (VI) 313, 23 ; 315, 2, 14 ; 317, 16 ; 319, 4 ; 323,

2, 8 ; 325, 16 ; 331, 7, 13, 15 ; (VII) 347, 5, 8 ; (IX) 415, 7, 11
circonscrit (VI) 317, 9 ; (VII) 345, 6
qui entoure (VI) 331, 14
contour (III) 247, 13 ; 253, 11
périmètre (I) 209, 2 ; (II) 213, 19 ; 215, 8 ; 225, 10 ; (VII) 365, 6
pourtour (II) 215, 3 ; (V) 295, 7 ; 301, 11, 15 ; 303, 10, 11 ; 305, 9 ; (VI) 315, 19, 22, 24, 26 ; 317, 19

حول

حال ج أحوال état (I) 203, 9 ; (III) 237, 15 ; (VI) 323, 4 ; (IX) 401, 16 ; cas (III) 241, 12
حول autour (I) 215, 3 ; (III) 241, 11 ; 273, 20 ; (IV) 285, 14 ; 287, 11 ; (VI) 315, 7
حواليه autour (III) 275, 1, 8 ; 277, 5, 13, 19

حيلة procédé (IV) 289, 10
مهن حيلية travaux mécaniques (IX) 399, 18

لا محالة nécessairement (III) 277, 26 ; (X) 435, 8

حوي (انظر منحصر)

حير

تحيّر rendre perplexe (V) 295, 10
متحيّر perplexe (V) 295, 12

ختم

ختم achever (IX) 401, 18 ; (X) 453, 25

خرج

خرج sortir (III) 239, 7 ; 247, 4 ; résoudre (III) 265, 26 ; déterminer (III) 267, 9, 10 ; 269, 3, 5, 19, 20, 25, 26, 28 ; 271, 5…
خرّج (أخرج) mener, prolonger (I) 197, 7-9 ; 199, 4, 7 ; 201, 1, 2, 21 ; 205, 1, 4 ; … ; (II) 215, 8 ; 217, 15, 16, 19, 22 ; 219, 4 ; 221, 2, 3 ; 223, 9… ; (III) 237, 6 ; 247, 9, 11, 13 ; 249, 17, 18 ; 251, 1, 2, 7, 15, 16 ; … ; (IV) 287, 1 ; (V) 303, 2, 3 ; 305, 1, 6 ; 307, 12, 13 ; 309, 1 ; (VI) 317, 12, 14, 16 ; 319, 5, 13 ; 321, 2, 16 ; 323, 3 ; 325, 2, 4… ; (VII) 337, 7, 8, 10, 18 ; 339, 2, 14 ; 341, 5, 9, 17 ; 343, 4, 8 ; … ; (VIII) 389, 8-10 ; 393, 10, 12 ; (IX) 403, 1, 2, 6 ; 405, 3, 6 ; 409, 1, 5 ; 411, 11, 20 ; 413, 15, 18 ; … ; (X) 435, 14 ; 441, 4 ; 451, 15 ; faire sortir (IV) 291, 1
أخرج دائمًا prolonger toujours, indéfiniment (III) 237, 2-3 ; (V) 305, 5
أخرج إلى غير / بلا نهاية prolonger continûment, à l'infini (III) 237, 6, 23-24 ; 253, 3 ; (V) 299, 6-7 ; (VII) 355, 4 ; 357, 3-4 ; 365, 5-6 ; 371, 9-10 ; (IX) 403, 2
إخراج دائمًا إلى ما لا نهاية le fait de prolonger toujours à l'infini (V) 295, 3-4, 8 ; 297, 21

إخراج — le fait de mener, de prolonger, le tracé (II) 215, 16 ; (III) 237, 23 ; (VI) 323, 5, 7 ; 329, 12 ; (VII) 355, 5, 15 ; 357, 16 ; 361, 8 ; (IX) 403, 9
أخرج على استقامة — prolonger (III) 251, 13 ; 261, 19-20 ; 265, 6-7 ; 273, 3 ; (VII) 349, 16-17 ; 355, 4 ; 373, 6 ; 379, 10-11 ; (IX) 407, 17 ; 409, 4 ; 417, 8
إخراج (على استقامة) دائمًا — prolonger continûment (VIII) 389, 7 ; 391, 9-10 ; 393, 12
خارج — extérieur (III) 237, 11, 24 ; 241, 18 ; 257, 14 ; (IX) 403, 4 ; 405, 5
mené (III) 233, 3
مُخْرج — mené (I) 203, 11 ; (III) 267, 1, 3, 4 ; (IV) 287, 4 ; (V) 303, 7 ; 305, 9 ; (VI) 315, 13 ; 317, 5 ; 319, 17 ; 321, 1 ; 325, 14 ; 327, 3 ; 331, 4-6
استخرج (استخراج) — déterminer, établir (III) 255, 24 ; (VII) 335, 17 ; 339, 9 ; 347, 4 ; 349, 13 ; 367, 2 ; (X) 443, 8, 9 ; découvrir (IV) 285, 3
استخراج — détermination, le fait de déterminer (III) 249, 13 ; (V) 283, 3 ; (VII) 335, 10, 12, 18 ; 337, 4 ; (VIII) 389, 3 ; (IX) 399, 18 ; (X) 431, 22
مستخرج — déduit (III) 247, 5

خرط

خرط — tournage (III) 241, 3 ; 247, 1
مخروط ج ات — cône (I) 193, 9 ; 195, 20 ; (III) 231, 16, 20, 22 ; 233, 4-12 ; … ; (IV) 283, 7-9, 11, 12, 14, 17 ; 285, 13 ; 287, 14 ; (VI) 313, 22 ; 315, 3, 10, 12-14 ; (IX) 407, 7
- قائم — – droit (III) 231, 16, 17 ; 241, 21
- أسطواني — – cylindrique (III) 231, 16 ; 241, 3
- مائل — – oblique (III) 231, 16 ; 233, 1
المخروطات — *Coniques* (I) 197, 15 ; 201, 6, 9 ; 203, 2 ; 205, 8 ; (III) 257, 9 ; 263, 8 ; 273, 5 ; (IV) 283, 6 ; 285, 6 ; (V) 295, 5 ; (VII) 351, 18 ; (VIII) 391, 1, 4 ; 393, 14 ; 401, 15 ; (IX) 407, 20

خرق

خرق — encoche (IV) 289, 4

خزن

خزانة — bibliothèque (VI) 313, 4 ; (VII) 335, 19

خشب

خشب — bois (III) 241, 3, 6, 23

خص

خاصة ج خواص — propriété (I) 191, 3, 7, 9, 12, 14, 15 ; 193, 4, 7 ; 195, 17, 18 ; 209, 2 ; (II) 213, 3 ; 221, 13, 14 ; 225, 4 ; (III) 235, 9 ; 247, 5, 6, 12 ; 249, 2 ; 251, 11 ; 255, 6, 8 ; (IV) 283, 18 ; (V) 297, 17, 19 ; (VI) 313, 7-9, 13 ; 315, 28 ; 317, 1, 3, 7, 8, 18 ; 319, 1…
في خواص الشكل البيضي والعدسي — *Sur les propriétés de la figure ovale et de la figure lenticulaire* (VI) 315, 17
خاصةً — particulièrement, en particulier (I) 193, 15 ; (IV) 285, 5 ; (IX) 399, 6 ; 401, 12

خاصية — propriété (V) 297, 18 ; 301, 13, 17, 19, 20
من جهة الخصوص — d'une manière particulière (VI) 313, 10
على سبيل الخصوص — selon la voie du particulier (VI) 317, 4
خصوصية — propriété (VI) 317, 7, 11
اختص — s'approprier (VI) 313, 20
مختصة — particularité (VI) 317, 6

خصر

اختصار — abrégé (VI) 313, 5

خط

خطّ — tracer (III) 249, 3 ; 261, 14 ; 271, 7 ; 273, 17 ; 275, 2
خطّ خطًا مؤثرًا — graver une ligne (III) 273, 20 ; 275, 1, 8-9 ; 277, 5, 13-14, 19
خطّ ج خطوط — ligne, droite (I) 193, 2, 11 ; 197, 10 ; 199, 4, 7, 10 ; 201, 1, 4, 21 ; 203, 8… ; (II) 213, 5, 6, 15 ; 215, 1, 11, 12 ; 217, 3, 6, 20, 21, 23 ; … ; (III) 233, 3, 4, 6-8 ; 235, 3, 5, 11 ; 237, 1, 7… ; (IV) 283, 16, 19, 20 ; 285, 9, 10 ; 287, 4 ; (V) 295, 7 ; 297, 3, 4 ; 299, 7, 8 ; 301, 1, 5-8, 10… ; (VI) 313, 14, 15 ; 315, 13 ; 317, 7, 14, 17 ; 319, 2, 16, 17 ; 321, 2… ; (VII) 337, 8, 10, 17, 18 ; 339, 14 ; 341, 6, 18, 19 ; 343, 4, 6 ; … ; (VIII) 389, 8 ; 391, 2 ; 393, 10 ; (IX) 403, 14, 15 ; 405, 1, 4, 6, 8, 9 ; 407, 2-4… ; (X) 447, 3 ; segment (X) 441, 9
– محدّب — ligne convexe, courbe (III) 233, 11 ; 247, 11 ; (VI) 325, 14 ; 327, 3, 7 ; 329, 13 ; 331, 5, 12, 15
– منحن — ligne courbe (III) 273, 20-21 ; 275, 2, 9 ; 277, 5-6, 14 ; (V) 303, 13
– مخروطي — tire-ligne (IV) 283, 20
– ترتيب (انظر ترتيب) — ordonnée
– مستقيم — droite (I) 209, 1 ; (II) 213, 4, 6, 18 ; 215, 5 ; 223, 12-13 ; (III) 233, 1 ; 247, 13 ; 249, 15 ; 253, 8 ; 255, 1, 7 ; 261, 10 ; 271, 7 ; 277, 27 ; (IV) 283, 15-16 ; 291, 17 ; (V) 295, 7 ; 299, 1 ; 305, 3 ; (VI) 313, 22-23 ; 315, 1-2, 6, 7, 25 ; 325, 6 ; (VII) 351, 14 ; (VIII) 391, 6, 7 ; (IX) 403, 2-3 ; 407, 16 ; 411, 2, 10
– مقوس — ligne courbée (VI) 325, 9
– نصف النهار (انظر نصف) — ligne méridienne
– هندسية — lignes géométriques (III) 265, 27
– موسط — droite moyenne (III) 269, 26, 28 ; 271, 5-6, 13-14, 19-20 ; 273, 9
الخطان اللذان يقربان ولا يلتقيان — deux lignes qui se rapprochent et qui ne se rencontrent pas (asymptotes) (V) 295, 3 ; 297, 19-21 ; 301, 18 ; 303, 13 ; (VIII) 389, 7 ; 391, 3, 11 ; 393, 11 ; (IX) 407, 18-19
الخطوط الطاقية — *Les Lignes des voûtes* (IV) 285, 4-5
تخطيط — tracé (III) 249, 10 ; (X) 445, 2, 17
مخطّ — tire-ligne (III) 239, 8 ; 241, 11, 13, 14, 18

خطر

خطر ببال — venir à l'esprit (I) 191, 12 ; (X) 453, 23, 24

خاطر	esprit (I) 191, 7 ; (III) 231, 10

خفض

خفض	abaisser (IV) 289, 11, 20 ; 291, 10
انخفض	s'abaisser (IV) 289, 2

خلف

خلاف	différent (IX) 407, 5
على خلاف وضع	antiparallèle (II) 217, 11, 13, 23-24
اختلاف	variation (IV) 291, 4
اختلفَ (اختلاف)	différer (III) 255, 16
مختلف	différent (IV) 287, 13 ; (VI) 313, 11 ; (X) 447, 10 ; 453, 5

خلق

خليق	il convient (I) 191, 15

خلو

لا يخلو	ne manque pas, ne peut qu'être (I) 193, 11 ; (II) 221, 10 ; 227, 9 ; (III) 241, 25

خمس

خمسة	cinq (I) 195, 15 ; (VI) 323, 11 ; 331, 18 ; (X) 431, 11, 16, 20 ; 433, 3 ; 437, 18 ; 443, 6, 7 ; 447, 25 ; 449, 3, 6, 8 … ; (XI) 457, 10, 12
خمسة عشر	quinze (X) 449, 6-8
خمسة وعشرون	vingt-cinq (X) 443, 6
خامس	cinquième (III) 279, 8 ; (VII) 373, 1, 4 ; 379, 3 ; 385, 1

خيط

خيط	fil (III) 247, 10
خيط من إبْريسم	fil de soie (III) 247, 9

دبر

دبر	procéder (II) 227, 7

دخل

دخل	entrer (III) 239, 7
داخل	intérieur (III) 241, 11, 16, 18 ; 257, 15 ; 263, 3
عمل ... في داخل	inscrire dans (VI) 319, 16
مدخل (انظر أيضًا كتاب)	début (IX) 401, 6
أدخل	introduire (IV) 289, 19

تداخل intervenir (X) 427, 2

درب

دربة habitude (IX) 399, 10, 12

متدرّب celui qui s'est formé (IX) 399, 9

درك

دَرْك le fait d'être saisi (V) 297, 1

أدرك percevoir (VI) 323, 15 ; saisir (IX) 399, 19 ; 401, 1

إدراك le fait de saisir (VI) 323, 16

مدرك celui qui perçoit (VI) 323, 16

دستور règle (I) 195, 17 ; loi (III) 241, 24

دق

دقائق subtilités (V) 295, 10

دقيق fin (III) 241, 4, 19, 23 ; 247, 9

أدق ما يمكن le plus précisément possible (VII) 347, 8

دل

دليل preuve (VI) 313, 13 ; 317, 16 ; 319, 9 ; 321, 4

استدل être instruit (V) 295, 11 ; être conclu (VI) 313, 9

دنو

أدنى moindre (IX) 401, 7

دهر

دهر temps (III) 231, 7

دور

دار tourner (III) 231, 17 ; 233, 1 ; 237, 15 ; 247, 10 ; (IV) 287, 11 ; (VI) 313, 23

دور révolution (III) 255, 7

دائرة cercle (I) 193, 7, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 24, 25 ; 195, 1… ; (II) 219, 7, 11, 22, 24 ; 221, 1, 8 ; (III) 231, 19, 21 ; 233, 2, 3 ; 235, 3, 4 ; 237, 7, 8, 18, 27 ; 241, 12… ; (IV) 283, 13 ; 285, 9, 13, 14 ; 291, 7 ; 297, 5 ; (VI) 313, 3, 6, 9-11, 13, 14, 17-19, 22 ; 315, 1… ; (VII) 341, 18 ; 345, 1, 6 ; 347, 4, 8 ; 349, 18 ; 353, 10 ; 355, 2, 15 ; 357, 4, 11 ; … ; (VIII) 391, 12 ; 401, 22 ; (IX) 399, 3 ; 401, 22 ; 403, 11, 14 ; 405, 1 ; 407, 9 ; 413, 12, 14 ; 415, 2, 11

– مدوّرة cercle arrondi (III) 235, 10

– مستديرة cercle circulaire (III) 235, 7-8

– مستطيلة cercle allongé (ellipse) (III) 235, 8, 10 ; 247, 7 ; (IV) 283, 13

نصف دائرة demi-cercle (III) 251, 14 ; 253, 1, 8 ; (V) 309, 1 ; (VI) 323, 6, 8 ; (VII) 349, 2 ; (IX) 415, 5, 7 ; 417, 9

دوران rotation (II) 213, 5 ; (III) 231, 18 ; (IV) 285, 15 ; (VI) 315, 1

مدوّر arrondi (III) 241, 19, 20

أدار inscrire (III) 263, 10 ; faire tourner (I) 195, 23 ; 197, 8 ; 201, 13 ; (III) 237, 13 ; (IV) 287, 2, 11 ; 291, 3 ; tracer (III) 249, 17 ; 251, 13 ; 253, 1, 8 ; 257, 5 ; 259, 2 ; 271, 9 ; (V) 309, 1 ; (VI) 321, 14 ; 325, 7 ; (VII) 341, 9 ; 345, 1 ; 349, 18 ; 353, 10 ; 357, 4 ; 359, 13 ; 361, 11 ; 363, 10 ; 365, 9 ; 367, 9 ; … ; (VIII) 391, 11 ; (IX) 403, 14 ; 405, 1 ; 417, 8

إدارة rotation (I) 191, 8, 10 ; 193, 1, 11 ; (II) 213, 4, 18 ; 215, 1 ; (III) 239, 2, 4 ; 241, 12 ; 255, 7, 11-13, 23 ; (VI) 321, 14 ; 325, 7 ; le fait de tourner (III) 241, 11 ; (IV) 283, 20 ; 287, 13 ; (VI) 315, 18, 20, 22

مدار ج مدارات courbe (III) 261, 4, 6-10 ; 269, 19 ; 273, 21 ; 275, 2, 9 ; …

خط مدير droite mobile (II) 213, 19 ; 215, 3

مستدير circulaire (III) 255, 18

دول

دولة règne (III) 231, 14

دون

دون sans (V) 295, 11, 14 ; (IX) 403, 10 ; autre que (VII) 339, 9

دام

دائمًا (انظر أيضًا خرج، نهاية) toujours (III) 255, 9 ; (V) 301, 12 ; 303, 8, 13 ; (VIII) 391, 3 ; 393, 12 ; (IX) 407, 19

ذكر

ذكر (ذكْر) mentionner, rappeler, indiquer, expliquer, exposer (I) 191, 11, 12 ; 193, 20, 25 ; 205, 6, 8 ; (II) 223, 3 ; 225, 16 ; (III) 231, 12 ; 261, 14 ; 265, 20 ; 269, 18 ; 273, 14 ; (IV) 283, 5, 17 ; 285, 1 ; (V) 295, 4 ; 301, 19, 21 ; 307, 3 ; (VI) 313, 12 ; 315, 27 ; 317, 1, 3, 5 ; 319, 14 ; 321, 7 ; 323, 5, 20, 21 ; 325, 8 ; 329, 13 ; (VII) 343, 3 ; 363, 3 ; 369, 11, 18 ; (IX) 403, 9 ; (X) 429, 4 ; 431, 2, 13 ; 435, 5 ; 443, 11

جارى ذكر converser (I) 191, 11

مذكور mentionné (I) 193, 13 ; 195, 20 ; 199, 8 ; 201, 22 ; 207, 6 ; (II) 217, 9 ; 227, 13 ; 239, 10, 12 ; (IV) 285, 6 ; (V) 297, 18 ; 301, 20 ; 307, 9 ; (VI) 315, 20, 21 ; 317, 15 ; 321, 7 ; 325, 5 ; 327, 4, 5 ; (VII) 349, 13 ; 351, 13 ; (IX) 403, 10

ذاكر qui expose (X) 425, 14

مذاكر études (III) 231, 10

ذهب

ذهب كل المذاهب poursuivre tous les chemins (III) 231, 11

ذو

ذات — essence (VI) 313, 9 ; 319, 12

رأس

رأس ج رؤوس — sommet (I) 203, 11 ; (II) 213, 16 ; 215, 1 ; (III) 231, 22 ; 233, 7 ; 235, 1 ; 237, 11, 23 ; 247, 10 ; 261, 25 ; 263, 2, 3 ; … ; (IV) 283, 8, 9 ; 287, 9, 13 ; 289, 3, 15 ; (VI) 315, 14 ; (VII) 351, 16 ; 367, 7
extrémité (III) 239, 11 ; 265, 23 ; (IV) 289, 11 ; 291, 6, 8 ; (VI) 313, 23
début (signes du zodiaque) (III) 261, 4, 7, 17, 18 ; 263, 5, 6 ; 265, 15, 17-20…
pointe (III) 241, 19, 21 ; têtes (III) 241, 20

– المخروط — sommet du cône (III) 233, 6, 11 ; 237, 23 ; (IV) 283, 8 ; 287, 13-14

رؤوس القدور — couvercles des chaudrons (IX) 407, 10

رأى

رأى — voir (V) 297, 10

مرآة مصقولة — miroir poli (VI) 323, 15

رب

ربما — peut-être (I) 193, 4 ; (III) 249, 7 ; (X) 423, 11

ربط

ربطَ — lier (IV) 289, 10

ربع

ربع ج أرباع — quart (VIII) 391, 2 ; (X) 425, 10, 13, 19 ; 451, 5-7, 9, 11

رابع — quatrième (III) 279, 8 ; (VII) 371, 12 ; 377, 14 ; 383, 10 ; 385, 1 ; (VIII) 391, 16 ; (IX) 405, 8 ; 407, 4, 6, 19 ; (X) 431, 8

أربعة — quatre (I) 195, 15, 18 ; (III) 261, 15 ; (X) 427, 1 ; 429, 9 ; 431, 18 ; 433, 3 ; 437, 18 ; 441, 14 ; 443, 4 ; 447, 25 ; 449, 25, 26 ; … ; (XI) 457, 13

– أمثال — quatre fois (X) 445, 4, 6, 7

مربّع ج ات — carré (I) 197, 11-13, 16, 17 ; 199, 2, 3, 10, 11 ; 201, 8, 22 ; … ; (II) 219, 20, 21 ; 221, 7 ; 225, 7-9, 15 ; 227, 2-5 ; (II) 265, 2, 4, 5 ; 267, 7 ; 269, 12 ; (V) 309, 4 ; (VI) 321, 18, 20, 22, 23 ; 325, 12, 13 ; 327, 2, 6 ; 331, 2 ; (VII) 343, 5 ; 345, 2-5 ; 349, 4, 19 ; 351, 2, 4 ; 353, 2, 4, 5, 7… ; (VIII) 389, 10 ; 391, 2 ; (IX) 403, 1, 3, 4, 8 ; 407, 3, 18 ; 409, 5 ; 411, 21 ; 417, 1… ; (X) 423, 14-16 ; 425, 6, 7, 22, 23 ; 427, 5, 6, 8, 12, 15 ; … ; (XI) 457, 2, 6, 8, 10

مربعات متوالية — carrés successifs (X) 437, 20

عدد مربع (انظر عدد) — nombre carré

رتب

ترتيب — ordre (I) 193, 16 ; (VI) 329, 12 ; 331, 3 ; (IX) 401, 20

– التنصيف — l'ordre des divisions par deux (X) 425, 3-4

خط ترتيب، على الترتيب ordonnée (I) 197, 7-8 ; 199, 14 ; 201, 1 ; 203, 8 ; 205, 4 ; 207, 1, 8 ; (II) 213, 10 ; 215, 2, 16 ; 219, 4 ; 223, 2, 5, 7, 12 ; 225, 10-11 ; (III) 257, 2 ; (VII) 351, 17 ; 353, 3 ; 367, 8, 10 ; (IX) 415, 9-10

مرتبة ج مراتب rang (IX) 401, 2

- أولى premier rang (I) 195, 2-3

- ثانية second rang (I) 195, 6

- ثالثة troisième rang (I) 195, 8

- رابعة quatrième rang (I) 195, 11-12

- خامسة cinquième (I) 195, 15-16

رجع

رجع se ramener (VII) 385, 1

رجل

رجل (البركار) branche (du compas) (III) 239, 8, 11, 12 ; 275, 6 ; 277, 3, 10, 17, 21, 25 ; 279, 2, 6

رخم

رخامة ج ات cadrans solaires (III) 261, 2, 5, 10, 28 ; 273, 13, 15

- مبسوطة – plans (III) 249, 5

ردف

ردف faire surgir (VII) 337, 3 ; poursuivre (IX) 401, 17

ردي

ردي mauvais (IX) 401, 3

رسل

رسالة traité, épître (III) 231, 3 ; (IV) 283, 2 ; 291, 19 ; (VI) 313, 2 ; 331, 20 ; (X) 423, 3 ; 453, 25, 27

رسم

رسم tracer, décrire (III) 231, 20 ; 237, 19-22, 24 ; 241, 15, 16 ; 247, 10 ; 249, 13 ; … ; (IV) 283, 19, 21 ; 285, 7, 11, 12, 15 ; 287, 7, 8 ; 291, 11 ; (V) 307, 1, 8, 9, 11 ; 309, 3 ; (VI) 313, 19 ; (VI) 331, 13

رَسْمٌ tracé (III) 231, 13 ; 233, 12 ; 237, 26, 28 ; 239, 4, 12 ; 241, 1, 2 ; 249, 2, 5 ; …

مرسوم tracé (III) 255, 21

ارتسام tracé (I) 193, 2, 8 ; 209, 1 ; (III) 231, 17 ; 233, 1 ; 237, 17 ; (VI) 313, 22

رشد

أرشد indiquer (III) 231, 14

رغب

رغبة	désir (III) 231, 5, 6

رفع

رفع	déduire (III) 269, 27 ; élever (IV) 289, 11, 13, 20 ; 291, 10, 11
ارتفع	s'élever (IV) 289, 2

ركب

تركيب (انظر أيضاً تحليل)	composition (VI) 315, 6 ; le fait de composer (X) 437, 11
	synthèse (X) 425, 1 ; 427, 9 ; 429, 13 ; 431, 23
مركب	composé (V) 301, 7 ; (X) 435, 17
تركّب	se composer (V) 301, 8

ركز

مركز ج مراكز	centre (II) 213, 6, 7, 10 ; 217, 20 ; (III) 231, 21 ; 233, 3, 7, 13 ; 247, 12 ; 253, 9 ; 255, 20, 24 ; 257, 4, 5, 10 ; … ; (IV) 285, 9 ; (VI) 313, 15 ; 317, 7, 14, 17 ; 319, 5, 17 ; 321, 2 ; 325, 7 ; (VII) 341, 9, 15, 18 ; 345, 1, 6 ; 349, 2, 18 ; 353, 11 ; 355, 2 ; 357, 4 ; … ; (IX) 415, 5 ; 417, 9 ; appui (IV) 289, 2
مركز قاعدة المجسم	centre de la base du solide (II) 213, 10

رود

أراد (انظر أيضاً بيّن)	vouloir (III) 241, 24 ; 247, 3 ; 253, 10 ; 259, 1 ; 261, 12 ; 263, 7 ; 269, 24 ; 271, 5 ; 273, 7 ; 279, 15 ; (IV) 283, 5 ; 285, 8 ; 289, 4, 7, 9, 13, 18 ; (V) 307, 1-3 ; (VII) 337, 6, 17 ; 345, 12 ; 347, 5 ; 349, 14 ; 351, 14 ; 353, 10 ; 357, 2 ; 363, 13 ; 365, 13 ; 367, 4 ; 375, 6 ; … ; (VIII) 389, 6 ; 393, 8 ; (IX) 403, 6 ; 405, 3, 6, 8 ; 407, 14 ; 409, 3 ; 411, 2, 6 ; 413, 10-12 ; … ; (X) 425, 7, 9, 18 ; 427, 17 ; 431, 11, 17 ; 433, 3, 12 ; 439, 1… ; (XI) 457, 2, 9
وذلك ما أردناه	ce que nous voulions (II) 219, 22 ; 221, 12 ; 227, 8 ; (VI) 319, 8, 12 ; 321, 6 ; 325, 9
مراد	ce que nous voulions (VI) 323, 22

روض

رياضي	mathématicien (VI) 323, 2
رياضة	mathématiques (III) 231, 6 ; exercice (VI) 317, 2 ; 331, 19 ; (IX) 399, 12
رياضيات	mathématiques (III) 231, 11
مرتاض	celui qui est rompu à (IX) 399, 9

ريب

ريب	doute (III) 231, 6

زعم

زعم prétendre (IX) 401, 7

زول

لا يزال continuer (X) 447, 12

غير زائل qui ne s'écarte pas (II) 213, 5, 19

زوي

زاوية ج زوايا angle (II) 213, 14 ; 217, 17, 18, 24, 25 ; (III) 233, 7 ; 237, 15, 27 ; 239, 1, 3, 10, 11 ; 241, 23 ; 247, 3 ; 249, 15… ; (IV) 285, 9 ; 287, 2 ; 289, 8, 13 ; 291, 10, 12, 16 ; (V) 297, 7, 13 ; 299, 2, 9, 14 ; 301, 10 ; 303, 1 ; 305, 1, 7 ; 307, 2, 3, 6… ; (VI) 319, 13 ; 321, 3 ; 323, 1, 2, 4, 5, 19 ; 331, 14, 15 ; (VII) 337, 11-14, 17 ; 339, 1, 3-8… ; (VIII) 395, 2, 3 ; (IX) 403, 3 ; 411, 7, 12, 13, 22 ; 413, 8-10, 12-18 ; …

– متبادل (انظر أيضًا تبادل) – alterne (VIII) 395, 2

– حادّة – aigu (VI) 321, 8, 23, 26 ; (VII) 337, 6 ; 345, 12 ; 363, 7

– على المحيط – inscrit (VII) 341, 15 ; 361, 16, 17

– خارجة – externe (VII) 341, 1 ; 345, 20 ; 375, 4, 17 ; 377, 1, 12 ; 379, 1, 7, 8 ; (IX) 417, 17

– خطوط الترتيب – des ordonnées (VII) 351, 17

– داخلة – interne (VII) 337, 12 ; 341, 2 ; 375, 4 ; 377, 2, 11 ; (IX) 419, 2

– رأس المخروط – au sommet du cône (III) 233, 8 ; 237, 15

– على المركز – au centre (VII) 361, 17

– مقابل، متقابل – opposé (V) 299, 3 ; 307, 8 ; (VII) 359, 3

– منفرجة – obtus (VI) 321, 8, 22, 26 ; (VII) 345, 12

– قائمة – droit (I) 201, 19 ; 205, 1 ; (II) 219, 1, 2 ; 225, 11 ; (III) 237, 26-28 ; 239, 2, 4 ; (V) 297, 13 ; (VII) 337, 11 ; 345, 5, 12 ; 355, 13 ; 357, 10 ; 385, 5 ; (VIII) 391, 7 ; 393, 19 ; (X) 433, 13

– قائمة مستقيمة الخطين – droit rectiligne (VI) 323, 3

على زاوية قائمة perpendiculaire (I) 197, 5-6 ; (II) 213, 13 ; (III) 255, 15 ; 257, 7-8 ; 261, 16

زيد

زاد ajouter (III) 269, 1 ; (VII) 343, 6 ; 381, 6 ; (X) 451, 9 ; 453, 21 ; (XI) 457, 5 ; augmenter (V) 297, 7 ; (VII) 369, 20 ; 373 4 ; excéder (V) 297, 9 ; (X) 447, 19, 23 ; 449, 4, 17, 18 ; dépasser (VI) 331, 18

زائد qui excède (I) 203, 10 ; (X) 447, 14, 16, 17 ; 449, 3 ; (VI) 321, 18, 22

زيادة excédent (VII) 369, 20 ; 381, 6 ; (X) 445, 9 ; 451, 7 ; 453, 1 ; protubérance (III) 241, 7

تزايد (تزايُد) augmenter (III) 237, 14 ; (IV) 283, 20, 21 ; excéder (X) 447, 17 ; croître (X) 449, 26

كلما ازدادا طولاً، ازدادا قربًا à mesure qu'elles s'allongent, elles se rapprochent (V) 301, 16 ; 303, 11

سئر

سائر tous, le reste (I) 193, 4, 17 ; (II) 213, 9 ; 221, 13 ; (II) 241, 20 ; 255, 7, 14, 15 ; 265, 20 ; 269, 17 ; (VI) 315, 29 ; 327, 7 ; 331, 5, 12 ; 349, 13 ; 351, 13 ; (IX) 399, 15 ; (X) 427, 2

سأل

سأل interroger, demander (X) 423, 7 ; 425, 24 ; chercher (VII) 339, 11 ; 341, 4 ; 345, 11

سؤال question (X) 423, 13 ; 425, 2, 26 ; 427, 2 ; 433, 1, 11

مسألة ج مسائل problème (VII) 341, 17 ; 343, 4, 7 ; 355, 1 ; 357, 15 ; 359, 7 ; 367, 1 ; 375, 6 ; 379, 3 ; 385, 1, 4 ; (X) 423, 6, 10 ; 425, 23 ; 427, 1, 2 ; 431, 8, 9 ; 433, 2, 8

– محدود – déterminé (VII) 343, 7

– عددية (انظر عدد) problème numérique

سبب

سبب raison (VI) 313, 6 ; cause (VI) 317, 6, 9

سبع

سبعة sept (IX) 401, 22

مسبّع heptagone (IX) 399, 2, 11, 19 ; 401, 4, 9, 18 ; 407, 1, 2, 5, 8, 11, 12 ; ...

– متساوي الأضلاع والزوايا heptagone de côtés et d'angles égaux (IX) 413, 12 ; 415, 3

سبق

سبق précéder (VI) 321, 25

سبق ظنه prévoir (V) 301, 18

ما سبق naguère (III) 231, 8

سبل

سبيل voie (III) 265, 26; (VI) 317, 4 ; 319, 2 ; 321, 8 ; 323, 21 ; (VII) 337, 7

على هذا السبيل et ainsi (I) 213, 9-10

ست

ستة six (IX) 415, 1 ; (X) 431, 17, 21 ; 443, 5 ; 451, 6, 10 ; 453, 15

ستة عشر seize (X) 443, 4

سدس

سادس sixième (III) 265, 12 ; 271, 16 ; (X) 431, 20

مُسدَّس hexagone (IX) 407, 9

سر

سرّ بليغ — secret extraordinaire (VI) 323, 1
أسرار لطيفة — secrets subtils (VI) 321, 9-10

سطر

سطر — écrire (IX) 401, 9
مسطرة ج مساطر — règle (IV) 289, 4 ; (VII) 347, 3, 7, 9 ; patron (III) 241, 1, 2, 6-8, 10, 11, 15-18…
مسطر — aligné (IX) 407, 7

سطح

سطح ج سطوح — plan, surface (I) 197, 5-7 ; 199, 16 ; 201, 2, 18 ; 203, 9 ; 205, 1, 5 ; 207, 1 ; … ; (II) 213, 13, 14, 16, 17 ; 215, 11, 12, 20, 21 ; 217, 13 ; … ; (III) 231, 21 ; 233, 2 ; 235, 4, 6 ; 237, 3, 16-21… ; (IV) 283, 15, 19-21 ; 285, 14, 15 ; 287, 1, 3, 4 ; 289, 11… ; (VI) 313, 15-17 ; 315, 1, 4, 5, 8, 10, 13 ; … ; (X) 435, 18, 19 ; 445, 4, 17, 18 ; 453, 1
parallélogramme (V) 297, 9 ; 301, 4, 6-9, 13, 14 ; 307, 9
rectangle (VI) 325, 3 ; (IX) 409, 5-7
سطح … في … — surface … par … (produit) (X) 423, 16
– مخروطي — surface conique (IV) 285, 16
– مستوٍ — surface plane (III) 247, 2, 8
– قاطع — plan sécant (I) 197, 1, 3 ; 199, 15 ; 201, 10, 11, 15, 17 ; 207, 4, 6 ; 209, 3 ; (II) 215, 5, 7, 18 ; 217, 11 ; 221, 10 ; 223, 10-11, 13, 16 ; (III) 233, 10 ; 235, 2, 5, 11, 13 ; 237, 1 ; (IV) 283, 7, 8, 11
– مقاطع — plan sécant (VI) 315, 11, 12
– على زاوية قائمة — plan perpendiculaire (I) 197, 5-6
– بلا نهاية — surface illimitée (III) 237, 16
تسطيح — rectification (III) 241, 24
مسطح … في … — produit (III) 263, 9 ; 265, 2, 3 ; 267, 7
شكل مسطح (انظر أيضاً أسطرلاب، بسيط) — figure plane (VI) 313, 18

سطن

أسطوانة ج أساطين — cylindre (I) 193, 9 ; 195, 19 ; (II) 221, 14 ; (III) 241, 22, 25 ; 255, 17, 19 ; (VI) 315, 3, 5, 8

ساع

ساعة ج ات — heure (III) 249, 6, 7 ; 269, 27 ; 279, 5, 8, 13
خطوط الساعات — lignes des heures (III) 279, 13

سعي

سعي — démarche (I) 195, 19 ; (VI) 323, 14

سل

مِسلّة مشقوقة — obélisque fendu (III) 241, 19

سلك

سلك — suivre, poursuivre (I) 191, 13 ; (II) 221, 3, 4 ; (III) 249, 9 ; (IX) 399, 19 ; introduire (VII) 337, 2 ; procéder (IX) 411, 4

مسلك — voie (I) 195, 19

سلو

تسلّى — se divertir (I) 193, 6

سمت

سمت ج سموت — direction (III) 249, 6, 10

سمي

اسم ج أسماء — nom (III) 279, 14 ; (IX) 399, 17

سمّى — appeler (II) 213, 6-11 ; 215, 2 ; (III) 233, 5, 6, 8, 9 ; 235, 7, 13 ; 237, 3 ; 247, 6 ; 267, 4, 8 ; 269, 24 ; 271, 5 ; … ; (IV) 285, 16 ; (VI) 315, 14, 15 ; (IX) 399, 15, 16

سَميّ (انظر عدد) — homonyme

سهل

سهل — être aisé (III) 261, 14 ; devenir facile (IX) 417, 5

سَهْل — facile (II) 215, 16 ; 221, 14 ; (III) 231, 13 ; 241, 22 ; 255, 17 ; (IV) 289, 3, 5 ; 295, 13 ; (VI) 313, 12 ; 323, 7 ; (VII) 339, 9 ; 361, 10 ; 385, 7 ; (IX) 399, 8 ; 405, 2 ; (X) 427, 10

أسهل — plus facile (I) 195, 19 ; (VI) 323, 14 ; (VII) 335, 16 ; (IX) 403, 13

سهّل — faciliter (IV) 287, 13

في تسهيل السبل لاستخراج الأشكال الهندسية — *Pour aplanir les voies en vue de déterminer des propositions géométriques* (V) 297, 14-15 ; (VI) 313, 7 ; 323, 11-12

سهم

سَهْم — axe (I) 195, 23 ; 197, 3, 7 ; 201, 10, 13, 17 ; 205, 1 ; 207, 1, 3 ; (II) 215, 1, 2 ; 223, 1, 2, 7, 9, 11, 12 ; 225, 10 ; (III) 257, 7 ; 259, 1, 4, 7 ; 273, 19 ; 275, 1, 8 ; 277, 4, 13, 18… ; (IX) 407, 20

ساق (انظر مثلث) — côté

سوي

ساوى — être égal (II) 215, 14, 15 ; 219, 4 ; 221, 11 ; (III) 251, 3, 4 ; (IV) 287, 7 ; (VII) 355, 6 ; 371, 2 ; (VIII) 393, 17 ; (IX) 411, 11 ; (X) 429, 14, 15

مساو — égal (I) 197, 1, 6 ; 199, 6 ; 203, 3 ; (II) 215, 10, 15 ; 217, 12, 14, 18, 19 ; 219, 4, 10, 20, 21 ; 221, 7, 8… ; (III) 239, 1 ; 251, 1, 7 ; 253, 5 ; (V) 297, 9 ; 299, 2, 3, 9 ; 301, 4, 6, 9 ; 303, 4, 8 ; 307, 6… ; (VII) 337, 13, 14 ; 339, 3-5, 15, 19 ; 341, 14 ; 343, 7 ; 345, 7… ; (VIII) 395, 2, 3 ; (IX) 403, 4 ; 405, 4 ; 407, 17 ; 409, 5-8 ; 411, 20, 21 ; 413, 2, 4, 6… ; (X) 425, 5 ; 431, 14

مساواة égalité (I) 197, 17 ; (II) 215, 16 ; (III) 235, 10 ; (V) 297, 13 ; (VI) 323, 5 ; (VIII) 355, 15 ; (X) 423, 8

تساوي égalité (VI) 323, 4

متساوٍ égal (I) 199, 7, 14 ; (II) 215, 6 ; 217, 4, 6-8 ; 219, 7 ; (III) 247, 14 ; 261, 15 ; 263, 4 ; 269, 27 ; (V) 297, 11 ; 305, 2, 8 ; (VI) 331, 14 ; (VII) 337, 11 ; 345, 16 ; 349, 14 ; 351, 13 ; 355, 10-12 ; 365, 7 ; 375, 7 ; 381, 2 ; … ; (VIII) 389, 9 ; (IX) 413, 7, 12, 17 ; 415, 1-4 ; (X) 445, 2, 3

سواء exactement comme (II) 223, 3 ; équivalent (VI) 315, 6

سوى autre … que, à l'exception (I) 193, 13 ; (IV) 283, 8, 17 ; (VI) 319, 2 ; (VIII) 391, 12 ; (X) 427, 1

استواء régularité (III) 241, 4

غاية الاستواء extrêmement régulier (III) 247, 2

مستوٍ (انظر أيضًا بسيط) régulier (III) 241, 5 ; (IV) 289, 17

سيل

سال couler (III) 241, 8

شبه

شبهَ être semblable (II) 221, 11 ; (VII) 343, 1 ; 359, 4 ; 369, 4-6 ; (VIII) 393, 3 ; (IX) 411, 23

شبيه semblable (VII) 339, 2

أشبه plus semblable (I) 193, 16

أشبه analogues (IX) 407, 9

مشابه semblable (II) 215, 15 ; 217, 12, 14 ; 219, 5 ; 221, 12 ; (VII) 365, 14

تشابُه similitude (VII) 375, 15 ; (VIII) 393, 16

متشابه semblable (VII) 341, 13 ; 349, 7 ; 353, 6 ; 365, 2 ; 367, 13 ; 369, 2 ; (IX) 417, 15

شخص

شخص stylet (III) 249, 6

شد

شدّ lier (IV) 287, 9

شدّة رغبة le fait de désirer ardemment (VII) 335, 12-13

شدّة المشقة extrême difficulté (IV) 285, 5

مشدود lié (IV) 289, 16, 19 ; 291, 7, 8

شرح

شرح expliquer (VI) 313, 12 ; 315, 28 ; 321, 10 ; (IX) 401, 16

شرط

شريطة ج شرائط — condition (I) 199, 8 ; 201, 22 ; 207, 6 ; (VI) 325, 5 ; (VII) 343, 6, 7 ; (VIII) 391, 11 ; (IX) 403, 9, 10

شرف

شريف — notable (IX) 401, 12 ; honoré (X) 423, 7

شرك

شارك — être associé (X) 433, 7, 8

مشترك — commun (III) 255, 13 ; (IV) 283, 11 ; (V) 307, 7 ; (VII) 349, 8 ; (VII) 369, 2 ; (IX) 409, 6 ; 411, 22 ; 417, 15 ; intersection (IV) 283, 7

خط مشترك — droite intersection, droite commune (I) 197, 7 ; (III) 235, 2, 5, 11 ; 237, 1

اشتراك — le fait d'être commun (VI) 313, 7 ; (VII) 339, 3 ; 341, 13 ; 343, 1

اشتراكات — les choses communes (VI) 323, 12, 13, 17

شع

شعاع الشمس — rayon du soleil (III) 247, 2-4

وقوع الشعاع — projection des rayons (III) 255, 18

شعر

ليت شعري — puissé-je savoir (IX) 399, 10

شغل

مشتغل — préoccupé (I) 191, 7

شكل

شكل ج أشكال — proposition (I) 201, 22 ; 209, 5 ; (III) 255, 25 ; 263, 8, 12 ; 265, 8, 11 ; 269, 25 ; 271, 1, 15 ; 273, 4 ; (V) 295, 13, 16 ; 299, 10 ; 301, 17, 20, 21 ; 307, 3, 11 ; (VI) 313, 5 ; (VII) 335, 10-12 ; 351, 18 ; 357, 9 ; 379, 5 ; 381, 5, 19 ; 383, 1, 10 ; … ; (IX) 401, 12 ; 407, 4, 6 ; 411, 4 ; (X) 447, 8 ; lemme (X) 447, 26
forme (III) 255, 16 ; (VI) 315, 4 ; quadrilatère (VII) 377, 5
semblable (III) 231, 7, 8
figure (I) 193, 11, 15, 22, 24 ; 195, 15, 17, 20 ; (III) 241, 21 ; 255, 7, 8 ; 263, 5 ; (V) 297, 17 ; (VI) 313, 3, 6-8, 10, 13, 14, 21 ; 315, 27 ; 317, 1, 4 ; … ; (X) 445, 2

– بيضي — – ovale (I) 191, 8, 15 ; 193, 14, 15 ; (VI) 315, 15, 17

– مجسم — – solide (I) 191, 9-10 ; 193, 1, 17 ; (II) 213, 4 ; (VI) 313, 20 ; 315, 15

– مخروطي — – conique (VI) 313, 21-22

– دوري — – de révolution (I) 193, 12, 17

– مدوّر — – arrondie (III) 235, 7

– أسطواني — – cylindrique (VI) 315, 1

– مستطيل — – allongée (III) 235, 7

- عدسي — – lenticulaire (I) 191, 8, 15 ; 193, 14, 15 ; (VI) 315, 15, 17
- كري — – sphérique (VI) 313, 19
- هندسية — – géométriques (X) 451, 2
- ذوات الأضلاع المتساوية — polygones réguliers (VI) 315, 23

الأشكال كلها من الدائرة — *Toutes les figures sont à partir du cercle* (VI) 313, 3-5 ; 317, 3 ; 323, 21 ; 331, 19

ما شاكلها — leurs semblables (III) 231, 5

مشاكلة — similitude (III) 255, 9, 10

شمع

شمع — cire (V) 297, 11

شمل

شمل — embrasser (X) 423, 11

شهد

شاهد — témoin (III) 265, 26

شوب

شاب (شوب) — corrompre (III) 231, 6 ; subir (III) 255, 7

مشوب — mêlé (X) 433, 7

شيأ

شيء ج أشياء — chose (I) 193, 16 ; (III) 231, 13, 14 ; (V) 295, 9 ; 297, 1, 2, 4, 8, 12, 16 ; (IX) 399, 8, 18 ; 401, 1, 6

أشياء متصلة — choses continues (V) 297, 1, 4

(كم) شئنا — à volonté, quelconque (III) 253, 2 ; 261, 6, 13, 14, 17 ; 273, 19 ; (IV) 291, 12

صبع

أصابع — doigts (III) 241, 15

صبغ

صبغ — colle (III) 241, 8

صحّ

صحة — vérité (V) 295, 12 ; 297, 16

صحب

صاحب (انظر أيضًا علم) — auteur (IV) 285, 3

صعب

صعب	difficile (I) 195, 19 ; (V) 297, 17
أصعب	plus difficile (IX) 401, 8, 23 ; 403, 11

صعد

صعد	monter (IV) 291, 4

صغر

صغر	petitesse (I) 195, 14
أصغر	plus petit (V) 303, 5, 10 ; 305, 10 ; (VI) 313, 20 ; 323, 3 ; 325, 17 ; 329, 2, 17 ; (IX) 405, 5 ; 411, 17, 18

صفح

صفيحة	plaque (III) 249, 10

صفر

صفر	cuivre (III) 241, 6

صلب

صلب	solide (III) 241, 3, 23

صلح

إصلاح	rectification (VIII) 389, 5 ; 395, 6

صنع

صنعة	art (III) 249, 11
صناعة	art (IX) 399, 5, 9, 13, 17 ; 401, 2
أهل الصناعة	gens de cet art (VI) 321, 25

صنف

صنفَ	composer (III) 231, 12 ; 249, 11

صور

صورة ج صور	figure (I) 207, 10 ; (III) 237, 5 ; 241, 21 ; 247, 14 ; 249, 4 ; 259, 7 ; 279, 15 ; (VI) 325, 18 ; (VII) 367, 11 ; (X) 431, 24 ; cas de figure (III) 257, 16 ; 267, 9 ; 269, 11 ; cas (VI) 315, 27 ; 331, 17 ; (X) 431, 13 ; image (VI) 323, 16 ; forme (VII) 371, 8
تصوّر	concevoir (VI) 323, 2
تصوُّر	conception, le fait de concevoir (III) 255, 17 ; (V) 295, 3, 9, 12-16 ; 297, 1, 8, 12, 20 ; 301, 20 ; (VI) 323, 7

يتهيأ تصوره	concevable (V) 297, 5
ضبط	
ضبط	contrôler (V) 295, 16
ضرب	
ضربَ في	multiplier (III) 267, 8 ; 269, 11 ; 271, 17 ; (X) 425, 16, 21 ; 429, 5, 6 ; 431, 4, 5 ; 437, 14 ; 439, 4 ; 441, 10, 18, 20 ; … ; (XI) 457, 4, 10
ضَرْب	produit (III) 265, 1 ; (V) 303, 3, 8 ; (VI) 321, 20 ; 329, 8, 17 ; (VII) 351, 15 ; 353, 2, 3, 5, 7, 8 ; 363, 14, 15 ; 369, 22 ; 381, 7 ; (IX) 403, 7, 8 ; 405, 8 ; 407, 2 ; 411, 21 ; 417, 13 ; (X) 437, 10
ضرب ... في ... مرتين	double-produit (VI) 321, 22-24
ضر	
ضرورة (انظر وقت)	nécessité
ضعف	
ضعف ج أضعاف	double (I) 199, 12, 13 ; 203, 11 ; (III) 261, 22 ; (VII) 361, 16-18 ; (VIII) 389, 11 ; 393, 12, 18 ; 395, 2, 3 ; (IX) 413, 1, 8 ; 417, 12, 17 ; 419, 3 ; (X) 427, 7, 14-16 ; 429, 14, 15 ; … ; (XI) 457, 13
ثلاثة أضعاف (انظر ثلاثة)	triple
ج أضعاف	multiple (X) 435, 10, 18 ; 439, 13, 18, 19 ; 441, 10 ; 443, 11, 12
ضعّف	multiplier (X) 439, 11 ; 441, 10, 17 ; 447, 23 ; 449, 6, 14
تضعيف	multiple (X) 439, 4-6, 8 ; 441, 17 ; 447, 13
ضاعفِ	doubler (X) 443, 21 ; 447, 11, 12
أضعفَ	prendre le multiple (X) 439, 3 ; 443, 10 ; 445, 14
مضعف	multiple, double (X) 435, 6 ; 441, 1 ; 445, 10
ضلع	
ضلع ج أضلاع	côté (I) 203, 10 ; (II) 215, 8 ; 217, 16 ; (III) 231, 18, 19 ; 235, 6, 12 ; 237, 2, 13, 22, 27 ; 261, 12, 13 ; … ; (IV) 291, 16 ; (V) 297, 6 ; 299, 6, 15 ; 301, 13 ; (VI) 317, 5, 12 ; 319, 7 ; 325, 6 ; (VII) 353, 6 ; 355, 8, 10 ; 371, 2, 3, 5, 7 ; 377, 5 ; (VIII) 389, 9 ; (IX) 403, 3 ; 405, 3-5 ; (X) 427, 6, 8 ; 431, 1 ; 435, 6 ; 437, 2, 15, 18 ; 439, 1-3, 10…
– المجسم	– du solide (II) 213, 6 ; 215, 3 ; 217, 5 ; 223, 10, 13, 15, 17 ; 225, 13
– المخروط	– du cone (III) 233, 6, 8 ; (IV) 283, 16, 20-21 ; (VI) 315, 13
– مخروطي	– conique (IV) 287, 2
– شبيه	– semblable (I) 203, 9, 10
– منتصب	– droit (II) 227, 1, 6 ; (III) 253, 6 ; (IV) 287, 6 ; (VIII) 391, 1 ; (IX) 409, 1, 10 ; 415, 9 ; 417, 2-3
– قائم	– droit (III) 251, 12, 18 ; 261, 13 ; 263, 7, 9 ; 265, 2, 4, 6, 13, 14 … ; (VII) 351,

16 ; 367, 7

– مائل – transverse (II) 225, 1, 10 ; (III) 253, 5 ; 261, 13 ; 263, 4, 5, 9-10 ; 265, 2-4, 6, 8, 13, 14 …

مضلع polygone (VI) 319, 9 ; 321, 4 ; 325, 6

ذو أربعة أضلاع quadrilatère (VII) 355, 10 ; 375, 11-12

المضلعات المتساوية الأضلاع polygones réguliers (VI) 315, 25

متوازي الأضلاع parallélogramme ; surface à côtés parallèles (II) 215, 19 ; 217, 1-2 ; 221, 11 ; 223, 2 ; 227, 10-12 ; (III) 241, 26 ; (V) 299, 1, 2, 6, 9-10, 14 ; 307, 5-8 ; (VII) 355, 12 ; (VIII) 389, 8, 9 ; 391, 4, 5, 9, 12 ; 393, 18

متوازي الأضلاع قائمة الزوايا rectangle (I) 193, 8-9

ضمن

ضمّن insérer (X) 431, 24

تضمّن englober (X) 427, 2

ضن

ضنين qui conserve précieusement (IX) 401, 12

ضيف

أضاف appliquer (V) 299, 8 ; 307, 5, 7 ; (VIII) 389, 6, 11 ; 391, 10 ; (X) 429, 12 ; 435, 11 ; 439, 7, 12 ; 441, 14 ; 451, 13, 14 ; ajouter (IX) 407, 8, 18

مضاف appliqué (V) 299, 1 ; auquel on ajoute (X) 423, 15 ; 431, 19

طبع

طبع nature (V) 297, 17 ; (VI) 319, 7

طبيعي (انظر نظم) naturel

طبق

طابق se superposer (III) 273, 19 ; 275, 1

انطبق se superposer (VI) 317, 14 ; 321, 3

طرح

طرح (طرحٌ) ôter (IX) 411, 19 ; retrancher (X) 439, 18

طرف

طَرْف ج أطراف extrémité (II) 213, 15, 16 ; 215, 5 ; 217, 7 ; (III) 231, 21, 22 ; 233, 2, 6 ; 239, 11 ; 249, 3, 6, 13 ; (IV) 287, 9 ; 289, 15 ; 291, 1, 7, 9 ; (VI) 313, 16 ; 323, 1, 20 ; 325, 6, 8, 14 ; 327, 4, 7 ; 329, 12, 14 ; …
terme extrême (X) 453, 13, 16, 19

الطرف الأعظم le plus grand extrême (I) 195, 2

بكلا الطرفين de part et d'autre (I) 195, 13-14

طرافة subtilité (VII) 373, 4

طرق

طريق ج طرق méthode, voie (I) 191, 12 ; (II) 221, 4 ; (III) 231, 13 ; 241, 2, 22 ; 247, 5 ; 249, 2, 5, 9, 12 ; 255, 24 ; (V) 297, 1, 2, 10, 14 ; 307, 11 ; (VI) 313, 5, 8, 12 ; 321, 6, 25 ; (VII) 335, 16 ; 337, 2 ; 339, 10 ; 367, 2 ; 373, 12 ; (VIII) 389, 4 ; (IX) 401, 8 ; 403, 12 ; 411, 4 ; (X) 423, 8, 11, 14 ; 425, 24 ; 431, 22 ; 433, 4, 6 ; 443, 4 ; 447, 8 ; 451, 1

- الصواب la bonne voie (IX) 399, 19 ; 401, 3-4

- فلسفية voie philosophique (V) 297, 2

- كليّ méthode universelle (X) 423, 4 ; 425, 7

طلبَ (طلبٌ) chercher, demander (I) 193, 4, 9, 14 ; 195, 17 ; (III) 231, 9 ; 263, 7 ; (VI) 317, 19 ; (VII) 373, 12 ; (X) 425, 9 ; 429, 1, 7, 10 ; 431, 2, 13, 18

طلبٌ recherche (I) 195, 18

بطلبٍ par l'effort (I) 191, 9

طالبٌ qui cherche (III) 255, 10

مطلب ce qu'on cherche (IX) 401, 8 ; recherche (X) 427, 3 ; 431, 9

مطلوب recherché, ce qu'on recherche ((III) 249, 16 ; (V) 297, 20 ; (VI) 331, 18 ; (VII) 347, 11 ; 355, 2, 5 ; 359, 1 ; 361, 1, 8 ; 363, 6, 10 ; 375, 12 ; (VIII) 391, 7, 14 ; (IX) 411, 12

طالبَ requérir (VIII) 389, 6

طول

طال s'étendre (V) 301, 9

طول longueur (V) 297, 9 ; 299, 3, 4 ; 301, 4, 9

طويل long (III) 239, 8

أطول plus grand (V) 297, 6 ; 299, 3, 4 ; 301, 5 ; 303, 6 ; 305, 8, 9 ; (VI) 325, 16, 17 ; 329, 5, 11, 16 ; 331, 10 ; (VIII) 391, 9

مستطيل (انظر دائرة) allongé (ellipse)

ظفر

ظفرٌ le fait de saisir (III) 255, 10

ظل

ظلّ ج أظلال ombre (III) 249, 5, 7 ; 269, 27 ; 271, 23, 24 ; 273, 8, 11, 24 ; 275, 4, 5... ; (IV) 285, 7

ظن

ظنّ (ظنٌّ) croire (VI) 317, 6 ; 321, 25 ; (IX) 399, 6, 14 ; 401, 5 ; 407, 5

يحسن الظن بنفسه il a une assez bonne idée de lui-même (IX) 399, 10

أكثر ظني il est bien vraisemblable (V) 301, 17

ظهر

ظاهر évident (IV) 291, 4 ; (VI) 315, 23

عجب

أعجب être surpris (IX) 399, 5

عجز

عجز faiblesse (IX) 399, 6, 14

عدّ

عدد ج أعداد nombre (III) 279, 13 ; (VI) 315, 24 ; (X) 425, 1, 4, 10 ; 427, 9, 10, 12, 13 ; 429, 1, 2… ; (XI) 457, 2-4, 6, 9

– مربع – carré (X) 423, 5, 8, 13 ; 425, 1, 8, 27 ; 427, 3, 4, 9, 14-16 ; …

– زوج ج أزوج – pair (X) 425, 2, 4, 5, 8-11 ; 427, 10, 13 ; 429, 2, 11 ; 431, 2, 3…

– سمي – homonyme (X) 425, 4, 5, 10-12, 14 ; 435, 8, 12, 18, 20 ; 437, 15…

– صحيح – entier (X) 437, 6

– فرد ج أفراد – impair (X) 427, 13 ; 435, 6, 7, 14, 15 ; 437, 19 ; 439, 4, 11 ; 441, 17 ; 453, 18

– منطق – rationnel (X) 433, 14

أعداد متوالية – successifs (X) 453, 9, 12

عددي numérique (X) 433, 6

مسألة عددية problème numérique (X) 423, 4, 7

مثال ج أمثلة عددية exemples numériques (X) 423, 10 ; 425, 8, 25 ; 429, 1 ; 431, 1 ; 433, 4 ; 449, 1, 12

عدّة préparation (III) 231, 10
plusieurs (VII) 335, 17 ; nombre (X) 425, 27 ; multiplicité (X) 435, 10, 12 ; 447, 23

عدل

عدل être égal (I) 197, 11 ; 199, 2, 3, 10 ; 205, 8, 9 ; (VI) 329, 9, 18 ; (VIII) 389, 8 ; 391, 2, 5 ; (X) 427, 15 ; 451, 16, 18 ; 453, 1 ; (XI) 457, 7

معادل égal (VII) 345, 12

عدم

عدم s'anéantir (V) 301, 8

عدا

لا يعدو من أن يفضل ne peut excéder (X) 437, 17

ما عداها à l'exception (IV) 291, 14

عرض

عرض ج عروض	latitude (III) 249, 8 ; 261, 6, 13, 25 ; 263, 6 ; 265, 16, 22 ; 267, 2, 3 ; 269, 14, 15… ; largeur (V) 297, 9, 12 ; 299, 4, 11 ; 301, 4, 9, 14, 15 accident (VI) 321, 6
ج أعراض	attributs (VI) 317, 1
شيء عرضي	chose accidentelle (VI) 317, 9
عريض	large (III) 241, 4
اعترض	affecter (III) 231, 6

عرف

عرفَ	savoir (VI) 313, 13 ; connaître (IX) 407, 7
معرفة	connaissance, le fait de connaître (III) 255, 10 ; (V) 295, 13 ; (VI) 313, 8, 9 ; 323, 12
معروف	connu (III) 273, 15

عسر

عسر	être difficile (IX) 407, 9
عَسِر	difficile (V) 295, 15 ; 297, 16

عشر

عشرة	dix (X) 431, 2, 3 ; 453, 15 ; (XI) 457, 9, 10

عصر

عصر	époque (III) 231, 7

عطى

أعطى (إعطاء)	donner (IX) 407, 4 ; (X) 425, 9-12, 19
معطى	donné (I) 193, 2 ; 209, 1 ; (VI) 327, 1, 5 ; (VIII) 389, 6 ; 391, 6 ; 393, 8 ; (IX) 415, 5 ; 417, 7
تعاطى	s'adonner (IX) 399, 5

عظم

عظم	grandeur (I) 195, 14
أعظم	plus grand (I) 195, 2, 5 ; (III) 239, 3 ; (VI) 313, 20 ; 323, 3

عقل

عقل	raison (V) 295, 10 ; 297, 18

عكس

عكس	inverse (VI) 313, 12 ; 317, 1 ; réciproque (VI) 323, 20 ; 325, 8

عل

علّة	raison (IV) 283, 18

علق

علق	transcrire (VIII) 395, 7
تعليق	commentaire (III) 231, 9 ; copie (VI) 331, 20
التعليقات الهندسية	*Commentaires géométriques* (I) 209, 4 ; (VI) 321, 17
معلق	accroché (III) 247, 2
متعلّق	lié (I) 209, 5 ; qui engage (IX) 403, 12

علم

علم	connaître (III) 267, 5 ; (VII) 371, 6 ; marquer (VI) 319, 4
علم	gnomon (X) 423, 15 ; 425, 1, 8 ; 435, 15 ; 437, 5 ; 439, 14 ; 441, 2, 3, 11, 13 ; 443, 20 ; 445, 6 ; …
علْم (انظر أيضًا برهان)	science (IX) 401, 11 ; (X) 423, 11
أَهل العلم	les hommes de science (V) 295, 9
معلوم	connu (III) 267, 11-15 ; 269, 1-8… ; (VII) 371, 5 ; 373, 2 ; (IX) 405, 6-8, 10 ; (X) 443, 10, 14 ; 449, 20 ; (XI) 457, 2, 4
– الصورة	de forme connue (VII) 373, 1
– الوضع	de position connue (IX) 415, 5
– الوضع والقدر	de position et de grandeur connues (IV) 287, 7
أصحاب علم التعاليم من أهل التنجيم	mathématiciens astronomes (III) 249, 4
الأشياء التعاليمية	les choses mathématiques (IX) 401, 1
متعلّم	élève (IX) 399, 7

عمّ

أعم	général (X) 423, 10
من جهة العموم	d'une manière générale (VI) 313, 9
على سبيل العموم والإيجاز	de manière générale et brièvement (VI) 317, 4

عمد

عمود ج أعمدة	perpendiculaire (I) 197, 9 ; 199, 15 ; 201, 2, 10 ; 205, 5 ; 207, 3 ; (II) 213, 15 ; (III) 249, 18 ; 251, 15, 16 ; 253, 4 ; 259, 5, 6 ; 261, 27 ; 271, 11 ; 277, 27 ; (IV) 285, 12 ; 287, 3, 5 ; (V) 309, 1 ; (VI) 317, 5, 11, 14 ; 319, 7 ; 325, 2, 6, 8, 9, 11, 14 ; … ; (VII) 337, 7 ; 339, 13 ; 343, 8 ; 355, 4 ; 357, 3 ; 361, 7 ; 373, 6 ; 375, 10 ; 381, 7, 20 ; … ; (VIII) 389, 9 ; 393, 10 ; (IX) 403, 6, 14, 15 ; 409, 2 ; 411, 20
	hauteur (VII) 371, 9, 12 ; 383, 7
	tige (IV) 287, 9, 11, 13 ; 289, 1, 10, 11, 15-17 ; 291, 3, 4…
متعمد	qui s'appuie (IV) 291, 8

عمق

عمق	profondeur (VII) 373, 4

عمل

عملَ (عملُ) composer (I) 193, 5 ; (VI) 313, 4 ; (VII) 335, 3 ; rédiger (III) 231, 9 ; prendre (III) 237, 13 ; construire (III) 241, 2, 6, 22 ; 247, 1, 5 ; 249, 7, 8 ; 251, 11, 19 ; 253, 7, 10 ; … ; … ; (IV) 283, 5, 6 ; 285, 2, 5, 8, 12 ; 287, 6, 9, 11 ; 289, 1, 18, 19 ; … ; (VI) 319, 16 ; (VII) 351, 16 ; 359, 16 ; 363, 6 ; 365, 11, 13, 15 ; 367, 6 ; 371, 7 ; 375, 6 ; 379, 6… ; (VIII) 393, 11 ; (IX) 407, 9 ; 411, 2, 6 ; 413, 10-14, 17, 18 ; … ; (X) 441, 5 ; 443, 22 ; 445, 16 ; procéder (VII) 337, 2 ; (X) 443, 11 ; établir (VII) 335, 14, 16 ; faire (VII) 357, 5

عملُ façonnement (IV) 289, 15 ; 291, 6 ; action (IV) 289, 20 ; 291, 2, 3, 8, 9 ; construction (III) 239, 9 ; 241, 1, 24 ; 247, 1 ; 249, 5 ; (IV) 283, 2 ; 285, 6 ; 287, 8, 12 ; 289, 3, 13 ; 291, 19 ; (V) 307, 2 ; (VII) 335, 16 ; 341, 5, 8 ; 357, 8 ; 361, 5 ; 373, 4, 13 ; 377, 12 ; (IX) 399, 2 ; 401, 4, 17, 18, 22, 23 ; 403, 12 ; 407, 1, 4-6, 8, 11 ; procédé (III) 261, 21 ; 265, 20, 25; 269, 14, 17, 29 ; (IV) 289, 4 ; (X) 447, 5

استعمل utiliser (III) 249, 4 ; (IX) 407, 4

عنو

أعني، يعني c'est-à-dire (I) 191, 8 ; 195, 15 ; 197, 12 ; 199, 8, 11 ; 201, 8 ; 203, 6, 7 ; 205, 9, 10 ; … ; (II) 223, 14 ; 225, 9 ; (III) 237, 7, 15 ; 259, 1 ; 261, 12 ; 265, 8 ; 273, 7, 9 ; 279, 7 ; (IV) 283, 12 ; (V) 309, 4 ; (VI) 313, 14 ; 315, 6, 8, 13 ; (VII) 351, 3 ; 355, 14 ; 357, 10 ; 359, 3 ; 363, 2 ; 365, 1 ; 369, 7 ; 373, 9 ; 377, 9 ; 381, 14 ; (VIII) 391, 14 ; 393, 15, 16, 18 ; (IX) 399, 11 ; 401, 3 ; 409, 8 ; 413, 3, 5, 7, 9 ; 415, 8 ; (X) 433, 2 ; 437, 1, 12 ; 439, 8 … ; (XI) 457, 7

عناية soin (IX) 401, 1

معنى sujet (I) 195, 21

عود

عاد revenir (IV) 285, 11 ; (VI) 313, 16, 19

عادة habitude (I) 193, 4

عون

عون aide (VI) 315, 29

عين

بعينه même (I) 207, 2 ; (II) 221, 4, 14 ; (III) 255, 15 ; 265, 21 ; 271, 1 ; 273, 22 ; (V) 297, 20 ; (VI) 313, 15 ; (VII) 341, 17 ; (X) 447, 9 ; (XI) 457, 3

ذوات عيون les propres sources (VI) 313, 8

غرب

غريب extraordinaire (III) 247, 5 ; admirable (VII) 335, 10 ; 367, 2 ; curieux (IX) 401, 13

غرض

غرض ج أغراض intention (VII) 341, 8 ; ce à quoi nous voulons parvenir, but (I) 195, 22 ; (III) 233, 12 ; (IV) 291, 14

غرض مقصود	but visé (VI) 331, 18
غفل	
غفِل	négliger (I) 191, 15
غلط	
غلطٌ	erreur (V) 295, 12 ; (IX) 407, 11
مغالط	fallacieux (IX) 401, 17
مغالطة	duperie (IX) 407, 11
غلظ	
أغلظ	plus épais (III) 241, 21
غيرِ	
تغيّر	changer (III) 235, 9
غور	
غور	qui pénètre (V) 295, 10
غوص	
غوص	pénétration (IX) 399, 10
غوي	
غاية (انظر أيضًا استواء)	extrémité (IX) 399, 15, 17 ; fin (X) 437, 19
بغاية ما أمكن	avec une extrême (III) 241, 3
غيب	
غيبة	absence (III) 231, 9
فتح	
فتح	écarter (IV) 289, 18 ; 291, 15
فتحة	ouverture (IX) 407, 10
انفتح	écarter (IV) 289, 16
فحص	
فحصٍ	examiner, rechercher (I) 193, 4 ; (IV) 283, 18 ; (V) 297, 19 ; (VI) 323, 13, 17
فحصٌ	examen (IV) 291, 14
فحص كليّ	examen universel (I) 195, 20
فاحص	celui qui examine (VI) 315, 28 ; 323, 13

فرج

منفرج (انظر زاوية)	obtus

فرد

فرد (انظر عدد)	impair
تفرّد	se singulariser (III) 231, 7 ; être seul à (VII) 337, 4

فرض

فرض	supposer (II) 215, 8 ; 219, 12 ; 223, 11 ; (III) 235, 1 ; 247, 8 ; 249, 15, 16, 18 ; 253, 2, 11 ; 259, 2 ; 261, 5 ; 271, 1 ; (IV) 285, 9 ; (V) 301, 5, 10 ; (VI) 315, 19 ; 317, 19 ; 319, 4, 13 ; 321, 13 ; 325, 1, 11 ; 329, 1, 15 ; (VII) 363, 10 ; 367, 6 ; (X) 423, 14 ; 425, 1, 8 ; 427, 5, 9, 14, 16 ; 429, 1, 10… ; (XI) 457, 4
مفروض	donné, supposé (II) 213, 14, 15 ; (III) 237, 14 ; 247, 3, 9 ; 249, 8, 14 ; 265, 16 ; 267, 2 ; (IV) 283, 19 ; (V) 299, 2 ; (VII) 337, 17 ; 347, 4 ; 363, 7 ; 371, 6 ; 379, 6-8 ; (IX) 405, 3 ; 407, 2 ; (X) 427, 12, 13 ; 435, 6, 7, 9 ; 437, 1 ; 439, 2, 7-9, 13…
مفروضات	hypothèses (VII) 373, 4

فرع

فروع	dérivations (X) 435, 1 ; dérivés (X) 443, 12

فرغ

فرغ	terminer, achever (I) 191, 14 ; (III) 273, 14 ; (VI) 331, 20
فراغ	le fait de finir (I) 191, 7
عند الفراغ	lorsque le temps le permettra (X) 453, 24

فرق

فرقة	séparation (III) 231, 9

فسد

فساد	le fait d'être corrompu (IX) 401, 17
فاسد	corrompu (IX) 401, 3

فسر

فسر	commenter (IV) 285, 4

فصل

فصَل	séparer (III) 233, 11 ; (V) 299, 7 ; (VII) 371, 3 ; (IX) 405, 4 ; (X) 437, 5 ; couper (IV) 283, 17
فصل ج فصول	sections (VI) 313, 8
فصل مشترك	intersection (I) 201, 19 ; 205, 2 ; 207, 5 ; (III) 223, 10, 14, 16 ; (III) 235, 6, 12 ; 237, 3 ; (IV) 283, 13, 14, 16-17

qui sépare (I) 203, 11	فاصل
séparé (VI) 313, 11	مفصل
séparation (I) 197, 16	تفصيل
par séparation (VI) 315, 4 ; en coupant (VI) 315, 8, 10	من تفصيل
se séparer (VI) 313, 10	انفصل
le fait de couper (VI) 315, 12	انفصال

فضل

excéder (X) 439, 1 ; 447, 10-12 ; 449, 11	فضل
excédent (I) 203, 11 ; (X) 435, 19 ; 439, 3, 9, 15, 19 ; 441, 2, 9, 16 ; 443, 1, 9… ; différence (III) 273, 24 ; 275, 4 ; 277, 1, 8, 15, 20, 23 ; (X) 453, 5 ; supériorité (VI) 313, 21 ; éminence (IX) 399, 17 ; 401, 2	فضل ج فضول
sans parler de (IX) 401, 7 ; *a fortiori* (IX) 407, 10	فضلاً عن
meilleur (VI) 313, 20	أفضل
éminent (I) 195, 17 ; 197, 14 ; 201, 6, 9 ; 203, 1 ; (V) 295, 4 ; (IX) 399, 6, 14 ; 407, 20 ; (X) 433, 11	فاضل ج أفاضل
l'éminent Shaykh (I) 191, 4 ; 193, 5 ; (III) 231, 5	الشيخ الفاضل
excéder (X) 439, 10	تفاضِل
différence (X) 447, 23 ; 449, 25	تفاضُل

فعل

faire (III) 279, 8 ; façonner (IV) 289, 6 ; (IX) 401, 9	فعل

فقط

seulement (I) 193, 18 ; 195, 1 ; (II) 227, 10-12 ; (III) 249, 8 ; (V) 297, 5 ; (VI) 313, 5 ; 317, 8 ; 319, 3 ; 321, 6, 24	فقط

فكر

pensée (V) 295, 9 ; (VII) 369, 13	فكر
penser (X) 423, 9 ; 453, 24	أجال الفكر
remettre l'examen (X) 433, 5	أجلّ الفكر
qui réfléchit, médite (III) 255, 9 ; (V) 295, 6	متفكر

فلسف

philosophe (V) 295, 10	متفلسف

فهم

entendement (IX) 399, 8 ; 401, 7	فَهْم

فوت

distancer (III) 231, 8	أفات
écart (VI) 323, 15, 16	تفاوت

فاق

فَوْق au-dessus (X) 443, 12

فيد

فائدة utilité (X) 423, 10
لكثرة فائدة en raison du grand profit (VI) 321, 10
مفيد utile (III) 231, 13 ; 249, 11

قب

قبة coupole (I) 199, 15 ; 201, 10 ; 207, 1
– زائدة – hyperbolique (I) 191, 3, 10 ; 195, 9, 11 ; 201, 13-14 ; 207, 10 ; (VI) 315, 17
– مكافئة – parabolique (I) 191, 3, 11 ; 195, 9-11, 23-24 ; 197, 9 ; 201, 11 ; 207, 3 ; (VI) 315, 17

قبح

قبح faire offense (IX) 401, 6
استقبح détester (IX) 401, 8

قبس

اقتباس le fait d'emprunter (IX) 399, 5 ; 401, 11

قبل

قبل précéder (VI) 319, 7 ; accepter (V) 295, 10 ; intercepter (VI) 323, 7 ; sous-tendre (VII) 345, 14 ; 365, 5
قُبيل précédemment (X) 443, 12
قابل qui fait face (VI) 323, 16
مقابل opposé (III) 273, 22 ; (V) 307, 8 ; (VII) 359, 3
مقابلة opposition (VII) 353, 15
متقابل opposé (V) 299, 3

قدر

مقدار ج مقادير grandeur (III) 247, 9 ; 261, 17, 18, 28 ; 265, 7, 8, 22 ; 267, 3 ; 271, 25 ; … ; (IV) 289, 7 ; 291, 3 ; (V) 297, 11 ; (VII) 365, 9 ; (IX) 417, 8 ; (X) 449, 11 ; partie (I) 193, 5 ; quantité (X) 449, 18
مقتدر القدّ d'une certaine grandeur (III) 241, 3
بمقدار قدّه de la même grandeur (III) 241, 6
قدّر évaluer (III) 271, 28 ; juger (IX) 399, 8

قدم

قدم introduire, commencer (VII) 351, 12 ; (VIII) 391, 6 ; (IX) 401, 16, 21, 23 ; 407, 5 ; 417, 5, 10 ; (X) 435, 5

مقدمة ج ات préliminaires (I) 205, 7 ; (IX) 399, 11 ; 401, 11 ; lemme (V) 297, 22 ; 299, 1 ; (VII) 335, 17 ; 337, 2, 4, 5, 16 ; 339, 8, 9, 11 ; 341, 4 ; 345, 10, 11 ; … ; (VIII) 389, 6 ; (IX) 399, 19 ; 401, 7, 9, 17, 20-22 ; 403, 13 ; 407, 1, 5-7… ; (X) 435, 5 ; 443, 15
termes premiers (VI) 313, 14

(فيما) قدمنا (comme) précédemment, d'après ce qui précède (I) 207, 9 ; (II) 225, 15 ; (V) 301, 19 ; 307, 2 ; (VII) 343, 3 ; 357, 5 ; 361, 13 ; (IX) 411, 11 ; (X) 447, 26 ; 449, 9

تقدّم précéder (VII) 385, 6

تقدُّم avance (IX) 399, 14 ; 401, 2

متقدِّم précédent (VII) 357, 9 ; 359, 16 ; (X) 449, 9

متقدّمًا précédemment, auparavant (I) 199, 9 ; (II) 227, 7 ; (X) 431, 2, 13, 14

المتقدّمون les anciens (VII) 335, 12, 15, 18 ; (IX) 399, 16

القدماء les anciens (III) 249, 9 ; (VII) 337, 2 ; 347, 3 ; (IX) 399, 6

قرأ

قرأ lire (VI) 321, 7 ; (IX) 399, 11

قارئ celui qui lit (VI) 315, 29

قرب

قرِب approcher (III) 241, 17 ; rapprocher (IV) 289, 16 ; (V) 295, 3, 8 ; 301, 12 ; 305, 5, 10 ; (VIII) 391, 3

قريب proche (I) 193, 21 ; (III) 255, 6 ; accessible (III) 231, 13

قريبٌ على الأفهام proche de l'entendement (IX) 399, 8

أقرب plus proche (I) 193, 15 ; (V) 301, 2, 3 ; 303, 10 ; (VI) 317, 7 ; 329, 6, 16 ; 331, 1, 9 ; (IX) 403, 12 ; plus immédiat (VII) 335, 16

أقرب عملاً وبرهانًا plus facile à faire et à démontrer (IX) 403, 9

متقارب rapproché (III) 249, 3 ; (V) 307, 5

قرن

قرين associé (III) 265, 14 ; 269, 13

قسم

قسم partager (III) 249, 15 ; 251, 4, 5 ; 257, 2, 4, 6, 11, 12 ; 259, 3, 6 ; 261, 15 ; … ; (IV) 283, 12 ; (V) 303, 2 ; 305, 2 ; 307, 13 ; (VI) 317, 13 ; 319, 5, 13, 17 ; 321, 1 ; 325, 1, 3, 7, 11 ; 327, 1 ; … ; (VIII) 393, 8, 13 ; 395, 3 ; (IX) 403, 7 ; 405, 8 ; 407, 2, 14 ; 409, 3 ; 411, 9 ; 413, 16 ; 419, 4 ; (X) 425, 5, 14, 15, 19 ; 427, 10 ; 429, 11 ; 431, 4 ; 435, 16 ; 451, 13 ; (X) 457, 4, 10

قسم بثلاثة أقسام متساوية diviser en trois parties égales (VII) 337, 6, 9-10, 14-15 ; 339, 1, 8, 17-18 ; 341, 2-3, 8, 15, 19-20 ; … ; (VIII) 393, 7 ; 395, 4 ; (IX) 417, 7-8 ; 419, 4-5

قسمٌ ج أقسام partie (III) 251, 4, 6-8 ; 261, 15 ; 263, 13, 14 ; 269, 27 ; 271, 3 ; (IV) 283, 12 ; 291, 13 ; (V) 301, 7 ; 303, 8, 9 ; 307, 5 ; (VI) 315, 24 ; 325, 1, 2 ; 329, 1, 7-9, 13, 15, 18 ; … ; (IX) 405, 8, 9 ; 407, 2-4, 14 ; 411, 5, 9 ; (X) 435, 8 ; 445, 2, 3

قسمة division (IX) 403, 8, 10, 11

قسمة طبيعية classification naturelle (I) 195, 20

قسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية division du cercle en sept parties égales (IX) 401, 21-22 ; 403, 11

قسمة / انقسام الزاوية المستقيمة بثلاثة أقسام متساوية trisection de l'angle rectiligne, division de l'angle à côtés droits en trois parties égales (VII) 335, 3-4, 11-12, 17-18 ; 337, 2-3 ; (VIII) 389, 3-4 ; 393, 8-9 ; 395, 5 ; (IX) 399, 3-4 ; 401, 13-14, 18-19 ; 407, 12-13 ; 415, 4 ; 417, 5-6 ; 419, 6-7

مقسوم divisé (IV) 291, 13 ; (VI) 315, 24 ; 323, 10 ; (VII) 347, 7 ; 357, 7 ; 373, 10 ; (X) 427, 11 ; 435, 8

انقسم se diviser (V) 297, 2, 4 ; 303, 7 ; (VII) 341, 15 ; (X) 435, 12

انقسام division (VI) 319, 3 ; (VII) 339, 1 ; 341, 19 ; 345, 17 ; 349, 5 ; 355, 3 ; 377, 2 ; 379, 2 ; (IX) 403, 7

قصد

قصد (قصدٌ) intention (VI) 331, 17

قصر

قصّر faillir (III) 231, 14

قصير court (III) 239, 8

أقصر plus petit, plus court (V) 299, 3, 4, 12, 13, 15, 16 ; 301, 1 ; (VI) 329, 5

تقصير défaut (IX) 399, 6 ; insuffisance (IX) 401, 3

اقتصر se limiter (III) 261, 6 ; (X) 447, 8 ; se borner (VI) 331, 17

قضى

على ما يقتضي selon les exigences (X) 433, 9

قطر

قُطْر ج أقطار diamètre (I) 197, 9 ; 199, 14 ; 201, 3, 21 ; 205, 2, 4, 5 ; 207, 4, 6, 8… ; (II) 215, 16 ; 219, 2, 3, 6, 9, 10, 12 ; (III) 233, 13 ; 235, 3 ; 237, 7, 9, 10 ; 249, 17 ; 253, 1 ; 255, 20 ; 257, 4, 5, 10, 13, 17 ; … ; (IV) 287, 6 ; (VI) 313, 19 ; 315, 16 ; 323, 2, 4 ; 325, 17 ; (VII) 347, 5 ; 349, 2 ; 355, 2 ; 357, 11 ; 363, 11 ; 365, 9 ; (IX) 415, 5, 6, 8 ; 417, 9
diagonale (VII) 371, 3 ; (IX) 403, 1, 3 ; hypoténuse (III) 231, 20 ; (X) 453, 8

– مجانب diamètre transverse (VII) 351, 16-17 ; 367, 7, 8 ; (IX) 415, 9

– مزدوج diamètre conjugué (III) 257, 5

– الأصغر le plus petit diamètre (I) 191, 9 ; (II) 213, 9 ; 217, 15-16 ; (III) 257, 8

– الأطول le plus grand diamètre (I) 191, 9 ; (II) 213, 8, 9 ; 217, 15-16 ; 219, 7-9 ; (III) 247, 12 ; 257, 7

– الأقصر le plus petit diamètre (II) 219, 7-9

نصف قطر demi-diamètre (VI) 315, 26 ; (VII) 345, 7 ; 355, 15 ; 357, 10

قطع

قطع couper (I) 201, 1, 18 ; 205, 1 ; 207, 1 ; (II) 215, 20 ; 217, 13 ; 219, 6, 9, 23, 25 ; 223, 1, 4, 6 ; (III) 235, 4 ; 237, 24 ; 241, 4, 23 ; 251, 15 ; 263, 1 ; (IV) 283, 12, 14 ; 287, 3 ; 289, 10 ; 291, 17 ; (V) 297, 5 ; 305, 6 ; (VII) 367, 10 ; (VIII) 391, 12, 13 ; 393, 13 ; (IX) 403, 3 ; 415, 10 ; arrêter (III) 241, 12

قطع ج قطوع section conique (I) 193, 7, 10, 12 ; 197, 1, 5, 6, 8 ; 199, 4, 6 ; 201, 4… ; (II) 213, 10, 11 ; 215, 1, 3, 15 ; 219, 4 ; 227, 9, 10, 12, 13 ; (III) 239, 12 ; 241, 1, 5, 11, 14, 16, 18, 24, 25 ; 247, 14 ; … ; (IV) 283, 15, 17, 18 ; 287, 7, 8 ; 289, 18 ; 291, 9, 11, 12, 14 ; (V) 301, 12 ; 303, 1, 11 ; 305, 4, 7 ; 307, 1, 8 ; (VI) 323, 21 ; 325, 10, 16, 17 ; (VI) 315, 22 ; (VII) 353, 1 ; 367, 9, 10 ; (VIII) 391, 1, 2, 4, 12 ; (IX) 407, 7 ; 409, 2 ; 415, 10

قطوع (المخروط) الثلاثة les trois sections coniques (IV) 283, 5-7 ; 285, 8

– مخروط section du cône (III) 233, 9, 11-12 ; 255, 19

– مخروطية sections coniques (III) 231, 4, 12 ; 241, 2 ; 255, 14 ; (IV) 283, 21 ; 285, 1-2 ; 287, 6 ; (IX) 407, 6

– زائد hyperbole (I) 191, 10 ; 193, 1, 2, 7, 23 ; 195, 9-11, 14 ; 201, 13, 15, 18 ; … ; (II) 213, 19 ; 215, 1 ; 225, 1, 10 ; 227, 11 ; (III) 237, 4, 10, 22 ; 239, 5 ; 241, 4, 16 ; 249, 14 ; 251, 9, 10 ; 253, 1… ; (IV) 287, 5 ; 289, 13 ; (V) 295, 7 ; 301, 11, 16 ; 303, 10 ; 305, 3 ; 307, 2, 4, 9, 11 ; 309, 3 ; (VI) 315, 2, 12, 15, 18 ; 327, 4 ; (VII) 351, 16 ; 367, 7 ; (VIII) 389, 6, 11 ; 391, 10 ; 393, 11 ; (IX) 407, 18 ; 415, 8

– شبيهة sections semblables (IV) 291, 14

– مكافئ parabole (I) 191, 10, 12 ; 193, 1, 2, 7, 19-20, 25 ; 195, 10, 11, 14, 23 ; … ; (II) 213, 19 ; 215, 2 ; 227, 1, 5, 8, 12 ; (III) 235, 13 ; 237, 9, 20 ; 239, 3 ; 241, 4 ; 251, 12, 18 ; 255, 6 ; 257, 10, 16 ; …(IV) 287, 5 ; 289, 14 ; 291, 15 ; (VI) 315, 2, 12, 14, 18 ; 327, 8 ; (IX) 409, 1, 10

– متقابل section opposée (III) 249, 6 ; 263, 3

– متقابل الوضع section de position opposée (III) 237, 24-25

– ناقص ellipse (I) 191, 7-9 ; 193, 7, 15, 18, 20, 21, 24 ; 195, 4, 5, 7… ; (II) 213, 5, 8 ; 215, 15 ; 217, 12, 14 ; 219, 4, 16 ; 221, 1, 4, 8-9, 11-13 ; … ; (III) 235, 7-9 ; 237, 7, 8, 19 ; 239, 1 ; 241, 4, 10, 12, 22, 24-26 ; … ; (IV) 289, 7 ; (VI) 315, 2-4, 8, 16 ; 325, 15

– متوازية sections parallèles (I) 203, 10

قِطْعة ج قِطَع portion (III) 241, 26 ; 257, 15 ; 259, 3

قَاطع qui coupe (III) 235, 1

مقاطِع sécant (VI) 315, 11

تقاطَع se couper (III) 261, 16 ; 263, 13, 14

تقاطُع intersection (IX) 409, 2

انقطع se séparer (III) 241, 14

قعد

قاعدة ج قواعد base (III) 231, 20-22 ; 233, 4, 7 ; 235, 3 ; 241, 21 ; 249, 18 ; (IV) 283, 14, 19 ; 285, 13 ; 289, 3, 12 ; (V) 297, 7 ; (VI) 315, 5, 9, 10, 14 ; (VII) 355, 9 ; (IX) 411, 7

قاعدة الجسم base du solide (II) 213, 8, 9, 13, 14, 16, 17 ; 215, 2, 3, 7, 8…

قلّ

أقلّ plus petit (III) 237, 28 ; 271, 24 ; (X) 443, 9 ; 449, 4, 9 ; moins nombreux (IX) 403, 13

قلة المعرفة connaissant peu (IX) 399, 7

قليلاً un peu (III) 269, 27

قلب

منقلب solstice (III) 249, 7

قلد

قلّد imiter (IX) 401, 21 ; 403, 6

تقليد imitation (IX) 401, 8

قلم

أقلام plumes (III) 241, 20

قنطر

مقنطرات *muqanṭarāt* (III) 249, 10

قنو

باقتناء en concevant (III) 231, 7

قوس

قوس ج قسي arc (III) 251, 1 ; 253, 2 ; 257, 6 ; 259, 3 ; 261, 17, 19, 20, 26 ; 265, 18, 20, … ; (IV) 289, 1 ; (VI) 315, 20 ; 317, 13 ; 319, 3, 5, 17 ; 321, 1, 15 ; 323, 7, 20 ; (VII) 341, 9, 14 ; 343, 2, 3 ; 345, 14 ; 359, 2 ; 365, 5, 6 ; 367, 9 ; (IX) 415, 1, 2

قول

قال dire (I) 197, 1 ; 199, 6, 17 ; 201, 15, 20 ; 205, 3 ; 207, 6 ; (II) 215, 10 ; 217, 1, 14 ; 219, 11 ; 221, 1 ; 223, 8 ; (III) 231, 16 ; 261, 4 ; 263, 7 ; 267, 6, 11 ; 271, 13 ; (V) 295, 6 ; 299, 12 ; 305, 5 ; (VI) 313, 4 ; 317, 3, 11 ; (VII) 353, 2, 12 ; 357, 7, 16 ; 359, 1 ; 361, 1, 14 ; 363, 13 ; 365, 13 ; 367, 13 ; … ; (VIII) 391, 6, 14 ; (IX) 399, 5 ; 403, 1 ; 405, 1 ; 409, 3 ; 411, 12 ; 417, 1, 12 ; (X) 433, 14 ; 435, 12 ; 437, 3 ; 439, 15 ; 443, 21

قول opuscule (V) 295, 2 ; 309, 6 ; propos (VI) 313, 12 ; 317, 1 ; 323, 21 ; 437, 3 ; (IX) 401, 16, 17 ; le fait de dire (VI) 315, 6 ; 323, 9 ; traité (VII) 369, 9 ; (VIII) 395, 5

مقالة livre, traité (III) 255, 26 ; 263, 8, 12 ; 265, 11 ; 271, 15 ; 273, 4 ; 295, 5 ; (V) 299, 10 ; (VII) 335, 3 ; 351, 18 ; (IX) 401, 14

قوم

قام élever (II) 221, 2 ; (IX) 403, 14, 15

قائم (على زاوية قائمة) perpendiculaire (I) 207, 2 ; (II) 213, 13 ; (III) 231, 21 ;

	233, 4, 10 ; 237, 17, 18, 20, 21 ; 261, 27 ; 265, 23 ; 267, 3…
قائمة ج قوائم (انظر زاوية)	droit
ضلع قائم (انظر ضلع)	côté droit
أقام	élever, dresser (III) 271, 10, 20, 22 ; 277, 26 ; 279, 4
استقامة	prolongement (V) 307, 7
مستقيم (انظر خط)	droite
قوي	
قوي على	pouvoir (III) 269, 2 ; (VI) 325, 2 ; 329, 13 ; (VIII) 389, 10 ; (IX) 409, 9 ; 411, 9 ; (X) 427, 8, 12
خط قوي	droite qui peut (I) 199, 10 ; (IX) 407, 15 ; 411, 1
قوة	puissance (VI) 315, 25 ; 319, 7 ; 323, 4, 5 ; (IX) 399, 10, 18, 19 ; 401, 1
قيس	
مقياس ج مقاييس	gnomon (III) 261, 5, 13, 28 ; 263, 6 ; 265, 16, 22-24 ; 267, 2, 10 ; … ; mesure (III) 271, 1, 3
كبرُ	
أكبر	plus grand (VI) 331, 1
كتبَ	
كتبَ	écrire (III) 279, 13
كتاب	épître, livre (I) 191, 2 ; 209, 4, 5 ; (II) 213, 2 ; 219, 15, 18 ; 221, 4 ; 225, 4 ; 227, 14 ; (III) 231, 12 ; 239, 9 ; 247, 6 ; 249, 11 ; 255, 26 ; 257, 8 ; 263, 8, 12 ; 265, 12 ; 271, 16 ; … ; (IV) 283, 6, 10 ; 285, 1, 4, 6 ; (V) 297, 14 ; 299, 10 ; (VI) 313, 4, 6 ; 315, 16, 29 ; 317, 3 ; 321, 7 ; 323, 11, 20 ; 331, 19 ; (VII) 351, 18 ; (VIII) 391, 1 ; (IX) 399, 2, 11 ; 401, 10, 14, 18, 20 ; 407, 7, 19 ; 419, 6
كتاب مدخل	livre introductif (IX) 399, 11
كثر	
كثير	nombreux (I) 193, 4 ; (III) 251, 1 ; 253, 2, 12 ; 255, 17 ; (VI) 323, 7 ; 325, 5 ; 329, 15 ; 331, 8, 14 ; (IX) 401, 21
أكثرُ	la plupart (I) 209, 4 ; (III) 235, 10 ; plus grand (III) 271, 24 ; (X) 437, 5 ; plus (III) 269, 27 ; (VI) 317, 17
كرو	
كرة	sphère (I) 193, 10, 12, 17 ; 195, 1 ; (VI) 315, 21
كسر	
كسر	fraction (X) 437, 14, 15
كاغد	papier (III) 241, 9

كفأ

مكافئ (انظر قطع)	parabole
تكافؤ	réciprocité (V) 297, 10, 12
متكافئ	inversement proportionnel (V) 299, 15 ; 301, 13

كل

كليّ (انظر أيضًا فحص)	universel (X) 423, 4, 10, 11 ; 425, 26 ; 433, 2

كلم

كلام	propos (VII) 369, 16

كم

كمية ج ات	quantité (III) 231, 13 ; grandeur (III) 267, 8

كمل

كامل	complet (VI) 317, 2
أكمل	pour compléter (VI) 323, 22

كوّ

كوة	ouverture (III) 255, 18

كود

كاد	à peine … (VI) 323, 1

كون

كائن	formé (I) 201, 3 ; 205, 5 ; (III) 239, 10, 11 ; engendré (VI) 315, 3
كون	le fait d'être (VI) 315, 28 ; 319, 6 ; formation (VI) 325, 8

كيف

كيف	comment (III) 261, 4, 12 ; 271, 5 ; (VII) 339, 14 ; 341, 5, 17 ; 343, 4 ; 345, 15 ; 349, 3 ; 359, 9 ; 369, 20 ; 371, 6, 7… ; (X) 423, 5, 13 ; 425, 27 ; 427, 3 ; 429, 9
كيفية	comment (III) 231, 12 ; 233, 12 ; 249, 12 ; 255, 11 ; (IV) 287, 8 ; (V) 295, 3 ; 297, 14, 20 ; (VII) 357, 14 ; 361, 4 ; qualité (VI) 313, 9 ; pour expliquer (VI) 315, 27 ; méthode (X) 423, 8

لئم

التئم (التئام)	se former (VI) 313, 16, 18, 22 ; 315, 3, 16, 25 ; (X) 437, 13

لحق

لحق	rencontrer (III) 237, 7, 9, 10
ألحق	joindre (VII) 369, 16

لزق

لزق coller (III) 241, 8

لزم

لزم s'ensuivre nécessairement, requérir (I) 193, 2, 21 ; 205, 7 ; (VI) 323, 5, 19 ; 325, 8

لازم nécessaire (VI) 315, 28

لازمة pivot (VII) 347, 8

لوازم conditions nécessaires (X) 425, 26

لشى

تلاشى s'évanouir (V) 301, 4, 15

لطف

لطيف (انظر أيضًا سر) subtil (III) 231, 13 ; fin (III) 241, 23

لقي

لقي rencontrer (I) 207, 4 ; (III) 237, 2 ; 241, 17 ; 249, 14 ; 251, 9, 11 ; 271, 6 ; 273, 3 ; (V) 295, 8 ; 301, 11, 14 ; 303, 1, 10, 11 ; 305, 3, 11 ; 307, 4… ; (VI) 321, 3 ; 331, 11 ; (VIII) 389, 7 ; 391, 3

ألقى retrancher (I) 203, 3 ; (III) 269, 6, 10 ; 273, 8, 11 ; (X) 425, 9, 11, 12, 14 ; 429, 3 ; 435, 7, 11 ; 439, 6, 12 ; 441, 4…

التقى (انظر أيضًا خط) se rencontrer (II) 215, 12, 14 ; (III) 247, 13 ; 257, 14 ; 261, 24 ; (V) 305, 5 ; (VII) 345, 2 ; 375, 10 ; 381, 20 ; (IX) 409, 4

التقاء rencontre (III) 257, 14, 15

ملتقيان qui se rencontrent (III) 263, 2 ; 267, 5

لمس

التمس chercher instamment (IX) 399, 5

لولب

لولب ressort (IV) 289, 3

ليق

أليق plus convenable (X) 423, 10

مثل

مثل ج أمثال égal (I) 199, 9, 13, 16 ; 203, 6 ; 207, 5, 12 ; (II) 217, 24, 25 ; 219, 2, 3 ; 227, 3-5 ; (III) 249, 17 ; 251, 6-8, 17 ; 253, 4, 5, 9, 11 ; 255, 2… ; (V) 303, 2 ; (VI) 321, 21 ; 331, 2 ; (VII) 337, 12, 18 ; 339, 7 ; 341, 1, 13 ; 343, 2, 5 ; 345, 2-8… ; (VIII) 389, 11 ; 391, 16, 17 ; 393, 1, 14, 18, 19 ; 395, 1 ; (IX) 403, 7, 8 ; 405, 9 ; 407, 3 ; 411, 23 ; 413, 7, 8 ; 417, 17 ; (X) 423, 16 ; 427, 7 ; 435, 11 ; 445, 5 ; 447, 15 ; 451, 13-16

	tel, comme exemple (II) 221, 14 ; (IV) 285, 12 ; 287, 1, 9, 10 ; 289, 1, 12 ; (V) 295, 16 ; 297, 1, 5, 6, 8, 13, 18 ; (VI) 317, 17 ; 319, 14 ; 321, 8 ; 323, 6 ; 329, 16 ; 331, 14 ; (IX) 401, 10, 12
	pair (III) 231, 8
مثلاً	par exemple (IV) 287, 3 ; 289, 10 ; 291, 1 ; (VI) 325, 7 ; (IX) 407, 14 ; (X) 431, 23
على مثل	à l’exemple (III) 241, 19 ; (VI) 317, 5
مثلان	double (VII) 337, 8, 12, 13 ; 339, 6, 20 ; 341, 2, 14 ; 343, 2 ; 345, 20 ; 347, 14 ; …
ثلاثة أمثال (انظر ثلاثة)	triple
أربعة أمثال (انظر أربعة)	quadruple
مثال	exemple (I) 203, 8 ; (III) 261, 18, 21 ; 273, 13 ; (VI) 315, 27 ; 319, 13 ; 331, 17 ; (X) 435, 10 ; 447, 17 ; 449, 1 ; 451, 2, 9 ; (XI) 457, 9 ; représentation (III) 239, 13
على مثال	comme (III) 241, 19
مثّل	représenter (VI) 325, 17 ; donner un exemple (X) 433, 8 ; 435, 4 ; 449, 12
المخانيقي	*Mécaniques* (IV) 285, 3
المخانيقونات	mécaniques (IX) 401, 1
مدّ	étendre (V) 297, 11
مدّ	extension (IV) 287, 1
امتداد	tension (III) 247, 10
مرّ	
مرّ	passer (II) 223, 1 ; (III) 263, 3 ; 267, 2
مرّتين	deux fois, double (X) 429, 6 ; 431, 5 ; 453, 7 ; (XI) 457, 8
مارّ بـ	qui passe (II) 219, 23, 26 ; 223, 6
مس	
ماسّ	être tangent (III) 251, 14 ; 253, 3 ; (VI) 319, 16 ; 323, 3 ; (VIII) 391, 2 ; (IX) 403, 14 ; 405, 1
مماسّ	tangent (I) 201, 4, 5 ; (VI) 321, 1 ; 323, 1
متماسّ	tangent (VI) 331, 13
مسح	
مساحة	mesure (V) 301, 7
مكن	
أمكن	être possible, pouvoir (III) 247, 1 ; (IV) 285, 8, 12 ; 287, 6-8, 10, 12 ; 289, 6, 8, 11… ; (V) 295, 8 ; 301, 5, 6, 18 ; (VI) 319, 11 ; (VII) 335, 17 ; (IX) 401, 4 ; 407, 5 ; (X) 437, 1, 5, 15 ; 451, 2

ممكن possible (IX) 403, 10

موه

موّه tromper (IX) 401, 4, 5
مويِّه leurre (IX) 401, 4
مموه celui qui s'est leurré (IX) 401, 16

ميل

مائل (انظر أيضًا ضلع) incliné (IV) 285, 15
ميل ج ميول déclinaison (III) 261, 10, 17, 18, 21-23 ; 265, 18 ; 267, 4 ; 269, 14 ; 271, 24

ومأ

أومأ indiquer (VI) 313, 11 ; 315, 29 ; 323, 10 ; proposer (IX) 401, 3

نبط

استنباط le fait de déduire (VII) 335, 17

نبه

نبه attirer l'attention (III) 231, 15

نتأ

ناتئ qui dépasse (III) 241, 7

نتج

نتيجة conséquence (VII) 341, 17

نجر

نجارون menuisiers (IX) 407, 10

نحو

نحو vers (III) 237, 8, 11, 23 ; dans la direction de (IV) 283, 14 ; 287, 2 ; 289, 3
على نحو ما comme (I) 205, 6 ; de cette manière (X) 453, 4
ناحية côté (III) 279, 7
من الناحيتين جميعًا de part et d'autre (III) 279, 7

نرماذجة cheville (IV) 287, 10 ; 289, 10, 16, 20 ; 291, 8

نزل

بمنزلة dans le même état (III) 241, 12 ; qui tient lieu (III) 255, 19 ; représenté par (X) 425, 1, 4, 8, 15-17, 20-23 ; …

نسب

نسبَ — taxer, attribuer (IX) 401, 2, 6, 8

نسبة ج نسب — rapport (I) 197, 11, 13, 14, 16, 17 ; 199, 1, 3, 8-10, 12 ; … ; (II) 219, 18, 19 ; 221, 4-7 ; 225, 2-8… ; (III) 235, 10 ; 255, 8, 10 ; 261, 13 ; 263, 9 ; 265, 2-6, 10, 13 ; … ; (VI) 325, 12, 13 ; 327, 2, 3, 5, 6 ; 331, 9 ; (VII) 337, 18, 19 ; 341, 6, 7, 10-12 ; 353, 7, 8 ; … ; (VIII) 391, 14, 15 ; 393, 1-5 ; (IX) 405, 6, 7, 9, 10 ; 407, 3-5, 14, 15 ; 409, 9 ; … …

- تأليفية — rapport musical (X) 433, 10

- ذات وسط وطرفين — en moyenne et extrême raison (VI) 323, 10

- عددية — rapport numérique (X) 449, 22, 24 ; 453, 9

- الأقصر إلى الأطول — rapport du plus court au plus long (V) 299, 15

مناسب — qui a un rapport (I) 193, 21

مناسبة — proportionnalité (II) 215, 16

تناسبَ — convenir (III) 255, 13

تناسُب الأعداد — proportionnalité des nombres (X) 451, 1 ; 453, 24

تناسب العددية — rapport <des cas> numériques (X) 433, 6, 9

تناسب الهندسية — rapport <des cas> géométriques (X) 433, 7-10

متناسب — proportionnel (II) 225, 15

نسق

نسقَ — s'ordonner (X) 449, 23 ; 453, 4

نسق — ordre (X) 451, 1 ; 453, 15, 23, 24

- طبيعي — ordre naturel (X) 449, 23

- متوالٍ على حده — un ordre qui se répète en lui-même (X) 435, 3

على هذا النسق — et ainsi de suite (X) 425, 3 ; selon l'ordre (X) 435, 2 ; ainsi systématiquement (VI) 329, 12

منسّق — ordonné (X) 435, 2

نشر

مِنْشر — scie (III) 241, 4, 23

نصب

نَصَبَ — placer (III) 261, 3

منصوب — placé (III) 273, 15

نصف

نصف ج أنصاف (انظر أيضًا دائرة، قطر) — milieu (II) 217, 20 ; (VI) 317, 5, 12, 14 ; 319, 7 ; moitié (III) 249, 16 ; 257, 3, 4, 6, 12, 13 ; 259, 3, 6 ; 271, 9, 25 ; … ; (V) 303, 2 ; 305, 2 ; 307, 13 ; (VI) 319, 3, 5, 13 ; 321, 2 ; 325, 7, 11 ; 331, 3, 5 ; (VII) 363, 1 ; 385, 6 ; (VIII) 393, 13 ; 395, 3 ; (IX) 413, 1-3, 5, 6, 16 ; 419, 4 ; (X) 425, 6, 9, 13-15, 21 ; 427, 11, 13, ; 429, 4, 11 ; … ; (XI) 457, 4, 10

نصف النهار — moitié de la journée (III) 271, 23 ; 273, 8, 24, 25 ; 275, 4-5 ; 277, 1, 2, 8, 9, 15…

ligne méridienne (III) 273, 17-19, 21, 23 ; 275, 1, 8 ; 277, 5, 13, 18 ; 279, 3	خط نصف النهار
partager en deux (X) 439, 13	نصّف
partagé en deux parties égales	منصف
milieu (VI) 331, 11 ; (VII) 337, 10 ; bissectrice (VII) 383, 2	منتصف
milieu (VII) 385, 2	انتصاف

نطق

être irrationnel (X) 437, 15	لا ينطق
irrationnel (X) 437, 3-4	غير منطق

نظر

examiner (I) 193, 19, 23	نظرِ
examen (III) 231, 10	نظرٌ
en examinant (I) 193, 6	بالنظر
celui qui regarde (VI) 323, 15	ناظر
homologue (II) 219, 3 ; 221, 3 ; (III) 261, 8, 9 ; 265, 17, 19 ; 269, 21, 22 ; 273, 7, 10 ; 275, 3 ; 277, 7… ; (VI) 325, 10	نظير ج نظائر
entretiens (III) 231, 10	مناظر

نظم

ordre numérique (X) 453, 4	نظم عددي
arrangement naturel (X) 435, 3	نظم طبيعي
arrangement de succession naturel (X) 435, 4	نظم متوالٍ طبيعي
s'ordonner (III) 255, 12	انتظم
composé d'une manière régulière (III) 255, 7	منتظم
rotation régulière (III) 255, 13	إدارة منتظمة

نفذ

traversant (III) 255, 18	نافذ
expédier (I) 193, 5 ; 209, 4 ; prolonger (VII) 357, 18	أنفذ

نفر

rejeter (V) 297, 17	نفر

نفس

même (III) 237, 16 ; (VI) 313, 19 ; (IX) 401, 5, 16 ; (X) 425, 16, 21 ; 427, 12 ; 429, 5 ; 431, 4 ; 437, 13, 14 ; 439, 5 ; 441, 11 ; … ; (XI) 457, 5	نفس ج أنفس

نفع

نافع — utile (IX) 399, 18

انتفع — profiter (IX) 401, 10

نفى

نفى — réfuter (V) 295, 12

نقب

مناقب — hauts faits (III) 231, 11

نقص

نقص — soustraire (III) 269, 1 ; 271, 23 ; retrancher (X) 451, 10 ; 453, 21 ; (XI) 457, 2, 7, 9, 12 ; être moindre (V) 297, 9, 12

ناقص — déficient (IV) 285, 17 ; (VI) 321, 19, 23 ; (X) 451, 11

تناقصَ — diminuer (III) 237, 14

استنقص — rabaisser (IX) 399, 12

نقط

نقطة ج نقط — point (I) 207, 8 ; (II) 215, 8 ; 219, 12, 13 ; 223, 11, 13, 14 ; (III) 233, 3, 6 ; 235, 2 ; 247, 8, 12 ; 249, 3, 6, 16 ; 251, 2, 5, 9, 10… ; (IV) 285, 10, 14 ; 287, 2, 13 ; 289, 2, 10 ; 291, 1, 3, 4 ; (V) 301, 1-3, 8, 11 ; 303, 2, 9, 11 ; 305, 3, 7 ; 307, 2… ; (VI) 313, 14, 15, 23 ; 315, 24, 26 ; 317, 6, 12, 16, 18, 19 ; … ; (VII) 337, 8 ; 343, 4 ; 345, 5 ; 347, 8 ; 349, 3 ; 351, 14, 16 ; 357, 11 ; 367, 7 ; (VIII) 389, 11 ; 391, 4, 10, 12 ; 393, 11 ; (IX) 403, 2-4, 15 ; 407, 18 ; 409, 2, 3 ; 415, 6, 11

نقل

نقلٌ — traduction (IX) 407, 20

نكر

نكر — refuser (V) 297, 17

نكس

منكوس — inverse (III) 267, 13 ; 269, 6

نمط

نَمَط — mode (V) 299, 4

نمو

نما — développer (X) 435, 1

نهج

منهاج — méthode (X) 431, 22

نهي

بلا نهاية — sans limite (III) 265, 7 ; 271, 7 ; illimité (III) 237, 16

إلى ما لا / غير نهاية — à l'infini (IV) 283, 14-15 ; (V) 299, 4-5 ; 301, 16 ; 303, 7 ; (VII) 345, 15 ; 347, 5 ; 355, 4 ; 357, 4 ; (X) 435, 2 ; 447, 13 ; 449, 27

دائمًا إلى ما لا / بلا نهاية (انظر أيضًا خرج) — toujours à l'infini (V) 295, 8 ; 297, 2, 4, 21 ; 301, 12-13

انتهى — revenir (III) 231, 18 ; aboutir (III) 271, 11 ; (V) 301, 13, 15 ; (VI) 331, 2, 4

انتهاء — fin (III) 241, 13, 14

عير متناهٍ — sans limite (VII) 337, 17 ; 367, 3

نوب

ناب — remplacer (III) 239, 8

نوع

نوع ج أنواع — espèce (III) 231, 11, 13 ; 233, 12 ; (X) 433, 14 ; 437, 20

هبط

هبط — descendre (IV) 291, 4

هندس

هندسة — geométrie (III) 269, 24, 29 ; 271, 1, 22, 27 ; (VII) 335, 11 ; (VIII) 389, 4 ; (IX) 399, 5, 15, 17 ; 401, 2, 6 ; 407, 7 ; (X) 433, 8 ; 439, 10 ; 451, 13

– ثابتة — – fixe (VII) 347, 4, 10

– متحركة — – mobile (VII) 347, 3, 7

مهندس — géomètre (I) 191, 11 ; (VI) 317, 6 ; 321, 7, 11 ; 323, 15 ; (IX) 399, 15, 16 ; 401, 7

هندسي (انظر أيضًا برهان، خطوط، تعليق) — géométrique (X) 433, 6

هاء

هيئة — forme (III) 241, 6, 7

تهيأ — être possible (III) 239, 12 ; 241, 11, 15 ; 255, 10 ; (V) 307, 1, 11 ; (VII) 335, 9, 17, 18 ; 337, 9 ; 339, 1, 8, 16 ; 341, 19 ; 343, 8 ; 345, 17 ; 349, 5, 16 ; 355, 15 ; 357, 13, 16 ; … ; (IX) 399, 7 ; 401, 13 ; 407, 6, 8 ; se former (V) 295, 14, 15 ; 297, 8, 12 ; préparer (III) 249, 8 ; être prêt à (V) 295, 16

هون

أهون سعي — la moindre démarche, la plus facile (I) 195, 19 ; (VI) 323, 14 ; (IX) 399, 7 ; 401, 13

هوى

هواء — air (III) 247, 2

وتر

وتر ج أوتر — corde (III) 251, 1, 5 ; 263, 13, 14 ; 265, 1 ; (VI) 321, 14, 22 ; (VII) 341, 18 ; 345, 14, 15 ; 349, 2 ; 357, 16 ; 385, 5 ; (X) 433, 14

أوتار القاعدة — les cordes de la base (II) 213, 11 ; 215, 3

وتّر — sous-tendre (V) 297, 7

وجب

واجب — nécessaire (VII) 343, 7

وجد

وجد (وجود) — trouver , exister (I) 193, 4, 7, 10, 12, 16, 18, 19, 23 ; 195, 1, 10 ; (III) 231, 7, 8 ; 255, 23, 25 ; 259, 1 ; 261, 12 ; 263, 5 ; 265, 8, 15 ; (V) 301, 17-19 ; 303, 13 ; (VI) 315, 21 ; 319, 2, 9, 10 ; 321, 4, 5, 7, 8 ; 323, 13 ; (VII) 335, 15 ; 373, 11 ; (IX) 407, 12 ; 415, 6 ; (X) 423, 5, 13 ; 425, 2, 3, 7, 9, 18, 23, 27 ; 427, 3… ; (XI) 457, 2, 9

وجدان — le fait de résoudre (X) 423, 8 ; 433, 1 ; 437, 20

وجود — le fait d'exister, de trouver (I) 191, 7, 9 ; 193, 22 ; (III) 233, 12 ; 241, 2 ; 255, 20 ; 261, 14 ; (VI) 313, 17 ; 321, 25 ; 323, 14 ; (VIII) 391, 7 ; (IX) 399, 11 ; 407, 9, 10 ; (X) 427, 10 ; existence (III) 255, 9 ; 257, 10 ; (VI) 317, 9

موجود — qui se trouve (I) 193, 12, 20 ; (VI) 313, 6 ; 315, 19 ; 323, 11

وجه

وجه ج وجوه، أوجه — manière (IV) 283, 12, 15 ; 291, 6 ; (X) 425, 2, 3, 9, 13, 19, 23 ; face (III) 241, 7, 8 ; surface (II) 241, 13 ; cas (X) 433, 5

جهة — direction, côté (I) 207, 5 ; (III) 237, 2, 6, 8, 10, 11, 23 ; (III) 253, 2 ; 257, 3 ; 273, 22 ; (IV) 287, 1, 2 ; 289, 2 ; (V) 299, 7 ; (VII) 347, 5 ; 367, 3 cas (I) 207, 9 ; manière (III) 255, 17 ; (VI) 313, 9-11

من الجهتين جميعًا، في الجهتين — de part et d'autre (III) 263, 1 ; 271, 10, 21 ; 277, 26-27 ; 279, 9, 10 ; (VIII) 391, 13

من جهة — pour (II) 221, 13 ; (III) 255, 17, 18, 22 ; d'après (III) 249, 2 ; en raison de (VI) 317, 18, 19 ; 319, 15 ; 321, 9 ; du fait de (VII) 361, 1

على جهة — par (X) 427, 5 ; 429, 10

على جهة أخرى — autrement (X) 441, 1

وحد

واحد — même (II) 215, 11, 13 ; (III) 235, 8, 9 ; 247, 13 ; 265, 21 ; 269, 14, 29 ; 279, 5 ; (V) 299, 15 ; (VI) 317, 6 ; 319, 1, 3, 14 ; (VII) 351, 5 ; 353, 7 ; (IX) 407, 10, 16 ; 411, 2, 10, 16 ; (X) 447, 9 ; 457, 11 ; un, unité (X) 437, 7-11, 18 ; 441, 9, 10, 13 ; …

ورد

اطّرد — être uniformément (VI) 319, 11

مطرد — uniforme (I) 191, 14

ورب

مورب — incliné (III) 247, 3 ; (VI) 315, 4, 8

مورب الوضع — de position oblique (III) 255, 18-19

ورق

ورّاق — papetier (III) 241, 8

وزي

وازى — être parallèle (I) 207, 5, 9 ; (II) 215, 14 ; 217, 4, 21 ; 219, 1, 13, 14 ; 223, 10 ; 225, 13 ; (III) 251, 2-4 ; 257, 5 ; (VII) 337, 7 ; 341, 10, 11 ; 349, 3 ; 353, 1 ; 355, 11 ; 357, 4, 6 ; 359, 17 ; 363, 12 ; … ; (VIII) 389, 8 ; 393, 10, 13, 18 ; (IX) 409, 5 ; 411, 20 ; 415, 11 ; 417, 9, 11 ; (X) 451, 15

مواز لـ — parallèle (I) 193, 2 ; 197, 3-5, 8 ; 199, 4, 15 ; 201, 4, 5, 17-19 ; … ; (II) 215, 7, 20 ; 219, 14, 23, 26 ; 223, 5, 7, 13, 15, 17, 18 ; … ; (III) 235, 2, 12 ; 247, 3 ; 261, 3 ; 263, 1 ; 265, 9, 10, 23, 24… ; (IV) 283, 16 ; 291, 16 ; (V) 303, 7 ; 305, 6, 10 ; 307, 13 ; (VI) 315, 9, 10, 13, 15 ; (IX) 405, 5 ; 415, 7 ; (X) 441, 4

موازاة — parallélisme (II) 213, 5 ; 215, 1

على موازاة — parallèle, parallèlement (II) 215, 18-19 ; 223, 2 ; (III) 263, 2 ; 273, 15

توازٍ — parallélisme (VII) 361, 1

متوازٍ — parallèle (II) 213, 5, 19 ; 215, 6, 12 ; 217, 6-7, 8, 17, 23 ; (III) 237, 10 ; 257, 2, 11, 12, 16 ; (V) 309, 2 ; (VII) 377, 5

دائرتان متوازيتان — cercles parallèles (VI) 315, 2

متوازي الأضلاع (انظر ضلع) — parallélogramme

وسط

أوسط — le terme du milieu (X) 453, 10, 12, 16, 18

الموسطان — *Les Deux Moyennes* (IV) 285, 1

الموسطان — les deux moyennes (VIII) 389, 3 ; 395, 5

وصف

وصف (وصْف، صفة) — décrire (III) 231, 12 ; 239, 9 ; 265, 25; (IV) 283, 7 ; 285, 4 ; 291, 5 ; (V) 295, 9 ; (X) 425, 14, 26 ; 441, 17 ; 443, 11 ; 449, 1

وصْف — description (III) 231, 4

وصل

وصَل — joindre (II) 213, 5, 6, 15 ; 215, 1, 5, 9 ; 217, 6, 17 ; 223, 17 ; (III) 233, 7 ; 235, 6 ; 251, 10, 17 ; 253, 6 ; 255, 4 ; 257, 3 ; 261, 19 ; 279, 11 ; 305, 2, 7 ; (VI) 315, 24 ; 319, 6 ; 325, 5 ; (VII) 339, 18 ; 341, 6, 19 ; 343, 6 ; 347, 10, 12 ; 349, 7 ; 351, 6 ; 355, 7 ; 357, 5… ; (VIII) 389, 9 ; 391, 13 ; 393, 13, 14 ; (IX) 411, 14 ; 417, 10 ; (X) 435, 17

أوصل — joindre (III) 249, 3

توصّل — parvenir (VII) 369, 12

وضع

وضع poser (III) 247, 2 ; 251, 12 ; 253, 8, 9 ; 273, 1, 18, 21 ; 275, 6, 7 ; 277, 2... ; (IV) 289, 11 ; 291, 3, 6, 15 ; (V) 307, 1, 3 ; (VII) 347, 8 ; (VIII) 391, 7 ; (X) 431, 22 ; proposer (X) 423, 10

وضع ج أوضاع(انظر أيضًا معلوم) position (III) 239, 9 ; 255, 11, 15, 16 ; 273, 19 ; (VI) 317, 10 ; cas (III) 233, 5 ; 239, 10

موضع ج مواضع position, place, lieu, endroit (III) 231, 19 ; 241, 5 ; 265, 22 ; 269, 14, 15 ; 273, 19 ; 277, 23 ; 279, 14 ; (IV) 285, 10, 11 ; (V) 297, 5 ; (VI) 313, 16, 19, 20

موضوع donné (III) 233, 2, 3 ; (VII) 353, 2 ; 375, 7 ; posé (VI) 313, 17 ; proposé (VI) 323, 19

وطأ

وطّأ préparer (V) 301, 10

وفر

وفّر دواعى avoir de nombreux motifs (VII) 335, 13

وفق

اتفق se trouver (V) 297, 18

كيفما اتّفق quelconque (III) 257, 2 ; (X) 429, 1

وقت

وقت ج أوقات moment (III) 241, 13 ; (IV) 289, 20 ; 291, 2, 8, 9 ; (V) 297, 18 ; (X) 453, 23

وقت الضرورة la nécessité nous impose (IV) 289, 12

وقع

وقع se trouver, tomber, se produire, avoir lieu (I) 195, 2, 5 ; (II) 213, 16 ; 215, 12 ; 223, 14, 15 ; (III) 233, 10 ; 247, 12 ; 261, 10 ; 263, 3 ; 267, 3 ; 277, 26 ; 279, 10 ; (IV) 283, 16, 20 ; (VI) 315, 20 ; (VII) 383, 7 ; 391, 4 ; (VIII) 393, 5 ; (IX) 399, 7 ; s'identifier (V) 301, 6, 14

واقع abaissé (II) 213, 16 ; qui a lieu (X) 453, 24

وقف

وقوف le fait de s'arrêter à, de connaître (V) 295, 14 ; 297, 8, 16

أوقف s'arrêter à (V) 295, 14 ; mener (IX) 401, 4

ولد

متولد engendré (I) 193, 15

ولي

ولي être du côté de (III) 273, 20, 23 ; 275, 8 ; 277, 3, 5, 13 ; 279, 3 ; (VI) 323, 9 ;

329, 4, 5, 18 ; 331, 5 ; suivre (III) 241, 11	
successivement, ainsi de suite (X) 449, 26, 27	على الولاء
les quatre se succèdent en proportion (VIII) 393, 6	توالت الأربعة متناسبة
les quatre se succèdent en proportion (VIII) 391, 8	الأربعة متوالية متناسبة
succession (VI) 331, 3	توال
successif	متوالٍ (انظر عدد، مربع)
	وهم
imagination (VI) 319, 8 ; 321, 10 ; (IX) 399, 7	وهم
imaginer (III) 237, 13, 16 ; 261, 24 ; (IV) 285, 10, 14 ; (VI) 315, 23 ; 325, 9	توهم
	يد
devant (V) 295, 9	بين يدي
	يسر
plus aisé (IX) 403, 13	أيسر
	يقظ
prendre conscience (V) 301, 19	يقّظ
Hellènes (IX) 399, 16	اليونانيون

INDEX DES NOMS PROPRES

INDEX DES CONCEPTS

INDEX DES TRAITÉS

INDEX DES MANUSCRIPTS

OUVRAGES CITÉS

1.1. Manuscrits des textes arabes d'al-Sijzī

Fī ʿamal al-birkār al-tāmm wa-huwa birkār al-makhrūṭ
Rampur (Inde), n° 3698, fol. 103ᵛ-104ᵛ.

Fī ʿamal al-musabbaʿ fī al-dāʾira wa-qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya
Le Caire, Dār al-Kutub, Riyāḍa 41, fol. 113ᵛ-115ᵛ (noté Q).
Istanbul, Süleymaniye, Reşit 1191, fol. 80ᵛ-83ʳ (noté R).
Paris, Bibliothèque nationale 4821, fol. 10ᵛ-16ᵛ (noté B).

Fī anna al-ashkāl kullahā min al-dāʾira
Khuda Bakhsh, n° 2519, fol. 280ʳ-282ʳ.

Istikhrāj al-muwassaṭayn wa-qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya bi-ṭarīq al-handasa
Lahore, coll. Nabī Khan et Obaidur Rahman Khan, fol. 30-32 (noté N).

Fī jawāb masʾala ʿadadiyya ʿalā al-ṭarīq al-kullī
Lahore, coll. Nabī Khan et Obaidur Rahman Khan, fol. 340-351 (noté N).

Fī kayfiyyat taṣawwur al-khaṭṭayn alladhayni yaqrubāni wa-lā yaltaqiyāni
Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 68ʳ. (noté C).
Istanbul, Université A 314, fol. 51ʳ-54ʳ (noté I).
Leiden, Université Or 14, fol. 226-231.
Meshed, Āstān Quds 5521/3, fol. 11ʳ-13ᵛ (noté M).
New York, Columbia University Or 45/11, fol. 233-236 (noté K).

Fī khawāṣṣ al-mujassam al-nāqiṣ, al-zāʾid wa-al-mukāfiʾ
Istanbul, Süleymaniye, Reşit 1191, fol. 63ᵛ-65ᵛ (noté R).

Fī khawāṣṣ al-qubba al-zāʾida wa-al-mukāfiʾa
Paris, Bibliothèque nationale 2457, fol. 137ᵛ-139ʳ (noté B).
Istanbul, Süleymaniye, Reşit 1191, fol. 66ʳ-68ᵛ (noté R).

Fī al-Masāʾil al-mukhtāra (Fragment)
Le Caire, Dār al-Kutub, Riyāḍa 699, fol. 42ᵛ-43ʳ (noté C).
Dublin, Chester Beatty 3045, fol. 85ᵛ-86ʳ (noté D).

Fī qismat al-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi-thalāthat aqsām mutasāwiya
Leiden, Université Or 168, fol. 23ʳ-40ᵛ (noté L).

Fī waṣf al-quṭūʿ al-makhrūṭiyya
Leiden, Université Or 168, fol. 1ᵛ-22ᵛ (noté L).

1.2. AUTRES MANUSCRITS

Hibat Allāh al-Asṭurlābī al-Baghdādī
Maqālat al-birkār al-kāmil al-tāmm, Istanbul, Université A. 314, fol. 119ᵛ-122ᵛ.

Ibn al-Haytham
Fī ḥall shukūk Kitāb Uqlīdis fī al-Uṣūl *wa-sharḥ ma'ānīhi*, Istanbul, Université 800.

Ibn al-Ḥusayn
Risālat al-birkār al-tāmm wa-kayfiyyat al-takhṭīṭ bihi, Alger 1446, fol. 95ʳ-106ᵛ.

Maïmonide
Ḥawāshī ba'ḍ ashkāl Kitāb al-Makhrūṭāt, Manisa, Genel 1706/6, fol. 26ᵛ-33ᵛ.

Al-Sijzī
Jawāb Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Jalīl 'an masā'il handasiyya
Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 53ʳ-61ʳ.
Istanbul, Reşit 1191, fol. 110ᵛ-123ᵛ.
Al-Madkhal ilā 'ilm al-handasa
Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 2ᵛ-8ʳ.
Fī al-Masā'il al-mukhtāra allatī jarat baynahu wa-bayna muhandisī Shīrāz wa-Khurāsān wa-ta'līqātih
Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 35ʳ-52ᵛ.
Istanbul, Sülemaniye, Reşit 1191, fol. 31ᵛ-62ʳ.

2. LIVRES ET ARTICLES

Apollonius
Conics of Apollonius, *Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis, edidit et latine interpretatus est I.L. Heiberg*, 2 vol., Leipzig, Teubner, 1891, 1893 ; repr. Stuttgart, 1974.
Les Coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau tirage, Paris, Librairie A. Blanchard, 1959.

Avicenne, *al-Shifā'*, *La Logique*, vol. V, éd. A. E. Affifi, Le Caire, 1952.

Baldassarre Boncompagni, *Tre scritti di Leonardo Pisano*, Firenze, 1854.

P. Crozet, « L'idée de dimension chez al-Sijzī », *Arabic Sciences and Philosophy*, 3.2, 1993, p. 251-286.

Diophante : Les Arithmétiques, texte établi et traduit par Roshdi Rashed, « Collection des Universités de France », t. III et t. IV, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

G. Endress, « Yaḥyā ibn 'Adī's Critique of Atomism », *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 1, 1974, p. 155-179.

Euclide

Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard, Paris, 1819 ; Nouveau tirage augmenté d'une importante Introduction par M. Jean Itard, Paris, Librairie A. Blanchard, 1966.

Euclid's Elements, translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, vol. I, New York, Dover, 1956.

Al-Fārābī

Al-Manṭiqiyyāt li-al-Fārābī, éd. M. Danesh-Pajouh, Qum, 1408 H.

J. P. Hogendijk

« How Trisections of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry », *Historia Mathematica*, 8, 1981, p. 417-438.

« Rearranging the Arabic Mathematical and Astronomical Manuscript Bankipore 2458 », *Journal for the History of Arabic Sciences*, 6, 1982, p. 133-159.

« Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon », *Archive for History of Exact Sciences*, 30, 1984, p. 197-330.

Ibn Taymiyya, *Kitāb al-Radd ʿalā al-Manṭiqiyyīn*, Bombay, 1949.

Al-Nadīm, *al-Fihrist*, éd. R. Tajaddud, Téhéran, 1971.

S. Pines, *Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Medieval Science*, Leiden, 1986.

Proclus

Procli Diadochi Lycii Elementatio Physica, ed. A. Ritzenfeld, Leipzig, 1912.

Les Commentaires sur le premier livre des Éléments *d'Euclide*, traduits pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Paris, Librairie A. Blanchard, 1948.

R. Rashed

Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al, en collaboration avec S. Ahmad, Damas, Presses de l'Université de Damas, 1972.

« L'analyse diophantienne au Xᵉ siècle : l'exemple d'al-Khāzin », *Revue d'histoire des sciences*, 32.3, 1979, p. 193-222 ; repris dans *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Collection « Sciences et philosophie arabes - Études et reprises », Paris, Les Belles Lettres, 1984, p. 195-225.

Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques. Algèbre et Géométrie au XIIᵉ siècle, coll. « Sciences et philosophie arabes - textes et études », 2 vol., Paris, Les Belles Lettres, 1986 ; trad. arabe : Beyrouth, 1998.

« Al-Sijzī et Maïmonide : Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des *Coniques* d'Apollonius », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 37.119, 1987, p. 263-296.

Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle. Vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, London, al-Furqān, 1996 ; vol. II : *Ibn al-Haytham*, London, al-Furqān, 1993 ; vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, al-Furqān, 2000 ; vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, London, al-Furqān, 2002.

« Al-Qūhī et al-Sijzī : sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques », *Arabic Sciences and Philosophy*, 13.1, 2003, p. 9-44.

« Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes », *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIII, 2003, n. 2.
« Philosophie et mathématiques selon Maïmonide : Le modèle andalou de rencontre philosophique », dans *Maïmonide, philosophe et savant (1138-1204)*, Études réunies par Tony Lévy et Roshdi Rashed, coll. « Ancient and Classical Sciences and Philosophy », Leuven, Peeters, 2004, p. 253-273.
Geometry and Dioptrics in Classical Islam, London, al-Furqān, 2004.

R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au* x^e^ *siècle*, Leiden, E.J. Brill, 2000.

R. Rashed et Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au* IX^e^ *siècle. Le recueil de propositions géométriques de Na'īm ibn Mūsā*, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, 2004, p. 9.

R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Librairie A. Blanchard, 1999.

B. Russell, *Principles of Mathematics*, 2^e^ éd., London, 1937.

C. Schoy, « Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Viekoniglichen Bibliothek zu Kairo », *Isis*, 8, 1926, p. 21-40.

Al-Sijzī
Collection of Geometrical Works by al-Sijzī, edited by Fuat Sezgin with an introduction by Jan P. Hogendijk, Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Facsimile Editions, Series C, vol. 64, Frankfurt am Main, 2000.

P. Voorthoeve, *Handlist of Arabic Manuscripts*, Leiden, University Press, 1980.

F. Woepcke
L'Algèbre d'al-Khayyām, Paris, 1851.
« Trois traités arabes sur le compas parfait », *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques*, 22, 1874, p. 1-175.

TABLE DES MATIÈRES

TEXTES ET TRADUCTIONS

PRINTED ON PERMANENT PAPER • IMPRIME SUR PAPIER PERMANENT • GEDRUKT OP DUURZAAM PAPIER - ISO 9706

N.V. PEETERS S.A., WAROTSTRAAT 50, B-3020 HERENT

ISBN 90-429-1593-5
9 789042 915930

LES CAHIERS DU MIDEO 3