ROSHDI RASHED
(Ed.)

Thābit ibn Qurra

Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad

DE GRUYTER

Thābit ibn Qurra

Scientia Graeco-Arabica

herausgegeben von
Marwan Rashed

Volume 4

Walter de Gruyter · Berlin · New York

Thābit ibn Qurra

Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad

edited by

Roshdi Rashed

Walter de Gruyter · Berlin · New York

∞ Printed on acid-free paper which falls within
the guidelines of the ANSI to ensure permanence and durability.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalogue record for this book is available from the Library of Congress.

ISBN 978-3-11-022078-0

ISSN 1868-7172

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche
Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet
at http://dnb.d-nb.de.

Printed in Germany
Cover design: Christopher Schneider, Laufen
Printing and binding: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

PREFACE

If there are particular high points in the history of the world in which civilisation, so to speak, crystallises, then ninth-century Baghdad represents one of them. Like Athens or Alexandria before her and London, Paris or Berlin some centuries later, the capital of the Abassid Empire was the crucible from which there arose a profusion of new ideas spanning both theory and practice. Fundamentally new discoveries were augmented by creative appropriations from the past in science and philosophy. It would take several volumes to provide an inventory of the riches belonging to this 'Baghdad moment' of history and to give an adequate account of the social, political and ideological conditions that engendered it. This book's ambitions are much more modest. It sets out to examine the explosion of science in these years by concentrating on a typical example, one of the best representatives of Baghdad science and philosophy in the second half of the ninth century: Thābit ibn Qurra. In so doing, we indeed also intend to furnish a stone for an edifice that is yet to be built, for there is still no informed and competent history of the Abassid Golden Age. In its absence, let us at least hope that the positive act of establishing, translating and analysing the texts will have preserved us from the snap judgements that researchers are too often tempted to substitute for the historical framework that is not to hand. The effort that has gone into this work will have been sufficiently recompensed if it opens the way to future research by enabling it to bring new facts to light.

One of the most striking features of ninth-century Baghdad lies in the relationship that subsisted between its 'Moderns', the contemporary scholars, and the 'Ancients' upon whose work they built, whether Greek, Arab, Persian or Indian. Here we must be careful to avoid starting from a mistaken premise. Though the immense historical curiosity of the time prompted an antiquarian interest in virtually everything that the wisdom of the past had produced, the only aspects of the work that were *taken up* and carried forward were those that could provide the answers to questions that were very much of the moment. In taking what they wanted from the rich legacy of the past, and leaving what they did not, the Baghdad scholars brought about a complete reshaping and reorganisation of knowledge. The acquisitions made in the ninth century, extended and deepened as they were in the two centuries that followed, brought into being a new encyclopaedia of knowledge. It is no exaggeration to say that in the fields of mathematics, astronomy and philosophy, the insights attributable to the Abassid Golden Age were, throughout the next seven centuries, to feed the main scientific and philosophic traditions – in varying degrees – in Arabic, in Persian, in Latin or in Hebrew as the case might be. Two phenomena contributed to the emergence of these traditions. One was the active research that had been going on at least since the eighth century in humane and social disciplines such as linguistics, jurisprudence, hermeneutics, history, theology etc, certain aspects of which had been, as it were, salvaged from the past and extended by the mathematicians and philosophers. The second was the massive scale on which the translation of the scientific and philosophic writings of the ancients, and in particular the Greeks, was being undertaken. The close interrelation between research and translation – that is to say translation for the purposes of research – had a mutually formative effect on both activities.[1]

It was in ninth-century Baghdad that al-Khwārizmī did his work. Barely three decades after the beginning the algebraic tradition that he inaugurated, the Banū Mūsā team, to which Thābit ibn Qurra was quickly to attach himself, was engaged in the task of transforming the Archimedean tradition in infinitesimal geometry and that of Apollonius in the geometry of conics and the geometry of position. Thābit ibn Qurra had a part to play in the establishment of this movement, and was active too in the fields of spherical geometry, Euclidean arithmetic, statics, etc. He also had a contribution to make to the philosophical tradition in subjecting Aristotelian physics, and the ontology whose vehicle it was, to an orderly criticism in aid of a mathematical formalism that took its inspiration from Plato.

The marking of the eleven hundredth anniversary of the death of Thābit ibn Qurra provided the opportunity to promote knowledge both of his work and of the intellectual activity at that period in a town that, seven and a half centuries after the end of its Golden Age, was to find itself martyred twice over.

To this end, *The Furqān Foundation for Islamic Heritage* was good enough to take up my suggestion to organise an international conference in honour of the Baghdad scholar. From all the work presented throughout the period of the conference we have reproduced here only the contributions that were explicitly relevant to Thābit ibn Qurra scientist and philosopher. The late Professor Ibish and Ms. Louise Hosking provided me with efficient practical assistance in preparing for this conference.

[1] See R. Rashed, 'Greek into Arabic: Transmission and Translation', dans James E. Montgomery (ed.), *Arabic Theology, Arabic Philosophy. From the Many to the One: Essays in Celebration of Richard M. Frank*, Orientalia Lovaniensia Analecta 152, Leuven / Paris, Peeters, 2006, pp. 157-196.

The Furqān Foundation generously financed both the organisation of this meeting and the preparation for the press of the part of its Proceedings contained in this book. The work should have appeared some years ago, but circumstances beyond my control have delayed its publication. I am sorry for that, and thank the colleagues who have contributed to it for their understanding and patience. My thanks are also due to the publishers Walter de Gruyter for their kindness in including it in their collection. Finally, my thanks go to Madame Aline Auger for her invaluable collaboration both in preparing the manuscript for printing and compiling the index.

Roshdi RASHED
Bourg-la-Reine, mars 2009

SOMMAIRE

INTRODUCTION

THĀBIT IBN QURRA, SCHOLAR AND PHILOSOPHER (826-901)

Roshdi RASHED

The celebration of the eleventh centenary of the death of the mathematician, astronomer, physician, and philosopher Thābit ibn Qurra is much more than the simple commemoration of an historical event. On the contrary, it is an undertaking fraught with a multiplicity of meanings. I would like to mention three of these, before returning to the scholar himself and his scientific contribution.

The first of them is directly relevant to the understanding of the Islamic legacy. The Islamic heritage is not limited to the sciences linked to Islam as a revealed religion and a society of believers, such as the disciplines concerned with Koranic hermeneutics or the prophetic Word, or again jurisprudence, etc. It embraces other fields of study such as mathematics, medicine and astronomy among others. Now these sectors of Islamic science were not the creation of Muslims alone, but they emanated from scholars of the most widely varying faiths. It should be remembered that the Islamic scientific community was the only one among medieval communities open to faiths other than that of the majority religion. If other scientific communities ever admitted adherents of other religions, this was, in a way, due to links with the Islamic tradition, as was the case with Palermo in the time of Frederick the Second. This openness was not simply a matter of religious toleration but derived from the fundamental principle of equity that formed the constitutional basis of this Islamic community itself. The career of Thābit ibn Qurra, among many others, bears witness to this. A Sabian born in 826 at Ḥarrān (Upper Mesopotamia), one of the last centres to preserve the Hellenism that was fast disappearing, he was a simple money-changer when a meeting with the eldest of three famous mathematicians and astronomers, the Banū Mūsā, changed the course of his career and of his life. Upon meeting Thābit ibn Qurra, Muḥammad ibn Mūsā, a man of science as well as of power, was so far impressed by his linguistic abilities that he decided to take him to Baghdad. It was under the guidance of the Banū Mūsā, and in particular of the youngest, al-Ḥasan, himself a mathematician of genius,[1] that Thābit ibn Qurra was trained in mathematics, astronomy, and also in philosophy. Yet the Banū Mūsā did more: they introduced Thābit ibn Qurra not only into the circle of scholars, but also into the circles of power. Thābit ibn Qurra the Sabian was to be the educator of the children of Muḥammad ibn Mūsā,[2] and to rub shoulders with the powerful of his day, like the Banū al-Munajjim and the Banū Wahb; better still, he was to become a member of the court of the Caliph al-Muʿtaḍid himself. The contemporary evidence for all this, and for much more besides, far from being merely anecdotal, constitutes the basis of our historical information on Baghdad in the ninth century, a time when all branches of knowledge flourished in the city. We learn of the interest in practical sciences and in thought, and about the community of scholars in which Muslims, Christians, Sabians, Jews, and agnostics lived side by side, as well as about the ways in which it was organized and financed. The institutions involved were not only the Dār al-Ḥikma, a kind of research academy, but also private schools modelled on it, founded by such dignitaries as the Banū al-Munajjim and the Banū Mūsā, among other powerful representatives of the State and of society.

Thus, in commemorating Thābit ibn Qurra, we are celebrating the Islamic legacy, in a manner that genuinely reflects its true value. The sciences are an integral part of this heritage, and indeed any proper understanding of the Islamic community cannot fail to take account of this scientific dimension and the rational values for which it was the vehicle.

Yet this celebration has a second significance, which brings us back to our own time. The Islamic heritage and our conception of it are not matters of purely academic interest. Both are at the heart of a lively debate, and a debate that is far from being closed, in Arab and Islamic societies. Since the first third of the nineteenth century, in various countries of the Islamic world like, for instance, Egypt, the question of modernization and the role of tradition has been raised. Since then, the problem of the relations between tradition and modernity has continually come under discussion, at almost regular intervals, to the point that it has finally become crucial for intellectuals as well as politicians. We need only read contemporary Arabic or Persian, Turkish, or Urdu literature to appreciate the truth of this. Thus, since a certain Rifāʿ al-Ṭahṭāwī in mid-nineteenth century Egypt, each generation has tried to think up ways of revitalizing Arab-Islamic culture by importing new

[1] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. Vol. I: *Fondateurs et commentateurs*: *Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, London, al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1996.

[2] R. Rashed and Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IX^e siècle. Le recueil de propositions géométriques de Naʿīm ibn Mūsā*, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain / Paris, 2004.

models from Europe or America. The single challenge that has dominated this debate throughout its history has been to identify models capable of adapting the Islamic heritage to the conditions of today, in other words, of infusing a new vigor into Arab-Islamic culture. However, the debate as it has been, and still is conducted, seems to lack a major dimension, for it loses sight of a second challenge every bit as important as the first. This involves confronting the past and the way in which this very heritage has, in the hands of conservative elements with an excessive respect for the past, been bereft of its scientific substance. Throughout seven centuries of the history of humanity, this heritage, in its various aspects, particularly scientific and philosophical, represented the avant-garde of civilization. In order to breathe new life into Arab-Islamic culture, then, a twofold challenge must be met. On one hand, new models must be devised that incorporate values unknown to the past, and on the other hand ways must be sought of mobilizing the resources bequeathed by Islam in their various elements which include, among other things, science and the rational norms which regulate it.

The third respect in which this celebration assumes significance has more to do with professional attitudes, since it concerns the history of sciences as a field of study. To put it briefly: the history of science, considered from the point of view of research and teaching will remain one-sided and incomplete until the sciences of classical Islam are incorporated within it. Even today, this fundamental chapter in the history of classical science is, despite its importance, not seen as part of it. And yet, without the scientific work preserved in Arabic and in translations from that language into Latin, Italian and Hebrew, classical science would be something of a riddle. In other words, without these Arabic writings and their translations, we should lack the framework that enables us to evaluate the contributions made, for example, by Copernicus in astronomy, by Kepler in optics, by Descartes in algebraic geometry, or by Fermat in the theory of numbers.

Without further expanding upon the multiple significations of this celebration, I shall now turn to Thābit ibn Qurra in order to sketch, if only in broad strokes, the portrait of a scholar who lived in Baghdad in the second half of the ninth century. Thābit ibn Qurra's scientific activity was divided among translation, original research, and teaching. Yet these activities, and particularly the first two, are intimately linked. In this regard, Thābit ibn Qurra ideally typifies the Baghdad scholar in the second half of the ninth century.

We know the considerable number of Greek texts which he rendered into Arabic, works such as Archimedes' *The Sphere and the Cylinder*, books V, VI, and VII of the *Conics* of Apollonius, and the *Arithmetical Introduction* of Nicomachus of Gerasa. We are also indebted to him for the revision of many texts translated by others, like that of Euclid's *Elements* and of Ptolemy's *Almagest*, among others. Thābit ibn Qurra's activity as a translator represents a stage that was already well advanced in the massive movement that had been engaged in translating Greek texts since the end of the eighth century. At this stage translator-scholars had superseded those who were merely learned translators.[3] The distinguishing features most characteristic of this translation project are exhibited with particular brilliance in Thābit ibn Qurra's works. I have had occasion to draw attention to an aspect of this translation movement overlooked by historians: the intimate relationship that exists between translation and research.[4] If translation was carried out, it was above all in order to pursue a line of research already undertaken or projected. In fact, the translation of *The Sphere and the Cylinder* allowed Thābit ibn Qurra's masters, the Banū Mūsā, to pursue their work on infinitesimal geometry, and in particular their treatise *To find the Area of Plane and Spherical Figures*.[5] Together with Archimedes' *Measure of the Circle*, this treatise represented the most important source for the teaching of infinitesimal geometry in Arabic and in Latin. This same translation was also useful to Thābit ibn Qurra himself in his basic research in infinitesimal geometry, which I will mention shortly. His translation of the last three books of the *Conics* of Apollonius came at the right moment for carrying out his research on the measure of the parabola, of the paraboloid, and of the sections of the cylinder and its lateral surface, in which the work deriving from Archimedes would be combined with that of Apollonius. His translation of the *Arithmetical Introduction* of Nicomachus of Gerasa, as well as his revision of the translation of Euclid's *Elements*, were to prove extremely useful in many areas, and particularly in his discovery of the theory of amicable numbers. By this stage of the translation movement, a scholar-translator like Thābit ibn Qurra could call upon ready-made lexical and syntactical resources extensive enough to sustain a translation that was both rigorously accurate and elegant in style.

Thābit ibn Qurra's original research was divided between astronomy, mathematics, and philosophy. To cut a long story short, Thābit ibn Qurra was much more than just an innovator: he was the founder of a tradition. It was he who laid the foundations for work in geometry, which was to reach its culmination a century later, with Ibn al-Haytham. With him, we see the rise of a new spirit that characterized the development of geometry and of science in general. This is what I shall briefly try to show.

[3] That is to say, of translators who were themselves great scientists.

[4] R. Rashed, 'Greek into Arabic: Transmission and Translation', in James E. Montgomery (ed.), *Arabic Theology, Arabic Philosophy. From the Many to the One: Essays in Celebration of Richard M. Frank*, Orientalia Lovaniensia Analecta 152, Leuven / Paris, Peeters, 2006.

[5] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I, chap. 1.

In astronomy, Thābit ibn Qurra wrote between thirty and forty dissertations, only eight of which have come down to us. These eight treatises, which have been edited, translated and commented on by R. Morelon,[6] lay before us the new features of research in astronomy, which would continue to dominate work in this field in the generations that followed. They bring out the relationship between mathematics and physics as well as the role of observation. Thābit ibn Qurra began by rejecting the degree of empiricism that had marked Ptolemy's approach, and thus tried to rid the Ptolemaic model of its empirical elements. His principal task was to harmonize a conception of the universe as a whole with a purely theoretical and mathematical analysis of the motion of each of the bodies contained within it. What he wanted to do was to reconcile 'physical' with 'mathematical' astronomy. The second direction taken by his research in astronomy involves the link between theory and observation. In all his astronomical work he made it his business to give the clearest possible explanation of the relationship that existed between theory and the continuous observation of the celestial bodies. A program of continuous observations had, in fact, been instituted by the astronomers of al-Ma'mūn, at least a generation before Thābit ibn Qurra's time.

Thābit ibn Qurra's research in mathematics covers most of the fields studied at the time: Euclidian number theory, algebra, plane geometry, infinitesimal geometry, spherical geometry, and philosophy of mathematics.

In the field of number theory, Thābit ibn Qurra was familiar with the theory of perfect numbers set out by Euclid at the end of book IX of the *Elements*. If we designate by $\sigma_0(n)$ the sum of the proper divisors of n, and $\sigma(n) = \sigma_0(n) + n$, Euclid showed that if $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$, with $(2^{p+1} - 1)$ prime, then $\sigma_0(n) = n$; that is, n is perfect. Yet neither Euclid, nor Nicomachus of Gerasa, nor any other Greek mathematician had tried to work out an analogous theory for amicable numbers. Two numbers a and b are amicable if $\sigma_0(a) = b$ and $\sigma_0(b) = a$ (for example 220, 284). Thābit ibn Qurra thus set about developing this theory. In the purest Euclidian style, he states and proves the most important theorem to date for these numbers, a theorem which bears his name.

Theorem of Thābit ibn Qurra. For $n > 1$, we suppose $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$, $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$. If p_{n-1}, p_n and q_n are prime, then $a = 2^n p_{n-1} p_n$ and $b = 2^n q_n$ are amicable.

This theorem became widely diffused, and was propagated in every written language of the Mediterranean region. Its impact on the world of mathematics was considerable.

[6] *Thābit ibn Qurra. Œuvres d'astronomie*, text edited and translated by Régis Morelon, Collection Sciences et philosophies arabes. Textes et études, Paris, Les Belles Lettres, 1987.

In algebra, Thābit ibn Qurra, successor to Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, the founder of the discipline, was the first to return to Euclid's *Elements*,[7] in order to establish a firmer geometrical basis for the proofs he offers of the algorithms of solutions of second-degree equations, as well as to translate quadratic equations geometrically. Once again, he was the first clearly to distinguish between the method of the algebraists and that of the geometers, and he tried to show that at the same results were achieved by both of them; that is, to provide a geometrical interpretation of algebraic procedures. He begins by showing that the equation $x^2 + px = q$ can be solved with the help of proposition II.6 of the *Elements*. At the end of the demonstration, he writes: 'This method corresponds to the method of the algebraists (*aṣḥāb al-jabr*)'. He begins again for $x^2 + q = px$ and $x^2 = px + q$, with the help of *Elements* II.5 and II.6 respectively; for each, he shows the correspondence with the algebraic solutions, and he writes: 'the method for solving this problem and that which precedes it by geometry is the method of its solution by algebra'. This geometrical translation which Thābit ibn Qurra makes of al-Khwārizmī's equations proves to be particularly important for the development of the theory of algebraic equations.

The third area inextricably linked to the name of Thābit ibn Qurra is that of infinitesimal geometry. After Archimedes, in the second century B.C., research in this field died out, not to be reinstated until the ninth century, with the Banū Mūsā, and especially al-Ḥasan, the youngest of the three brothers. The Banū Mūsā were the first to begin combining the methods peculiar to the geometry of measure with those of a geometry of position and of form. Thābit ibn Qurra, their disciple and successor as the head of the school they had founded, went on to develop their project much further. Of the works of the Banū Mūsā and of Thābit ibn Qurra devoted to infinitesimal mathematics, a few hundred pages of a very high level have come down to us. These have been edited and together with their translation and analysis are to be found in the first volume of *Infinitesimal Mathematics*.[8] By Thābit ibn Qurra himself, we have a treatise on the measure of the parabola, another devoted to the measure of the paraboloid, and finally a third which deals with the measure of the sections of the cylinder, and of its lateral surface.

It is not the place to discuss the mathematical techniques employed in the work of Thābit ibn Qurra. Let us simply emphasize that he continues to apply the well-known method of exhaustion, and that its demonstration relies on the properties of the least upper bound. In fact, we can detect the

[7] R. Rashed, *Al-Khwārizmī: Le commencement de l'algèbre*, Paris, Librairie A. Blanchard, 2007.

[8] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I.

idea that underlies the Riemann integral in the procedure he follows in the particular case in which the diameter under consideration is the axis of the parabola.

Yet there is something even more important: in their research on infinitesimal geometry, al-Ḥasan ibn Mūsā and, to an even greater degree, his disciple Thābit ibn Qurra, proceed by geometrical transformations – affine and homothetic – and the composition of transformations. The study of these transformations was to be continued by the successors of Thābit ibn Qurra, including his own grandson, the brilliant mathematician Ibrāhīm ibn Sinān. These developments, indeed, can be seen to mark a turning point in regard to the reception of Hellenistic geometry from the ninth century onwards. Finally, let us note that the study of infinitesimal procedures runs through Thābit ibn Qurra's work from one end to the other. In astronomy, he has recourse to them in examining the visibility of crescents, whose quite particular importance in religious practice can easily be guessed. He uses them again in his study entitled *How motion on the ecliptic appears as slow, accelerated, or medium-speed, according to the place of the eccentric where it occurs*; and he appeals to them once more in his research on statics, that is, in his work entitled *al-Qarasṭūn*.

Thābit ibn Qurra's mathematical research covered yet other fields. In plane geometry, he generalized the Pythagorean theorem, and in stereometry he studied the fourteen-faced polyhedron. Finally, we must add his work in spherical geometry.

In order to complete this portrait, sketched in very broad strokes, we must mention Thābit ibn Qurra as a philosopher of mathematics. We are indebted to him for one of the most fruitful and profound philosophical contributions that Islamic philosophers ever made to this field. Here, we find the philosophy not of philosophers, but of mathematicians.

Perhaps, indeed, it is for this very reason that historians of philosophy ignore him. Be that as it may, the fact remains that he wrote four dissertations directly linked to the philosophy of mathematics, at least two of which were to play a key role in the foundation of an entire tradition of research. First of all, two dissertations are devoted to Euclid's fifth postulate, on parallels. In the course of his proof, Thābit ibn Qurra introduces motion, thereby departing from the Euclidian tradition, and he sows the seeds of other ideas which were later to be exploited by Ibn al-Haytham. Another of his dissertations deals, among other topics, with actual infinity. We shall pause briefly over the fourth dissertation, which deals with the idea of discovery in geometry, as an example of this philosophical research.

One day, the statesman al-Qāsim ibn Wahb, for whom Thābit ibn Qurra had written a summary (*Talkhīṣ*) of Aristotle's *Metaphysics*, approached him in order to question him on the crucial subject of the axiomatic method and of invention. Ibn Wahb expressed his concerns as follows: the order of exposition in Euclid's *Elements* was dictated by the demands of demonstration, with the result that some propositions were brought in early and others later, independently of their meaning. In other words, in the *Elements*, Euclid elected to follow only the formal or syntactic order, ignoring all semantics. Now Ibn Wahb admits that this order is valid for learning geometry, but when it comes to investing what one has learned in research, it proves unsatisfactory. Another order is required, that of invention. The request Ibn Wahb puts to Thābit ibn Qurra, then, is that he should work out a method that is different from the axiomatic method followed by Euclid and capable of responding to the needs of invention.

The Thābit ibn Qurra's response was to write a treatise the first part of which is devoted to the rules of a method which leads to the invention of new propositions and constructions, for the use of experienced mathematicians who have already mastered the axiomatic method. He actually goes so far as to state that this method must be applied in 'all demonstrative science' (*fī kull 'ilm burhānī*).

Clearly the procedure in question is pragmatic and moreover requires the classification of notions in such a way that, grouped according to their distinct species, they may be readily accessible to the mind as the occasion demands. Ibn Qurra begins the process of recognizing these species by distinguishing three kinds of geometrical research: geometrical constructions with the help of instruments – for instance, the construction of an equilateral triangle with the aid of a ruler and a pair of compasses; propositions dealing with an unknown state or magnitude – for instance, those used to determine the area of a triangle of which the sides are known, or to determine a perfect number; and finally general assertions on the nature of an object – or on one of its specific properties – for instance, for the object 'triangle', that the sum of its angles is equal to two right angles. Ibn Qurra points out that the first kind requires the knowledge of the other two, but not *vice versa.*

The first rule of this method thus stands, as it were, by itself: it consists in beginning by identifying to what kind or to what configuration a given notion pertains. Yet each of these three configurations contains principles, and notions established thanks to these principles, as well as supplementary principles. By 'principle' (*aṣl*), Ibn Qurra, following the tradition of the *Second Analytics* (A 10), understands that which is admitted without demonstration'. As he says, these are 'common notions', or postulates and definitions. In the last case, they are the only definitions which deal with the essence of the notion in question. Once the researcher has distinguished, for each of the preceding kinds, between axioms, postulates and definitions, on the one hand, and propositions on the other, he can make all the notions necessary for the conception of the sought-after object 'come to his mind'. This is the second rule of the method.

The third rule, which Ibn Qurra does not designate by its proper name, involves the process known as analysis. This involves starting from the necessary conditions of the sought-after object, then the conditions necessary for these conditions, and so forth. In order to illustrate this process, he examines three constructions in which we see how to carry out the analysis each time. This choice is not unaffected by a certain didactic concern, as well as by a particular interest in the analysis called 'problematic' in geometry. Let us note, however, that by isolating the particular class of propositions dealing with the determination of a magnitude or a number, Ibn Qurra remains aloof from the classical opposition between 'theoretical analysis' and 'problematic analysis', which we find in Pappus or Proclus.

The context in which Ibn Qurra produced this brief dissertation, his first work on invention, throws light on the emergence of the theme of invention in mathematics, which under his successors would leave its origins behind and expand on a quite different scale. Yet the importance of this dissertation lies not only in the fact that it contains the first attempt to meet this intellectual challenge; we are also indebted to it for having inspired those who read it in the light of new mathematical knowledge to further research.

Indeed, it was following Thābit ibn Qurra that his grandson Ibrāhīm ibn Sinān developed a pragmatic logic in which he coordinated an *ars inveniendi* with an *ars demonstrandi*. He was followed by al-Sijzī, who wrote an *ars inveniendi* based on Thābit ibn Qurra and his grandson. Then came Ibn al-Haytham, who developed an analytical art, and, later on, al-Samaw'al, who examined analysis and synthesis in algebra. The world of mathematics would have to wait until late in the 17th century, with Leibniz, for any contribution of comparable importance.

The second topic in the philosophy of mathematics to be taken up by Thābit ibn Qurra was infinity. His student Abū Mūsā 'Īsā ibn Usayyid asked him several questions, some of which led the master to explain his position on this notion, and to maintain, against an entire tradition, that on the one hand there is such a thing as actual infinity, while on the other hand one infinity can be larger than another infinity. We ought not to forget that these questions were much debated by the philosopher-mathematicians of the time, as is attested by the example of al-Kindī. The important text in which his student reports Thābit's responses exists in two manuscripts. In a new edition, based on both manuscripts, the author shows that this text by Thābit ibn Qurra, probably known to al-Rāzī and Avicenna, and certainly to Yaḥyā ibn 'Adī, has not come down to us in its entirety, but truncated.[9]

[9] See *infra*, M. Rashed, 'Thābit ibn Qurra sur l'existence et l'infini: les *Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid*'.

Once the gaps are filled, it becomes clear that it touches simultaneously on a variety of themes, covering theology, philosophy, and mathematics. Here I will focus very briefly only on one mathematical aspect.

In the course of his research on infinitesimal geometry, whose novelty and importance I have just emphasized, Thābit made use of the notion of the upper bound and the method of exhaustion. The axiomatic hypothesis that underlies this method is that the area of a figure limited by curved lines is a number that is not larger than the area of a polygonal figure that contains it, nor smaller than the area of another polygonal figure that is contained within it. *Mutatis mutandis* the hypothesis is the same for solids. This hypothesis is already to be found in the works of Archimedes and Eudoxus. However, to provide a foundation for this hypothesis, we should have to consider a curve as a straight line and a curved surface as a plane, which requires the introduction of a principle of approximation. Similarly, we should have to follow Thābit, who went incomparably further than his Greek and Arab predecessors in this respect, in envisaging the necessity to resort to infinite sums of integers, straight lines, ... and the determination of their relationships. I have elsewhere offered an analysis of the infinitesimal procedures that Thābit devised and put into practice on a massive scale. Thus, in the course of this mathematical work, a new requirement soon emerges: to calculate asymptotic behaviors by means of infinite sums, and examine them rigorously. It is precisely this process of computation and examination that established the real existence of infinity, ensured its actuality in a way that could never be achieved in a discussion of the kind to be found in the third book of Aristotle's *Physics* and the philosophical works of al-Kindī. In a word, infinite sums, the relationships that unite them and asymptotic behaviors are actual objects, with an entirely real existence. Let us just recall the steps that go to make up this calculus.

- The set of natural integers is an infinite set in actuality.
- The infinite subsets of the set of integers are comparable: for instance, the subset of even numbers and that of odd numbers.
- Two infinite subsets of the set of natural integers have the same number of elements, and are equipotent. This is true for the subset of even numbers and for the subset of odd numbers.
- The application that associates its successor to each even number is a bijection between the two subsets.
- Since the intersection of these two subsets is empty, and their union is the entire set of integers, then each of these two subsets is half of the set of integers. Consequently, one infinity can be half of another infinity.

Thābit ibn Qurra's error obviously consists in applying to infinite sets the arithmetical operations that are applied to integers. He knew, without the slightest doubt, that there is a relationship of inclusion between infinite sets, and a relationship of order between cardinal numbers. Yet his mistake lies in wishing to derive the second relationship, that is, the relationship of order between the elements of each set, from the first relationship, that of inclusion among sets, thus interpreting the union of sets as an addition, endowed with the same properties as the addition of natural integers. This calculus is thus marred by a deep-seated error, but it nevertheless constitutes the first attempt, to my knowledge, at a calculus of infinity designed to meet the needs of mathematical research.

Clearly, then, Thābit ibn Qurra was one of the most eminent mathematicians that has ever lived. For about a century after his death, in the tradition he had helped to found, his successors never ceased to make use of his ideas. His fame in the East as well as the Muslim West, and the translation into Latin or Hebrew of so many of his writings, bear eloquent witness to his genius. Historians of mathematics who overlooked Thābit ibn Qurra would condemn themselves to understanding nothing of the history of the mathematical sciences between the 10^{th} and the 16^{th} centuries; and any historian of Islamic civilization who ignored Thābit ibn Qurra would be neglecting one of its most universally significant aspects, that is, its contribution to science.

THĀBIT IBN QURRA : FROM ḤARRĀN TO BAGHDAD

Roshdi RASHED

The little that we know about Thābit ibn Qurra derives mainly from the biobibliographical details provided on him by al-Nadīm, al-Qifṭī et Ibn Abī Uṣaybiʿa.[1] These accounts are by no means all of equal importance. The one

[1] Al-Nadīm, *Kitāb al-Fihrist*, ed. R. Tajaddud, Teheran, 1971, p. 331. Al-Nadīm cites only four titles that relate to Thābit's mathematical writings: the *Treatise on Numbers* (*Risāla fī al-aʿdād*; probably his treatise on amicable numbers), the *Treatise on the Defining of Geometrical Problems* (*Risāla fī istikhrāj al-masāʾil al-handasiyya*), the *Treatise on the Sector-Figure* (*Kitāb fī al-shakl al-qaṭṭāʿ*), and, finally, the *Treatise on the Proof Attributed to Socrates* (*Risāla fī al-ḥujja al-mansūba ilā Suqrāṭ*). Al-Nadīm writes that Thābit 'was born in the year two hundred and twenty-one and died in the year two hundred and eighty-eight; his age was seventy-seven solar [*sic*] years'. He also refers to the privileged relationship Thābit enjoyed with the Caliph al-Muʿtaḍid.

Al-Qifṭī, *Taʾrīkh al-ḥukamāʾ*, ed. Julius Lippert, Leipzig, 1903, pp. 115-122. This is what he says about the life of Thābit ibn Qurra: 'A Sabian from the people of Ḥarrān, he moved to the city of Baghdad and made it his own. With him, it was philosophy that came first. He lived in the reign of al-Muʿtaḍid. We are indebted to him for numerous books on different branches of knowledge such as logic, arithmetic, geometry, astrology and astronomy. We owe to him an amazing book: the *Introduction to the Book of Euclid* (*Kitāb mudkhil ilā K. Uqlīdis*), and a book: the *Introduction to Logic* (*Kitāb al-Mudkhal ilā al-manṭiq*). He translated the book on *al-Arithmāṭīqī* and summarised the book on *The Art of Healing* (*Kitāb Ḥīlat al-burʾ*). In his knowledge he ranks among the most outstanding. He was born in the year two hundred and twenty-one at Ḥarrān, where he worked as a money-changer. Muḥammad ibn Mūsā ibn Shākir brought him back when he returned from the country of the Byzantines, for he had found him eloquent. He is said to have gone to live with Muḥammad ibn Mūsā and to have pursued his studies in his house. He thus had some influence over his career. Muḥammad ibn Mūsā put him in touch with al-Muʿtaḍid, and introduced him to the astronomers' circle. He it was [Thābit] who introduced Sabian management to Iraq. In this way their social position was determined, their status raised, and they attained distinction. Thābit ibn Qurra achieved so prestigious a rank and so eminent a position at the court of al-Muʿtaḍid that he would even sit down in his presence at any time he wished, speak with him at length and joke with him, and come to see him even when his ministers or his intimates were not there.' (pp. 115-116).

that we owe to al-Nadīm, invaluable by reason of its date – the end of the 10th century – is, however, very thin. But that of al-Qifṭī, thanks to a happy accident, provides everything that posterity knows about Thābit. Good luck placed in al-Qifṭī's path papers deriving from Thābit's family that related more to his work than to his life. Al-Qifṭī's book was the source drawn on by subsequent biobibliographers, like, for example, Ibn Abī Uṣaybiʿa. Even Ibn al-ʿIbrī (alias Bar Hebraeus),[2] who apparently had at his disposal Syriac

---

Ibn Abī Uṣaybiʿa, *'Uyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'* ed. A. Müller, 3 vol., Cairo / Königsberg, 1882-84, vol. I, pp. 215, 26-220, 29; ed. N. Riḍā, Beirut, 1965, pp. 295, 6-300, 23.

[2] Ibn al-ʿIbrī, *Tārīkh mukhtaṣar al-duwal,* ed. O. P. A. Ṣāliḥānī, 1st ed., Beirut, 1890; repr. 1958, p. 153.

Thābit ibn Qurra's biography is reproduced in various publications, without anything new being added. The following are a representative selection:

Ibn Kathīr, *al-Bidāya wa-al-nihāya*, éd. Būlāq, 14 vol., Beirut, 1966, vol. XI, p. 85; the account is borrowed from Ibn Khallikān.

Ibn Khallikān, *Wafayāt al-aʿyān*, ed. Iḥsān ʿAbbās, 8 vol., Beirut, 1978, vol. I, pp. 313-315.

Ibn al-Athīr, *al-Kāmil fī al-tārīkh*, ed. C. J. Tornberg, 12 vol., Leiden, 1851-71, vol. VII (1865), p. 510; repr. 13 vol., Beirut, 1965-67.

Al-Masʿūdī, *Murūj al-dhahab (Les Prairies d'or)*, edited by C. Barbier de Meynard and M. Pavet de Courteille, revised and corrected by Charles Pellat, Publications de l'Université Libanaise, Section des études historiques XI, Beirut, 1966, vol. II, § 835, 1328, 1382.

Ibn al-Jawzī, *al-Muntaẓam fī tārīkh al-mulūk wa-al-umam,* 10 vol., Hyderabad, 1357-58/1938-40, vol. VI, p. 29.

Ibn Juljul, *Ṭabaqāt al-aṭibbā' wa-al-ḥukamā'*, ed. F. Sayyid, Publications de l'Institut Français d'Archéologie Orientale du Caire. Textes et traductions d'auteurs Orientaux, 10, Cairo, 1955, p. 75.

Al-Nuwayrī, *Nihāyat al-'arab fī funūn al-adab,* 31 vol., Cairo, 1923-93, vol. II, p. 359.

Ibn al-ʿImād, *Shadharāt al-dhahab fī akhbār man dhahab*, ed. Būlāq, 8 vol., Cairo, 1350-51 H., (in the year 288), vol. II, p. 196-198. Repeats Ibn Khallikān.

Al-Ṣafadī, *al-Wāfī bi-al-Wafayāt*, 24 vol. published (1931-1993); vol. X, Wiesbaden, 1980, ed. Ali Amara and Jacqueline Sublet, pp. 466-467.

Al-Dhahabī, *Tārīkh al-Islām* (years 281-290), ed. ʿUmar ʿAbd al-Salam Tadmūrī, Beirut, 1989-1993, pp. 137-138. Borrowed from Ibn Abī Uṣaybiʿa.

Al-Sijistānī, *The Muntakhab Ṣiwān al-ḥikmah*, Arabic Text, Introduction and Indices edited by D. M. Dunlop, The Hague, Paris, New York, 1979, pp. 122-125.

M. Steinschneider, 'Thabit ("Thebit") ben Korra. Bibliographische Notiz', *Zeitschrift für Mathematik u. Physik*, XVIII, 4, 1873, pp. 331-338.

See also D. Chwolsohn, *Die Ssabier und der Ssabismus*, vol. I, St. Petersburg, 1856; repr. Armsterdam, 1965, pp. 546-567; E. Wiedemann, 'Über Ṯābit ben Qurra, sein Leben und Wirken', *Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte*, Hildesheim, 1970, vol. II, p. 548-578. *Thābit ibn Qurra. Œuvres d'astronomie*, text edited sources that are of no great importance as far as Thābit goes, adds nothing substantial to al-Qifṭī's account. Should we then content ourselves with that? The paucity of the documentary evidence seems to me to impose the obligation to consult all of it, if only to compare the various versions.

Meagre though they are, the bibliographers' accounts in broad outline place the man in the circle in which he moved at one of the most important moments in the history of mathematics and science: the second half of the ninth century in Baghdad. The town had not only become the political centre of the world as it was then, it was also its cultural heart, and by that token a magnet for every talent. For the young people of the day who wanted to secure themselves a first-class education, the watchword was, 'Go up to Baghdad!' The city was an established scientific centre which housed a settled community of scholars whose links with the seat of power had long since been forged. For the more mature, 'going up to Baghdad' meant meeting their intellectual equals, making a name for themselves and guaranteeing themselves a career.[3] Somewhere in this barely sketched landscape we shall have to try to locate one of the crucial events in the life of Thābit ibn Qurra, his departure from Ḥarrān in Upper Mesopotamia, the town of his birth and one of the remaining centres in which elements of Hellenism were still to be found,[4] for Baghdad where he was to spend the rest of his life.

What were the particular circumstances that led to the decision that fixed the future course of Thābit's life? This is where a second event comes in, one whose effects on his destiny and his career as a scholar were by no means negligible: his meeting with the eldest of the three brothers Banū Mūsā, Muḥammad ibn Mūsā. From al-Nadīm onwards, all the biographers agree in linking these two facts, the departure from Ḥarrān, and this meeting. Muḥammad ibn Mūsā had just completed a mission to Byzantine territory in search of manuscripts when he came across Thābit, then simply a money-changer with linguistic skills impressive enough for Muḥammad to decide to take him back with him to Baghdad. This story is quite plausible for several reasons. For one thing, there is the unanimity of the sources, certainly not in itself a compelling argument; for another, there is the

---

and translated by Régis Morelon, Collection Sciences et philosophies arabes. Textes et études, Paris, Les Belles Lettres, 1987, p. XI-XIX.

[3] To gain some idea of the number of scholars engaged in disciplines such as literature, history, theology, etc. see al-Khaṭīb al-Baghdādī, *Tārīkh Baghdād*, ed. Muḥammad Amīn al-Khānjī, 14 vol., Cairo, 1931; repr. Beirut with an additional index volume: *Fahāris Tārīkh Baghdād li-al-Khaṭīb al-Baghdādī*, Beirut, 1986. See also A. A. Duri's article, 'Baghdād', *E.I.*^{2}, t. I, pp. 921-936.

[4] The description given by al-Masʿūdī dans *Murūj al-dhahab* shows that the traces of Hellenism in Ḥarrān towards the end of the third century of the Hegira were essentially religious. Cf. the revised edition by Ch. Pellat, vol. II, § 1389-1398, pp. 391-396.

privileged connection that Thābit maintained throughout his life with the Banū Mūsā, and particularly the eldest brother; and finally there is the undoubted fact that he was a gifted linguist. We have only to read his translations and his scholarly work to be convinced that this man, whose mother tongue was Syriac, had also mastered Arabic and Greek. There was perhaps an additional reason that influenced his departure – he may have had to quit his native town because of differences with his co-religionists. The only report in Arabic of this event comes from a late biobibliographer, Ibn Khallikān,[5] who mentions these quarrels and also that Thābit was forced to leave Ḥarrān for the neighbouring locality of Kafr Tūtha, in which his meeting with Muḥammad ibn Mūsā took place. Whether these reported differences actually occurred, or were dreamed up by the biobibliographers is of little significance here, for even if they were a factor in his decision to leave, they were scarcely the main reason for his departure for Baghdad.

As to the date of Thābit's meeting with Muḥammad ibn Mūsā, we know nothing, just as we know nothing either of the individuals or of the circumstances that were instrumental in bringing it about. But we do know that Muḥammad died in 873, and that Thābit was engaged before that date in the education of his children.[6] It is then a reasonable hypothesis that Thābit came to Baghdad relatively early and that he very likely lived there for at least thirty years, given that we know he died in 901.

The early biobibliographers have passed on some invaluable details on the relationship between Thābit and Muḥammad and his brothers. We learn that Muḥammad had accommodated Thābit in his own house on his arrival in Baghdad where he took charge not only of his career but of his scientific education too. He was also responsible for introducing him to the circle of the Caliph's astronomers. All the early biobibliographers agree on this point. The celebrated astronomer al-Bīrūnī, a century and a half after Thābit's death,[7] alone casts a shadow of doubt on the roles played by the various

[5] Ibn Khallikān, *Wafayāt al-a'yān*, vol. I, p. 313.

[6] The list of Thābit's writings cited by al-Qifṭī from Abū 'Alī al-Muḥassin al-Ṣābi' (Thābit's great-grandson; cf. Yāqūt, *Mu'jam al-Udabā'*, Beyrouth, s.d., vol. 8, p. 152), refers to 'several summaries on astronomy and geometry that I have seen in his handwriting: these he identifies in his own hand as "what Thābit composed for the young people"; he means the children of Muḥammad ibn Mūsā ibn Shākir' (*Ta'rīkh al-ḥukamā'*, p. 120). See R. Rashed and Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IX^e siècle. Le Recueil de propositions géométriques de Na'īm ibn Mūsā*, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

[7] Al-Bīrūnī writes that Thābit ibn Qurra was 'the protégé of these people (the Banū Mūsā), lived among them, and was the man who steered their scientific work back to the right course.' in *al-Āthār al-bāqiya 'an al-qurūn al-khāliya, Chronologie orientalischer Völker*, ed. C. E. Sachau, Leipzig, 1923, p. 52. It is worth noting that al-Bīrūnī, fair-minded as he was, further on had no hesitation in paying tribute to the Banū Mūsā for

parties and indeed their places in the hierarchical structure. According to him, Thābit was the corner-stone of the school of the Banū Mūsā. But we know in another connection that al-Bīrūnī, with his own acute sense of justice, had no love for the Banū Mūsā, who sometimes showed scant respect for it. In any case, there is no real contradiction here, since there is nothing to stop us from imagining that Thābit took over the leadership of the school after the death of Muḥammad ibn Mūsā, the more so in that al-Ḥasan ibn Mūsā, the brilliant geometer, was already deceased, and their brother Aḥmad ibn Mūsā was more concerned with mechanics. On the other hand, there is nothing in what has come down to us from Thābit ibn Qurra himself to suggest that he had any such role. Whenever he has occasion to mention Muḥammad, al-Ḥasan, he does so with the consideration owed to an elder. This is further exemplified in his writings by the respectful attitude he adopts towards al-Ḥasan ibn Mūsā in his research on the measure of the lateral surface of the cylinder and on the elliptical sections, and by the terms in which he refers to Muḥammad ibn Mūsā on the subject of calculating the position of the stars for the astronomical tables.

If therefore Thābit ibn Qurra had overtaken the Banū Mūsā in his research in mathematics and astronomy, that in no way contradicts the fact that it was to them that he owed his education. There is not the slightest indication to suggest that he came by any scientific education whatever in his native Ḥarrān, before he entered the school presided over by the Banū Mūsā.[8] We know of no mathematical work of his written in his native

---

their observation on the mean moon, declaring that, of all his predecessors, they were the ones whose statement on the subject one should opt for (p. 151). On the other hand, in *al-Istī'āb*, he finds fault with their attitude towards al-Kindī. The story is well-known and often reported.

[8] It would be a matter of great interest for the history of philosophy, mathematics and the sciences if we knew exactly how much activity there was in these fields at Ḥarrān in the eighth and especially the ninth century. Such knowledge is obviously indispensable to a better understanding of how Arabic became a vehicle for the transmission of the legacy of Greece, and how particular disciplines came to be established in that language. In the absence of such information, it can often happen that people offer conclusions before embarking on the relevant research. They extrapolate from the most remote periods and it is none other than Thābit ibn Qurra that they call on for their evidence and at the same time treat as the main proof of their case. This sort of reasoning is quite clearly marred by circularity: what they would have needed to do first was to set out what Thābit owed to the philosophy and science that was going on at Ḥarrān during his formative years. We shall look in vain in his biography or in his writings for any shred of evidence, any scintilla of support for the notion that he had received any such education before his meeting with the Banū Mūsā and his arrival in Baghdad. Thus two questions remain open. Was there any such activity at that time in Ḥarrān as scientific and philosophic teaching in any shape or form other than that hallowed by tradition in religion and the occult sciences? Could Ḥarrān claim to possess genuine libraries, and not mere

language, Syriac. The two mathematical books in Syriac cited by Ibn al-ʿIbrī are mentioned by al-Qifṭī[9] and repeated along with the list as a whole

---

repositories of old books that were now beyond the comprehension of the Sabians of the time? This is a perfectly reasonable question in view of the situation described by Ibn Waḥshiyya affecting a comparable community, whose members could no longer understand their ancestors' books, but, even so, piously and jealously guarded them (*al-Filāḥa al-nabaṭiyya*, ms. Istanbul, Topkapi Saray, Ahmet III 1989, fol. 1^r-2^r; critical edition by Toufic Fahd, vol. I, Damascus, 1993). Let us now turn to Thābit himself, whose praise of Ḥarrān and the Sabians is recorded for us by Ibn al-ʿIbrī: 'Many <Sabians> were constrained to forsake the true path for fear of persecution. Our fathers, by contrast, were able to withstand what they withstood with the help of the Most High, and achieved their salvation through their own courage. The blessed town of Ḥarrān was never sullied by its Christians' straying from the true path. *We* are the Sabians' heirs, and they are *our* heirs, dispersed throughout the world. Anyone who bears the burdens borne by the Sabians with confident hope will be held to enjoy a happy destiny. Oh, please Heaven! Who but the best of the Sabians and their kings brought civilisation to the land, built the towns? Who constructed the harbours and canals? Who explained the occult sciences? Who were the people to whom the divine power that made known the art of divination and taught the future was revealed? Were they not the renowned Sabians? It was they who elucidated all that and who wrote on the art of medicine for souls and on their deliverance, and who published also on medicine for the body, and filled the world with good and wise deeds that are the bulwark of virtue. Without the Sabians and their knowledge, the world would be deserted, empty, and sunk in destitution.' From Thābit's own words – at any rate according to Ibn al-ʿIbrī – it emerges clearly that the Sabians of his time excelled in practical skills, occult sciences and medicine. But there is no mention either of mathematics or of mathematical sciences. All that might count as philosophy is 'medicine for souls'. These, however, are the very areas that were given prominence by the early historians and biobibliographers. Al-Nadīm for example tells us that astrolabes were first manufactured at Ḥarrān before the craft was taken up elsewhere and became widespread under the Abassids (*al-Fihrist*, p. 342). See also note 9 below. On Ḥarrān, see Tamara M. Green, *The City of the Moon God*, Leiden, 1992, which contains a bibliography.

[9] The list of Thābit's writings drawn up by his great-grandson and reproduced by al-Qifṭī includes nine titles in Syriac. On the other hand Ibn al-ʿIbrī, in a book written in Syriac, *Tārīkh al-zamān* (Arabic translation by Father Isḥāq Armala, Beirut, 1980, pp. 48-49) refers to Thābit and attributes to him 'about one hundred and fifty books in Arabic' and 'sixteen books in Syriac, the majority of which we have read'. The two Syriac lists have seven titles in common and thus provide us with an indirect way of assessing Thābit ibn Qurra's output in that language, and how much his scientific and philosophic education might possible owe to his native town of Ḥarrān.

Eleven of the sixteen titles are devoted to religion and Sabian rites; one to a history of the ancient Syriac kings, that is to say the Chaldaeans, one to a 'history of the famous members of his family, and the lineage of his forefathers', 'the book on music', and finally, 'a book on: if two straight lines are drawn following <two angles> that are equal to less than two right angles, they meet, and another book on the same subject'. Now this last title (comprising two books), listed in *Tārīkh al-zamān* as being in Syriac, turns up almost word for word in the list of Thābit's works in Arabic drawn up by al-Qifṭī by Abī Uṣaybiʿa in Arabic. Both deal with Euclid's fifth postulate, and there is nothing in either to support the contention that the Syriac version was the first to be written. On the contrary, the reverse may well be true, especially since, at the time, it was common practice for Arabic texts to be translated into Syriac.

All things considered, the following conclusion may, then, be put forward: this man of outstanding intellect came to Baghdad with Muḥammad ibn Mūsā, joined the school of the Banū Mūsā and lost no time in becoming one of its active members. He followed the way opened by al-Ḥasan ibn Mūsā, particularly in his work on the measure of curved planes and solids, and on the properties of conic sections. He collaborated with Aḥmad ibn Mūsā, translated the last three books of Apollonius' *Conics*, and, in astronomy and also in philosophy, carried on certain aspects of the work of Muḥammad, with whom he maintained a close and enduring relationship. From the prestigious town of his birth, Ḥarrān, he seems to have taken with him only his religion, his knowledge of languages and perhaps some philosophy, while it was in Baghdad that he learned mathematics and astronomy.

Like his fellow-townsmen, Thābit ibn Qurra was of the Sabian persuasion, a follower of a Hellenistic faith that needed all the hypocrisy its exegetes could muster in order to qualify for the status of a recognised 'religion of the Book', which alone could guarantee its free practice in Islamic territory. This meant not just that he was tolerated as a member of a subordinate community, but that he enjoyed full citizen rights, including the right to seek and to attain the highest positions in the land. In this he was far from unique, and many other scholars emanating from religious minorities secured themselves most exalted posts. All the biobibliographers recount

---

(*Ta'rīkh al-ḥukamā'*, p. 116), and later in that of Ibn Abī Uṣaybiʿa (*'Uyūn al-anbā'*, ed. Müller, vol. I, p. 219, 4; ed. Riḍā, p. 299, 3-4); furthermore, the Arabic manuscript of this work has, happily, come down to us, confirming its title (mss Istanbul, Aya Sofya 4832, fol. 51^r-52^r; Carullah 1502, fol. 13^r-14^v; Paris, BN 2457, fol. 156^v-159^v). So it turns out that the only mathematical title cited as being in Syriac also exists in Arabic. Given that there was a corresponding Syriac version, it might then be thought that Thābit himself translated his Syriac text into Arabic. But nothing is less certain, nor is there any lexical, stylistic, let alone mathematical indication that might lend weight to a conjecture on these lines. Exactly the opposite assumption, on the other hand, that the work was translated from Arabic into Syriac, is not only possible, but would reflect a practice that was current at the time. Finally, the hypothesis that both versions were produced at the same time should not be excluded. The author was, after all, completely bilingual, as he had demonstrated when he was engaged in revising the translation of the *Elements*. Sooner than allowing ourselves to be swamped by conjectures, let us stick to this one, negative certainty: there is nothing to show that he received any scientific instruction at all in Ḥarrān.

episodes from his life at court, where the caliph heaped favours upon him. This 'promotion' which is often referred to anecdotally, seems to me to deserve very much closer attention from historians. It was neither exceptional nor ephemeral and throws light for us on the social status to which a scholar could lay claim in the second half of the ninth century in an Islamic city, and at the same time exemplifies the esteem in which the light of knowledge was held by the ruling authorities.

The career of Thābit ibn Qurra provides a good illustration of the power to attract talent that marked Baghdad's prestige at this period, and an example too of how membership of a religious minority was no bar to achieving the highest offices of state; and there is a third reason for choosing him as a representative case: he is a source of information on the development of the schools and their scientific traditions. As an active member of the school of the Banū Mūsā, and tutor to the sons of Muḥammad ibn Mūsā, he was able to ensure the school's continued existence after the deaths of Muḥammad, Aḥmad and al-Ḥasan. In due course his own descendants and pupils took over from him. Thābit's children and grandchildren, including the mathematician Ibrāhīm ibn Sinān, and pupils of his such as Naʿīm ibn Mūsā, traces of whom we have only recently brought to light,[10] were to carry on the work for three generations at least. We are not yet in a position to give anything like a complete account of the ramifications in the structure and tradition of the school, but, even as it is, through Ibn Qurra, we can glimpse their outline.

One further aspect of Thābit ibn Qurra's career, when added to the three already mentioned, will allow us to complete the picture of our mathematician: he was also a translator. We are aware of the considerable number of Greek treatises he translated into Arabic, including Archimedes' *Sphere and Cylinder* as well as the last three books of Apollonius' *Conics* or the *Arithmetical Introduction* of Nicomachus of Gerasa. He also revised many other translations, including, among others, Euclid's *Elements* and Ptolemy's *Almagest.* These few titles are enough in themselves to illustrate the wide range of topics Thābit covered and to bring out the closeness of the ties that link innovative research and translation, and indeed their mutual dependency – something that I have been at pains to emphasise.[11] The example of Thābit himself proves my point in full measure, since in his case the two activities are combined in one and the same person.

[10] See R. Rashed and Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IX^e siècle.*

[11] Cf. my 'Problems of the Transmission of the Greek Scientific Thought into Arabic: Examples from Mathematics and Optics', *History of Science*, 27, 1989, pp. 199-209; repr. in *Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints, London, 1992, p. 199-209.

As a gifted translator and one of the most eminent mathematicians that ever lived, Thābit ibn Qurra's status as a luminary remains unchallenged, indeed, down the centuries, no one has cast the slightest doubt on his importance. His renown in the East as well as the Muslim West, the translation of some of his works into Latin and others into Hebrew, are eloquent enough testimony.[12] From the point of view of the history of mathematics, to overlook Thābit's contribution is quite simply to forego the possibility of understanding the development of the subject over the following two centuries, especially in the field that concerns us here.

Let us now return to the early biobibliographers to take up two particular points, Ibn Qurra's name and his dates. All of them report his name in the same way, Thābit ibn Qurra, and give his lineage from the sixth generation of his ancestors. Al-Qifṭī confirms the accuracy of this information, on the basis of the family papers to which he had been able to gain access. He had got his hands on the evidence written down by Abū ʿAlī al-Muḥassin ibn Ibrāhīm ibn Hilāl al-Ṣābi', who was none other than Thābit's great-grandson. Abū ʿAlī's father, as we know,[13] had in 981 copied a manuscript in Thābit's own hand, and it appears to have been this branch of the family that preserved the family papers. In his book dating from 647/1249 Al-Qifṭī writes:

> As to the titles of his [Thābit's] written works, I have found pages in the hand of Abū ʿAlī al-Muḥassin ibn Ibrāhīm ibn Hilāl al-Ṣābi' that included mention of the lineage of this Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra ibn Marwān, and likewise mention of the books he had written, in an exhaustive and complete fashion [...] which I append below, since it is a proof of that matter.[14]

This invaluable piece of evidence leaves no room for doubt either about Thābit's name or as to his writings. But when it comes to his date of birth, we are a long way from the same degree of certainty. Al-Nadīm in fact notes the year as 221/836, and then goes on to tell us that he died at the age

[12] On his impact in Latin, see for example F. J. Carmody, *The Astronomical Works of Thābit b. Qurra*, Berkeley / Los Angeles, 1960. See also: A. Björnbo, 'Thābit's Werk über den Transversalensatz', *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medezin,* 7, 1924; and also F. Buchner, 'Die Schrift über den Qarastûn von Thabit b. Qurra', *Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen*, Bd 52-53, 1920/21, pp. 141-188.

[13] Attention was drawn to this Istanbul manuscript, Köprülü 948, by H. Ritter, according to K. Garbers, *Ein Werk Ṯābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren*, Dissertation, Hamburg/ Göttingen, 1936, p. 1. See also E. Bessel-Hagen, O. Spies 'Ṯābit b. Qurra's Abhandlung über einen halbregelmässigen Vierzehnflächner', in *Quellen und Studien zur Geschichte der Math. und Phys.*, B. 2.2, Berlin, 1932, pp. 186-198; and *Thābit ibn Qurra. Œuvres d'astronomie*, ed. Régis Morelon, p. 301.

[14] Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, p. 116.

of seventy-seven solar years. Now, if this date were accepted for his birth, he would have lived for only sixty-five solar years, or sixty-seven lunar years, since he died on Thursday 26 Ṣafar, in the year 288 of the Hegira, *i.e.* Thusday 19th February, 901. Al-Qifṭī repeats the birth date given by al-Nadīm without noticing the discrepancy. Still today, there are historians who follow al-Qifṭī and fail to observe the contradiction this dating entails. Ibn Abī Uṣaybiʿa, on the other hand, states that he was born on Thursday 21 Ṣafar 211 of the Hegira, *i.e.* the first of June, 826, which is indeed a Thursday.[15] This date seems reasonable, in that it fixes his lifespan at seventy-seven *lunar* instead of solar years, as al-Nadīm would have it. This is also the date given by the late biobibliographer al-Ṣafadī.[16]

[15] This date is confirmed by the Paris Observatory, thus providing irrefutable proof that renders superfluous all attempts to base conclusions solely on the often contradictory evidence contained in the bibliographical and historical sources.

[16] Al-Ṣafadī, *al-Wāfī bi-al-Wafayāt*, vol. 10, p. 466-467.

CHAPITRE I

THÉORIE DES PARALLÈLES

THĀBIT IBN QURRA ET LA THÉORIE DES PARALLÈLES

Roshdi RASHED ET Christian HOUZEL

I. INTRODUCTION

Deux opuscules de Thābit ibn Qurra sur la théorie des parallèles nous sont parvenus. Ces deux traités sont bien connus et ont déjà fait l'objet de plusieurs commentaires et traductions[1]. Nous entendons reprendre ici aussi bien l'édition que la traduction et le commentaire pour mieux situer la contribution de Thābit ibn Qurra après la publication récente de ses œuvres en astronomie et en mathématiques[2].

Le premier de ces deux traités est intitulé *Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent*[3] et le second a pour titre *Sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide*[4]. Nous n'avons malheureusement aucun moyen de savoir l'ordre de rédaction de ces deux traités. Nous allons donc analyser les démonstrations fournies par Thābit ibn Qurra et les comparer ; mais il nous faut au préalable esquisser les autres tentatives connues pour établir ce postulat avant Thābit ibn Qurra.

[1] A. P. Youchkevitch et B. Rosenfeld, *Théorie des parallèles dans l'Orient médiéval, IX^e-XIV^e siècle* (en russe), Naouka, 1983 ; Kh. Jaouiche, *La Théorie des parallèles en pays d'Islam : contribution à la préhistoire des géométries non euclidiennes*, Paris, 1986 ; I. Tóth, « Das Parallelen problem in Corpus Aristotelicum », *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 3, n° 4-5, 1967, p. 249-422.

[2] Thābit ibn Qurra, *Œuvres d'astronomie,* texte établi et traduit par R. Morelon, Paris, 1987 ; R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle,* vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, 1996, chap. II, p. 140-673, et vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, 2002, App. I, p. 687-765 ; *id.*, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, Londres, 2005.

[3] Texte établi à partir du ms. Paris, Bibliothèque nationale 2457, fol. 156^v-160^r.

[4] Texte établi à partir des manuscrits du Caire, Dār al-Kutub, Riyāḍa 40, fol. 200^v-202^r (noté C) et d'Istanbul, Aya Sofya 4832, fol. 51^r-52^r (noté A). Cette étude a été publiée dans *Arabic Sciences and Philosophy*, 15.1, 2005, p. 9-55.

Les difficultés présentées par la théorie des parallèles ont été repérées, comme chacun sait, avant même l'époque d'Euclide, par exemple dans certains textes d'Aristote[5]. Ces difficultés sont liées à la définition du parallélisme et à la possibilité de tracer des parallèles. Euclide définissait les droites parallèles comme des « droites qui, étant dans le même plan et étant prolongées indéfiniment dans les deux directions ne se rencontrent dans aucune des deux directions » (*Éléments*, déf. I.23). Il s'agit, comme on le voit, d'une définition qui soulève de sérieux problèmes car, d'une part c'est une définition négative et, comme telle, elle ne peut être admise par les logiciens et, d'autre part, elle fait intervenir une notion non définie auparavant, à savoir celle de l'infini (prolongement indéfini). Il semble donc que, dans ces conditions, la vérification du parallélisme soit impossible. Cependant Euclide était capable de démontrer qu'une certaine propriété angulaire implique le parallélisme (*Éléments*, prop. I.27 et 28) :

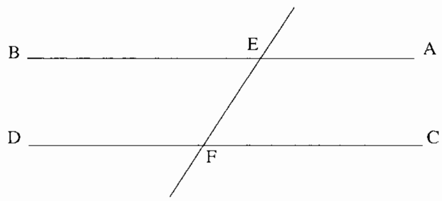


Fig. 1

AB et *CD* sont deux droites dans un plan et *EF* est une transversale rencontrant *AB* en *E* et *CD* en *F*. Si les angles alternes internes *BEF* et *EFC* sont égaux ou bien si les deux angles *AEF* et *EFC* font deux angles droits, alors *AB* et *CD* ne se rencontrent ni dans une direction, ni dans l'autre, de sorte qu'elles sont parallèles.

Euclide avait besoin de la propriété réciproque pour ramener le parallélisme à une propriété angulaire (positive et entièrement dans le domaine fini). Il énonce cette propriété réciproque dans la proposition I.29, mais sa démonstration exige un postulat, le fameux cinquième postulat : dans la même situation (Fig. 2), si les angles *AEF* et *EFC* ont une somme plus petite que deux angles droits, « les deux droites, si on les prolonge indéfiniment, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux angles droits » (*Éléments*, livre I, postulat 5).

Ce postulat est visiblement *ad hoc* et son énoncé a la forme d'un théorème (la réciproque de I.28) ; ainsi beaucoup d'objections lui ont été opposées dès l'époque hellénistique. On connaît ces objections à travers le commentaire au premier livre d'Euclide écrit par Proclus au cinquième

[5] *Anal. prior.*, B 16, 65a4 et 17, 66a11 ; voir aussi Tóth, « Das Parallelen problem ».

siècle de notre ère ; les géomètres ont essayé de *démontrer* le cinquième postulat. La base de telles démonstrations était une autre définition des parallèles et des hypothèses, implicites ou explicites, qui leur paraissaient plus naturelles que le postulat d'Euclide. C'est à cette occasion que Proclus résume les propositions de Posidonius et de Géminus, de Ptolémée et les siennes propres[6].

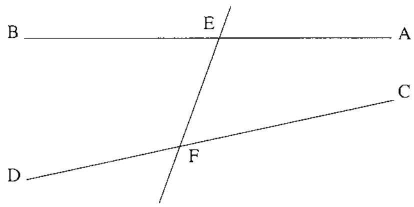


Fig. 2

La définition la plus courante proposée pour remplacer celle d'Euclide est une propriété qui implique le parallélisme : deux droites d'un plan sont dites parallèles si elles conservent la *même distance* entre elles, c'est-à-dire si la distance d'un point M de AB à CD ne dépend pas du choix de M sur AB. En d'autres termes, le parallélisme est remplacé par l'*équidistance*. Cette définition a ses propres difficultés : il faut démontrer que des droites équidistantes existent et que la propriété est symétrique, c'est-à-dire que si AB est équidistante de CD, CD est équidistante de AB. Dans le livre d'Euclide, une fois la proposition 29 démontrée, on peut établir l'existence des parallélogrammes, puis des rectangles ; il est alors facile de démontrer que les parallèles sont équidistantes.

Nous connaissons une tentative élaborée pour démontrer le postulat d'Euclide par un fragment du commentateur tardif Simplicius (VI^e^ siècle) ; le texte grec est perdu, mais il a été traduit en arabe et il est cité par al-Nayrizī[7]. Dans ce fragment, Simplicius attribue à son ami Aghānīs une démonstration du postulat ; malheureusement, nous ne savons rien de ce mystérieux Aghānīs, pas même son nom grec. Il définit le « parallélisme » par l'équidistance et, admettant la symétrie de cette propriété, il établit que le segment donnant la distance des deux droites est perpendiculaire à chacune d'elles. Cette propriété importante sera démontrée, pour la première fois à notre connaissance, par Thābit ibn Qurra ; en effet Thābit ibn Qurra démontre rigoureusement, comme on le verra plus loin, la symétrie de

[6] Proclus, *in Eucl. I*, éd. Friedlein 191.16-193.9 ; *Les Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide*, trad. française de P. Ver Eecke, Bruges, 1948, p. 153-5, 168-70.

[7] Voir ms. Leiden, Or. 399/1, fol. 16^r^-17^r^.

l'équidistance, une fois que l'existence de droites équidistantes est admise. La démonstration de l'énoncé correspondant à I.29 est alors facile :

On suppose que AB et CD sont équidistantes et on considère une transversale EG. On trace EI perpendiculaire à CD et GK perpendiculaire à AB ; par hypothèse $EI = GK$, de sorte que les triangles rectangles GKE et EIG sont égaux. Alors les angles alternes internes EGK et GEI sont égaux.

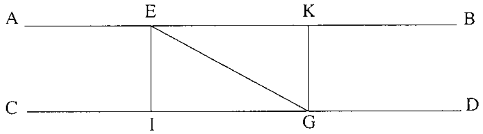


Fig. 3

Pour donner une démonstration directe du cinquième postulat, il faut déterminer jusqu'où on doit prolonger les droites AB et CD de la figure 4 pour être sûr qu'elles se rencontrent. Aghānīs utilise le lemme X.1 des *Éléments* d'Euclide, qui est une forme de ce que l'on appelle maintenant « l'axiome d'Archimède » ; il utilise aussi tacitement le fait qu'une droite qui rencontre un côté d'un triangle et qui est parallèle à un autre côté rencontre nécessairement le troisième côté (cas particulier de ce que l'on appellera plus tard « l'axiome de Pasch »).

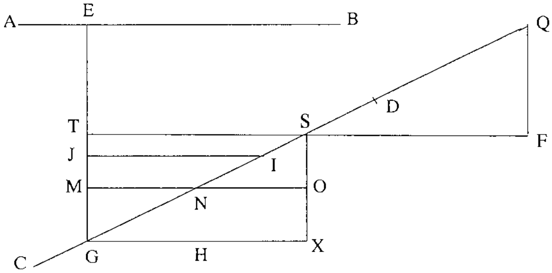


Fig. 4

D'un point I de CD, on trace IJ « parallèle » à AB. On partage EG en son milieu T, puis TG en son milieu M et on continue ; par le lemme X.1, après un nombre n assez grand d'étapes, on arrive à un point de division, disons M tel que $MG < JG$. La « parallèle » MN à AB rencontre CD en N entre G et I (axiome de Pasch). Soit Q sur le prolongement de CD tel que $GQ = 2^n GN$ (ici $4GN$ puisqu'on a supposé $n = 2$) ; soit S tel que $GS = 2GN$. Menons SX « parallèle » à EG, rencontrant MN prolongé en O. Les triangles MNG et ONS sont égaux (*Éléments*, I.29 et I.15), de sorte que $SO = GM = XO$ (parallélogramme) et $SX = TG$. Alors TS est « parallèle » à

GX, donc à AB ; en continuant de même, on démontre que EQ est «parallèle» à AB, c'est-à-dire que Q est sur AB (unicité de la parallèle).

On retrouvera les composantes essentielles de cette démonstration chez plusieurs autres auteurs : définition du « parallélisme » par équidistance, démonstration de l'énoncé correspondant à I.29 pour des lignes équidistantes supposées (implicitement) exister, démonstration du cinquième postulat par recours à l'axiome d'Archimède et à l'axiome de Pasch.

II. PREMIER TRAITÉ DE THĀBIT IBN QURRA

Revenons maintenant aux traités de Thābit ibn Qurra consacrés au cinquième postulat en commençant par *Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent.* Dans ce traité, contrairement à ses prédécesseurs, Thābit ibn Qurra s'efforce, soulignons-le, de justifier l'existence de lignes droites équidistantes. À cette fin, Thābit ibn Qurra a recours au mouvement de translation rectiligne. Avec Thābit ibn Qurra, comme avec son maître al-Ḥasan ibn Mūsā, le mouvement devient nécessaire au fondement de la géométrie. Rappelons que Thābit ibn Qurra, dans ses autres traités mathématiques, notamment celui consacré aux sections cylindriques, a également introduit la notion de mouvement[8]. Ici, Thābit ibn Qurra justifie la nécessité du mouvement par les considérations suivantes : l'égalité et la mesure supposent la possibilité du déplacement et de la superposition des figures. Pour lui, la définition du cercle comme le troisième postulat d'Euclide font implicitement appel à un mouvement de rotation autour d'un centre fixe ; par analogie, Thābit ibn Qurra admet le mouvement de translation rectiligne d'un corps rigide comme notion primitive de la géométrie. Il énonce un postulat correspondant : tout point d'un corps soumis à un mouvement de translation rectiligne décrit une ligne droite dans la direction de la translation.

Dans la première proposition, Thābit ibn Qurra établit l'existence de droites équidistantes de la manière suivante : on considère deux droites AB et CD dans un plan, telles que les segments AC et EF soient égaux et que les angles ACD et EFD soient égaux. Alors les perpendiculaires AG et EH à CD sont égales et, pour tout point I de AB, la perpendiculaire IK à CD est égale à AG et EH.

[8] Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, chap. II, p. 458-673.

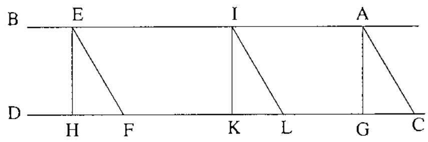


Fig. 5

Pour démontrer cette proposition, Thābit ibn Qurra observe que le mouvement de translation du triangle ACG le long de CG l'amène sur le triangle EFH ou sur le triangle ILK.

Les propositions 2 et 3, réciproques l'une de l'autre, énoncent des propriétés d'un certain quadrilatère (un trapèze isocèle) ; ces propriétés seront la base du travail de ʿUmar al-Khayyām sur le cinquième postulat[9]. Le quadrilatère $ABCD$ a ses angles à la base $B\hat{A}D$ et $C\hat{D}A$ égaux et ses côtés AB et DC égaux ; alors $A\hat{B}C = D\hat{C}B$. Inversement, si $\hat{A} = \hat{D}$ et $\hat{B} = \hat{C}$, alors $AB = CD$.

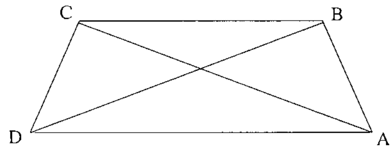


Fig. 6

En effet, si $\hat{A} = \hat{D}$ et $AB = DC$, les triangles ABD et DCA sont égaux (*Éléments*, I.4), de sorte que $AC = DB$; il en résulte que les triangles ABC et DCB sont égaux (*Éléments*, I.8), donc $\hat{B} = \hat{C}$.

On démontre la réciproque en supposant que $AB \neq DC$, par exemple que $AB > DC$ et en déduisant une contradiction. Soit $AE = DC$ porté sur AB ; par la propriété directe on sait que $A\hat{E}C = D\hat{C}E$ qui est plus petit que $D\hat{C}B$. Mais $A\hat{E}C$ doit être plus grand que $A\hat{B}C$ comme angle extérieur au triangle CBE (*Éléments*, I.16) et on a supposé que $A\hat{B}C = D\hat{C}B$.

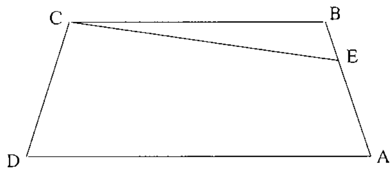


Fig. 7

[9] R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999, p. 322-3, prop. 1 et p. 332-3, prop. 4.

Dans la quatrième proposition, Thābit ibn Qurra démontre la symétrie de la propriété d'équidistance pour deux lignes droites. Les deux droites sont AB et CD ; on suppose que les perpendiculaires EG et FH à CD menées des points E et F de AB sont égales. Alors EG et FH sont perpendiculaires à AB.

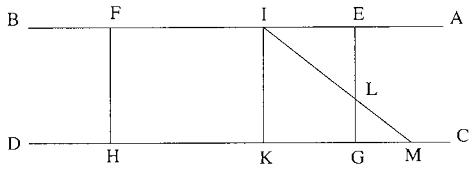


Fig. 8

Tout d'abord, une perpendiculaire IK à CD menée d'un point I de AB ne peut pas rencontrer EG : si elle rencontrait EG en un point L, le triangle LGM aurait deux angles droits, en G et en M, ce qui contredit *Éléments* I.17. Par la proposition 1, on sait que la perpendiculaire IK à CD est égale à EG et par la proposition 2, que $K\hat{I}E = G\hat{E}I$. De même on a $K\hat{I}F = H\hat{F}I$ et $G\hat{E}F = H\hat{F}E$, de sorte que $K\hat{I}E = K\hat{I}F$ et que les angles en I sont droits ; alors les angles GEI et HFI, qui leur sont égaux, sont aussi droits.

La proposition 5 caractérise les droites équidistantes comme étant celles qui ont une perpendiculaire commune ; elle se fonde sur une propriété qui sera le noyau de la démonstration d'Ibn al-Haytham pour le cinquième postulat (existence du rectangle[10]).

On trace AC et BD perpendiculaires à un segment donné AB et, d'un point E sur AC, on abaisse la perpendiculaire EF à BD. Alors l'angle FEA est droit et EF est égal à AB.

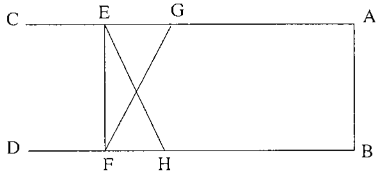


Fig. 9

Démontrons que $AE = BF$; sinon $AE > BF$ ou bien $AE < BF$. Si $AE > BF$, soit $AG = BF$, avec G sur AE ; comme GA et FB sont perpendiculaires à AB, on sait, par la proposition 4, qu'elles sont aussi

[10] Ibn al-Haytham, *Sharḥ Muṣādarāt Kitāb Uqlīdis*, ms. Istanbul, Feyzullah 1359, fol. 170^{v}-176^{r}.

perpendiculaires à FG. Ainsi $G\hat{F}B$ est un angle droit, de même que $E\hat{F}B$, ce qui est absurde. Si $AE < BF$, soit $BH = AE$, avec H sur BF ; par la proposition 4, l'angle EHB est droit, donc égal à EFH, ce qui est absurde, car un angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés (*Éléments*, I.16).

Ainsi $AE = BF$ et, par la proposition 2, l'angle AEF est égal à l'angle droit BFE ; par la proposition 3, on conclut que $EF = AB$.

Dans la proposition 6, Thābit ibn Qurra établit l'égalité des angles alternes internes formés par une transversale à deux droites équidistantes.

On suppose que les droites AB et CD ont une perpendiculaire commune EF et on considère une transversale GI ; alors les angles alternes internes AHI et FIH sont égaux.

Pour le démontrer, posons L le milieu de HI ; abaissons la perpendiculaire LM à AB. Le prolongement de ML rencontre CD en un point N, car il pénètre dans le quadrilatère $EHIF$ et il ne peut pas en sortir à travers EF ni à travers EH (une forme de l'axiome de Pasch intervient ici d'une manière implicite). Par la proposition 5, l'angle en N est droit comme l'angle en M et on a $M\hat{L}H = N\hat{L}I$, de sorte que les triangles rectangles LNI et LMH sont égaux et que leurs angles en H et en I sont égaux.

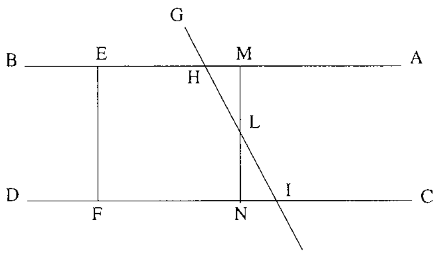


Fig. 10

Cette proposition est destinée à remplacer la proposition I.29 des *Éléments*, dans laquelle Euclide établit que « *une droite tombant sur des parallèles fait des angles alternes internes égaux, l'angle externe égal à l'angle interne opposé et les angles internes du même côté égaux à deux angles droits* ».

Thābit ibn Qurra achève son traité par une démonstration du postulat d'Euclide selon une voie analogue à celle d'Aghānīs, c'est-à-dire en utilisant les axiomes d'Archimède et de Pasch.

Soient AC et BD deux droites telles que la somme des angles CAB et DBA soit plus petite que deux angles droits ; alors l'un au moins des deux angles, par exemple $D\hat{B}A$, est aigu. Soit AE perpendiculaire à BD ; on choisit un point F sur AC et on abaisse la perpendiculaire FG sur AE. D'après l'axiome d'Archimède, il existe un multiple AH de AG plus grand que AE, disons $4AG = AH > AE$.

Soient I, K, H sur AE tels que $AG = GI = IK = KH$ et soient L, M, N sur AC tels que $AF = FL = LM = MN$; élevons la perpendiculaire IS sur AE et abaissons la perpendiculaire FS sur IS. On peut appliquer la proposition 5 au quadrilatère $GISF$ pour établir que son angle en F est droit et que $FS = GI = AG$. Comme l'angle AFG est aigu, FL reste extérieur au rectangle $GISF$. Les droites FS et AI ont une perpendiculaire commune SI, donc, par la proposition 6, la transversale AF fait avec elles des angles GAF et SFL égaux ; les triangles AFG et FLS sont donc égaux et l'angle FSL est égal à l'angle droit AGF. Il en résulte que les points ISL sont alignés et que LI est perpendiculaire à AE.

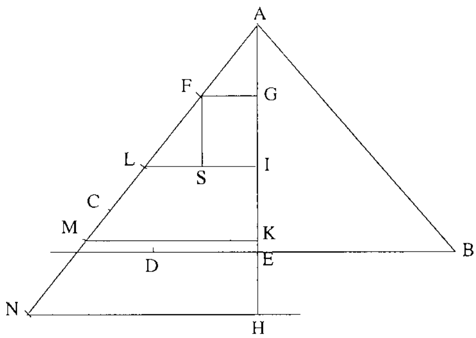


Fig. 11

On démontre de même que MK et NH sont perpendiculaires à AE ; comme BE est aussi perpendiculaire à AE, elle ne peut pas rencontrer HN. Par suite le prolongement de BD, qui pénètre dans le triangle ANH, doit rencontrer AN (« axiome de Pasch »).

Les deux principales propriétés établies dans cette proposition sont :

1) Les droites qui joignent les points de division qui se correspondent sur les droites AH et AN sont équidistantes. Cette propriété est évidemment une conséquence immédiate de la proposition 2 du livre VI des *Éléments*, mais on ne peut pas à ce stade utiliser les résultats de ce livre VI, puisqu'ils reposent sur la théorie des parallèles.

2) La propriété exprimée par l'axiome de Pasch : la droite BD coupe le plan en deux demi-plans, et toute droite joignant un point de l'un des demi-plans à un point de l'autre coupe BD. Thābit ibn Qurra est, à notre connaissance, le premier à avoir utilisé délibérément cette propriété. Aghānīs en revanche ne fait aucune mention d'une telle propriété, pourtant indispensable.

Notons enfin qu'alors qu'Aghānīs utilise l'axiome d'Archimède sous sa forme multiplicative (lemme X.1), Thābit ibn Qurra l'utilise sous sa forme additive.

Dans ce texte, on vient de le voir, Thābit ibn Qurra a recours à la notion de mouvement comme notion primitive de la géométrie et aux axiomes d'Archimède et de Pasch ; la combinaison de ces éléments distingue l'exposé de Thābit ibn Qurra de ceux de ses prédécesseurs et fournira à Ibn al-Haytham et à 'Umar al-Khayyām leurs nouveaux points de départ. C'est à ce titre que cette contribution fonde une tradition de recherche sur la théorie des parallèles qui durera plusieurs siècles.

III. LE SECOND TRAITÉ DE THĀBIT IBN QURRA

Le second traité de Thābit ibn Qurra s'intitule *Sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide*. La figure de base de cette démonstration est un couple de droites « qui ne se rapprochent ni ne s'écartent » (*i. e.* de droites équidistantes). Dans la première proposition de ce traité, Thābit ibn Qurra reprend la proposition I.28 des *Éléments* d'Euclide : si deux droites font des angles alternes internes égaux avec une transversale, elles sont *parallèles*. Thābit ibn Qurra énonce que de telles droites « ne se rapprochent ni ne s'écartent », c'est-à-dire qu'elles sont équidistantes.

L'hypothèse est l'égalité des angles AEG et DGE ; Thābit ibn Qurra applique EA sur GD et EG sur GE de manière que GC vienne sur EB, par la symétrie de centre le milieu de EG. Il suppose implicitement que cette symétrie conserve ces angles. Si EB et GD se rapprochaient vers B et D, alors EA et GC devraient se rapprocher vers A et C et les deux droites se rapprocheraient dans les deux directions, propriété que Thābit ibn Qurra rejette comme absurde. De la même manière, il montre que si les deux droites s'éloignaient dans une direction, elles devraient aussi s'éloigner dans l'autre, ce qu'il rejette aussi comme absurde.

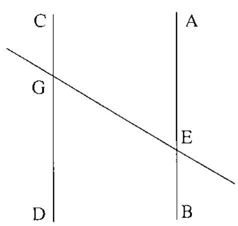


Fig. 12

Ce postulat sur lequel repose la démonstration de Thābit – si deux droites se rapprochent dans une direction, elles s'éloignent dans l'autre (faux dans une géométrie elliptique) – interviendra également dans les démonstrations d'al-Khayyām et de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī[11] du cinquième postulat d'Euclide.

La seconde proposition est la réciproque de la première et elle correspond à la proposition I.29 des *Éléments* d'Euclide : si deux droites ne se rapprochent ni ne s'éloignent, elles font des angles alternes internes égaux avec toute transversale, dans l'énoncé de laquelle « droites parallèles » est remplacé par « droites qui ne se rapprochent ni ne s'écartent ».

Si en effet, par exemple, $A\hat{E}G$ est plus petit que $E\hat{G}D$, on trace HGI tel que $E\hat{G}I = A\hat{E}G$; alors GI est entre CD et AB. Mais HI et AB ne se rapprochent ni ne s'éloignent par la première proposition et ceci est absurde car il en est de même de CD et AB.

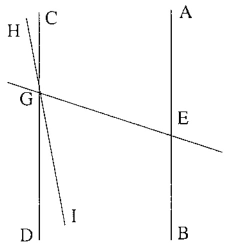


Fig. 13

Ce raisonnement rappelle celui de Proclus dans sa tentative de démontrer le postulat d'Euclide[12] ; Thābit admet implicitement ici l'unicité d'une droite passant par un point donné, et qui ne se rapproche ni ne s'éloigne d'une droite donnée.

La proposition 3 reprend *Éléments* I.33 qui établit l'existence des parallélogrammes, en remplaçant encore « droites parallèles » par « droites qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent ». On considère deux droites AB et CD qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent et qui sont égales. Alors AC et BD ne se rapprochent ni ne s'éloignent et elles sont égales.

Car les angles BAD et CDA sont égaux (proposition 2) de sorte que les triangles ADB et DAC sont égaux : $B\hat{D}A = C\hat{A}D$ et $BD = CA$. Alors les

[11] *Risāla fī Sharḥ mā ashkala min Muṣādarāt Kitāb Uqlīdis*, dans Rashed et Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, p. 320-9 et *al-Risāla al-Shāfiya*, n° 8, vol. II, p. 4-14 des *Rasā'il al-Ṭūsī*, 2 vol., Hyderabad, 1359 H.

[12] Proclus, *loc. cit.*, 371.23-373.2 ; voir aussi Rashed et Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, p. 334-7, prop. 6.

droites AC et BD ne se rapprochent ni ne s'éloignent d'après la proposition 1.

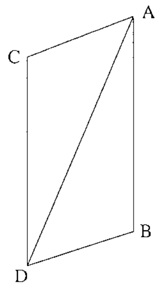


Fig. 14

La quatrième proposition donne la propriété de la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle ; c'est un cas particulier de *Éléments* VI.2, si on remplace « droites parallèles » par « droites qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent » : soit ABC un triangle et soient D, E les milieux de AB et AC respectivement. Alors DE et BC ne se rapprochent ni ne s'éloignent et DE est égal à la moitié de BC.

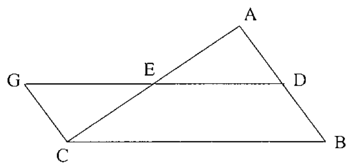


Fig. 15

On prolonge DE par $EG = DE$ et on joint CG. Les triangles AED et GEC sont égaux (*Éléments*, I.4), donc $A\hat{D}E = C\hat{G}E$ et $CG = AD = BD$; ainsi AB et GC ne se rapprochent ni ne s'éloignent (proposition 1) et on peut appliquer la proposition 3 pour établir que BC et DG ne se rapprochent ni ne s'éloignent et que $DG = BC$.

Cette proposition servira à démontrer que les droites joignant les points de division correspondants sur deux droites données ne se rapprochent ni ne s'éloignent.

Enfin Thābit ibn Qurra démontre le postulat d'Euclide en se servant de nouveau des axiomes d'Archimède et de Pasch.

Les droites AB et CD font avec la transversale EG deux angles BEG et DGE plus petits que deux angles droits et on veut démontrer qu'elles se rencontrent dans la direction de B et D.

Soit GH la ligne droite passant par G qui ne se rapproche ni ne s'éloigne de AB ; on choisit un point I sur CD et on mène IK ne se rapprochant ni ne s'éloignant de EG. On prolonge GI par $IL = GI$ et GK par $KH = GK$; d'après la proposition 4, IK et LH ne se rapprochent ni ne s'éloignent et IK est égal à la moitié de LH, c'est-à-dire que $LH = 2IK$. En itérant cette construction, on arrive ainsi à un segment LH plus grand que EG en vertu de l'axiome d'Archimède, utilisé cette fois sous sa forme multiplicative. Soit M sur HL tel que $HM = GE$; d'après la proposition 3, EM et GH ne se rapprochent ni ne s'éloignent et ils sont égaux. Or cela signifie que M est sur le prolongement de EB, du fait de l'unicité, admise, de la droite passant par E qui ne se rapproche ni ne s'éloigne de (GH) ; alors EB prolongé rencontre CD avant LH du fait de la même variante de l'axiome de Pasch que dans la démonstration précédente : M et E sont dans deux demi-plans différents déterminés par (CD), donc (ME) coupe (CD) entre M et E.

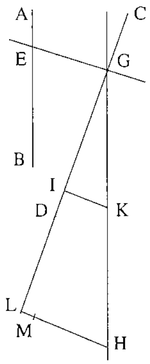


Fig. 16

Les deux démonstrations de Thābit ibn Qurra se fondent sur la notion d'équidistance, qui remplace le parallélisme au sens d'Euclide. Mais, alors que la première établit l'existence des droites équidistantes en utilisant un mouvement de translation rectiligne et a recours à l'axiome d'Archimède sous sa forme additive et à une variante de l'axiome de Pasch, la seconde part d'un principe implicite selon lequel deux droites ne peuvent ni converger simultanément des deux côtés d'une transversale, ni diverger simultanément des deux côtés pour établir l'existence de droites qui ne convergent ni ne divergent. Dans cette deuxième démonstration, Thābit ibn Qurra n'introduit pas le mouvement ; et même s'il utilise encore l'axiome d'Archimède et la même variante de l'axiome de Pasch que dans la première démonstration, c'est sous la forme multiplicative qu'il fait intervenir le premier de ces axiomes. Il serait erroné de réduire, comme cela a été fait, les deux démarches de Thābit ibn Qurra à celle d'Aghānīs dans la mesure où Thābit démontre dans le premier traité l'existence de droites équidistantes ainsi que la propriété fondamentale de symétrie de l'équidistance.

Enfin la figure de base de la première démonstration de Thābit ibn Qurra est le quadrilatère dit de Khayyām (ou de Saccheri), qui intervient également dans la démonstration d'Ibn al-Haytham. On voit ainsi le rôle capital de cette démonstration, à la fois pour l'histoire de la théorie des parallèles et pour la fondation de cette tradition que Thābit inaugure ; tradition qui sera poursuivie par de nombreux mathématiciens, dont les deux cités.

TEXTE ET TRADUCTION

1. *Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent*

Fī anna al-khaṭṭayn idhā ukhrijā 'alā aqall min zāwiyatayn qā'imatayn, iltaqayā

2. *Sur la démonstration du fameux postulat d'Euclide*

Fī burhān al-muṣādara al-mashhūra min Uqlīdis

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Traité de Thābit ibn Qurra
Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent

Puisque la plus grande part de l'étude de la géométrie n'a trait qu'aux grandeurs, à leur égalité, leur différence, leur mesure et à ce qui s'y ramène, et que le premier des principes relatifs aux propositions considérées à partir de l'essence de la chose et admises pour cette notion (*ma'nā*), principe grâce auquel on comprend toutes les évaluations et les mesures, est la superposition de tout ce qui est égal à ce qui lui est égal, si nous l'imaginons déplacé vers celui-ci selon sa forme et placé sur lui, pour mesurer par lui ; et l'excédent du plus grand sur le plus petit, quand nous y imaginons une action analogue ; et le défaut du plus petit par rapport au plus grand ; et le nombre des fois selon lesquelles il se superpose à lui, s'il se superpose à lui plusieurs fois en des positions successives : c'est par ce principe qu'on connaît à quoi s'élève la mesure de la chose ; aussi les prémisses de nombreuses démonstrations de ce qui nécessite démonstration à partir des premiers principes des notions et des propositions en géométrie reviennent à utiliser cette action que nous avons évoquée, c'est-à-dire à mouvoir l'une des deux choses dont l'une mesure l'autre, l'élever au-dessus de sa position et la déplacer en imagination, sans que sa forme change au cours du mouvement, afin de la placer suivant sa forme sur la chose qu'elle mesure[1], comme Euclide a dû le faire dans la démonstration de la quatrième proposition du premier livre de son ouvrage sur les *Éléments* et dans la démonstration de la huitième proposition de celui-ci, étant donné que ces deux propositions sont parmi les principes les plus primitifs, dont la connaissance et la démonstration précèdent et préparent les autres. En effet, la quatrième proposition de celui-ci, même si son rang numérique est le quatrième, est pour d'autres un commencement et une prémisse, du fait qu'elle se passe des propositions qui la précèdent. [157r] Mais si nous méditons aussi la première des propositions qui la précèdent, ainsi que celles de tout le livre, et si nous saisissons ce qu'elle est, nous saurons que le principe de sa démonstration revient à l'égalité des droites menées du centre du cercle qu'on a construit, dont la vérité pour nous n'est due à rien d'autre qu'à ce que nous avons compris, et qui est établi dans nos âmes à partir de la construction du cercle et de sa génération. Mais nous ne le comprenons qu'en imaginant une seule droite

[1] Pour fonder la géométrie métrique, on a besoin de déplacements ; la mesure est définie d'abord comme superposition exacte dans le cas de l'égalité et par superpositions réitérées dans le cas d'inégalité (cette réitération peut donner un multiple entier ou fractionnaire).

بسم *الله الرحمن* الرحيم ١٥٦-ظ

مقالة ثابت بن قرة
في أن الخطين إذا أخرجا على أقل من زاويتين قائمتين التقيا

إنه لما كان أكثر النظر في علم الهندسة إنما هو في أمر المقادير وتساويها واختلافها ومسائحها وفيما يرجع إلى ذلك، وكان أول الأصول من القضايا المأخوذة من ذات الشيء المسلمة في هذا المعنى والذي به تفهم التقديرات والمسائح كلها هو انطباق كل مساوٍ على ما يساويه، إذا توهمناه منقولاً إليه كهيئته وموضوعًا عليه ليقاس به، وزيادة الأعظم على الأصغر، عند توهمنا مثل هذا الفعل به ونقصان الأصغر عن الأعظم، وعدد المرات التي ينطبق عليه إذا انطبق مرات على مواضع متتالية منه، وهو الذي به يعرف مبلغ مساحة الشيء، رجعت أوائل كثير من براهين ما يحتاج إلى البرهان من الأصول الأوّل من المعاني والأشكال في علم الهندسة إلى استعمال هذا الفعل الذي ذكرنا، أعني تحريك أحد الشيئين اللذين يقاس أحدهما بالآخر ورفعه من موضعه ونقله بأوهامنا من غير أن تغير هيئته بالحركة، حتى نضعه كهيئته على الذي يقاس به منها، كما احتاج أوقليدس أن يفعل في برهان الشكل الرابع من المقالة الأولى من كتابه في *الأصول* وفي برهان الشكل الثامن منها، لما كانا من أقدم الأصول التي يقدّم ويوطئ علمها وبرهانها لما سواها. فإن الشكل الرابع منها وإن كان رابعًا في مرتبته من العدد، فإنه باستغنائه عما قبله من الأشكال / قد صار ١٥٧-و مبدأ وأولاً لغيره. على أنا إن تأملنا أيضًا الشكل الأول من الأشكال التي قبله ومن جميع ‹أشكال› ذلك الكتاب، وحصلنا الحال فيه علمنا أنه قد رجع أصل برهانه إلى تساوي الخطوط المستقيمة التي تخرج من مركز الدائرة التي تعمل، التي صحة ذلك من أمرها عندنا ليس لشيء غير ما فهمناه وقام في أنفسنا من عمل الدائرة وحدوثها. وأنا إنما نفهم ذلك بأن نتوهم خطًا واحداً مستقيماً ذا

de telle ou telle grandeur, ou autre chose qui conserve grandeur et distance en se mouvant, et qui donc a tourné d'une position quelconque pour revenir à son lieu initial d'où elle est partie, alors que l'une de ses extrémités tient nécessairement en un point unique immobile. C'est grâce à cela que nous comprendrons et apprendrons ce que nous avons dit relativement à l'égalité des droites menées du centre du cercle. Nous n'avons donc fait que déplacer, en imagination, une droite quelconque par laquelle nous avons superposé tous ces intervalles et ces distances par un déplacement continu ; et c'est par elle que nous avons appris cela[2].

Le déplacement de cette droite et sa mise en mouvement autour d'un seul centre, l'une de ses deux extrémités tenant à un seul point fixe, est cependant chose claire, familière et usuelle ; on comprend que cette droite évalue et mesure les intervalles par lesquels elle passe sans varier[3]. Si donc nous imaginons le déplacement de la droite, son extrémité tenant à une droite fixe en même temps que d'autres conditions, la chose n'est pas familière, et il n'est pas garanti que, par le déplacement de la droite, avec ce qui la suit, sa forme ou sa position varient d'une variation qui engendre dans l'égalité des intervalles une différence certaine ; aussi ne peut-on porter, à partir de cela, de jugement d'égalité qu'avec une certaine prudence, peu accessible à l'entendement de celui qui en aborde l'examen, et qui lui sera difficile[4].

S'il en est ainsi et si la droite que j'avais besoin d'utiliser dans ce que je vise, pour montrer par sa superposition aux intervalles par lesquels elle passe que ce sont des intervalles égaux, est une droite de cette sorte, j'envisage de circonscrire son déplacement par une notion qui enlève le doute et mène à la certitude qu'elle ne varie ni en forme, ni en attributs, d'une variation qui produit une différence pour les intervalles par lesquels elle passe, ceux dont je veux montrer l'égalité, mais elle se superpose à eux et indique par sa superposition à eux leur égalité.

[2] Un déplacement se réalise par un mouvement continu d'une figure qui conserve, tout au long de ce mouvement continu, sa grandeur et sa forme ; seule sa position change.

[3] Il s'agit encore de la génération du cercle.

[4] Thābit ibn Qurra introduit ici un mouvement de translation dans une direction donnée. L'exposition euclidienne de la géométrie dans les *Éléments* ne permet pas de considérer *a priori* ce type de mouvement. Le déplacement par translation ne pourrait être introduit qu'une fois l'existence du parallélogramme établie, c'est-à-dire après avoir utilisé le cinquième postulat. De plus la notion de continuité du mouvement est absente des *Éléments* ; ceci interdit de considérer une translation continue. Mais comme Thābit ibn Qurra veut établir le cinquième postulat, il inverse la démarche euclidienne et pose *a priori* le mouvement de translation pour être en mesure de développer son raisonnement. Il introduit ainsi dans la géométrie deux postulats supplémentaires : le premier, tout point, dans un solide en mouvement continu de translation rectiligne, décrit une droite ; le deuxième, toute droite dans un solide en mouvement continu de translation, si sa direction est celle de la translation, décrit une droite.

مقدار أو غيره مما يحفظ المقدار والبعد <إذا> تحرك، فدار من موضع ما حتى عاد إلى مكانه الأول الذي منه بدأ مع لزومه من أحد طرفيه لنقطة واحدة غير متحركة. فبهذا صرنا نفهم ونعلم ما قلنا من تساوي الخطوط التي تخرج من مركز الدائرة. فإنما نقلنا إذاً بأوهامنا خطاً ما مستقيماً حتى طابقنا به كل تلك المسافات والأبعاد نقلاً متصلاً، فعلمنا به ذلك.

غير أن نقل هذا الخط المستقيم وتحريكه حول مركز واحد ومع لزومه من أحد طرفيه لنقطة واحدة ثابتة، شيء بيّن مألوف، قد جرت به العادة، وفهم أن المسافات التي يمرّ بها يقدرها ويمسحها من غير أن يختلف أمره. فأما إن توهمنا أن نقلته مع لزومه من طرفه لخط مستقيم ثابت ومع غير ذلك من الشرائط، فإن ذلك يكون شيئًا غير مألوف، ولا مأمون من أن يكون الخط بنقلته يتغير هيئته أو وضعه مع ما يليه تغيّراً يحدث في تساوي المسافات اختلافًا ما، فلا يوثق بالحكم عليها من قبله بالتساوي إلا بتحذر من ذلك بما يبعد عن فهم المبتدئ بالنظر فيه ويعسر عليه.

فلما كان ذلك كذلك، وكان الخط الذي احتجتُ إلى استعماله فيما قصدت له لأبين بمطابقته للمسافات التي يمر بها أنها مسافات متساوية، خطاً هذه سبيله، رأيتُ أن أقيد نقلته بمعنى يزيل الشك ويصير إلى الثقة بأنه لم يتغير عن هيئته وصفته تغيّراً يحدث في المسافات التي يمر بها، وهي التي أردتُ أن أبين تساويها به، اختلافًا، وإنما طابقها فدلّ بانطباقه عليها على تساويها.

2 لزومه: لزوم – 6 لزومه: لزوم – 8 يمرّ: تمر – 9 لزومه: لزوم – 11 مع ما: معما – 15 يمر: تمر – 17 يمر: تمر.

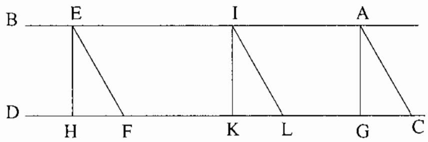
Pour obtenir cela, je considère sa position imaginée dans un solide en mouvement et elle y est fixe comme je le décrirai pour que le solide conserve son essence lors du mouvement, et conserve également ce dont on a besoin pour cette droite. Cela sera plus clair pour expliquer ce dont j'ai besoin et c'est pourquoi je commence à partir d'une chose connue que j'introduis concernant le solide, qui est la suivante :

Si nous imaginons un solide tout entier en mouvement dans une seule direction, d'un seul mouvement simple rectiligne, alors chacun de ses points se meut d'une manière rectiligne et trace donc par son passage une droite suivant laquelle il passe. Les droites qui sont dans ce solide, celles parmi elles qui sont sur le prolongement de son mouvement, passent par une droite. Quant à celles qui ne sont pas dans le prolongement de son mouvement, elles ne sont pas ainsi[5].

Ceci étant introduit, on démontrera facilement ce qui suit selon cette voie.

– **1** – Si on a deux droites dans un même plan et si on mène entre elles deux droites qui les rencontrent, telles qu'elles soient égales et entourent avec l'une des deux premières droites deux angles égaux d'un même côté, alors, si on abaisse deux perpendiculaires qui tombent sur cette droite à partir de deux points de l'autre droite, ces perpendiculaires sont égales.

Soient deux droites *AB* et *CD* dans un même plan. Que l'on mène entre elles deux droites *AC* et *EF* et qu'elles soient égales ; que les deux angles *ACD* et *EFD* soient égaux. [157[v]] Je dis que, si deux perpendiculaires tombent sur la droite *CD* à partir de deux points de la droite *AB*, elles sont égales.



Démonstration : Imaginons qu'un solide a entouré la droite *AC* et une portion *CG* de la droite *CD*, toutes deux lui seront alors intérieures et que ce solide se meut tout entier, à partir du côté de *C* vers le côté de *D*, d'un seul mouvement rectiligne, simple, suivant le prolongement de la droite *CD* et qu'en plus il contient une réplique tracée des deux droites *AC*, *CG*, qui reste dans le solide selon les formes de celles-ci ; celle des deux droites qui est la réplique de la droite *AC* tracée dans le solide a donc une position qui n'est

[5] Le mouvement de translation est introduit ici comme une notion première. Dans un mouvement de translation d'un solide, tous les points de ce solide se meuvent du même mouvement rectiligne. Ils décrivent ainsi chacun une droite. Un tel mouvement conserve les formes, les positions relatives et les distances des points deux à deux. Le recours au solide est imposé par l'introduction du mouvement. Pour parler un autre langage, dans le cas de Thābit ibn Qurra, il s'agirait d'un déplacement continu, transformation paramétrée continûment par une variable non explicitée.

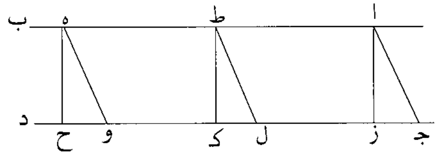
فكان من أجل ذلك أن أجعل وضعه متوهمًا في مجسم يتحرك، وهو فيه ثابت، على ما سأصف حتى يكون المجسم بأنه حافظ لذاته عند حركته حافظًا أيضًا لما يحتاج إليه في ذلك الخط. فكان ذلك أبين في شرح ما أحتاج إليه، ولذلك جعلت الابتداء من شيء قد قدمته من أمر المجسم معلوم وهو هذا:

كل مجسم نتوهمه متحركًا بكليته إلى جهة واحدة حركة واحدة بسيطة على استقامة، فإن كل نقطة منه فهي تتحرك على استقامة، فتخط بممرها خطًا مستقيمًا عليه تمر. وأما الخطوط المستقيمة التي تكون فيه، فإن ما كان منها على استقامة حركته، فهو أيضًا يمر على خط مستقيم. وأما ما كان منها على غير استقامة حركته، فليس كذلك.

فإذ قد قدمنا هذا، فإن ما بعده يتبين بسهولة على هذه السبيل.

〈 آ 〉 كل خطين مستقيمين يكونان في سطح واحد، ويخرج فيما بينهما خطان مستقيمان يلقيانهما، فيكونان متساويين ويحيطان مع واحد من الخطين الأولين بزاويتين متساويتين من جهة واحدة، فإن كل عمودين يقعان على ذلك الخط من نقطتين من الخط الآخر منهما، فهما متساويان.

فليكن خطا ا ب جـ د المستقيمان في سطح واحد، وليخرج فيما بينهما خطان مستقيمان، وهما ا جـ ه و وليكونا متساويين. ولتكن زاويتا ا جـ د ه و د متساويتين؛ / فأقول: إن كل عمودين يقعان على خط جـ د من نقطتين من خط ا ب، فهما متساويان. ظ-١٥٧



برهان ذلك: أنا نتوهم [أن توهمنا] أن مجسمًا قد أحاط بخط ا جـ وبقطعة جـ ز من خط جـ د، فصارا فيه، وأن ذلك المجسم قد تحرك بكليته من جهة جـ إلى جهة د حركة واحدة مستقيمة بسيطة على استقامة خط جـ د، وأن فيه مع ذلك مثالاً مرسومًا لخطي ا جـ جـ ز - باقيًا فيه - لهما كهيئتهما. فإن الخط منهما الذي هو مثال لخط ا جـ مرسوم في المجسم يكون وضعه على غير

1 أجل: احدر، ولقد تقرأ أجدر من فعل جَدُر، ولكن هذا الفعل لا يتعدى بنفسه، ومن ثم لزم التصحيح، وما أثبتناه يتفق مع السياق – 7 تمر: يمر – 12 يلقيانهما: يلتقيانهما – 19 وبقطعة: أثبت الواو في الهامش – 23 ا جـ: ا ب.

pas suivant le prolongement du mouvement du solide. Quant à celle des deux droites qui est la réplique de la droite *CG* tracée dans le solide, elle est suivant le prolongement du mouvement du solide. La réplique tracée de la droite *CG* passera par conséquent durant tout le mouvement du solide par la droite *CD* et sera placée sur elle. Si nous imaginons que le point *C* de la réplique tracée de la droite *AC* dans le solide est parvenu, par le mouvement du solide, au point *F*, alors la position de la réplique de *CG* qui y est tracée sera comme la position de la droite *FH*, car elle se meut suivant le prolongement de *CD*. Mais l'angle *EFH* est égal à l'angle *ACG*, donc la réplique de la droite *AC* tracée dans le solide, si le point *C* de celle-là parvient au point *F*, tombera sur la droite *FE*. Mais puisque la droite *AC* est égale à la droite *FE*, elle se superpose à elle et le point *A* de celle-là tombe sur le point *E* de *FE*. Donc le point *A* du solide parvient, par son mouvement rectiligne, au point *E* et trace par son passage une droite. Mais puisque chaque point du solide suit cette voie, le passage du point *A* sera par conséquent suivant la droite *AEB* car aucune autre droite ne passe par les deux points *A* et *E*. On marque sur *AEB* un point *I* quelconque ; menons de celui-ci une perpendiculaire à *CD*, soit *IK*. L'angle *ACD* ou bien est droit, ou bien n'est pas ainsi.

S'il est droit, alors la réplique de la droite *AC* tracée dans le solide, si son point *A* parvient au point *I*, se superpose à la perpendiculaire *IK* et elle lui est égale. En effet, si elle ne s'y superpose pas et tombe dans la position de la droite *IL*, l'angle *ILK* sera droit, car il est égal à l'angle *ACD* si les répliques de *AC* et de *CG* dans le solide se sont déplacées selon leurs formes et si la réplique de *CG* se tient toujours nécessairement dans sa position par rapport à la droite *CD*. Or l'angle *IKL* est également droit car on a mené *IK* perpendiculaire à *CD* ; ainsi, dans le triangle *IKL*, on a deux angles droits, ce qui n'est pas possible car la somme de deux angles d'un triangle est plus petite que deux droits[6] ; ils sont donc, si on les ajoute, moindres que deux droits. Par conséquent la droite *AC* se superpose à la perpendiculaire *IK* et lui est égale ; de même, sur toute perpendiculaire abaissée d'un point de la droite *AB* sur la droite *CD*.

Si l'angle *ACD* n'est pas droit, nous menons du point *A* une perpendiculaire à *CD*, soit *AG*, et nous imaginons la réplique de la droite *AC* qui est dans le solide : si son point *A* parvient au point *I*, elle tombe comme dans la position de la droite *IL* et la réplique de la droite *CG* comme dans la position de la droite *LK*. Les deux triangles *CAG* et *LIK* ont donc deux côtés égaux, qui sont *AC* et *IL*, car l'un se superpose à l'autre et les angles *ACG* et *AGC* de l'un sont égaux aux angles *ILK* et *IKL* de l'autre, chaque angle à son homologue. Donc tous les côtés et les angles de ces deux triangles sont égaux, chacun à son homologue. La perpendiculaire *IK* est donc égale à la perpendiculaire *AG*, de même, toute perpendiculaire tombant d'un

[6] Proposition I.17 des *Éléments* d'Euclide.

استقامة حركة المجسم. وأما الخط منهما الذي هو مثال لخط جـ ز المرسوم في المجسم، فهو على استقامة حركة المجسم. فالمثال المرسوم لخط جـ ز إذاً يكون في جميع حركة المجسم ماراً بخط جـ د ويكون موضوعًا عليه. وإذا توهمنا أن نقطة جـ من المثال المرسوم لخط ا جـ في المجسم قد وصلت بحركة المجسم إلى نقطة و، صار موقع مثال جـ ز المرسوم فيه كموقع خط و ح، لأنه على استقامة جـ د يتحرك. لكن زاوية ه و ح مثل زاوية ا جـ ز، فمثال خط ا جـ المرسوم في المجسم – إذا وصلت نقطة جـ منه إلى نقطة و – يقع على خط و ه. ولأن خط ا جـ مساوٍ لخط و ه، فهو منطبق عليه ويقع نقطة ا منه على نقطة ه من و ه. فنقطة ا من المجسم تصل بحركته المستقيمة إلى نقطة ه، وهي تخط بممرها خطاً مستقيماً. ‹و›لأن كل نقطة من المجسم فهذه سبيلها، فممر نقطة ا إذاً يكون على خط ا ه ب لأنه لا يمرّ بنقطتي ا ه خط مستقيم غيره. ويتعلّم على ا ه ب نقطة ط كيفما وقعت، ونخرج منها عموداً على جـ د، وهو ط ك. فزاوية ا جـ د إما أن تكون قائمة، وإما ألا تكون كذلك.

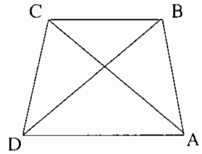
فإن كانت قائمة، فإن مثال خط ا جـ المرسوم في المجسم، إذا وصلت نقطة ا منه إلى نقطة ط، انطبق على عمود ط ك فساواه. وذلك أنه إن لم ينطبق عليه ووقع كموقع خط ط ل، كانت زاوية ط ل ك قائمة، لأنها مثل زاوية ا جـ د إذا كان مثالا ا جـ جـ ز في المجسم إنما انتقلا كهيئتهما وكان مثال جـ ز منهما أبداً لازمًا في وضعه لخط جـ د. لكن زاوية ط ك ل أيضًا قائمة، لأن ط ك قد أخرجناه عموداً على جـ د. فقد صار في مثلث ك ط ل زاويتان قائمتان؛ وهذا غير ممكن لأن كل زاويتين من مثلث، فهما أقل من قائمتين إذا جمعتا. فخط ا جـ إذاً ينطبق على عمود ط ك ويساويه؛ وكذلك على كل عمود يقع من نقطة من خط ا ب على خط جـ د.

وإن لم تكن زاوية ا جـ د قائمة، فإنا نخرج من نقطة ا عموداً على جـ د، وهو ا ز، ونتوهم مثال خط ا جـ الذي في المجسم، إذا وصلت نقطة ا منه إلى نقطة ط، قد وقع كموقع خط ط ل ومثال خط جـ ز كموقع خط ل ك. فمثلثا جـ ا ز ل ط ك قد تساوا ضلعان منهما، وهما ا جـ ط ل، لأن أحدهما قد انطبق على الآخر وساوت زاويتا ا جـ ز ا ز جـ من أحدهما زاويتي ط ل ك ط ك ل من الآخر، كل زاوية نظيرتها. فسائر الأضلاع والزوايا من هذين المثلثين متساوية كل واحد نظيره. فعمود ط ك مساوٍ لعمود ا ز، وكذلك كل عمود يقع من

1 المرسوم: مرسوم – 12 كيفما: كيف ما، ولن نشير إليها فيما بعد – 16 ط ل: كل.

point de la droite *AB* sur la droite *CD* ; toutes ces perpendiculaires que j'ai mentionnées sont par conséquent égales. Ce qu'il fallait démontrer[7]. [158^r]

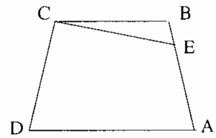
– **2** – Dans un quadrilatère tel que deux de ses angles qui sont sur un même de ses côtés soient égaux et tel que les deux côtés adjacents à ce côté soient égaux, les deux angles qui restent sont égaux.



Soit *ABCD* le quadrilatère et soient les deux angles *BAD*, *CDA* égaux ainsi que les côtés *AB* et *DC*. Je dis que les deux angles *ABC* et *DCB* sont égaux.

Démonstration : Menons les deux diagonales *AC* et *DB*. On a : la droite *AB* égale à la droite *DC* et *AD* commune, donc les deux côtés *BA* et *AD* du triangle *BAD* sont égaux aux deux côtés *CD*, *DA* du triangle *ADC*, chacun à son homologue. Mais l'angle *BAD* est égal à l'angle *CDA*, la base *BD* est par conséquent égale à la base *AC*. Or *AB* est égal à *DC*, donc deux côtés *BA* et *AC* du triangle *ABC* sont égaux aux côtés *CD* et *DB* du triangle *BCD*, chacun à son homologue, et la base qui est *BC* est commune aux deux. L'angle *ABC* est par conséquent égal à l'angle *DCB*. Ce qu'il fallait démontrer[8].

– **3** – Dans un quadrilatère tel que deux de ses angles qui sont sur un même de ses côtés soient égaux et tel que les deux angles qui restent soient égaux, alors les deux côtés adjacents au premier côté sont égaux[9].



Soit un quadrilatère *ABCD* ; que ses deux angles *BAD*, *CDA* soient égaux, de même que les deux angles *ABC* et *BCD*. Je dis que les côtés *AB* et *DC* sont égaux.

Démonstration : Si le côté *AB* n'était pas égal au côté *DC*, alors l'un serait plus grand que l'autre. Que le plus grand soit *AB*. Nous en séparons l'égal de *CD*, soit *AE* ; nous menons la droite *EC*. La surface *AECD* est donc un quadrilatère dont les angles *EAD* et *CDA* sont égaux, par

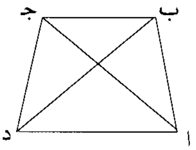
[7] Cette proposition vise à établir l'existence, c'est-à-dire la constructibilité, de droites équidistantes à partir d'un quadrilatère dont deux côtés opposés sont égaux et font, avec un troisième côté, des angles égaux. Le quatrième reste alors à une distance constante de ce troisième côté, conclusion qui ne serait pas valable dans une géométrie non euclidienne. Thābit ibn Qurra parvient à cette propriété en utilisant ses préliminaires sur le mouvement de translation uniforme.

[8] Ce raisonnement sera repris par 'Umar al-Khayyām dans le cas particulier où les deux angles à la base sont droits.

[9] C'est la réciproque de la proposition 2. Elle sera reprise telle quelle par 'Umar al-Khayyām.

نقطة من خط ا ب على خط جـ د؛ فهذه الأعمدة التي ذكرت كلها إذاً متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

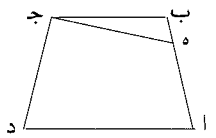
– ب – كل سطح ذي أربعة أضلاع تكون زاويتان من زواياه التي على ضلع واحد من أضلاعه متساويتين ويكون الضلعان منه – المتصلان بذلك الضلع – متساويين، فإن زاويتيه الباقيتين متساويتان. ١٥٨-و



فليكن السطح ذو الأربعة الأضلاع ا ب جـ د. ولتكن زاويتا ب ا د جـ د ا منه متساويتين، وكذلك ضلعا ا ب د جـ أيضًا؛ فأقول: إن زاويتي ا ب جـ د جـ ب متساويتان.

برهان ذلك: أنا نخرج قطري ا جـ د ب، فيكون خط ا ب مساوياً لخط د جـ، وا د مشترك، فضلعا ب ا ا د من مثلث ب ا د مساويان لضلعي جـ د د ا من مثلث ا د جـ، كل ضلع لنظيره. وزاوية ب ا د مساوية لزاوية جـ د ا. فقاعدة ب د إذاً مساوية لقاعدة ا جـ. وقد كان ا ب مثل د جـ، فضلعا ب ا ا جـ من مثلث ا ب جـ مساويان لضلعي جـ د د ب من مثلث ب جـ د، كل ضلع لنظيره، والقاعدة مشتركة لهما جميعًا وهي ب جـ. فزاوية ا ب جـ إذاً مساوية لزاوية د جـ ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– جـ – كل سطح ذي أربعة أضلاع تكون زاويتان من زواياه التي على ضلع واحد من أضلاعه متساويتين، وتكون زاويتاه الباقيتان متساويتين، فإن ضلعيه المتصلين بضلعه الأول متساويان.



فليكن السطح ذو الأربعة الأضلاع ا ب جـ د، ولتكن زاويتا ب ا د جـ د ا منه متساويتين، وكذلك زاويتا ا ب جـ ب جـ د أيضًا؛ فأقول: إن ضلعي ا ب د جـ منه متساويان.

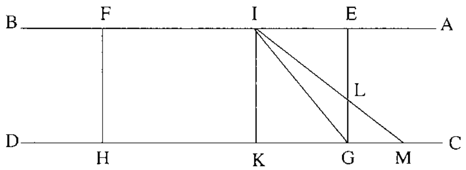
برهان ذلك: أنه إن لم يكن ضلع ا ب مساويًا لضلع د جـ، فإن أحدهما أطول من الآخر؛ فليكن أطولهما ا ب. ونفصل منه مثله، وهو ا ه؛ ونخرج خط ه جـ. فيكون سطح ا ه جـ د ذا أربعة أضلاع وزاويتا ه ا د جـ د ا منه

12 ب ا د: ب ا جـ / جـ د ا: ب جـ د – 14 جـ د: جـ ب، وأثبت الصواب في الهامش مع الإشارة / د ب: د جـ – 26 ه جـ: هجب.

conséquent ses angles AEC et DCE sont aussi égaux. Mais l'angle AEC, extérieur au triangle CEB, est plus grand que l'angle EBC intérieur qui lui est opposé[10] ; l'angle DCE est par conséquent plus grand que l'angle ABC. Mais l'angle DCB est plus grand que l'angle DCE, donc l'angle DCB est encore plus grand que l'angle ABC. Or il lui était égal, ce qui est absurde. Donc aucun des côtés AB, DC n'est plus grand que l'autre ; ils sont par conséquent égaux. Ce qu'il fallait démontrer.

– **4** – Soient deux droites dans un plan ; si on mène de deux points de l'une deux perpendiculaires à l'autre et qu'elles soient égales, alors elles sont également perpendiculaires à cette première droite. Et toutes les perpendiculaires abaissées de chacune des deux droites sur l'autre, quels que soient les points desquels on les mène, seront perpendiculaires à son associée, égales entre elles et égales aux deux premières perpendiculaires.

Soient deux droites AB et CD dans un plan. Menons des points E et F de la droite AB deux perpendiculaires à CD, soient EG, FH ; qu'elles soient égales. Je dis qu'elles sont aussi perpendiculaires à AB et que toute droite menée d'un point de l'une des deux droites AB, CD à l'autre droite, perpendiculairement à elle, est aussi [158v] perpendiculaire à la droite à partir de laquelle elle a été menée et qu'elle est égale à chacune des <droites> EG, FH.



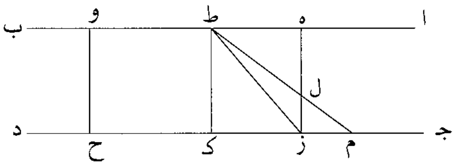
Démonstration : Marquons sur la droite EF un point quelconque I ; menons de celui-ci une perpendiculaire IK à CD. Elle rencontre alors CD sans rencontrer l'une ou l'autre des droites EG, FH. Car si elle rencontrait l'une d'elles comme la rencontre la droite IG, alors l'angle EGD, le plus grand angle, serait égal à l'angle IGD, le plus petit, étant donné que tous les deux sont des angles droits, ce qui n'est pas possible. Si elle rencontrait l'une d'elles en la coupant au point L, comme la droite ILM rencontre la droite EG, alors l'angle EGD extérieur au triangle MLG serait égal à l'angle LMG intérieur et qui lui est opposé, ce qui n'est pas possible[11]. La perpendiculaire IK rencontre par conséquent la droite GH sans rencontrer l'une

[10] *Éléments*, I.16.
[11] Utilisation de « l'axiome de Pasch » et de la proposition I.16 des *Éléments*.

متساويتان ، فزاويتا ا ه جـ د جـ ه منه إذاً متساويتان أيضًا . لكن زاوية ا ه جـ الخارجة عن مثلث جـ ه ب أعظم من زاوية ه ب جـ الداخلة التي تقابلها ، فزاوية د جـ ه إذاً أعظم من زاوية ا ب جـ . وزاوية د جـ ب أعظم من زاوية د جـ ه ، فزاوية د جـ ب أعظم كثيراً من زاوية ا ب جـ . وقد كانت مساوية لها ؛ هذا خلف . فليس أحد ضلعي ا ب د جـ بأطول من الآخر منهما ، فهما إذاً متساويان ؛ وذلك ما أردنا أن نبين .

– د – كل خطين مستقيمين يكونان في سطح ، ويخرج من نقطتين على أحدهما عمودان على الآخر ، فيكونان متساويين ، فهما أيضاً عمودان على ذلك الخط الأول ، وكل الأعمدة الواقعة من كل واحد من الخطين على الآخر منهما من أي نقط خرجت منهما ، فهي أعمدة على صاحبه متساوية ومساوية للعمودين الأولين .

فليكن خطا ا ب جـ د المستقيمان في سطح ، وليخرج من نقطتي ه و من خط ا ب عمودان على جـ د ، وهما ه ز و ح ، وليكونا متساويين ؛ فأقول : إنهما أيضاً عمودان على ا ب وإن كل خط يخرج من نقطة على أحد خطي ا ب جـ د إلى الخط الآخر منهما ويكون عموداً عليه ، فهو أيضاً / عمود على الخط الذي ١٥٨-ظ
منه خرج ومساوٍ لكل واحد من ه ز و ح .



برهان ذلك : أنا نتعلم على خط ه و نقطة ط كيفما وقعت ، ونخرج منها عموداً على جـ د عليه ط ك . فهو يلقى جـ د من غير أن يلقى واحداً من خطي ه ز و ح ، لأنه لو لقي أحدهما مثل ما لقيه خط ط ز ، لكانت تكون زاوية ه ز د العظمى مثل زاوية ط ز د الصغرى ، إذ كانتا جميعًا قائمتين ؛ وهذا غير ممكن . ولو لقي أحدهما ، فقطعه على نقطة ل ، مثل ما لقي خط ط ل م خط ه ز ، لصارت زاوية ه ز د الخارجة عن مثلث م ل ز مساوية لزاوية ل م ز الداخلة منه التي تقابلها ؛ وهذا غير ممكن . فعمود ط ك إذاً يلقى خط ز ح من غير أن يلقى

20 إذ : اذا – 23 يلقى : يلقا ، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد .

des perpendiculaires *EG*, *FH*. Puisque les deux droites *AB*, *CD* sont dans un plan et qu'on a mené entre elles les droites *EG*, *FH* qui les rencontrent, qui sont égales et qui entourent avec *CD* deux angles égaux d'un même côté ; étant donné qu'elles lui sont perpendiculaires, alors toutes les perpendiculaires tombant sur *CD* et menées à partir de points de la droite *AB* sont égales[12]. C'est pourquoi la perpendiculaire *IK* est égale à chacune des perpendiculaires *EG*, *FH*. Mais puisque les deux angles *EGK*, *IKG* du quadrilatère *EIKG* sont égaux, étant donné que ce sont deux droits et qu'on a montré que les côtés *EG*, *IK* sont égaux, les deux angles *GEI*, *KIE* sont égaux[13]. De la même manière, on montre que les deux angles *KIF*, *HFI* du quadrilatère *IFHK* sont égaux et que les deux angles *GEF*, *HFE* du quadrilatère *EFHG* sont égaux. C'est pourquoi les deux angles *KIE*, *KIF* sont égaux, chacun d'eux est donc droit. Or nous avons montré qu'ils sont égaux aux angles *GEI* et *HFI*, ces deux angles sont donc également droits et les deux droites *GE* et *HF* sont perpendiculaires à *AB*. Il en va de même de la perpendiculaire *IK* et de toute autre perpendiculaire menée de l'une des deux droites *AB*, *CD* à l'autre et ces perpendiculaires sont égales aux deux perpendiculaires *EG*, *FH*. Ce qu'il fallait démontrer.

– **5** – Si on mène dans un même plan deux droites des deux extrémités d'une droite et qu'elles entourent avec elle deux angles droits, alors toute perpendiculaire menée d'un point de l'une d'elles et qui tombe sur l'autre est aussi une perpendiculaire à la première droite et elle est égale à la droite des extrémités de laquelle on a mené les deux droites.

Que l'on mène des deux extrémités de la droite *AB* deux droites *AC* et *BD*, dans un même plan, selon deux angles droits. Menons du point *E* de l'une d'elles une perpendiculaire *EF* à l'autre, qui est *BD* ; je dis que *EF* est aussi perpendiculaire à *AC* et qu'elle est égale à la droite *AB*.

Démonstration : La droite *AE* ou bien est égale à la droite *BF*, ou bien plus grande qu'elle, ou bien plus petite qu'elle. Je dis qu'elle lui est égale et qu'il n'est pas possible qu'il en soit autrement. S'il était possible qu'il en

[12] Proposition 1.
[13] Proposition 2.

واحداً من عمودي ه ز و ح. فلأن خطي ا ب جـ د المستقيمين في سطح، وقد خرج فيما بيهما خطا ه ز و ح المستقيمان، فلقياهما، وهما متساويان وقد أحاطا مع جـ د بزاويتين متساويتين من جهة واحدة إذ كانا عمودين عليه، فإن كل عمودين يقعان على جـ د ويخرجان من نقطتين من خط ا ب، فهما متساويان. ولذلك يصير عمود ط كـ مساوياً لكل واحد من عمودي ه ز و ح. ولأن زاويتي ه ز كـ ط كـ ز من سطح ه ط كـ ز ذي الأربعة الأضلاع متساويتان، إذ كانتا قائمتين، وضلعي ه ز ط كـ منه قد تبين أنهما متساويان، تكون زاويتا ز ه ط كـ ط ه متساويتين. وبمثل ذلك تبين أن زاويتي كـ ط و ح و ط من ذي الأربعة الأضلاع ط و ح كـ متساويتان، وأن زاويتي ز ه و ح و ه من ذي الأربعة أضلاع ه و ح ز متساويتان. فتصير لذلك زاويتا كـ ط ه كـ ط و متساويتين، فكل واحدة منهما إذاً قائمة. وقد كنا بينا أنهما مساويتان لزاويتي ز ه ط ح و ط، فتصير هاتان الزاويتان إذاً قائمتين أيضًا، ويصير خطا ز ه ح و عمودين على ا ب؛ وكذلك عمود ط كـ وكل عمود غيره يخرج من أحد خطي ا ب جـ د على الآخر، وتكون الأعمدة مساوية لعمودي ه ز و ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

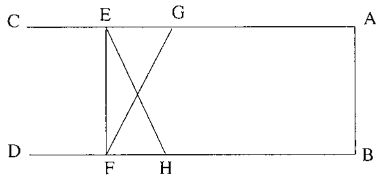
– ه – كل خطين مستقيمين يخرجان من طرفي خط مستقيم في سطح واحد ويحيطان معه بزاويتين قائمتين، فإن كل عمود يخرج من نقطة على أحدهما ويقع على الآخر، فهو أيضًا عمود على الخط الأول منهما، وهو مساوٍ للخط الذي خرج الخطان من طرفيه.

فليخرج من طرفي خط ا ب المستقيم خطا ا جـ ب د في سطح واحد على زاويتين قائمتين، ولنخرج من نقطة ه من أحدهما عمود ه و على الآخر، الذي هو ب د؛ فأقول: إن ه و أيضًا عمود على ا جـ [أيضًا] وإنه مساوٍ لخط ا ب.

برهان ذلك: إن خط ا ه إما أن يكون مساوياً لخط ب و، وإما أطول منه، وإما أقصر. فأقول: إنه مساوٍ له، لا يمكن غير ذلك. فإن أمكن غيره، فليكن

3 أحاطا: احاط / إذ: اذا – 4 نقطتين: نقطة / فهما: منهما – 5 متساويان: متساويين – 7 إذ: اذا – 10 ح و ه: حره – 12 ز ه ط: د ه ط – 15 ه ز: ه و – 19 طرفيه: طرفه – 21 ه: كتب بعدها «الداخلة»، ثم ضرب عليها بالقلم.

fût autrement, qu'elle soit d'abord plus grande qu'elle. Nous séparons de celle-ci l'égale de celle-là, soit *AG*, et nous menons la droite *FG*. Ainsi on aurait mené des deux points *F* et *G* de la droite *GF* deux perpendiculaires à *AB*, soit *GA* et *FB*, et elles seraient égales. Elles seraient donc également deux perpendiculaires à *GF*[14]. [159^r] L'angle *GFB* serait donc droit ; or l'angle *EFB* était également droit, donc il lui serait égal, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible. Donc *AE* n'est pas plus grande que *BF*.



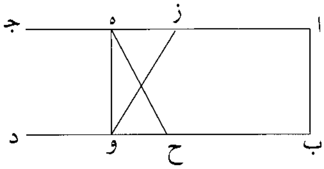
Qu'elle soit maintenant plus petite qu'elle, si cela est possible. Nous séparons de *BF* l'égal de *AE*, soit *BH*. On aurait mené de deux points *E* et *H* de la droite *EH* deux perpendiculaires à *AB*, soit *EA* et *HB* qui seraient égales. Elles seraient par conséquent perpendiculaires à *EH*[15]. L'angle *EHB* extérieur au triangle *FEH* serait droit et égal à l'angle interne *EFH* qui lui est opposé, car il est droit, ce qui est impossible. Donc la droite *AE* n'est pas plus petite que la droite *BF*. Or nous avons montré qu'elle n'est pas plus grande qu'elle. Elle lui est par conséquent égale.

Dans le quadrilatère *ABFE* deux angles *EAB* et *FBA* sont égaux et deux côtés *AE*, *BF* sont aussi égaux. Donc les angles *AEF* et *BFE* sont égaux ; or l'angle *BFE* est droit, donc l'angle *AEF* est aussi droit. <La droite> *EF* est perpendiculaire à *AC*, donc les deux angles du quadrilatère *ABFE* qui sont sur son côté *BF* sont égaux et les deux angles qui restent, qui sont sur <le côté> *AE* sont égaux. Le côté *EF* est par conséquent égal au côté *AB*[16]. Il en est de même pour toute perpendiculaire abaissée de la droite *AC* sur la droite *BD*. Ce qu'il fallait démontrer[17].

– **6** – Si une droite tombe sur deux droites dans un même plan et qu'elle soit perpendiculaire à toutes les deux, alors toute droite qui les coupe rend les deux angles alternes égaux et rend l'angle externe égal à l'angle interne qui lui est opposé[18].

[14] Proposition 4.
[15] Proposition 4.
[16] Proposition 3.
[17] Cet énoncé est identique à celui qu'Ibn al-Haytham mettra à la base de sa démonstration du postulat d'Euclide.
[18] Ceci correspond à la proposition I.29 d'Euclide, les droites parallèles étant ici remplacées par des droites équidistantes.

أولاً أطول منه. ونفصل منه مثله، وهو ا ز، ونخرج خط و ز. فيكون قد خرج من نقطتي و ز من خط ز و عمودان على ا ب، وهما ز ا و ب، وكانا متساويين. فهما إذاً عمودان على ز و / أيضًا. فزاوية ز و ب قائمة، وزاوية ه و ب أيضًا قد كانت قائمة، فهي مساوية لها، الكبرى للصغرى؛ هذا غير ممكن. فليس ا ه بأطول من ب و. ١٥٩-و



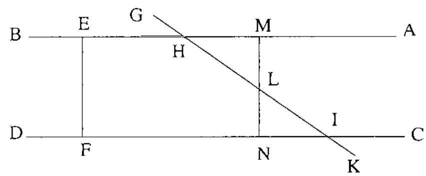
فليكن الآن أقصر منه، إن أمكن ذلك. ونفصل من ب و مثله، وهو ب ح. فيكون قد خرج من نقطتي ه ح من خط ه ح عمودان على ا ب، وهما ه ا ح ب، فكانا متساويين، فهما إذاً عمودان على ه ح. فزاوية ه ح ب، وهي الخارجة عن مثلث و ه ح، قائمة ومساوية لزاوية ه و ح الداخلة التي تقابلها لأنها قد كانت قائمة؛ وهذا غير ممكن. فليس خط ا ه بأقصر من خط ب و. وقد كنا بينا أنه ليس بأطول منه، فهو إذاً مثله.

فذو أربعة أضلاع ا ب و ه قد تساوت فيه زاويتا ه ا ب و ب ا وضلعا ا ه ب و أيضًا. فزاويتا ا ه و ب و ه إذاً متساويتان؛ وزاوية ب و ه منهما قائمة، فزاوية ا ه و إذاً قائمة أيضًا. ويصير ه و عموداً على ا ج، فسطح ا ب و ه ذو الأربعة أضلاع قد تساوت زاويتاه اللتان على ضلع ب و منه وتساوت زاويتاه الباقيتان اللتان على ا ه. فضلع ه و إذاً مساوٍ لضلع ا ب. وكذلك كل عمود يخرج من خط ا ج يقع على خط ب د؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– و – إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين في سطح واحد، فكان عموداً عليهما جميعًا، فإن كل خط مستقيم يقطعهما، فهو يصير الزاويتين المتبادلتين متساويتين ويصير الزاوية الخارجة مثل الداخلة التي تقابلها.

8 متساويين: مساويين.

Soient les droites *AB*, *CD* dans un même plan, que la droite *EF* tombe sur elles et qu'elle soit perpendiculaire à toutes les deux, que la droite *GHIK* les coupe toutes les deux. Je dis que les angles *AHI* et *FIH* alternes sont égaux et que l'angle *GHB* externe est égal à l'angle *FIH* interne qui lui est opposé.



Démonstration : Partageons la droite *HI* en deux moitiés au point *L*, menons du point *L* une perpendiculaire à *AB*, soit *LM* et prolongeons-la jusqu'à *N*. Elle rencontre alors la droite *IF* car si elle ne la rencontrait pas, elle rencontrerait la droite *EF*, ce qui est impossible étant donné que toutes les deux ont été menées à partir de la droite *ME* selon deux angles droits[19]. Qu'elle la rencontre au point *N*. Elle sera donc perpendiculaire à celle-ci également, d'après ce que nous avons montré dans ce qui précède[20]. Donc les deux angles *LMH* et *MLH* du triangle *MHL* sont égaux aux angles *LNI* et *ILN* du triangle *NIL*, chaque angle à son homologue. Mais le côté *LH* du premier triangle est égal au côté *LI* du second triangle. Donc tous les autres côtés et angles sont égaux à leurs homologues. L'angle *MHL* est donc égal à l'angle *LIN* et ils sont alternes. Mais l'angle *MHL* est égal à l'angle *GHB* qui lui est opposé. Donc l'angle *GHB* externe est égal à l'angle *FIH* interne qui lui est opposé. Ce qu'il fallait démontrer. [159^{v}]

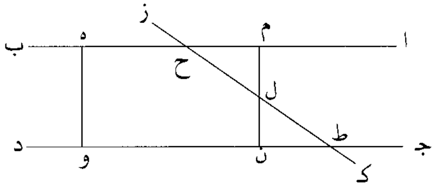
– **7** – Si on mène dans un même plan deux droites des deux extrémités d'une droite selon des angles plus petits que deux droits, elles se rencontrent de ce côté.

Que l'on mène des deux extrémités de la droite *AB* les droites *AC* et *BD* dans un même plan. Que la somme des angles *BAC* et *ABD* soit plus petite que deux droits. Je dis que les droites *AC* et *BD*, si on les prolonge du côté de *CD*, se rencontrent.

[19] On notera, ici encore, l'utilisation d'une propriété analogue à « l'axiome de Pasch » pour un quadrilatère.

[20] Proposition 5.

فليكن خطا ا ب جـ د المستقيمان في سطح واحد وليقع عليهما خط ه و، وليكن عموداً عليهما جميعًا، وليقطعهما خط ز ح ط كـ؛ فأقول: إن زاويتي ا ح ط و ط ح المتبادلتين متساويتان وإن زاوية ز ح ب الخارجة مثل زاوية و ط ح الداخلة التي تقابلها.

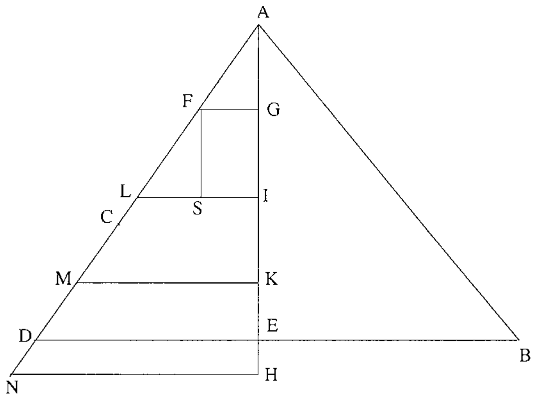


برهان ذلك: أنا نقسم خط ح ط بنصفين على نقطة ل، ونخرج من نقطة ل عموداً على ا ب، وهو ل م، وننفذه على استقامة إلى ن، فهو يلقى خط ط و لأنه إن لم يلقه لقي خط ه و؛ وهذا غير ممكن إذ كانا جميعًا قد خرجا من خط م ه على زاويتين قائمتين. فليلقه على نقطة ن، فهو يكون عموداً عليه أيضًا للذي بينا فيما تقدم. فتكون زاويتا ل م ح م ل ح من مثلث م ح ل مساويتين لزاويتي ل ن ط ط ل ن من مثلث ن ط ل، كل زاوية لنظيرتها. وضلع ل ح من المثلث الأول مساوٍ لضلع ل ط من المثلث الثاني. فسائر الأضلاع والزوايا مساوية لنظائرها. فزاوية م ح ل مساوية لزاوية ل ط ن، وهما المتبادلتان. لكن زاوية م ح ل مساوية لزاوية ز ح ب المقابلة لها، فزاوية ز ح ب إذاً الخارجة مساوية لزاوية و ط ح الداخلة التي تقابلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

– ز – إذا خرج خطان مستقيمان من طرفي خط مستقيم في سطح واحد ١٥٩-ظ على أقل من زاويتين قائمتين، فهما يلتقيان في تلك الجهة.

فليخرج من طرفي خط ا ب المستقيم خطا ا جـ ب د المستقيمان في سطح واحد، ولتكن زاويتا ب ا جـ ا ب د إذا جمعتا أقل من قائمتين؛ فأقول: إن خطي ا جـ ب د إذا أخرجا في جهة جـ د، التقيا.

3 و ط ح: د ط ح – 4 و ط ح: د ط ح – 7 إذ: إذا – 9 مساويتين: مساويتان.



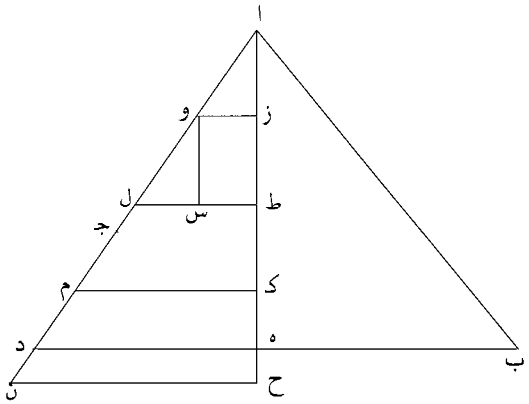
Démonstration : L'un des deux angles *BAC*, *ABD* est nécessairement plus petit qu'un droit. Soit cet angle l'angle *ABD*. Menons du point *A* une perpendiculaire à *BD*, soit *AE*, et marquons sur *AC* un point *F* quelconque. Menons de celui-ci une perpendiculaire à *AE*, qui est la perpendiculaire *FG*. Les deux droites *AG*, *AE* sont finies et la droite *AE* est plus grande que la droite *AG*. Il est donc possible de multiplier la plus petite d'entre elles, soit *AG*, jusqu'à ce que ce multiple soit plus grand que *AE*[21]. Que ce multiple plus grand que *AE* soit la droite *AH*. Séparons de *GH* autant de fois la droite *AG*, soit *GI*, *IK*, *KH*. Séparons de la droite *FC* une droite égale à la droite *AF* autant de fois que le nombre des <segments> *GI*, *IK*, *KH*, soit *FL*, *LM*, *MN*. Si *FC* est insuffisant, plus il est court, plus on augmente sa longueur jusqu'à ce qu'il épuise ce nombre.

Je dis que la droite *AN* a coupé la droite *BD*.

Démonstration : Menons du point *I* une perpendiculaire à *AE*, soit *IS*, et menons à partir du point *F* une perpendiculaire *FS* à celle-ci ; joignons le point *L* au point *S* par la droite *LS*. On a ainsi mené des deux extrémités de la droite *GI* deux droites *GF* et *IS* qui entourent avec elle deux angles droits et on a mené du point *F* sur l'une d'elles une perpendiculaire à l'autre, soit *FS*. La droite *FS* est donc également perpendiculaire à la droite *FG* et égale à la droite *GI*[22]. Mais la droite *GI* est égale à la droite *AG*. La droite *FS* est par conséquent égale à la droite *AG*. Quant à la droite *FL*, il est clair qu'elle

[21] L'axiome d'Archimède intervient dans cette démonstration sous sa forme additive.

[22] Proposition 5.



برهان ذلك: أن إحـدى زاويتي ب ا جـ ا ب د أقل من قـائمـة لا محـالة، فلتكن هذه الزاوية زاوية ا ب د، ونخرج من نقطة ا عموداً على ب د، وهو ا ه، ونتعلم على ا جـ نقطة و كيفما وقعت، ونخرج منها عموداً على ا ه، وهو عمود و ز. فخطا ا ز ا ه متناهيان وخط ا ه أطول من خط ا ز. فقد يمكن أن يضاعف الأصغر منهما، وهو ا ز، حتى تصير أضعافه أطول من ا ه. فلتكن أضعافه التي هي أطول من ا ه خط ا ح. ونفصل من ز ح أمثالاً لخط ا ز، وهي ز ط ط كـ كـ ح، ونفصل من خط و جـ مثل خط ا و مرات بعدد ز ط ط كـ كـ ح، وهي و ل ل م م ن. فإن كان و جـ أقل من الكفاية، لذلك زدنا في طوله كلما قصر حتى يفي به.

فأقول: إن خط ا ن قد قطع خط ب د.

برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة ط عموداً على ا ه، وهو ط س، ونخرج إليه عموداً من نقطة و، وهو و س؛ ونصل نقطة ل بنقطة س بخط ل س. فقد خرج من طرفي خط ز ط المستقيم خطا ز و ط س المستقيمان وأحاطا معه بزاويتين قائمتين وأخرج من نقطة و من أحدهما عمود على الآخر، وهو و س. فخط و س عمود على ‹خط› و ز أيضًا ومساوٍ لخط ز ط. وقد كان خط ز ط مساوياً لخط ا ز، فخط و س إذاً مساوٍ لخط ا ز. فأما خط و ل، فهو بيّن أنه يقع

3 وقعت: ناقصة وأثبت في الهامش «وقع» – 8 ل م: كز / و جـ: د جـ.

tombe à l'extérieur de ce qui est entre les droites *FS* et *GI*. En effet l'angle *GFS* est droit et l'angle *AFG* est plus petit qu'un droit car l'angle *AGF* est droit et il n'y a pas deux angles droits dans un même triangle. De même, la droite *FG* tombe sur les deux droites *AI* et *FS* ; elle est donc perpendiculaire à toutes les deux. Mais la droite *AC* tombe également sur ces deux droites. L'angle *LFS* externe est donc égal à l'angle *FAG* interne qui lui est opposé[23]. Ces deux angles des deux triangles *AFG*, *FLS* sont donc égaux ; or nous avons montré que leurs deux côtés *AG* et *FS* sont aussi égaux ; le côté *AF* de l'un est aussi égal au côté *FL* de l'autre ; la base est par conséquent égale à la base et tous les angles sont égaux à tous les angles, chacun à son homologue. Donc l'angle *FSL* est égal à l'angle *AGF* ; or l'angle *AGF* est droit, donc l'angle *FSL* est droit. Mais l'angle *FSI* est aussi droit, donc les droites *IS* et *SL* sont dans le prolongement l'une de l'autre et sont devenues une seule droite. La droite qui joint les points *I* et *L* est donc cette même droite *ISL*, et elle est perpendiculaire à *AH*.

Par le même raisonnement, on montre également que la droite *KM* qui joint les points *K* et *M* est perpendiculaire à *AH* et que la droite *HN* est perpendiculaire à *AH*. Donc l'angle *AHN* est droit ; mais l'angle *BEH* est aussi droit, car il est égal à l'angle *AED*. Donc la droite *AEH* tombe sur les deux droites *HN* et *BD* en faisant les deux angles alternes égaux. Elles sont par conséquent parallèles et ne se rencontrent pas, même si on les prolonge à l'infini. Mais la droite *AC* a rencontré <la droite> *HN* au point *N* ; ainsi la droite *AC* est passée de l'autre côté de la droite *BD*. Donc la droite *AC* a rencontré la droite *BD*, [160^r] elle l'a coupée et l'a dépassée. Ce qu'il fallait démontrer[24].

Le traité de Thābit ibn Qurra « Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent de ce côté » est achevé. Bien des grâces soient rendues à Dieu. Je l'ai transcrit à Shīrāz le mercredi avant les deux dernières nuits du mois Rabīʿ al-ākhar, l'année 359. Je l'ai confronté à l'original.

[23] Proposition 6.

[24] L'axiome de Pasch est utilisé une fois de plus.

خارجًا عما بين خطي و س ز ط، وذلك أن زاوية ز و س قائمة وأن زاوية ا و ز أقل من قائمة، لأن زاوية ا ز و قائمة، وليس يكون في مثلث واحد زاويتان قائمتان. وأيضًا، فإن خط و ز قد وقع على خطي ا ط و س، فكان عموداً عليهما جميعًا. وقد وقع عليهما أيضًا خط ا جـ المستقيم، فزاوية ل و س الخارجة مثل زاوية و ا ز الداخلة التي تقابلها. فقد تساوت هاتان الزاويتان من مثلثي ا و ز و ل س. وقد كنا بينا أن ضلعي ا ز و س منهما أيضًا متساويان، وضلع ا و أيضًا من أحدهما قد كان مساوياً لضلع و ل من الآخر، فالقاعدة إذاً مساوية للقاعدة وسائر الزوايا لسائر الزوايا، كل زاوية لنظيرتها، فزاوية و س ل مساوية لزاوية ا ز و؛ وزاوية ا ز و قائمة، فزاوية و س ل قائمة. وقد كانت زاوية و س ط أيضًا قائمة، فخطا ط س س ل قد اتصلا على استقامة وصارا خطًا واحداً. فالخط المستقيم الذي يصل فيما بين نقطتي ط ل هو خط ط س ل بعينه، وهو عمود على ا ح.

وبما تبيينه ذلك أيضًا تبين أن خط كـ م المستقيم الذي يصل بين نقطتي كـ م عمود على ا ح وأن خط ح ن عمود على ا ح. فزاوية ا ح ن إذاً قائمة. ولكن زاوية ب ه ح أيضًا قائمة، لأنها مساوية لزاوية ا ه د. فقد وقع على خطي ح ن ب د المستقيمين خط ا ه ح المستقيم، فصير الزاويتين المتبادلتين متساويتين، فهما إذاً متوازيان لا يلتقيان، ولو أخرجا بلا نهاية. لكن ح ن منهما قد لقيه خط ا جـ على نقطة ن؛ فقد جاز ا جـ إلى الجهة الأخرى عن خط ب د. فقد لقي إذاً خط ا جـ خط ب د، / فقطعه وجازه؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ١٦٠-و

تمت مقالة ثابت بن قرة في أن الخطين إذا أخرجا على أقل من زاويتين قائمتين التقيا في تلك الجهة، ولله الحمد كثيراً. كتبته بشيراز يوم الأربعاء لليلتين بقيتا من ربيع الآخر سنة شنط عارضت بالأصل.

8 فزاوية: زاوية – 14 ح ن: جن – 15 ح ن: حز.

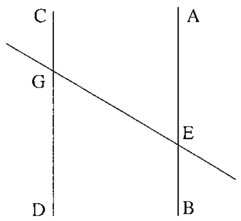
Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Traité de Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī

sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide

– **1** – Il a dit : si une droite tombe sur deux droites telles que les deux angles alternes soient égaux, alors ces deux droites ne s'approchent ni ne s'écartent dans l'un ou l'autre de leurs côtés[1].

Exemple : Soient les droites AB, CD sur lesquelles tombe la droite EG telle que les deux angles AEG, EGD soient égaux. Je dis que AB et CD ne se rapprochent ni ne s'écartent ni du côté de A, C ni du côté de B, D.



Démonstration : Si nous superposons EA à GD en plaçant le point E sur G, EG sur elle-même et l'angle AEG sur l'angle EGD, alors CG se superpose à EB et l'angle CGE à l'angle GEB. Mais la droite CG se superpose à la droite EB et la suit continuellement et de même la droite GD à la droite AE. S'il n'en était pas ainsi, alors un angle serait plus grand que celui qui lui est égal, ce qui est impossible.

De plus, on a montré que si les droites EB et GD s'approchaient du côté de B, D, alors les deux droites AE et CG, lorsqu'on les prolonge, s'approcheraient aussi du côté de A, C, avec le même rapprochement en raison de la superposition. Mais il est clair et admis que si une droite tombe sur deux droites de sorte que les deux droites s'approchent dans l'un de leurs deux côtés, alors elles s'écartent de l'autre côté, et que leur rapprochement du côté où elles se rapprochent et leur écartement du côté où elles s'écartent augmentent. De même, si nous supposons que les deux droites EB et GD se rapprochent du côté de B, D, il faut que les deux droites AE et CG s'écartent du côté de A, C.

[1] *Éléments*, I.28, le parallélisme étant remplacé par l'équidistance.

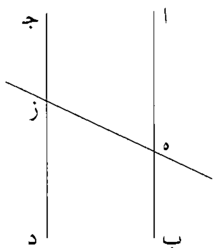
بسم الله الرحمن الرحيم

جـ-٢٠٠-ظ
ا-٥١-و

مقالة في برهان المصادرة المشهورة من أقليدس
لثابت بن قرة الحرّاني

– آ – قال: إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، فإن ذينك الخطين لا يقربان ولا يبعدان في جهة من جهتيهما.

مثل خطي ا ب جـ د وقع عليهما خط ه ز، فكانت زاويتا ا ه ز ه ز د متساويتين؛ أقول: إن ا ب جـ د لا يقربان ولا يبعدان لا في جهة آ جـ ولا في جهة ب د.



برهان ذلك: أنا إذا أطبقنا ه آ على ز د بأن نضع نقطة ه على ز وه ز على نفسه وزاوية ا ه ز على زاوية ه ز د، انطبق جـ ز على ه ب وزاوية جـ ز ه على زاوية ز ه ب. وكان خط جـ ز مطابقًا لخط ه ب ماراً دائمًا معه، وخط ز د لخط ا ه كذلك. فإن لم يكن كذلك، كانت زاوية أعظم من المساوية لها؛ وذلك محال.

وقد تبين مع هذا أن خطي ه ب ز د إن كانا يقربان في جهة ب د إذا أخرجا، فإن خطي ا ه جـ ز يتقاربان أيضًا في جهة آ جـ مثل ذلك التقارب للمطابقة. لكن من البيّن المسلّم أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكان الخطان يتقاربان في إحدى جهتيهما، فإنهما يبعدان في جهتهما الأخرى، وأن تقاربهما من جهة التقارب وتباعدهما من جهة التباعد يزيد بينهما. وكذلك إن وضعنا أن خطي ه ب ز د متقاربان في جهة ب د، وجب أن يتباعد خطا ا ه جـ ز في جهة آ جـ.

1 البسملة: كتب بعدها «العزة لله» [ا] – 2-3 مقالة ... الحراني: كتاب ثابت في أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فصير الزاويتين اللتين في جهة واحدة أقل من قائمتين، فإن الخطين إذا أخرجا في تلك الجهة، التقيا [ا]، كتب بعدها «رحمهما الله تعالى» [جـ] – 2 أقليدس: اوقليدس [جـ] – 4 قال: ناقصة [ا] – 17 أخرجا: اخرجنا [ا، جـ] / فإن: ان [ا، جـ] – 19 فإنهما: انهما [ا، جـ].

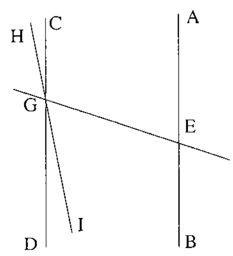
Mais les deux droites AE et CG se sont superposées aux deux droites EB et GD dans la direction de B, D. Mais si EB et GD s'étaient rapprochées, alors AE et CG se seraient écartées et ne se seraient pas superposées à elles. Si elles se sont superposées à elles, alors elles ne se sont pas écartées du côté de A, C. Il reste donc que, ou bien les deux droites AE et CG se sont rapprochées du côté de A, C du même rapprochement supposé que les deux droites EB et GD du côté de B, D, ou bien elles ne se sont ni approchées ni écartées du côté de A, C. Si elles s'étaient rapprochées dans cette direction, la prémisse admise aurait été infirmée car il n'existe pas deux droites qui se rapprochent des deux côtés et si elles conservent la distance entre elles, alors elles ne se seraient pas superposées à EB, GD[2]. Or elles sont superposées à elles ; donc la supposition d'après laquelle EB et GD, si les deux angles alternes qui sont AEG et EGD sont égaux, se rapprochent du côté de B, D est impossible.

De même il est impossible qu'elles s'écartent dans cette direction. [C-201ʳ] Donc elles ne se rapprochent ni ne s'écartent dans cette direction. De même on le montre pour les droites AE et CG. Ce qu'il fallait démontrer.

– **2** – Si une droite tombe sur deux droites qui ne se rapprochent ni ne s'écartent dans l'un ou l'autre de leurs deux côtés, alors les angles alternes sont égaux.

Exemple : Soient deux droites AB et CD qui ne se rapprochent ni ne s'écartent dans l'un ou l'autre de leurs deux côtés et sur lesquelles tombe EG. Je dis que les deux angles AEG et EGD alternes sont égaux.

Démonstration : S'ils n'étaient pas égaux, alors que AEG soit le plus petit. Que l'angle EGI soit égal à l'angle AEG ; menons IGH. Donc les deux droites IGH et AB ne se rapprochent ni ne s'écartent en raison de l'égalité des angles alternes comme précédemment. Mais les deux droites AB et CD ne se rapprochent ni ne s'écartent et <la droite> CD a coupé IH au point G et chacune d'elles ne se rapproche ni ne s'écarte [A-51ᵛ] de AB. Mais GI est plus proche de EB que GD, car elle est entre elles, ce qui est absurde. Les angles AEG et EGD sont par conséquent égaux. Ce qu'il fallait démontrer.



– **3** – Si on joint les extrémités de deux droites égales, qui ne se rapprochent ni ne s'écartent par deux droites, alors celles-ci sont égales et elles ne se rapprochent ni ne s'écartent.

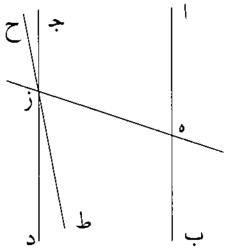
[2] Voir Rashed et Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, p. 332.

لكن خطا ا ه جـ ز قد طابقا خطي ه ب ز د في جهة ب د. ولو كان ه ب ز د متقاربين، لكان ا ه جـ ز متباعدين، فلم يطابقاهما. فإن طابقاهما، فلم يتباعدا في جهة ا جـ. فقد بقي إما أن يكون خطا ا ه جـ ز تقاربا في جهة ا جـ كتقارب خطي ه ب ز د في جهة ب د الذي وضع، أو أن يكونا لم يتقاربا ولم يتباعدا في جهة ا جـ. فإن كانا تقاربا فيها، بطلت المقدمة المسلّمة، لأنه يوجد خطان قد تقاربا في الجهتين، وإن كانا حفظا البعد بينهما، فليس يطابقان ه ب ز د، وقد طابقاهما، فما وُضع من أن ه ب ز د، إذا كانت المتبادلتان اللتان هما ا ه ز ه ز د متساويتين، يتقاربان في جهة ب د محال.

وكذلك يستحيل أن يبعدا / فيها؛ فهما لا يقاربان ولا يباعدان فيها. جـ-٢٠١-و وكذلك يتبين في خطي ا ه جـ ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– ب – إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين لا يقربان ولا يبعدان في جهة من جهتيهما، فإن المتبادلتين متساويتان.

مثال ذلك: خطا ا ب جـ د لا يقربان ولا يبعدان في واحدة من جهتيهما، ووقع عليهما ه ز؛ أقول: إن زاويتي ا ه ز ه ز د المتبادلتين متساويتان.

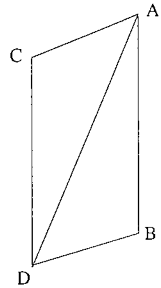


برهان ذلك: أنهما إن لم تكونا متساويتين، فلتكن ا ه ز أصغر. ولتكن زاوية ه ز ط مثل زاوية ا ه ز، ونخرج ط ز ح. فخطا ط ز ح ا ب لا يقربان ولا يبعدان لتساوي المتبادلتين كما قدّمنا. وقد كان خطا ا ب جـ د لا يقربان ولا يبعدان، وقد قاطع جـ د ط ح على نقطة ز، وكل واحد منهما لا يقرب ولا يبعد / من ا ب. لكن ز ط أقرب إلى ه ب من ز د، لأنه بينه وبينه؛ هذا خلف. فزاويتا ا ه ز ه ز د إذن متساويتان؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ا-٥١-ظ

– جـ – إذا وصل بين أطراف خطين مستقيمين متساويين لا يقربان ولا يبعدان بخطين مستقيمين، فإنهما أيضاً متساويان ولا يقربان ولا يبعدان.

4 ب: ز [ا، جا] / أو: ناقصة [جا] – 7 المتبادلتان اللتان: المتبادلتين اللتين [ا، جا] – 8 ب: ز [ا، جا] – 15 فلتكن: فليكن [جا]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

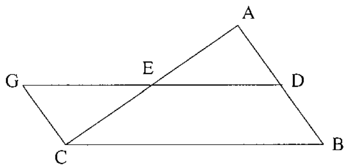
Exemple : Soient deux droites *AB* et *CD* égales, qui ne se rapprochent ni ne s'écartent. On a joint leurs extrémités par les droites *AC* et *BD*. Je dis que *AC* et *BD* sont égales et qu'elles ne se rapprochent ni ne s'écartent.



Démonstration : Les deux angles alternes *ADC* et *DAB* sont égaux ; les droites *AB* et *AD* sont donc égales aux droites *CD* et *DA*, chacune à son homologue, et les deux angles *ADC*, *DAB* sont égaux et ils sont alternes. Donc les droites *AC* et *DB* sont égales et les deux angles *ADB*, *CAD* sont égaux, et ils sont alternes. Or les deux droites *AB* et *CD* ne se rapprochent ni ne s'écartent, c'est pourquoi les deux droites *AC* et *DB* non plus ne se rapprochent ni ne s'écartent, et elles sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

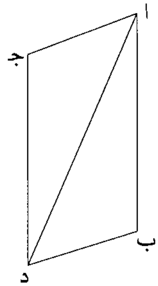
– **4** – Si on divise, dans un triangle, deux de ses côtés en deux moitiés et si on joint les deux points de division par une droite, alors elle est la moitié de l'autre côté et elle ne s'en rapproche ni ne s'en écarte.

Exemple : Soit le triangle *ABC* dans lequel on a divisé *AB* en deux moitiés en *D* et *AC* en deux moitiés en *E*. On joint la droite *DE*. Je dis qu'elle est la moitié de *BC* et qu'elle ne s'en rapproche ni ne s'en écarte.



Démonstration : Nous prolongeons *DE* jusqu'en *G*, tel que *EG* soit égal à *DE*, et nous joignons *CG*. Donc les deux triangles *ADE* et *CEG* sont égaux et les deux droites *AD* et *CG* sont égales. C'est pourquoi les deux droites *DB* et *CG* sont égales. Mais les deux angles *ADE* et *EGC* sont égaux et ils sont alternes, donc les deux droites *AB* et *CG* ne se rapprochent ni ne s'écartent. C'est pourquoi les deux droites *BD* et *CG* non plus ne se rapprochent ni ne s'écartent. [C-201v] Mais ce sont deux droites et les deux

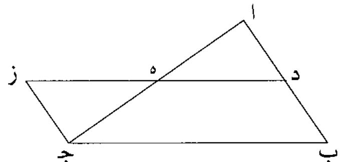
مثال ذلك: خطا ا ب جـ د مستقيمان متساويان لا يقربان ولا يبعدان. وقد وصل بين أطرافهما بخطي ا جـ ب د؛ أقول: إن ا جـ ب د متساويان ولا يقربان ولا يبعدان.



برهان ذلك: أن زاويتي ا د جـ د ا ب المتبادلتين متساويتان. فخطا ا ب ا د مساويان لخطي جـ د د ا، كل واحد لنظيره، وزاويتا ا د جـ د ا ب متساويتان وهما متبادلتان، فخطا ‹ا جـ د ب متساويان وزاويتا ا د ب جـ ا د متساويتان، وهما متبادلتان. وخطا› ا ب جـ د لا يقربان ولا يبعدان، فلذلك أيضًا خطا ا جـ د ب لا يقربان ولا يبعدان، وهما متساويان؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– د – كل مثلث يقسم ضلعان من أضلاعه كل واحد منهما بنصفين ويوصل بين النقطتين اللتين قسما عليهما بخط مستقيم، فإنه نصف الضلع الآخر ولا يقرب منه ولا يبعد.

مثال ذلك: مثلث ا ب جـ قسم ا ب منه بنصفين على د وا جـ بنصفين على ه، ووصل د ه المستقيم؛ أقول: إنه نصف ب جـ ولا يقرب منه ولا يبعد.



برهان ذلك: أنا نخرج د ه إلى ز حتى يكون ه ز مثل د ه، ونصل جـ ز. فيكون مثلثا ا د ه جـ ه ز متساويين وخطا ا د جـ ز متساويين. فلذلك يكون خطا د ب جـ ز متساويين. لكن زاويتا ا د ه ه ز جـ متساويتين، وهما متبادلتان. فخطا ا ب جـ ز لا يقربان ولا يبعدان. ولذلك خطا ب د جـ ز أيضًا لا يقربان ولا يبعدان. / وهما مستقيمان، وقد وصل بين أطرافهما خطا ب جـ جـ-٢٠١-ظ

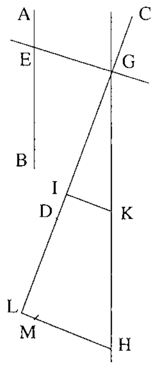
6 وزاويتا: وزاويتي [ا، جا] – 8-9 لا يقربان ولا يبعدان: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ا] – 11 ضلعان: ضلعين [ا، جا] – 14 ذلك: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ا] – 15 ولا يقرب منه ولا يبعد: ناقصة [ا] – 18 د ب: ز ب [ا] – 20 مستقيمان: مستقيمين [ا، جا].

droites *BC* et *DG* ont joint leurs extrémités, elles sont donc égales et ne se rapprochent ni ne s'écartent. Mais *DG* est le double de *DE*, donc *BC* est le double de *DE* et ne s'approche ni ne s'écarte d'elle. Ce qu'il fallait démontrer.

<*Corollaire.*> Par cette méthode nous montrons que si nous divisons chacune des <droites> *AB* et *AC* en un nombre de parties quelconque, à condition qu'il soit pair, et si nous joignons le point qui suit *A* de la droite *AB* à son homologue de <la droite> *AC* par une droite, ce sera alors une partie de *BC* égale à la partie de la droite qui est entre *A* et le point qui suit *A* sur la droite *AB*.

– **5** – Si une droite tombe sur deux droites de sorte que les deux angles qui sont d'un même côté soient plus petits que deux droits, alors, si on prolonge les deux droites de ce côté, elles se rencontrent.

Exemple : Soient deux droites *AB* et *CD* sur lesquelles est tombée la droite *EG* telle que les deux angles *BEG*, *DGE* soient plus petits que deux droits. Je dis que, si on prolonge les deux droites *AB* et *CD* du côté de *B*, *D*, elles se rencontrent.



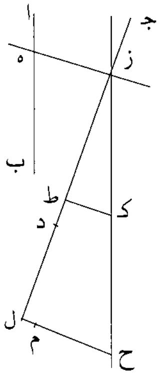
Démonstration : Nous menons du point *G* la droite *GH* qui ne s'approche ni ne s'écarte de la droite *AB*. Nous marquons sur *GD* un point *I* quelconque et nous menons à partir de lui jusqu'à *GH* la droite *IK* qui ne s'approche ni ne s'écarte de *EG*. Si elle se trouve être plus grande que *EG*, <soit> ; sinon, nous séparons *IL* égal à *GI* et *KH* égal à *GK* et nous joignons *LH*. Il est donc clair que *LH* est le double de *IK* et aussi qu'elle ne s'approche ni ne s'écarte de *IK*. Il est donc nécessaire – si *IK* est plus petit que *EG*, que nous le doublions, puis que nous doublions son double et que nous continuions toujours ainsi – que nous aboutissions en le doublant à une droite plus grande que *EG*. Qu'elle soit *LH*. La droite *LH* est donc plus grande que *EG* et elle ne s'en approche ni ne s'en écarte. Séparons donc de *LH* l'égal de *EG*, soit *HM*. Les deux droites *GE* et *HM* sont donc égales et ne s'approchent ni ne s'écartent. Celles qui joignent leurs extrémités sont égales sans s'approcher ni s'écarter comme précédemment. Mais *GH* a joint *G* et *H* ; donc *EB*, si on la prolonge du côté de *B*,

د ز؛ فهما متساويان ولا يقربان ولا يبعدان. لكن د ز ضعف د ه، فـ ب جـ ضعف د ه ولا يقرب منه ولا يبعد عنه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وبهذا الطريق نبين أنا لو قسمنا كل واحد من ا ب ا جـ بأقسام كم كانت بعد أن تكون أزواجًا، ووصلنا بين النقطة التي تلي ا من خط ا ب ونظيرتها من ا جـ بخط مستقيم، فإنه يكون جزءًا لـ ب جـ كجزء الخط الذي بين ا وبين النقطة التي تلي ا من خط ا ب.

– ه – إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فصيّر الزاويتين اللتين في جهة واحدة أقل من قائمتين، فإن الخطين إذا أخرجا في تلك الجهة، التقيا.

مثال ذلك: خطا ا ب جـ د وقع عليهما خط ه ز وكانت زاويتا ب ه ز د ز ه أصغر من قائمتين؛ أقول: إن خطي ا ب جـ د إذا أخرجا في جهة ب د، التقيا.



برهان ذلك: أن نخرج من نقطة ز خط ز ح لا يقرب ولا يبعد من خط ا ب، ونعلم على ز د نقطة ط كيفما اتفقت، ونخرج منها إلى ز ح خط ط ك لا يقرب ولا يبعد من ه ز. فإن اتفق أن يكون أعظم من ه ز وإلا فصلنا ط ل مثل ز ط وك ح مثل ز ك ووصلنا ل ح. فيتبين أن ل ح ضعف ط ك، وأنه أيضًا من ط ك لا يقرب ولا يبعد. فلا بد، إذا كان ط ك أصغر من ه ز وأضعفناه، ثم أضعفنا ضعفه ومررنا على هذا دائمًا، أن ننتهي في أضعافه إلى خط أعظم من ه ز. فليكن ل ح. فخط ل ح أطول من ه ز، وهو لا يقرب ولا يبعد عنه. فلنفصل من ل ح مثل ه ز، وهو ح م. فيكون خطا ز ه ح م متساويين، ولا يقربان ولا يبعدان. فالواصلان بين أطرافهما متساويان ولا يقربان ولا يبعدان كما تقدم. لكن ز ح قد وصل بين ز وح. فـ ه ب إذا أخرج على استقامة من جهة ب، صار إلى م، وإلا عرض

1 د ه: حـ ه [ا] – 5 فإنه: انه [ا، جا] – 6 من خط ا ب: كتب قبلها «من نقطة ا ب» [ا] – 11 ز ح: ز ع [ا]، كتب ناسخ [ا] حروف ع، ف، ك، ط، ق عواضًا ح، ط، ل، ك، م – 13 اتفقت: اتفق، ثم أثبت الصواب فوقها [ا] – 15 ز ك: ط ز [ا] / فيتبين: تبين [ا، جا] – 21 متساويين: متساويان [ا، جا] – 23 أخرج: خرج [ا].

parvient à *M*, sinon il se ferait qu'une autre droite [A-51r] que *EB* aurait joint *E* et *M*. Si donc on prolongeait *EB*, alors celle qui joint *E* et *M* ne s'approcherait ni ne s'écarterait de *GH* ; or *EB* ne s'approche ni ne s'écarte de *GH* et celle qui joint *E* et *M* est entre *EB* et *GH*, ce qui est absurde. Par conséquent, si on prolonge *EB*, elle parvient à *M*. Il est donc nécessaire qu'elle rencontre avant le point *M* un point de la droite *CD*. Si donc on prolonge *AB* et *CD* [C-202r] du côté de *B*, *D*, elles se rencontrent. Ce qu'il fallait démontrer.

Le traité est achevé.

أن وصل بين / ه وم غير ه ب. فإذا أخرج ه ب، فإنه يكون الواصل بين ه وم لا ا-٥٢-و يقرب ولا يبعد عن ز ح. وقد كان ه ب لا يقرب ولا يبعد عن ز ح، والواصل بين ه وم بين ه ب وز ح؛ هذا خلف. فإذن ه ب إذا أخرج، صار إلى م، فلا بد له من أن يلقى قبل نقطة م نقطة من خط جـ د. فـ ا ب جـ د إذا أخرجا / في جـ-٢٠٢-و جهة ب د، التقيا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت المقالة.

1 فإذا: اذا [ا، جـ] / فإنه: ان [ا، جـ] – 4 خط: ناقصة [ا] – 6 تمت المقالة: كتب بعدها «بعون الله تعالى وتوفيقه، والحمد لله على ذلك والصلوة والسلام على حبيبه محمّد وعلى آله وأصحابه الطيبين أجمعين. وقد جف القلم من نسخها (نسخه .ms) ليلة السبت العشرين من ذي القعدة لسنة تسع وخمسين ومائة بعد الألف من الهجرة (هجرة .ms) النبوية، على صاحبها أفضل التحية» [جـ]؛ وكتب ناسخ [ا]: «تم الكتاب والحمد لله رب العالمين (العلمين .ms) والصلوة على النبي محمد وآله أجمعين»، ونجد في الهامش «نسخته ولله الحمد».

CHAPITRE II

THÉORIE DES NOMBRES ET ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

THÉORIE DES NOMBRES AMIABLES

Roshdi RASHED et Christian HOUZEL

Thābit ibn Qurra démontre dans ce texte un théorème qui permet selon lui de construire autant de paires de nombres amiables que l'on veut. Il considère deux suites de nombres : $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$ et $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$; son théorème affirme que si, pour un entier n, p_{n-1}, p_n et q_n sont des nombres premiers, alors $2^n p_{n-1} p_n$ et $2^n q_n$ sont des nombres amiables, c'est-à-dire que chacun d'eux est égal à la somme des parties aliquotes de l'autre, les parties aliquotes d'un nombre étant les diviseurs de ce nombre distincts du nombre lui-même. La démonstration est précédée de neuf lemmes ou propositions et elle est rédigée dans le plus pur style euclidien des livres VII à IX des *Éléments*.

Les trois premières propositions déterminent les diviseurs du produit bc de deux nombres à partir des diviseurs de b et des diviseurs de c ; selon l'usage ancien Thābit ibn Qurra considère les diviseurs propres (différents du nombre lui-même et de 1) plutôt que les diviseurs.

Dans la proposition 1, b et c sont supposés premiers ; alors les diviseurs propres de bc sont b et c.

En effet, si d est un diviseur propre de bc, il existe un nombre e tel que $bc = de$ et, b étant premier, il divise d ou e, par exemple d. Thābit ibn Qurra utilise ici la proposition 30 du livre VII des *Éléments*, selon laquelle un nombre premier qui divise un produit divise l'un des facteurs de ce produit. Comme $b{:}d = e{:}c$, e divise c, qui est aussi premier ; comme d n'est pas égal à bc, e devrait être égal à c, mais alors $d = b$.

La proposition 14 du livre IX des *Éléments* est apparentée à celle-ci : elle énonce que, si un nombre a est le plus petit nombre divisible par des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$, les seuls diviseurs premiers de a sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$ [1].

[1] Dans R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Collection Sciences et philosophie arabes - Études et reprises, Paris, Les Belles Lettres, 1984, on trouve une histoire de la théorie des nombres amiables dans les mathématiques arabes que nous ne reprenons pas ici ; toutefois, p. 264, on dit

Dans la proposition 2, b est supposé premier, mais pas c. Les diviseurs propres de bc sont alors classés en trois types : 1) b et c ; 2) les diviseurs propres de c ; 3) les produits de b par les diviseurs propres de c. C'est une généralisation du raisonnement d'Euclide dans la proposition 36, dernière proposition du livre IX de ses *Éléments*, dans laquelle il avait déterminé les diviseurs d'un nombre de la forme 2^nE, E étant un nombre premier.

Il est clair que b, c et les diviseurs de c divisent bc : si d est l'un d'eux, on a $d{:}c = bd{:}bc$ et, comme d divise c, bd divise bc. Réciproquement, soit ℓ un diviseur propre quelconque de bc, tel que $\ell n = bc$. Comme b est premier, il divise ℓ ou n. Si b divise n, la proportion $n{:}b = c{:}\ell$ montre que ℓ divise c et ℓ est donc égal à c ou à l'un de ses diviseurs propres. Si b divise ℓ, n divise c car $b{:}\ell = n{:}c$; ainsi $b = \ell$ et $n = c$, ou bien $\ell = bd$ et $c = nd$, où d est un diviseur propre de c.

La proposition 3 traite du cas où b et c sont tous les deux composés. Les diviseurs propres de bc sont de six types : 1) b et c ; 2) les diviseurs propres de b ; 3) ceux de c ; 4) les produits de b par les diviseurs propres de c ; 5) les produits des diviseurs propres de b par c ; 6) les produits d'un diviseur propre de b par un diviseur propre de c.

Il est clair que b, c et les diviseurs de b ou de c divisent bc. Si g divise c, la proportion $g{:}c = bg{:}bc$ montre que bg divise bc ; on établit de même que, si d divise b, dc divise bc. On a encore $dg{:}bg = d{:}b$, donc dg divise bg, donc il divise aussi bc.

Réciproquement, soit u' un diviseur propre quelconque de bc, tel que $u'o' = bc$, donc $u'{:}b = c{:}o'$. Si u' et b sont premiers entre eux, u' divise c et b divise o', d'après les propositions 20 et 21 du livre VII des *Éléments*, donc u' est égal à c ou à l'un de ses diviseurs propres. Sinon, u' divise b ou b divise u' ou bien le p.g.c.d. j de u' et b est distinct de u' et de b. Dans le premier cas u' est égal à b ou à l'un de ses diviseurs propres. Dans le deuxième o' divise c, soit $o'i = c$ et $u' = bi$, où i est un diviseur propre de c. Considérons enfin le troisième cas, où $b = j\overline{oa}$ et $u' = j\overline{ob}$, avec des nombres $\overline{oa}$ et $\overline{ob}$ premiers entre eux. On a $\overline{oa}{:}\overline{ob} = b{:}u' = o'{:}c$, donc $\overline{oa}$ divise o' et $\overline{ob}$ divise c ; si $\overline{oa} = o'$, $\overline{ob} = c$ et $u' = jc$ où j est un diviseur propre de b et sinon $\overline{ob} = g$ est un diviseur propre de c, j un diviseur propre de b et $u' = jg$.

On peut résumer en disant que, si ℓ divise un produit bc, il existe n tel que $\ell n = bc$, donc $\ell{:}b = c{:}n = \ell'{:}b'$ où $\ell = j\ell'$ et $b = jb'$, j étant le p.g.c.d. de b et

que la proposition 1 est un cas particulier de la proposition IX.14 des *Éléments*, mais il est plus correct de dire que les deux propositions sont apparentées car celle d'Euclide ne traite que des diviseurs premiers et non pas de tous les diviseurs, comme celle de Thābit ibn Qurra. Sur la diffusion du théorème de Thābit dans la littérature hébraïque médiévale, voir T. Lévy, « L'histoire des nombres amiables : le témoignage des textes hébreux médiévaux », *Arabic Sciences and Philosophy*, 6, 1996, p. 63-87.

de ℓ. Alors ℓ' et b' sont premiers entre eux, donc ℓ' divise c et b' divise n, d'après les propositions 20 et 21 du livre VII des *Éléments*, et on trouve que ℓ est le produit d'un diviseur j de b par un diviseur ℓ' de c.

La proposition 4 donne la somme d'une progression géométrique de raison 2 : si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont tels que $a_{j+1} = 2a_j$ pour $0 \leq j \leq n-1$, alors

$$a_n - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) = a_0 \;;$$

Thābit ibn Qurra précise que l'énoncé reste valable lorsque $a_0 = 1$, car Euclide ne traite jamais l'unité comme un nombre. Cela signifie que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

La proposition est déduite de la proposition 35 du livre IX des *Éléments*, selon laquelle, pour toute progression géométrique $a_0, a_1, \ldots, a_n$, on a

$$(a_1 - a_0):a_0 = (a_n - a_0):(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) \;;$$

ici $a_1 - a_0 = a_0$, donc ce rapport est égal à 1:1 et on a

$$a_n - a_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

La proposition 5 reprend en la généralisant la proposition 36, dernière proposition du livre IX des *Éléments*. On considère une progression géométrique $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ de raison 2, avec $a_0 = 1$ ($a_j = 2^j$), et on désigne par f sa somme, soit $2^n - 1$ d'après la proposition précédente. Alors si g est un nombre premier impair,

(1) si $g = f$, $a_{n-1}g$ est un nombre parfait ;
(2) si $g < f$, $a_{n-1}g$ est un nombre abondant d'excédent $f - g$;
(3) si $g > f$, $a_{n-1}g$ est un nombre déficient de défaut $g - f$.

Euclide ne considère que le cas (1), qui lui donne les nombres parfaits pairs[2] ; ils correspondent aux nombres premiers de Mersenne, de la forme $2^n - 1$, où n doit nécessairement être premier car $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$. Rappelons que l'on appelle parfaits les nombres égaux à la somme de leurs parties aliquotes (y compris 1), abondants les nombres plus petits que la somme de leurs parties aliquotes, l'excédent étant la différence, et déficients les nombres plus grands que la somme de leurs parties aliquotes, le

[2] Euler a établi la réciproque, c'est-à-dire que tout nombre parfait pair est de la forme euclidienne, c'est-à-dire de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est premier (voir *infra*). On ignore toujours s'il existe une infinité de nombres premiers de Mersenne et s'il existe des nombres parfaits impairs.

défaut étant la différence. Comme Euclide, Thābit ibn Qurra développe son raisonnement sur l'exemple $n = 5$, qui donne le nombre premier de Mersenne 31 et, dans le cas (1), le nombre parfait $16 \times 31 = 496$; mais cette valeur n'est pas explicitée, car l'exemple est considéré comme générique.

D'après la proposition 2, les diviseurs propres de $a_{n-1}g$ sont a_{n-1}, g, les diviseurs propres de a_{n-1} et les produits de g par les diviseurs propres de a_{n-1}. D'après la proposition 13 du livre IX des *Éléments*, les parties aliquotes de a_{n-1} sont $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}$ et elles sont distinctes deux à deux ; de même les nombres $ga_0 = g, ga_1, \ldots, ga_{n-2}$ sont distincts deux à deux, car ils forment aussi une progression géométrique de raison 2. Reste à démontrer qu'aucun des nombres ga_j n'est égal à un a_i ; si c'était le cas, on aurait, en utilisant la proposition 11 du livre IX des *Éléments*, pour $j \geq i$ (resp. $j \leq i$), $ga_j{:}ga_{j-i} = a_i{:}a_0$ (resp. $ga_j{:}g = a_i{:}a_{i-j}$), donc $ga_{j-i} = a_0 = 1$ (resp. $g = a_{i-j}$), ce qui est absurde. Notons qu'Euclide ne démontre pas que les parties aliquotes trouvées sont deux à deux distinctes. La suite $g, ga_1, \ldots, ga_{n-2}, ga_{n-1}$ est une progression géométrique de raison 2, donc, d'après la proposition 4, la somme $g + ga_1 + \ldots ga_{n-2}$ est égale à $ga_{n-1} - g$ et par conséquent la somme des parties aliquotes de ga_{n-1} est

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + g + ga_1 + \ldots + ga_{n-2} = f + ga_{n-1} - g = ga_{n-1}$$

si $g = f$, plus grande que ga_{n-1} si $g < f$, l'excédent étant $f - g$ et plus petite que ga_{n-1} si $g > f$, le défaut étant $g - f$. La proposition est démontrée.

Thābit ibn Qurra établit donc que les parties aliquotes de $a = 2^{n-1}g$ où g est premier sont $1, 2, \ldots, 2^{n-1}, g, 2g, \ldots, 2^{n-2}g$ et qu'elles sont distinctes, de sorte que leur somme est

$$2^n - 1 + (2^{n-1} - 1)g = a + f - g$$

si $f = 2^n - 1$.

Dans la proposition 6, les données sont les mêmes, à la différence près que g n'est plus un nombre premier, mais le produit de deux nombres premiers impairs h et i distincts. Alors $a_{n-1}g$ est abondant ou déficient selon que $g < f + f(h + i)$ ou que $g > f + f(h + i)$, l'égalité étant exclue ; l'excédent (resp. le défaut) de $a_{n-1}g$ est égal à $f + f(h + i) - g$ (resp. $g - f - f(h + i)$). Notons que les cas (2) et (3) de la proposition 5 et cette proposition 6 donnent des réciproques partielles du théorème d'Euclide : $2^{n-1}g$ n'est pas un nombre parfait si g est un nombre premier différent de $2^n - 1$ ou bien si c'est le produit de deux nombres premiers impairs distincts. Ibn al-Haytham semble être le premier à avoir essayé de démontrer la réciproque du théorème d'Euclide en toute généralité, mais il est seulement parvenu à établir que, si $2^{n-1}(2^m - 1)$ est un nombre parfait, alors $m = n$ et $2^m - 1$ est premier, c'est-à-dire que le nombre considéré a la forme euclidienne[3].

D'après la proposition 3, la proposition 13 du livre IX des *Éléments* et la proposition 1, les parties aliquotes de $a_{n-1}g$ sont $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_{n-1}, g, h, i, ga_1, \ldots, ga_{n-2}, ha_1, \ldots, ha_{n-1}, ia_1, \ldots, ia_{n-1}$. Comme $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $(g, ga_1, \ldots, ga_{n-2})$, $(h, ha_1, \ldots, ha_{n-1})$ et $(i, ia_1, \ldots, ia_{n-1})$ sont quatre progressions géométriques de raison 2, leurs termes sont distincts deux à deux. Aucun des nombres ga_j $(0 \leq j \leq n-2)$ n'est égal à un nombre ha_k $(0 \leq k \leq n-1)$ car sinon on aurait, pour $k \leq j$ (resp. $k \geq j$), $ga_j{:}ga_{j-k} = ha_k{:}h$ (resp. $ga_j{:}g = ha_k{:}ha_{k-j}$), d'où $ga_{j-k} = h < g$ (resp. $hi = g = ha_{k-j}$, d'où $i = a_{k-j} = 2^{k-j}$), ce qui est absurde ; on démontre de même qu'aucun des nombres ga_j n'est égal à un nombre ia_k. Aucun des nombres ga_j n'est égal à un nombre a_k, sinon on en déduirait, par le même raisonnement, que $ga_{j-k} = 1$ si $j \geq k$ ou que $g = a_{k-j}$ si $k \geq j$, ce qui est absurde. De même encore aucun des nombres a_j $(1 \leq j \leq n-1)$ n'est égal à un ha_k ou à un ia_k $(0 \leq k \leq n-1)$, sinon on aurait $a_{j-k} = h$ ou i pour $j \geq k$ ou $1 = ha_{k-j}$ ou ia_{k-j} pour $k \geq j$, ce qui est absurde. Enfin aucun des nombres ha_j n'est égal à un ia_k, sinon on aurait $ha_{j-k} = i$ ou $h = ia_{k-j}$, ce qui est absurde puisque h et i sont des nombres premiers distincts. D'après la proposition 4,

$$g + ga_1 + \ldots + ga_{n-2} = ga_{n-1} - g\ ;$$

la somme des autres parties aliquotes de ga_{n-1} est

$$h + ha_1 + \ldots + ha_{n-1} + i + ia_1 + \ldots + ia_{n-1} + 1 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = \\ = f(h + i) + f,$$

donc la somme de toutes les parties aliquotes de ga_{n-1} est

$$ga_{n-1} + f + f(h + i) - g.$$

On observe enfin que g ne peut pas être égal à $f(h + i) + f = f(h + i + 1)$, sinon il serait divisible par f et par $h + i + 1$; or, d'après la proposition 1, les seuls diviseurs propres de g sont h et i, et $h + i + 1 > h$ et i.

[3] Voir R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2002, p. 192-195 et p. 320-328.

Thābit ibn Qurra établit donc que les parties aliquotes distinctes de $k = 2^{n-1}hi$ sont $1, 2,\ldots, 2^{n-1}, h, 2h,\ldots, 2^{n-1}h, i, 2i,\ldots, 2^{n-1}i, hi, 2hi,\ldots, 2^{n-2}hi$, de sorte que leur somme est

$$(2^n - 1)(1 + h + i) + (2^{n-1} - 1)hi = k + f(h + i + 1) - g$$

avec $f = 2^n - 1$ et $g = hi$.

Plus généralement, on pourrait, par les mêmes méthodes, établir que, si b et c sont premiers entre eux, les diviseurs $j\ell$ de bc trouvés dans la proposition 3, où j divise b et ℓ divise c, sont distincts deux à deux. En effet, si $j\ell = j_1\ell_1$, on a $j{:}j_1 = \ell_1{:}\ell$. Soit k le p.g.c.d. de j et j_1 ; on a $j = ku$ et $j_1 = ku_1$ avec u, u_1 premiers entre eux et $u{:}u_1 = j{:}j_1 = \ell_1{:}\ell$, donc u divise ℓ_1 et u_1 divise ℓ d'après les propositions VII.20 et 21 des *Éléments*. Alors u divise j donc b et ℓ_1 donc c et on a $u = 1$; de même $u_1 = 1$ et $j = k = j_1$, donc aussi $\ell_1 = \ell$. Il en résulte que la somme $\sigma(bc)$ de tous les diviseurs de bc est égale à

$$\sum_{j|b,\ell|c} j\ell = \sum_{j|b} j \cdot \sum_{\ell|c} \ell = \sigma(b)\sigma(c).$$

C'est, en substance, ce que démontrera Kamāl al-Dīn al-Fārisī au début du XIVe siècle[4].

Dans le cas où $b = 2^{n-1}$ et où c est impair, cela donne $\sigma(2^{n-1}c) = (2^n - 1)\sigma(c)$ ou, si on note $\sigma_0(a) = \sigma(a) - a$ la somme des parties aliquotes d'un nombre a,

$$\sigma_0(2^{n-1}c) = (2^n - 1)(\sigma_0(c) + c) - 2^{n-1}c = 2^{n-1}c + (2^n - 1)\sigma_0(c) - c\ ;$$

$2^{n-1}c$ est donc parfait si $c = (2^n - 1)\sigma_0(c)$, abondant d'excédent $(2^n - 1)\sigma_0(c) - c$ si $c < (2^n-1)\sigma_0(c)$ et déficient de défaut $c - (2^n - 1)\sigma_0(c)$ si $c > (2^n - 1)\sigma_0(c)$. Dans le premier cas, si $n \geq 2$, $\sigma_0(c)$ est une partie aliquote de c car $2^n - 1 \geq 3$ et on a donc $\sigma_0(c) = 1$, ce qui signifie que c est un nombre premier et que $c = 2^n - 1$. On a ainsi démontré la réciproque du théorème d'Euclide (établie par Euler).

Les propositions 7 et 8 sont des lemmes faciles ; on y considère quatre nombres a, b, c et d en progression géométrique de raison 2 et on établit successivement que

$$c(d + c)(b + c) = cd(d + a)$$

[4] Voir R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre*, p. 274-281 et « Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire », *Journal for the History of Arabic Science*, 6.1-2, 1982, p. 209-278, aux p. 229-266.

et que

$$c(b + d + 2c) = d(d + a).$$

Comme $b = 2a$, $c = 4a$ et $d = 8a$, cela signifie que $12 \times 6 = 8 \times 9 = 4 \times 18$, mais Thābit ibn Qurra en donne une démonstration par la théorie des proportions : $a{:}b = b{:}c = (a + b){:}(b + c) = c{:}d$, d'où, si on compose $(c + d){:}d = (a + c + 2b){:}(b + c) = (a + 2c){:}(b + c) = (a + d){:}(b + c)$ et, par conséquent $(c + d)(b + c) = d(a + d)$, qu'il reste à multiplier par c pour avoir la proposition 7. Pour la proposition 8, il observe que $d + 2c = 2d$ et $b = 2a$, d'où $d + 2c + b = 2(d + a)$, de sorte que $c{:}d = (d + a){:}(d + b + 2c)$, d'où $c(b + d + 2c) = d(d + a)$.

Dans la proposition 9, les données sont les mêmes et on démontre que

$$d(a + d - 1) = c(d(a + d) - 1 - (d + c - 1)(b + c - 1)).$$

En effet, d'après les propositions 7 et 8, on a

$$c((d + c)(b + c) - (b + d + 2c)) = (c - 1)d(a + d)$$

où le premier membre vaut $c((d + c - 1)(b + c - 1) - 1)$; ainsi

$$d(a + d) + c((d + c - 1)(b + c - 1) - 1) = cd(a + d)$$

et

$$d(a + d) - c = c(d(a + d) - (d + c - 1)(b + c - 1)).$$

Retranchons encore c aux deux membres :

$$d(a + d - 1) = d(a + d) - 2c = c(d(a + d) - 1 - (d + c - 1)(b + c - 1)).$$

Cette identité est d'ailleurs conséquence de

$$\begin{aligned} &d(a + d) - 1 - (d + c - 1)(b + c - 1) = \\ &\quad = 8a \times 9a - 1 - (12a - 1)(6a - 1) = 18a - 2. \end{aligned}$$

La proposition 10 est le théorème de Thābit ibn Qurra ; elle donne un procédé pour construire des paires de nombres amiables « à volonté », c'est-à-dire, sans doute, en nombre infini. On considère une progression géométrique de raison 2, $a_0 = 1$, $a_1 = 2, \ldots, a_n$, de somme $g = 2^{n+1}-1$. On suppose que les nombres $h = g + a_n = 3 \times 2^n - 1$ et $i = g - a_{n-1} = 3 \times 2^{n-1} - 1$ sont premiers ; on suppose de plus que $s = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-2}) - 1 = 9 \times 2^{2n-1} - 1$, où $a_{n+1} = 2a_n$, est aussi premier. Alors les nombres $\ell = hia_n$ et $o = sa_n$ sont amiables.

Comme $s > g$, le nombre o est déficient d'après le cas (3) de la proposition 5, et son défaut est égal à $p = s - g$. On a

$$p + g + 1 = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-2}),$$

d'où, puisque $g + 1 = a_{n+1}$,

$$p = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-2} - 1) = a_{n+1}(g + a_{n-2}).$$

Le nombre hi est plus petit que $g(h + i)$ car la différence est $gi + h(g - i)$; d'après le cas (2) de la proposition 5, ℓ est abondant et son excédent est

$$u = gi + h(g - i) + g = g(g - a_{n-1}) + (g + a_n)a_{n-1} + g = g^2 + a_{n-1}a_n + g = \\ = g(g + 1) + a_{n+1}a_{n-2} = a_{n+1}(g + a_{n-2}).$$

On a

$$o - \ell = a_n(s - hi) = a_n(a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-2}) - 1 - (g + a_n)(g - a_{n-1})),$$

où

$$g + a_n = a_{n+1} + a_n - 1 \text{ et } g - a_{n-1} = a_{n+1} - 1 - a_{n-1} = a_{n-1} + a_n - 1.$$

D'après la proposition 9, on a donc

$$o - \ell = a_n(a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-2}) - 1 - (a_{n+1} + a_n - 1)(a_{n-1} + a_n - 1)) = \\ = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-2} - 1) = a_{n+1}(g + a_{n-2}).$$

Ainsi $o - \ell = p = u$ et $\ell = o - p$ est la somme des parties aliquotes de o tandis que $o = \ell + u$ est la somme des parties aliquotes de ℓ. On note que, dans une telle paire de nombres amiables, le plus petit est abondant, le plus grand est déficient et l'excédent du nombre abondant, le défaut du nombre déficient et la différence des deux nombres sont égaux.

Thābit ibn Qurra expose son raisonnement sur l'exemple $n = 4$, qui donne $h = 3 \times 16 - 1 = 47$, $i = 3 \times 8 - 1 = 23$ et $s = 9 \times 128 - 1 = 1151$, tous premiers. La paire de nombres amiables correspondante est

$$\ell = 16 \times 47 \times 23 = 17296,\ o = 16 \times 1151 = 18416\ ;$$

elle a été donnée explicitement par Kamāl al-Dīn al-Fārisī au début du XIVe siècle[5], mais elle est souvent attribuée à Fermat, qui l'a redécouverte en 1636[6]. Thābit ibn Qurra ne l'explicite pas, car son exemple a valeur de cas générique et il entend insister sur ce caractère générique comme le montre sa notation littérale pour les nombres utilisés[7]. Pour $n = 2$, on aurait trouvé $h = 11$, $i = 5$ et $s = 71$, ce qui donne la paire (220, 284) connue depuis l'antiquité.

On vérifie que h et i ne peuvent pas être divisibles par les nombres premiers suivants : 3, 7, 17, 31, 41, 43, 73, 79, 89, 103, 109, 113, 127, 137, 151, 157, 199, ... et que s ne peut pas être divisible par 3, 5, 11, 13, 19, 29, 31, 37, 43, 53, 59, 61, 67, 73, 83, 89, 97, 101, 107, 109, 113, 127, 131, 139, 149, 151, 157, 163, 173, 179, 181, 193, 197, ...

Le tableau suivant contient en première ligne une liste de modules m associés à des nombres premiers p de la forme $2^t m + 1$ en petits caractères ; les lignes suivantes, marquées h, i, s indiquent des restes r tels que, si $n \equiv r$ (mod. m), le nombre h, i, s correspondant est divisible par p. Le module $m = 4$, par exemple, est accompagné des deux nombres premiers, 5 et 17, car $n \equiv 1$ (mod. 4) implique que h est divisible par 5 et que s est divisible par 17, et $n \equiv 2$ (mod. 4) implique que i est divisible par 5.

m	3, 7	4, 5, 17	10, 11, 41	11, 23	12, 13	18, 19	23, 47	28, 29	34, 137	35, 71	36, 37	39, 79
h		1	2	3	8	5	4	23		19	10	
i		2	3	4	9	6	5	24		20	11	
s	0	1	3	9			16		14		2	10

Les valeurs 2, 4, 7 de n donnent les trois premières paires de nombres amiables de la forme de Thābit ibn Qurra, les deux que nous avons déjà mentionnées et la troisième

$$(9363584, 9437056)$$

découverte au XVIIe siècle indépendamment par al-Yazdī et par Descartes, obtenue pour $n = 7$. Le tableau permet d'éliminer toutes les valeurs suivantes de n jusqu'à 34 compris, car, pour ces valeurs, l'un ou l'autre des nombres h, i, s n'est pas premier.

[5] R. Rashed, « Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire » et « Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIIIe et XIVe siècles », *Archive for History of Exact Sciences*, 28.2, 1983, p. 107-147 ; repris dans *Entre arithmétique et algèbre*, 1984, p. 259-299.

[6] M. Mersenne, *Harmonie universelle*, t. I, Paris, 1636.

[7] Faute de saisir ce caractère générique, on attribue à Thābit un calcul explicite de ce couple. Il pouvait parfaitement calculer ce couple, aussi bien que celui pour $n = 7$, mais telle n'était pas son intention.

Si on se limite au premier tableau (12 colonnes), il faut dire ensuite que l'on élimine aussi les nombres de chacune des formes : $43q + 30$, $43q + 31$, $43q + 9$, $49q + 29$, $49q + 30$, $51q + 17$, $52q + 35$, $52q + 36$, $53q + 36$, $53q + 37$, $58q + 8$, $58q + 9$, $60q + 54$, $60q + 55$, $66q + 27$, $66q + 28$, etc.

Outre $n = 2$, 4 et 7 (connus au XVII^e siècle), les seuls nombres inférieurs à 400 qui ne sont pas exclus par ces congruences sont $n = 148$, 187, 340 et 391 .

Tableau des p_n pour les petites valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_n	5	11	23	47	5.19	191	383	13.59	5.307	37.83	6143	11.1117

n	13	14	15	16	17	18	19
p_n	$5^2.983$	23.2137	197.499	421.467	5.78643	786431	71.22153

n	20	21	22
p_n	13.241979	5.1258291	$11^2.103991$

Tableau des valeurs de q_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_n	17	71	7.41	1151	17.271	7.2633	73727	294911	7.17.23.431	79.59729

Avec les notations introduites ci-dessus, une paire (ℓ, o) est constituée de nombres amiables si on a $\sigma(\ell) = \sigma(o) = \ell + o$. Dans le cas où $\ell = 2^n k$ et $o = 2^n s$ avec k et s impairs, cela s'écrit

$$(2^{n+1} - 1)\sigma(k) = (2^{n+1} - 1)\sigma(s) = 2^n(k + s).$$

Supposons s premier et $k = hi$ où h et i sont des nombres premiers distincts ; la condition précédente devient

$$(2^{n+1} - 1)(h + 1)(i + 1) = (2^{n+1} - 1)(s + 1) = 2^n(hi + s),$$

d'où

$$s = hi + h + i \text{ et } hi = (2^n - 1)(h + i) + 2^{n+1} - 1.$$

Posons $h = 2^n - 1 + h_1$ et $i = 2^n - 1 + i_1$; l'équation précédente donne

$$h_1 i_1 = (2^n - 1)^2 + 2^{n+1} - 1 = 2^{2n},$$

dont les solutions sont $h_1 = \varepsilon\, 2^\alpha$ et $i_1 = \varepsilon\, 2^\beta$ avec $\varepsilon = \pm 1$, où α et β sont des entiers naturels tels que $\alpha + \beta = 2n$. Comme $h \neq i$, $\alpha \neq \beta$ donc l'un d'entre eux, par exemple α, est plus grand que n et l'autre β plus petit que n : $\alpha = n + \gamma$, $\beta = n - \gamma$ avec $1 \leq \gamma \leq n - 1$, ce qui exige $n \geq 2$; ainsi $2^\alpha = 2^{n+\gamma} > 2^n$ et la positivité de h exige que $\varepsilon = 1$. On a alors

$$h = 2^n - 1 + 2^{n+\gamma} = 2^n(2^\gamma + 1) - 1 \text{ et } i = 2^n - 1 + 2^{n-\gamma} = 2^{n-\gamma}(2^\gamma + 1) - 1,$$

puis $s = 2^{2n-\gamma}(2^\gamma + 1)^2 - 1$. Lorsque $\gamma = 1$, $2^\gamma + 1 = 3$ et on retrouve la forme donnée par Thābit ibn Qurra ; cette forme plus générale, avec $1 \leq \gamma \leq n - 1$, a été découverte par Euler.

Supposons maintenant $k = h^2$ où h est un nombre premier, s étant toujours premier ; la condition pour que $(2^n k, 2^n s)$ soit une paire de nombres amiables s'écrit

$$(2^{n+1} - 1)(h^2 + h + 1) = (2^{n+1} - 1)(s + 1) = 2^n(h^2 + s),$$

d'où $s = h^2 + h$ divisible par h, ce qui est impossible. Il en résulte qu'il n'y a pas de paire de nombres amiables de la forme $(2^n h^2, 2^n s)$ avec h et s premiers impairs.

Les paires de nombres amiables de la forme $(2^n hi, 2^n s)$ où h, i, s sont des nombres premiers impairs sont donc celles pour lesquelles $n \geq 2$ et il existe γ entier entre 1 et $n - 1$ tels que $h = 2^n(2^\gamma + 1) - 1$, $i = 2^{n-\gamma}(2^\gamma + 1) - 1$ et $s = 2^{2n-\gamma}(2^\gamma + 1)^2 - 1$.

On peut remarquer que les valeurs paires de γ sont à exclure car elles donnent des valeurs de s multiples de 3 ; pour γ impair, $2^\gamma + 1$ est multiple de 3, donc h, i, s ne peuvent pas être multiples de 3. On peut aussi vérifier que s n'est jamais multiple de 5, 11, 13 ou 19. Le tableau suivant contient dans sa première colonne les restes de γ (mod. 24) et, en regard, les restes possibles de n (mod. 24) ; pour les autres restes, l'un des nombres h, i, s est divisible par 5, 7, 13 ou 17 :

±1	4, 7, 11, 16, 19, 23
±3	0, 3, 15
±5	7, 8, 11, 16, 19, 23
±7	4, 7, 8, 11, 16, 19, 20, 23
±9	0, 3, 12, 15
±11	7, 11, 16, 19, 23

Les formules d'Euler ne peuvent engendrer des paires de nombres amiables non obtenues par les formules de Thābit ibn Qurra que pour des valeurs assez élevées de n ($n \geq 8$ pour $\gamma = 5$ ou 7, $n \geq 12$ pour $\gamma = 9$, $n \geq 15$ pour $\gamma = 3$, $n \geq 11$ pour $\gamma = 11$, etc.). Enfin les nombres amiables ne sont pas tous donnés par ces formules, comme le montre l'exemple (1184,1210) découvert par N. Paganini au XIXe siècle ; on ne sait toujours pas s'il existe une infinité de paires de nombres amiables.

HISTOIRE DU TEXTE

Nous avons établi ce traité à partir de deux manuscrits principaux :

Paris, Bibliothèque nationale, 2457, fol. 170^{v}-180^{r}, noté [B]
Istanbul, Aya Sofya 4830, fol. 110^{r}-121^{v}, noté [A].

L'introduction du texte ne se trouve que dans le manuscrit [B]. Le copiste de ce manuscrit ne numérote pas les problèmes. En revanche, le copiste du manuscrit [A] indique leur numérotation. L'examen de ces manuscrits montre qu'ils appartiennent à deux familles indépendantes[8].

Un troisième manuscrit se trouve à l'Observatoire d'Istanbul, mais il n'est qu'une copie récente de [A]. Nous l'avons donc négligé.

D'autre part, nous avons identifié deux fragments de ce texte : l'un dans la collection de Hyderabad, Osmania University 992, fol. 295^{r}-297^{r}, noté [O] ; le second se trouve dans le manuscrit de Copenhague, Bibliothèque royale, Or. 82, fol. 20^{v}, noté [K]. Ce manuscrit est une copie d'une partie de l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd. Il s'agit donc d'un fragment cité par Ibn Hūd du traité de Thābit[9].

F. Woepcke a attiré l'attention sur ce traité dans une courte note publiée dans le *Journal asiatique*, 4^{e} série, vol. 20, 1852, p. 420-429, sous le titre « Notice sur une théorie ajoutée par Thābit Ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs ». A.S. Saidan en a donné une édition provisoire sous le titre *Amicable Numbers by Thābit ibn Qurra*, Amman, 1977.

[8] Sur leur description et les éléments de leur histoire, voir *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2002, p. 735-736 ; et vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, al-Furqān, 1996, p. 841-842.

[9] Voir la description de ce manuscrit dans *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. I, chap. VII, p. 780-781.

TEXTE ET TRADUCTION

Sur la détermination des nombres amiables

Fī istikhrāj al-a'dād al-mutaḥābba

Traité composé par Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra

Sur la détermination des nombres amiables pour faciliter la voie y conduisant

Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra a dit : le récit est propagé et connu, parmi ceux qui étudient les livres des Grecs, de l'usage des nombres par Pythagore et les anciens philosophes de sa secte dans leur enseignement, de leur ferveur à leur égard et de la quête qu'ils en faisaient, exemples pour la plupart des notions qu'ils voulaient établir, notions de leur philosophie. Ils en utilisaient deux genres, qu'il nous faut déterminer ; de l'un, qui est les nombres appelés « parfaits », la propriété est célèbre et connue ; l'autre, ce sont les nombres qu'ils nommaient « amiables », qu'ils citaient et mentionnaient.

Pour le nombre parfait, on sait que, si on additionne toutes ses parties, la somme en est le nombre tout entier. Les deux classes de ce nombre sont le nombre abondant et le nombre déficient. L'abondant est un nombre tel que, si on additionne toutes ses parties, la somme en sera plus grande que le nombre lui-même. Le déficient est un nombre tel que, si on additionne toutes ses parties, la somme en sera plus petite que le nombre lui-même. La différence entre tout nombre et la somme de ses parties s'appelle son excédent, si c'est un nombre abondant ; ou son défaut, si c'est un nombre déficient.

Les nombres qu'ils appelaient amiables sont deux nombres tels que, si on additionne les parties de chacun d'eux, à part, la somme en est [B-171^r] égale à l'autre nombre qui est l'associé de celui dont on a additionné les parties.

Pour les nombres parfaits de ces deux genres que nous avons mentionnés, Nicomaque a décrit la méthode de leur détermination, mais il ne l'a pas démontrée. Quant à Euclide, il a décrit la méthode de leur détermination et l'a démontrée avec soin dans les livres arithmétiques de son ouvrage les *Éléments* ; et il les a placés à la fin de ce à quoi il a abouti dans ceux-ci, au terme qu'il a atteint, de sorte que d'aucuns ont pensé que c'est là le terme qu'il visait et le but ultime de ces livres.

مقالة ألفها أبو الحسن ثابت بن قرة ب-١٧٠-ظ
في استخراج الأعداد المتحابة لسهولة المسلك إلى ذلك

قال أبو الحسن ثابت بن قرة: الخبر مستفيض معروف بين أهل النظر في كتب اليونانيين بما كان عليه بوثاغورس وقدماء الفلاسفة من شيعته من استعمال الأعداد في تعليمهم ولهجهم بها وتصيدهم أياها أمثلة لأكثر المعاني التي كانوا يريدون وضعها من معاني فلسفتهم. وكان مما يستعملونه منها جنسان نحتاج إلى استخراجهما، خاصة أحدهما مشهور معروف، وهو الأعداد التي تسمى التامة، والآخر أعداد كانوا يلقبونها المتحابة وكان لها عندهم نبأ وذكر.

فأما العدد التام فمعروف أنه إذا جمع كل جزء له، كانت جملة ذلك العدد بأسره؛ وقسما هذا العدد هما العدد الزائد والعدد الناقص. والزائد منهما عدد إذا جمع كل جزء له، كانت جملة ذلك أكثر من ذلك العدد نفسه. والناقص عدد إذا جمع كل جزء له، كانت جملة ذلك أقل من ذلك العدد نفسه. ويسمى فضل ما بين كل عدد وجملة كل جزء له إذا جمع زيادته ⟨إذا كان عدداً زائداً⟩ أو نقصانه إن كان عدداً ناقصاً.

وأما الأعداد التي كانوا يلقبونها المتحابة فإنها عددان إذا جمع كل جزء لكل واحد منهما على حده، كانت جملة ذلك / مثل العدد الآخر الذي هو ب-١٧١-و قرين الذي جمعت أجزاؤه.

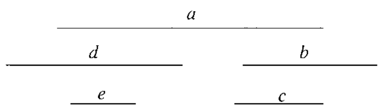
والأعداد التامة من هذين الجنسين اللذين ذكرنا، قد وصف نيقوماخس طريق استخراجها، ولكنه لم يبرهن ذلك. وأما أقليدس فإنه وصف طريق استخراجها وبرهن ذلك في مقالاته العددية من كتابه في *الأصول* بعناية؛ وجعلها آخر ما انتهى إليه فيها وأقصى ما بلغه حتى ظن من ظن أن ذلك كان أقصى قصده ومنتهى غايته في هذه المقالات.

11 وقسما: وقسيما [ب] - 15 زيادته: زياده [ب].

Quant aux nombres amiables, je n'ai pas trouvé qu'aucun d'eux les ait mentionnés, ni n'ait pris la peine de s'y adonner. Maintenant que leur sujet m'est venu à l'esprit, et que j'ai déterminé une démonstration à leur propos, je n'aimerais pas, étant donné ce qui en a été dit, la perdre en renonçant à l'établir. J'établirai cela une fois introduits les lemmes dont nous avons besoin pour celle-ci. Ce sont les suivants : [A-110$^{\mathrm{v}}$]

– **1** – Tout nombre plan dont les côtés sont deux nombres premiers ne sera mesuré par aucun autre nombre que ces deux-ci.

Soit le nombre a un nombre plan et soient ses deux côtés deux nombres premiers qui sont b et c. Je dis qu'aucun nombre autre que les nombres b et c ne le mesure.



Démonstration : Si la chose n'est pas selon ce que nous avons mentionné, alors le nombre a sera mesuré par un nombre autre que les nombres b et c. Si nous posons cet autre nombre le nombre d, alors il le mesurera par autant d'unités qu'un certain nombre, comme le nombre e, par exemple. Le produit de d par e sera le nombre a. Mais le nombre b est un nombre premier et il mesure le nombre a, il mesure donc l'un des deux nombres d et e. Qu'il mesure le nombre d. Si on multiplie b par c, on a le <nombre> plan a et si on multiplie d par e, on a également le <nombre> plan a. Donc le rapport de b à d est égal au rapport de e à c. Mais le nombre b mesure le nombre d, donc le nombre e mesure le nombre c et il ne lui est pas égal, car s'il lui était égal, le nombre d serait égal au nombre b ; or il n'en était pas ainsi. Le nombre e mesure donc le nombre c et en est différent ; ce qui est absurde et ne se peut pas, car le nombre c a été posé un nombre premier. Donc aucun autre nombre que les nombres b et c ne mesure le <nombre> plan a. Ce qu'il fallait démontrer.

وأما الأعداد المتحابة فلم أجد واحداً منهما ذكرها ولا صرف من عنايته إليها شيئًا. فلما خطر ببالي أمرها واستخرجت لها برهانًا، لم أحب، إذ كان ذكرها هذا الذكر، أن أضيعه بترك إثباته. فأنا مثبت ذلك من بعد أن أقدم مقدمات يحتاج إليها فيه وهي هذه:

– آ – كل عدد مسطح ضلعاه عددان أوّلان فليس يعده عدد آخر غيرهما. ا-١١٠-ظ

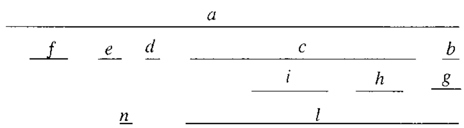
فليكن عدد آ عدداً مسطحًا، وليكن ضلعاه عددين أولين، وهما بَ جَ. فأقول: إنه لا يعده عدد آخر غير عددي بَ جَ.

برهان ذلك: أن الأمر إن لم يكن على ما ذكرنا، فسيعد عدد آ عدد آخر غير عددي بَ جَ. وإذا جعلنا ذلك العدد الآخر عدد دَ، فسيعده بقدر آحاد عدد ما كعدد هَ مثلاً، ويصير الذي يكون من ضرب دَ في هَ عدد آ. وعدد بَ عدد أول، وهو يعد عدد آ، فهو يعد أحد عددي دَ هَ، فليعد عدد دَ منهما. وإذا ضرب بَ في جَ، كان من ذلك مسطح آ؛ وإذا ضرب دَ في هَ، كان من ذلك أيضًا مسطح آ، فنسبة بَ إلى دَ كنسبة هَ إلى جَ. وعدد بَ يعد عدد دَ، فعدد هَ يعد عدد جَ، وهو غير مساوٍ له، لأنه لو كان مساويًا له، لكان عدد دَ مساويًا لعدد بَ؛ ولم يكن كذلك. فعدد هَ يعد عدد جَ، وهو غيره؛ هذا خلف لا يمكن، لأن عدد جَ قد كان جُعل عدداً أولاً، فليس يعد مسطحَ آ عددٌ آخر غير عددي بَ جَ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

5 آ: ناقصة [ب] بداية مخطوطة [ا]، وكتب قبلها «بسم الله الرحمن الرحيم وبالله التوفيق» – 7 فليكن: نجد في الهامش «مثال ذلك: من الأعداد، العدد المسطح الذي سيعده عددان أولان: أقله خمسة عشر وضلعاه أحدهما ثلاثة والآخر خمسة وهما عددان أولان فنقول إن عدد خمسة عشر لا يعده عدد غير عددي ثلاثة وخمسة اللذين هما ضلعاه» [ب] / عدد: ناقصة [ب] – 9 على ما ذكرنا: كذلك [ا] / عدد (الثانية): عددا [ب] – 10 وإذا جعلنا: وليكن [ا] / عدد: ناقصة [ا] – 10-12 فسيعده ... دَ هَ: وليكن يعده بقدر ما في عدد هَ من الآحاد، فضرب عدد هَ في عدد دَ هو عدد آ وعدد بَ أول وهو يعد أحد عددي دَ هَ لأنه يعد مسطح آ [ا] – 13 ضرب (الثانية): كرر بعدها «بَ في جَ كان من ذلك مسطح» [ا] – 15 غير: كتب بعدها «هذا خلف»، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] / مساويًا: مساو [ا] – 17 هذا: وهذا [ا] / لا يمكن: ناقصة [ب] – 18 مسطح: ناقصة [ب] / عدد: عددا [ا، ب].

– **2** – Tout nombre plan dont l'un des côtés est un nombre premier et dont l'autre côté est un nombre composé est mesuré par ses deux côtés, par tout nombre qui mesure son côté composé et par tout nombre produit de son premier côté par tout nombre qui mesure son côté composé ; et il ne sera mesuré par aucun autre nombre que ces nombres.

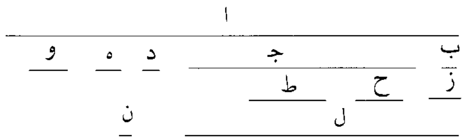
Que le nombre plan soit le nombre a, ses deux côtés les nombres b et c ; soit le côté b un nombre premier et le côté c un nombre composé. Soient tous les autres nombres qui mesurent c les nombres d, e, f successivement, du plus petit au plus grand, et les nombres obtenus à partir du produit du nombre b par les nombres d, e, f successivement, les nombres g, h, i successivement, du plus petit au plus grand. Je dis que le nombre a est mesuré par les nombres b et c, par les nombres d, e, f <successivement> et par les nombres g, h, i <successivement> et qu'aucun nombre autre que ces nombres ne le mesure.



Démonstration : Les nombres b et c sont les côtés du nombre plan a, donc chacun d'eux le mesure par autant d'unités qui sont dans son associé. Quant aux nombres d, e et f, ils mesurent le nombre c qui lui-même mesure le nombre a ; par conséquent ils mesurent le nombre a. Quant [A-111^{r}] aux nombres g, h, i, a successivement, ils sont obtenus à partir du produit du nombre b par les nombres d, e, f, c successivement, chacun [B-171^{v}] d'eux à partir du produit de b par son homologue parmi ces nombres. Donc les rapports des nombres g, h, i, a les uns aux autres sont égaux aux rapports de leurs homologues des nombres d, e, f, c les uns aux autres. Mais chacun des nombres d, e, f mesure le nombre c, donc chacun des nombres g, h, i mesure le nombre a. Donc le nombre a est mesuré par les nombres b, c, par les nombres d, e, f et par les nombres g, h, i.

– ب – كل عدد مسطح يكون أحد ضلعيه عدداً أولاً والضلع الآخر منهما عدداً مركبًا، فإنه يعده ضلعاه وكل عدد يعد ضلعه المركب وكل عدد يجتمع من ضرب ضلعه الأول في كل عدد يعد ضلعه المركب، ولا يعده عدد آخر غير هذه الأعداد.

فليكن العدد المسطح عدد آ، وضلعاه عددي ب جـ، وليكن ضلع ب منهما عدداً أولاً وضلع جـ عدداً مركبًا، وليكن كل عدد آخر يعد جـ أعداد د ه و على تواليها من القلة إلى الكثرة، والأعداد المجتمعة من ضرب عدد ب في أعداد د ه و على تواليها أعداد ز ح ط على تواليها من القلة إلى الكثرة. فأقول: إنه يعد عدد آ عددا ب جـ وأعداد د ه و وأعداد ز ح ط وإنه لا يعده عدد آخر غير هذه الأعداد.



برهان ذلك: أن عددي ب جـ هما ضلعا عدد آ المسطح، فكل واحد منهما يعده بقدر الآحاد التي في صاحبه. وأما أعداد د ه و، فإنها تعد عدد جـ الذي يعد عدد آ، فهي إذاً تعد عدد آ. وأما/ أعداد ز ح ط آ على تواليها، ا-١١١-و فإنها مجتمعة من ضرب عدد ب في أعداد د ه و جـ على تواليها، كل واحد / منها من ضرب ب في نظيره من تلك. فنسب أعداد ز ح ط آ بعضها إلى ب-١٧١-ظ بعض كنسب نظائرها من أعداد د ه و جـ بعضها إلى بعض. لكن كل واحد من أعداد د ه و يعد عدد جـ، فكل واحد من أعداد ز ح ط يعد عدد آ. فعدد آ يعده عددا ب جـ وأعداد د ه و وأعداد ز ح ط.

1 الضلع: ناقصة [ا] – 4 الأعداد: ناقصة [ا] – 5 عددي: عددا [ا] – 6 عدداً (الأولى): عدد [ا] – 7 عدد: ناقصة [ا] – 8 على تواليها: ناقصة [ا] / من القلة إلى الكثرة: ناقصة [ب] – 9 إنه: انها [ب] – 12-13 أعداد ... وأما: مكررة [ا] – 13 إذاً تعد: تعد اذا [ا] – 15 ب: ناقصة [ا] – 18 يعده ... ط: يعد أعداد ب جـ د ه و ز ح ط [ا].

Je dis qu'aucun nombre autre que ces nombres ne le mesure. S'il était possible que d'autres nombres le mesurent, que le nombre ℓ le mesure. Qu'il y ait des unités dans le nombre ℓ autant de fois que le nombre n mesure le nombre a. Si on multiplie le nombre ℓ par le nombre n, on obtient le nombre a et si on multiplie également le nombre b par le nombre c, on obtient le nombre a. Le rapport de n à b est donc égal au rapport de c à ℓ. Mais le nombre b est un nombre premier et il mesure le nombre a. Par conséquent il mesure l'un des nombres n ou ℓ étant donné que si on multiplie l'un d'eux par l'autre, on obtient le nombre a. Si donc il mesure le nombre n, alors le nombre ℓ mesure le nombre c car nous avons dit que b, n, ℓ, c sont proportionnels et que le nombre c ne lui est pas égal. Il est donc l'un des nombres d, e, f, car aucun autre nombre ne mesure le nombre c. Or nous avons posé le nombre ℓ différent de ces nombres, ce qui est absurde.

Si le nombre b mesure le nombre ℓ, alors le nombre n mesure le nombre c ; or il ne lui est pas égal car s'il lui était égal, alors le nombre ℓ serait égal au nombre b, car nous avons montré que le rapport de b à n est égal au rapport de ℓ à c ; n sera donc l'un des nombres d, e, f car aucun nombre autre que ceux-ci ne mesure le nombre c. Mais chacun des nombres d, e, f mesure le nombre c par autant d'unités que celles de l'un des nombres d, e, f car s'il était mesuré par autant d'unités qu'un autre nombre, cet autre nombre aurait mesuré le nombre c. Or nous avons dit qu'aucun nombre autre que les nombres d, e, f ne le mesure. Le nombre n ne mesure le nombre c que par autant d'unités que celles de l'un des nombres d, e, f. Le nombre b également mesure par conséquent le nombre ℓ par autant de ces unités que nous avons mentionnées, car son rapport à celui-ci est égal au rapport de n à c. Si donc on multiplie le nombre b par ce nombre que nous avons mentionné parmi les nombres d, e, f, on obtient le nombre ℓ. Mais le nombre b a été multiplié par chacun des nombres d, e, f et on a obtenu [A-111^{v}] les nombres g, h, i. Le nombre ℓ est donc l'un des nombres g, h, i. Or nous l'avons posé autre ; ce qui est absurde et ne se peut pas. Donc le nombre a n'est mesuré par aucun nombre autre que les nombres b, c, les nombres d, e, f et les nombres g, h, i. Ce qu'il fallait démontrer.

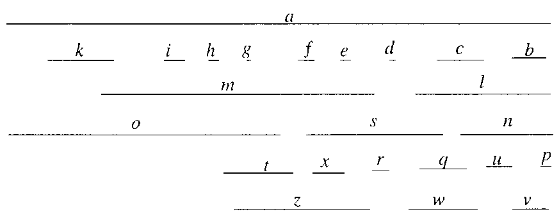
وأقول: إنه لا يعده عدد آخر غير هذه الأعداد. فإن أمكن أن يعده غيرها، فليعده عدد ل، وليكن في عدد ل من الآحاد مثل عدد المرات التي يعد عدد ن عدد ا. فإذا ضرب عدد ل في عدد ن، اجتمع عدد ا؛ وإذا ضرب أيضاً عدد ب في عدد جـ، اجتمع عدد ا. فنسبة ن إلى ب كنسبة جـ إلى ل. وعدد ب عدد أول، وهو يعد عدد ا. فهو إذاً يعد أحد عددي ن ل، إذ كان متى ضرب أحدهما في الآخر، اجتمع عدد ا. فإن كان يعد عدد ن منهما، فإن عدد ل يعد عدد جـ، لأنا قد قلنا إن ب ن ل جـ متناسبة، وإن عدد جـ هو غير مساوٍ له، فهو واحد من أعداد د ه و، لأنه لا يعد عدد جـ عدد آخر غيرها. وقد كنا جعلنا عدد ل غير هذه الأعداد؛ هذا خلف.

وإن كان عدد ب إنما يعد عدد ل، فإن عدد ن يعد عدد جـ، وهو غير مساوٍ له، لأنه لو ساواه، لكان عدد ل سيساوي عدد ب، لأنا قد بينا أن نسبة ب إلى ن كنسبة ل إلى جـ. فيكون ن واحداً من أعداد د ه و، لأنه لا يعد عدد جـ عدد آخر غيرها. وكل واحد من أعداد د ه و إنما يعد عدد جـ بقدر آحاد واحد من أعداد د ه و لأنه لو عدّه بقدر آحاد عدد آخر، لكان ذلك العدد الآخر يعد عدد جـ. وقد كنا قلنا إنه لا يعده عدد آخر غير أعداد د ه و. فعدد ن إنما يعد عدد جـ بقدر آحاد واحد من أعداد د ه و. وعدد ب أيضاً يعد إذاً عدد ل بقدر هذه الآحاد التي ذكرنا، لأن نسبته إليه كنسبة ن إلى جـ. فإذا ضرب عدد ب في ذلك العدد الذي ذكرنا من أعداد د ه و اجتمع عدد ل. ولكن عدد ب قد ضرب في كل واحد من أعداد د ه و، فاجتمعت / أعداد ز ح ط. فعدد ل هو واحد من أعداد ز ح ط. وقد كنا ا-١١١-ظ جعلناه غيرها؛ هذا خلف لا يمكن. فليس يعد عدد ا عدد آخر غير عددي ب جـ وأعداد د ه و وأعداد ز ح ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 وأقول: فأقول [ا] / فإن: فا ان [ب] – 2 ل (الأولى): كـ [ا، ب] – 2-3 مثل ... ن (الأولى): بقدر ما يعد عدد كـ [ا] – 3 ل: كـ [ا، ب] / ن: ل [ا، ب] – 4 عدد (الثالثة): ناقصة [ب] / ن: كـ [ا، ب] – 5 ن: كـ [ا، ب] – 6 ن: ل [ا، ب] – 7 ل: كـ [ا، ب] / قلنا: بينا [ا] / ن: كـ [ا، ب] / متناسبة: متناسبين [ا] / عدد: عدده [ب] عده [ا] – 8 واحد من: احد [ا] – 9 ل: كـ [ا، ب] – 10 ل: كـ [ا، ب] / ن: ل [ا، ب] – 11 ساواه: كان مساوياً له [ا] / ل: كـ [ا، ب] / سيساوي عدد: مساوياً لعدد [ا] – 12 ن: كـ [ا، ب] / ن: ل [ا] / واحداً: واحد [ا] – 15 يعد: سيعد [ب] – 16 ن: ل [ا] / إنما: ناقصة [ب] – 17 إذاً: ناقصة [ا] / ل: كـ [ا، ب] – 18 ن: ل [ا، ب] – 19 ل: كـ [ا، ب] / ب: كـ [ب] / و: ناقصة [ب] – 20 ل: كـ [ا، ب] – 21 لا يمكن: ناقصة [ب] / عدد (الأولى): ناقصة [ب] / آخر: ناقصة [ا] / عددي: دى [ب].

– **3** – Si un nombre plan a pour côtés deux nombres composés, alors les autres nombres qui le mesurent sont : ses deux côtés, tout nombre qui mesure chacun de ses côtés, tout nombre obtenu du produit de chacun de ses côtés par tout nombre qui mesure l'autre côté et tout nombre obtenu du produit de tout nombre qui mesure l'un des côtés par tout nombre qui mesure l'autre côté et il ne sera mesuré par aucun nombre autre que ceux-ci.

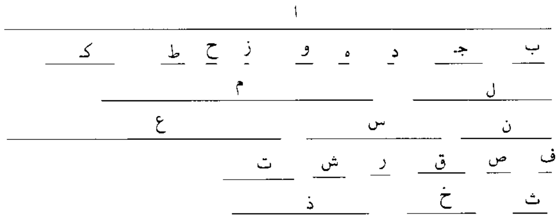
Soient *a* le nombre plan, *b* et *c* ses côtés et qu'ils soient composés. Soient les nombres *d*, *e*, *f* successivement, du plus petit au plus grand, les autres nombres qui mesurent le côté *b* et les nombres *g*, *h*, *i* successivement, du plus petit au plus grand, tous les nombres qui mesurent le côté [B-172r] *c*. Soient les nombres obtenus à partir du produit du nombre *b* par les nombres *g*, *h*, *i* successivement, les nombres *k*, *ℓ*, *m* successivement ; les nombres obtenus à partir du produit du nombre *c* par les nombres *d*, *e*, *f* successivement, les nombres *n*, *s*, *o* successivement ; les nombres obtenus à partir du produit du nombre *d* par les nombres *g*, *h*, *i* successivement, les nombres *p*, *u*, *q* successivement ; les nombres obtenus à partir du produit du nombre *e* par les nombres *g*, *h*, *i* successivement également, les nombres *r*, *x*, *t* successivement et les nombres obtenus à partir du produit du nombre *f* par les nombres *g*, *h*, *i* successivement également, les nombres *v*, *w*, *z* successivement. Je dis que les nombres *b*, *c*, les nombres *d*, *e*, *f*, les nombres *g*, *h*, *i*, les nombres *k*, *ℓ*, *m*, les nombres *n*, *s*, *o*, les nombres *p*, *u*, *q*, les nombres *r*, *x*, *t* et les nombres *v*, *w*, *z* mesurent le nombre *a* et qu'aucun nombre autre que ceux-ci ne le mesure.



Démonstration : Les nombres *b* et *c* sont les deux côtés du nombre plan *a* ; chacun d'eux le mesure par autant d'unités que comprend son associé. Quant à chacun des nombres *d*, *e*, *f*, il mesure le nombre *b*, qui mesure le nombre *a* ; ils mesurent par conséquent le nombre *a* ; de même les nombres

– جـ – كل عدد مسطح يكون ضلعاه عددين مركبين، فإن الذي يعده من الأعداد الأخر هو ضلعاه وكل عدد يعد كل واحد من ضلعيه، وكل عدد يجتمع من ضرب كل واحد من ضلعيه في كل عدد يعد الضلع الآخر منهما، وكل عدد يجتمع من ضرب كل عدد يعد أحد الضلعين في كل عدد يعد الضلع الآخر منهما، ولا يعده عدد آخر غير هذه.

فليكن العدد المسطح آ وضلعاه ب جـ وليكونا مركبين، ولتكن كل الأعداد الأخر التي تعد ضلع ب منهما أعداد د ه و على تواليها من القلة إلى الكثرة، وكل التي تعد ضلع / جـ أعداد ز ح ط على تواليها من القلة إلى الكثرة. ب-١٧٢-و ولتكن الأعداد المجتمعة من ضرب عدد ب في أعداد ز ح ط على الولاء أعداد كـ ل م على الولاء، والمجتمعة من ضرب عدد جـ في أعداد د ه و على الولاء أعداد ن س ع على الولاء، والأعداد المجتمعة من ضرب عدد د في أعداد ز ح ط على الولاء أعداد ف ص ق على الولاء، والمجتمعة من ضرب عدد ه في أعداد ز ح ط أيضًا على الولاء أعداد ر ش ت على الولاء، والمجتمعة من ضرب عدد و في أعداد ز ح ط أيضًا على الولاء أعداد ث خ ذ على الولاء. فأقول: إنه يعد عددَ آ عددا ب جـ وأعداد د ه و وأعداد ز ح ط وأعداد كـ ل م وأعداد ن س ع وأعداد ف ص ق وأعداد ر ش ت وأعداد ث خ ذ، وإنه لا يعده عدد آخر غير هذه الأعداد.



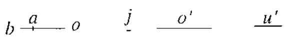
برهان ذلك: أن عددي ب جـ هما ضلعا عدد آ المسطح، فكل واحد منهما يعده بقدر الآحاد التي في صاحبه. وأما كل واحد من أعداد د ه و، فإنها تعد عدد ب الذي يعد عدد آ، فهي إذاً تعد عدد آ؛ وكذلك أيضًا أعداد

1 عددين: ناقصة [ا] – 2 هو: ناقصة [ا] – 2-3 عدد يجتمع من ضرب كل: ناقصة [ب] – 8-9 وكل ... الكثرة: ناقصة [ا] – 10 أعداد كـ ل م على الولاء: ناقصة [ب] / والمجتمعة: والمجتمع [ا] – 16 ن: ق [ب] – 18 برهان: وبرهان [ا] – 20 عدد (الثانية والثالثة): ناقصة [ب] / أيضًا: ناقصة [ا].

g, h, i car ils mesurent le nombre c. Quant aux nombres k, ℓ, m, puisque le produit du nombre b par le nombre c donne le nombre a et que le produit du nombre b également par les nombres g, h, i successivement donne les nombres k, ℓ, m successivement, alors le rapport de chacun des nombres g, h, i au nombre c est égal au rapport de son homologue parmi les nombres k, ℓ, m au nombre a. Mais chacun des nombres g, h, i mesure le nombre c, donc chacun des nombres k, ℓ, m mesure le nombre a. [A-112r] De la même manière également, nous montrons que chacun des nombres n, s, o mesure le nombre a, étant donné que ces nombres sont obtenus successivement à partir du produit du nombre c par chacun des nombres d, e, f successivement. Quant aux nombres p, u, q, étant donné qu'ils sont obtenus successivement à partir du produit du nombre d par les nombres g, h, i successivement et que les nombres k, ℓ, m sont obtenus successivement à partir du produit du nombre b par les nombres g, h, i aussi successivement, alors les rapports des nombres p, u, q aux nombres k, ℓ, m, chacun à son homologue, sont égaux au rapport du nombre d au nombre b. Mais le nombre d mesure le nombre b ; donc chacun des nombres p, u, q mesure son homologue parmi les nombres k, ℓ, m. Mais nous avons montré que les nombres k, ℓ, m mesurent le nombre a ; donc les nombres p, u, q mesurent le nombre a.

Par la même voie, nous montrons que les nombres r, x, t et les nombres v, w, z mesurent le nombre a, car ils sont obtenus à partir du produit des nombres e et f par les nombres g, h, i.

Je dis qu'aucun autre nombre que ces nombres précédemment mentionnés ne mesure le nombre a.



Démonstration : S'il était possible qu'un nombre autre que ceux-ci le mesure, qu'il soit mesuré par le nombre u' et qu'il le mesure par autant d'unités qu'il y en a dans o'. Si donc on multiplie le nombre u' par le nombre o', on aura le nombre a. Mais si on multiplie également le nombre b par le nombre c, [B-172v] on obtient le nombre a. Le rapport de u' à b est donc égal au rapport de c à o'. Or les nombres u', b ou bien sont parmi les nombres dont les uns sont premiers par rapport aux autres, qu'on appelle « premiers entre eux »[1], ou bien ils appartiennent aux nombres qui sont composés entre eux et qui sont appelés « communs ».

[1] On rencontre ce terme dans la traduction d'Isḥāq-Thābit des *Éléments* d'Euclide (Livre VII, déf. 13) :

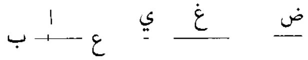
الأعداد المتباينة هي التي إنما يعدها عدًا مشتركًا الواحد فقط.

« Les nombres premiers entre eux sont ceux qui n'ont pour commune mesure que un » (ms. Escorial, ar. 907, fol. 68r).

ز ح ط لأنها تعد عدد جـ. وأما أعداد كـ ل م، فإنه لما كان ضرب عدد ب في عدد جـ، فاجتمع عدد آ، وضرب عدد ب أيضًا في أعداد ز ح ط على الولاء، فاجتمعت أعداد كـ ل م على الولاء، فإن نسبة كل واحد من أعداد ز ح ط إلى عدد جـ كنسبة نظيره من أعداد كـ ل م إلى عدد آ. ولكن كل واحد من أعداد ز ح ط يعد عدد جـ، فكل واحد من أعداد كـ ل م يعد عدد آ./ وبمثل ذلك أيضًا نبين أن كل واحد من أعداد ن س ع يعد عدد آ، إذ ا-١١٢-و كانت هذه الأعداد على تواليها مجتمعة من ضرب عدد جـ في كل واحد من أعداد د ه و على تواليها. وأما أعداد ف ص ق فإنها لما كانت على تواليها مجتمعة من ضرب عدد د في أعداد ز ح ط على تواليها وكانت أعداد كـ ل م على تواليها مجتمعة من ضرب عدد ب في أعداد ز ح ط أيضًا على تواليها، فإن نسب أعداد ف ص ق إلى أعداد كـ ل م كل واحد إلى نظيره، تكون كنسبة عدد د إلى عدد ب. ولكن عدد د يعد عدد ب، فكل واحد من أعداد ف ص ق يعد نظيره من أعداد كـ ل م. ولكن أعداد كـ ل م قد بينا أنها تعد عدد آ، فأعداد ف ص ق تعد عدد آ.

وبمثل هذا المسلك نبين أن أعداد ر ش ت وأعداد ث خ ذ تعد عدد آ لأنها مجتمعة من ضرب عددي ه و في أعداد ز ح ط.

فأقول: إنه لا يعد عدد آ عدد آخر غير هذه الأعداد التي تقدم ذكرها.



وبرهان ذلك: أنه إن أمكن أن يعده عدد آخر غيرها، فليعده عدد ض وليعده بقدر الآحاد التي في غ. فإذا ضرب عدد ض في عدد غ، اجتمع عدد آ. ولكن عدد ب أيضًا إذا ضرب في عدد جـ / اجتمع عدد آ. فنسبة ض إلى ب-١٧٢-ظ ب كنسبة جـ إلى غ. وعددا ض ب إما أن يكونا من الأعداد التي بعضها أول عند بعض، وهي التي تسمى المتباينة، وأما أن يكونا من الأعداد التي بعضها مركب عند بعض، وهي التي تسمى المشتركة.

1 ضرب عدد ب: عدد ب قد ضرب [ا] – 3 فإن نسبة: فنسبة [ا] – 5 عدد (الثانية): عد [ب] – 6 أيضًا: ناقصة [ا] – 7 جـ: ب [ب] / كل واحد: واحد واحد [ب] – 8 فإنها: فانه [ا، ب] – 11 أعداد (الأولى): ناقصة [ا] – 12 د (الأولى): أثبتها في الهامش مع الإشارة [ب] – 15 ت: ث [ب] / عدد: عد [ب] – 17 عدد (الأولى): عد [ب] / هذه الأعداد: ناقصة [ا] / تقدم: قدم [ا] – 18 وبرهان: برهان [ا] / ض: ص [ب]، وكذلك فيما يلي – 19 غ: ع [ا، ب]، ولن نشير إليها فيما بعد – 21 الأعداد: اعداد [ا].

S'ils sont parmi les nombres qui sont premiers entre eux, alors ils sont les deux plus petits nombres selon leur rapport. Mais les plus petits nombres selon un certain rapport sont ceux qui mesurent tout couple de nombres selon ce rapport, le plus petit au plus petit et le plus grand au plus grand. Le nombre u' mesure donc le nombre c sans lui être égal ; il est par conséquent l'un des nombres g, h, i car aucun autre nombre que g, h, i ne mesure c. Or nous avons posé le nombre u' différent de chacun de ces nombres, ce qui est absurde et ne se peut pas.

Mais si les nombres u', b sont parmi les nombres composés entre eux, alors ou bien l'un d'eux mesure son associé, ou bien ils ont tous les deux un autre nombre commun qui les mesure. Si l'un d'eux mesure son associé, alors ou bien u' est celui qui mesure b, ou bien b est celui qui mesure u'.

Si c'est u' qui mesure b et qu'il en est différent, alors il est l'un des nombres d, e, f. Or nous avons dit qu'il n'en est pas ainsi et que c'est absurde.

Mais si c'est b qui mesure u', alors il mesure c et il est différent de lui étant donné que u' est différent [A-112v] de b ; par conséquent le nombre o' est l'un des nombres g, h, i, car aucun autre nombre que ceux-ci ne mesure c. Soit par exemple le nombre g ; mais le nombre g mesure le nombre c par autant d'unités que comporte l'un des nombres g, h, i, car s'il le mesurait par autant d'unités qu'un autre nombre, alors ce nombre mesurerait le nombre c, ce qui n'est pas possible car nous avons dit qu'aucun autre nombre que les nombres g, h, i ne le mesure. Le nombre o' par conséquent mesure le nombre c par autant d'unités que comporte l'un des nombres g, h, i. Qu'il le mesure par exemple par les unités de i. Le rapport de l'unité à i est donc égal au rapport de o' à c. Mais le rapport de o' à c est égal au rapport de b à u', donc l'unité mesure le nombre i comme le nombre b mesure le nombre u'. Si donc on multiplie le nombre b par le nombre i, on obtient le nombre u'. Mais si on multiplie b par i, on a l'un des nombres n, s, o ; donc le nombre u' est l'un des nombres n, s, o. Or nous avons dit qu'il n'en est pas ainsi et ceci est aussi absurde.

فإن كانا من الأعداد التي بعضها أول عند بعض، فهما أقل عددين على نسبتهما. وأقل الأعداد ‹التي› على نسبة ما فهما يعدان كل عددين على تلك النسبة الأقل للأقل والأكثر للأكثر. فعدد ض يعد عدد جـ، وليس هو مثله، فهو إذاً واحد من أعداد ز ح ط، لأنه لا يعد جـ عدد آخر غير ز ح ط. وقد كنا جعلنا عدد ض غير واحد من هذه الأعداد؛ هذا خلف لا يمكن.

وأما إن كانا عددا ض ب من الأعداد المركبة بعضها عند بعض، فإنه إما أن يكون أحدهما يعد صاحبه، وإما أن يكون لهما جميعاً عدد آخر مشترك لهما يعدهما. وإن كان أحدهما يعد صاحبه، فإما أن يكون ض هو الذي يعد ب وإما أن يكون ب هو الذي يعد ض.

فإن كان ض هو الذي يعد ب، وهو غيره، فهو واحد من أعداد د ه و، وقد كنا قلنا إنه ليس كذلك، هذا خلف.

وإن كان ب هو الذي يعد ض، فهو يعد جـ وهو غيره إذ كان ض غير / ب، فعدد غ إذاً هو واحد من أعداد ز ح ط لأنه لا يعد جـ عدد آخر غيرها. ا-١١٢-ظ
فليكن مثلاً عدد ز منها؛ وعدد ز منها إنما يعد عدد جـ بقدر آحاد واحد من أعداد ز ح ط، لأنه لو عدّه بقدر آحاد عدد آخر، لكان ذلك الآخر سيعد[ه] عدد جـ، وذلك غير ممكن، لأنا كنا قلنا إنه لا يعده عدد آخر غير أعداد ز ح ط، فعدد غ إذاً إنما يعد عدد جـ بقدر آحاد واحد من أعداد ز ح ط. فليعده مثلاً بقدر آحاد ط. فنسبة الواحد إلى ط كنسبة غ إلى جـ؛ ونسبة غ إلى جـ كنسبة ب إلى ض. فالواحد يعد عدد ط مثل ما يعد عدد ب عدد ض. فإذا ضرب عدد ب في عدد ط، اجتمع عدد ض. ولكن ب إذا ضرب في ط، اجتمع واحد من أعداد ن س ع، فعدد ض هو واحد من أعداد ن س ع. وقد كنا قلنا إنه ليس كذلك؛ وهذا أيضًا خلف.

2-3 فهما ... للأكثر: فهي تعد الأعداد التي على نسبتها الأقل للأقل والأكثر للأكثر بالسواء [ا] – 4 عدد آخر: عددا [ب] – 5 واحد من: ناقصة [ب] / لا يمكن: ناقصة [ب] – 6 فإنه إما: واما [ا] – 8 وإن: فان [ا] – 8-10 فإما أن ... وهو: فإن ض الذي يعد ب أو ب يكون الذي يعد ض فإن كان ض هو الذي يعد ب فهو [ا] – 11 هذا خلف: ناقصة [ب] – 12 فهو ... ض: ناقصة [ب] – 14 منها: ناقصة [ب] – 15-16 لو ... جـ: لو لم يكن كذلك وعدة بقدر آحاد عدد آخر لعد ذلك العدد عدد جـ بقدر آحاد عدد ز [ا] – 16 يعده: يعد [ا] – 19 عدد (الأولى): ناقصة [ب] / ب: ي [ا] – 20 عدد (الأولى والثانية): ناقصة [ب] / ب (الأولى والثانية): ي [ا] – 21 هو: ناقصة [ا] – 22 وهذا: هذا [ا] / أيضًا: ناقصة [ا].

Mais si aucun des nombres u', b ne mesure son associé et qu'ils ont tous les deux un autre nombre commun qui les mesure, alors nous posons le plus grand nombre qui les mesure le nombre j ; qu'il mesure le nombre b par autant d'unités que comporte le nombre $\overline{oa}$ et qu'il mesure le nombre u' par autant d'unités que comporte le nombre $\overline{ob}$. De même, $\overline{oa}$ mesure le nombre b par autant d'unités que j et $\overline{ob}$ mesure aussi le nombre u' par autant d'unités que j. Donc, quand on multiplie le nombre j par les deux nombres $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, on obtient les deux nombres b, u'. Donc le rapport de $\overline{oa}$ à $\overline{ob}$ est égal au rapport de b à u'. Mais les deux nombres $\overline{oa}$, $\overline{ob}$ sont les plus petits nombres selon leur rapport, c'est-à-dire selon le rapport de b à u', car s'il était possible qu'il y ait deux nombres selon leur rapport plus petits qu'eux, ils seraient mesurés tous les deux par autant d'unités qu'un nombre plus grand que le nombre j et ce nombre les aurait mesurés. Or nous avons posé le nombre j le plus grand nombre [B-173[r]] qui les mesure, ce qui est absurde. Donc les deux nombres $\overline{oa}$, $\overline{ob}$ sont les deux plus petits nombres selon leur rapport. Mais le rapport de l'un, c'est-à-dire $\overline{oa}$, à l'autre, c'est-à-dire $\overline{ob}$, est égal au rapport de b à u'. Or nous avons montré que le rapport de b à u' est égal au rapport de o' à c. Donc le rapport de $\overline{oa}$ à $\overline{ob}$ est égal au rapport de o' à c. Mais $\overline{oa}$, $\overline{ob}$ sont les plus petits nombres selon leur rapport, donc ils mesurent les nombres o', c plus qu'une fois, ou ils sont égaux chacun à son homologue. Si le nombre $\overline{oa}$ est égal au nombre o' et si le nombre $\overline{ob}$ est égal au nombre c et si on multiplie le nombre j par le nombre $\overline{ob}$, on obtient le nombre u' car il est mesuré par autant d'unités que comporte le nombre $\overline{ob}$, alors, si on multiplie le nombre b par le nombre c, on obtient [A-113[r]] le nombre u'. Mais le nombre j est égal à l'un des nombres d, e, f car il mesure le nombre b, lequel n'est mesuré par aucun autre nombre que ces nombres, et il ne lui est pas égal. Le nombre u' par conséquent est obtenu à partir du produit de l'un des nombres d, e, f par le nombre c. Mais tous les nombres obtenus à partir des produits des nombres d, e, f par le nombre c sont les nombres k, ℓ, m. Le nombre u' est par conséquent l'un des nombres k, l, m ; or nous avons dit qu'il n'en est pas ainsi, ce qui est absurde.

وأما إن كان لا يعد واحد من عددي ض ب صاحبه، ولكن لهما جميعًا عدد آخر مشترك يعدهما جميعًا، فإنا نجعل أكثر عدد يعدهما عدد ي، وليعد عدد ب منهما بقدر آحاد عدد عا، وليعد عدد ض منهما بقدر آحاد عدد عب. وكذلك أيضًا يعد عا عدد ب بقدر آحاد ي وعب يعد أيضًا عدد ض بقدر آحاد ي، فيكون متى ضرب عدد ي في عددي عا عب، اجتمع عددا ب ض. فنسبة عا إلى عب كنسبة ب إلى ض. وعددا عا عب أقل عددين على نسبتهما، أعني على نسبة ب إلى ض، لأنه لو أمكن أن يكون عددان على نسبتهما أقل منهما، لعداهما جميعًا بقدر آحاد عدد أكثر من عدد ي، وكان ذلك العدد يعدهما. وقد كنا جعلنا عدد ي أكثر عدد / يعدهما؛ هذا خلف. ب-١٧٣-و فعددا عا عب أقل عددين على نسبتهما. ونسبة أحدهما، وهو عا، إلى الآخر، وهو عب، كنسبة ب إلى ض. وقد كنا بينا أن نسبة ب إلى ض كنسبة غ إلى جـ. فنسبة عا إلى عب كنسبة غ إلى جـ. ولكن عا عب أقل الأعداد على نسبتهما، فهما يعدان عددي غ جـ أكثر من مرة أو يساويانهما، كل واحد نظيره. فإن كان عدد عا يساوي عدد غ، ويساوي عدد عب عدد جـ، وعدد ي إذا ضرب في عدد عب، اجتمع عدد ض لأنه قد كان يعده بقدر آحاد عدد عب، فإن عدد ب إذا ضرب في عدد جـ اجتمع / عدد ض. ولكن ا-١١٣-و عدد ي مثل واحد من أعداد د ه و، لأنه يعد عدد ب الذي لا يعده عدد آخر غير هذه الأعداد، وهو غير مساوٍ له. فعدد ض إذاً يجتمع من ضرب واحد من أعداد د ه و في عدد جـ. وكل الأعداد المجتمعة من ضرب أعداد د ه و في عدد جـ هي أعداد كـ ل م. فعدد ض إذاً هو واحد من أعداد كـ ل م. وقد كنا قلنا إنه ليس كذلك؛ هذا خلف.

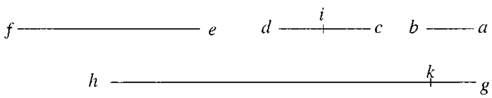
1 ب: ي [ا] – 2 جميعًا: ناقصة [ا] – 3 عدد (الثانية): ناقصة [ا] – 4 عدد (الأولى): ناقصة [ا] – 4-5 وكذلك ... آحاد ي: ناقصة [ب] – 5 ي (الأولى والثانية): ب [ا] / عب: وع ب [ا] – 6 ب ض: ض ب [ا، ب] / ب: د [ب] / عب: وع ب [ا] – 7 أعني ... ض: ناقصة [ب] / عددان: عددين اخرين [ا] – 8-9 لعداهما ... يعدهما: أعني عددي عا وعب يعد كل واحد منهما قرينه من عددي ض ب بقدر آحاد عدد أكثر من عدد ب وكان العدد أيضًا يعدهما بقدر آحاد ذلك العددين [ا] – 9 ي: ب [ا] – 10 فعددا: يعدا [ب] / عب: وع ب [ا] – 10-11 نسبتهما ... عب: ناقصة [ا] – 11 كنسبة: نسبة [ا] / وقد كنا: لكن قد [ا] – 12 ولكن: وعددا [ا] / عب: وع ب [ا] / الأعداد: عددين [ا] – 13-14 عددي ... نظيره: كل عددين على نسبتهما الأقل للأقل والأكثر للأكثر مرة أو أكثر من مرة [ا] – 14 عدد (الأولى والثانية): ناقصة [ا] / عب: ب [ب] – 15 ي: ب [ا] – 16 عب ... اجتمع عدد: ناقصة [ب] – 17 لأنه: لا [ب] – 18 غير هذه ... له: غير أعداد د ه و وهي غير مساوية لها [ا] – 19 د (الثانية): ذ [ب].

Si les nombres $\overline{oa}$, $\overline{ob}$ ne sont pas égaux aux nombres o', c mais les mesurent plus qu'une seule fois, alors le nombre $\overline{ob}$ est celui qui mesure le nombre c. Il est par conséquent l'un des nombres g, h, i car aucun autre nombre que ces nombres ne mesure le nombre c. Or nous avons montré que le nombre j est égal à l'un des nombres d, e, f. Ce qu'on obtient du produit du nombre j par le nombre $\overline{ob}$ est donc ce que l'on obtient du produit de l'un des nombres d, e, f par l'un des nombres g, h, i. Mais ce qu'on obtient à partir du produit du nombre j par le nombre $\overline{ob}$ est le nombre u', car j mesure u' par autant d'unités que comporte le nombre $\overline{ob}$. Le nombre u' est par conséquent égal au produit de l'un des nombres d, e, f par l'un des nombres g, h, i. Mais tous les nombres obtenus à partir du produit de l'un des nombres d, e, f par l'un des nombres g, h, i sont les nombres p, u, q, les nombres r, x, t et les nombres v, w, z. Par conséquent le nombre u' est l'un de ces nombres. Or nous avons dit qu'il n'en est pas ainsi ; ceci est également absurde et ne se peut pas.

Aucun nombre autre que ceux que nous avons mentionnés ne mesure donc le nombre a. Ce qu'il fallait démontrer. [B-173v]

– **4** – Soient des nombres successifs à volonté selon le rapport du double. Alors le plus grand de ces nombres excède la somme des nombres restants du plus petit d'entre eux. Et de même si le plus petit est l'unité.

Soient des nombres successifs selon le rapport du double, les nombres $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$, $\overline{gh}$. Que le plus petit soit le nombre $\overline{ab}$ et le plus grand le nombre $\overline{gh}$. Je dis que le nombre $\overline{gh}$ excède [A-113v] la somme des nombres $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ du nombre $\overline{ab}$; de même si $\overline{ab}$ est l'unité.



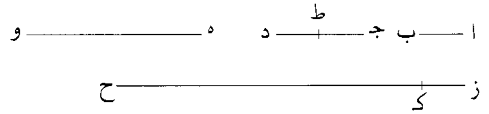
Démonstration : Si nous retranchons du nombre $\overline{cd}$, qui est le deuxième, un nombre égal au premier, qui est $\overline{ab}$, et si nous posons le nombre retranché $\overline{ci}$, si nous retranchons également du dernier de ces nombres, qui est $\overline{gh}$, un nombre égal aussi au premier, soit $\overline{ab}$, et si nous posons le nombre retranché $\overline{gk}$, alors le rapport du reste du deuxième, qui

وأما إن كان عددا عا عب لا يساويان عددي غ جـ وإنما يعدانهما أكثر من مرة واحدة، فإن عدد عب منهما هو الذي يعد عدد جـ، فهو إذاً واحد من أعداد ز ح ط، لأنه لا يعد عدد جـ عدد آخر غير هذه الأعداد. وعدد ي قد بينا أنه مثل واحد من أعداد د ه و، فالذي يكون من ضرب عدد ي في عدد عب هو الذي يكون من ضرب واحد من أعداد د ه و في واحد من أعداد ز ح ط. ولكن الذي يكون من ضرب عدد ي في عدد عب هو عدد ض، لأن ي يعد ض بقدر آحاد عدد عب. فعدد ض إذاً هو مثل المجتمع من ضرب واحد من أعداد د ه و في واحد من أعداد ز ح ط، وكل الأعداد المجتمعة من ضرب واحد من أعداد د ه و في واحد من أعداد ز ح ط هي أعداد ف ص ق وأعداد ر ش ت وأعداد ث خ ذ. فعدد ض إذاً هو واحد من هذه الأعداد. وقد كنا قلنا إنه ليس كذلك؛ وهذا أيضًا خلف، لا يمكن.

فليس يعد آ عدد آخر غير التي تقدم ذكرها؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

– د – كل أعداد متوالية على نسبة الضعف، كم كانت، فإن العدد الأكثر منها يزيد على جملة الأعداد الباقية مجموعة مثل أقلها، وكذلك إن كان أقلها الواحد. ب-١٧٣-ظ

فلتكن أعداد متوالية على نسبة الضعف وهي أعداد ا ب جـ د ه و ز ح، وليكن أقلها عدد ا ب وأكثرها عدد ز ح؛ فأقول: إن عدد ز ح يزيد / على جملة أعداد ا ب جـ د ه و مجموعة مثل عدد ا ب، وكذلك إن كان ا ب هو الواحد. ا-١١٣-ظ

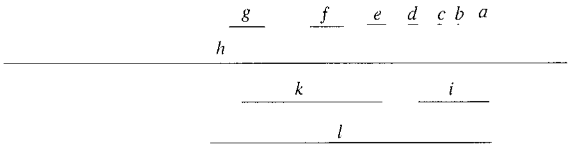


برهان ذلك: أنا إذا نقصنا من عدد جـ د، وهو الثاني، مثل الأول وهو ا ب، وجعلنا المنقوص جـ ط، ونقصنا أيضًا من الأخير منها وهو ز ح مثل الأول أيضًا، وهو ا ب، وجعلنا المنقوص ز ك، كانت نسبة الباقي من الثاني،

1 وأما: فأما [ا] / عب: وع ب [ا] – 2 واحدة: ناقصة [ب] / إذاً: ناقصة [ا] – 3 عدد جـ: ناقصة [ب] / ي: ب [ا] – 6 ي: عدد ي [ا] – 7 عدد: ناقصة [ا] / إذاً: ناقصة [ب] – 8 وكل الأعداد المجتمعة: لكن المجتمع [ا] – 11 قلنا: أثبتها في الهامش [ب] / لا يمكن: ناقصة [ب] – 15 الواحد: الوحده [ا] – 16 أعداد: ناقصة [ب] – 18 ه و: ه ز [ب] – 20 وهو: الذي هو [ا] – 21-22 جـ ط ... المنقوص: ناقصة [ا].

est $\overline{id}$, au premier, qui est $\overline{ab}$, est égal au rapport du reste du dernier, qui est $\overline{kh}$, à la somme des nombres $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$. Mais le reste du deuxième, qui est $\overline{id}$, est égal au premier, qui est $\overline{ab}$, car le deuxième est le double du premier. Alors le reste de $\overline{gh}$, qui est $\overline{kh}$, est par conséquent égal à la somme de $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$. Mais $\overline{gk}$ est égal à $\overline{ab}$, donc $\overline{gh}$ tout entier excède la somme des nombres $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$, de $\overline{ab}$; de même si $\overline{ab}$ est l'unité. Ce qu'il fallait démontrer.

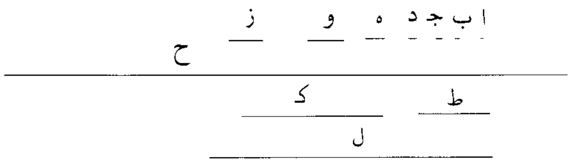
– **5** – Si on additionne des nombres successifs selon le rapport du double à partir de l'unité, y compris l'unité, de sorte qu'on obtienne une certaine somme ; si ensuite on multiplie le plus grand des nombres qu'on a additionnés par un nombre premier différent de deux, alors le nombre engendré à partir de ce nombre, si le nombre premier est égal à la somme de ceux qui ont été additionnés, est un nombre parfait ; et si le nombre premier est plus petit que la somme de ceux additionnés, alors c'est un nombre abondant ; et si le nombre premier est plus grand que la somme de ceux additionnés, alors c'est un nombre déficient. Son excédent, s'il est abondant, ou son défaut, s'il est déficient, est égal à la différence entre la somme de ceux additionnés et ce nombre premier.



Soient les nombres successifs selon le rapport du double à partir de l'unité, y compris l'unité, qui sont a, b, c, d, e, dont la somme est le nombre f. Soit le nombre g un nombre premier différent de deux. Soit le produit du nombre g par le nombre e, qui est le plus grand des nombres additionnés, le nombre h. Je dis que, si les deux nombres f et g sont égaux, alors le nombre h est un nombre parfait ; et si le nombre g est plus petit que le nombre f, alors le nombre h est un nombre abondant ; et si le nombre g est plus grand

وهو ط د، إلى الأول، وهو ا ب، كنسبة الباقي من الأخير، وهو كـ ح، إلى جملة أعداد ا ب جـ د ه و مجموعة. ولكن الباقي من الثاني، وهو ط د، مثل الأول، وهو ا ب، لأن الثاني مثلا الأول؛ فالباقي إذاً من ز ح، وهو كـ ح، مساوٍ لجملة ا ب جـ د ه و مجموعة. ولكن ز كـ قد كان مثل ا ب، فيكون جميع ز ح زائداً على جملة أعداد ا ب جـ د ه و مجموعة مثل ا ب؛ وكذلك إن كان ا ب هو الواحد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– ه – إذا جمعت أعداد متوالية على نسبة الضعف من الواحد مع الواحد، فكانت منها جملة ما، ثم ضرب في العدد الأكثر من الأعداد التي جمعت عدد أوّل غير الاثنين، فإن العدد المتولد من ذلك العدد، إن كان العدد الأوّل مساوياً للجملة التي جمعت، عددٌ تامٌ، وإن كان العدد الأوّل أقل من الجملة التي جمعت، فهو عدد زائد؛ وإن كان العدد الأول أكثر من الجملة التي جمعت، فهو عدد ناقص؛ ومبلغ زيادته إن كان زائداً أو نقصانه إن كان ناقصًا مثل فضل ما بين تلك الجملة التي جمعت وذلك العدد الأول.



فلتكن أعداد متوالية على نسبة الضعف من الواحد، والواحد معها، وهي ا ب جـ د ه، وجملتها عدد و. وليكن عدد ز عدداً أولاً غير الاثنين. وليكن المجتمع من ضرب عدد ز في عدد ه، الذي هو أكثر الأعداد التي جمعت، عدد ح؛ فأقول: إنه إن كان عددا و ز متساويين، فإن عدد ح عدد تام؛ وإن كان عدد ز أقل من عدد و، فإن عدد ح عدد زائد؛ وإن كان عدد ز أكثر من

3 وهو: الذي هو [ا] / ز ح وهو: الاحر الذي هو [ا] – 5 زائداً: يزيد [ا] / أعداد: ناقصة [ب] – 7 مع الواحد: ناقصة [ب] – 8 فكانت: فكان [ب] / الأعداد: ناقصة [ب] – 9 العدد (الثانية): ناقصة [ا] – 10 التي: الذي [ب] / العدد: ناقصة [ب] – 13 ما بين: ناقصة [ا] – 14 من: مطموسة [ا] – 15 عدداً: عدد [ا] – 16 عدد (الأولى): ناقصة [ب] / الذي هو: التي هي [ب] – 17 عددا: عدد [ا] / متساويين: متساويان [ب] / وإن: فإن [ا] – 18 و: ق [ب].

que le nombre f, alors le nombre h est un nombre déficient ; et son excédent s'il est abondant, ou son défaut s'il est déficient, est égal à la différence entre les deux nombres f et g.

Démonstration : Posons les nombres obtenus à partir du produit du nombre g par chacun des nombres b, c, d, e, les nombres i, k, ℓ, h. Alors le nombre h est un nombre plan dont les côtés sont les nombres e et g, le nombre e étant un nombre composé [A-114r] et le nombre g un nombre premier ; [B-174r] par conséquent le nombre h est mesuré par les nombres e, g, par tout nombre qui mesure e et par tout nombre obtenu du produit du nombre g par tout nombre qui mesure e et il n'est mesuré par aucun autre nombre. Quant aux nombres qui mesurent e, ce sont les nombres b, c, d, et aucun autre nombre ne le mesure car les nombres b, c, d, e sont successifs suivant un même rapport à partir de l'unité et celui d'entre eux qui succède à l'unité est un nombre premier, donc aucun autre nombre que les nombres suivant ce rapport ne mesure le plus grand. Quant aux nombres obtenus à partir du produit du nombre g par chacun des autres nombres qui mesurent e, ce sont les nombres i, k, ℓ. Donc le nombre h est mesuré par les nombres e, g, et par tout nombre qui le mesure parmi les autres nombres, qui sont les nombres b, c, d et par tous les nombres obtenus à partir des produits du nombre g par tous les nombres qui mesurent e, qui sont les nombres i, k, ℓ. Aucun autre nombre, excepté ces nombres que nous avons mentionnés, ne mesure le nombre h et l'unité le mesure ; ce sont par conséquent, ainsi que l'unité, toutes les parties du nombre h et aucun d'eux n'est égal à l'un de ses associés, donc répété et repris. En effet, on a multiplié le nombre g par les nombres b, c, d et on a obtenu les nombres i, k, ℓ. Le produit de g par a est le nombre g car a est l'unité. Donc les rapports des nombres g, i, k, ℓ les uns aux autres sont égaux aux rapports de a, b, c, d les uns aux autres. Ils sont par conséquent successifs suivant le rapport du double. Aucun des nombres g, i, k, ℓ n'est donc égal à l'un de ses associés et aucun des <nombres> a, b, c, d, e n'est égal à l'un de ses associés.

Je dis également qu'aucun des nombres g, i, k, ℓ n'est égal à aucun des nombres a, b, c, d, e, car si l'un de ces nombres était égal à l'un de ces nombres-ci, alors, ou bien il serait égal à son homologue dans le rang, ou bien il précéderait son homologue ou bien il lui succéderait.

Si l'un d'eux, comme le nombre k, est égal à son homologue, qui est le nombre c, alors on montre, par le rapport d'égalité, que le rapport de k à g est égal au rapport de c à a. Mais k est égal à c, il s'ensuit nécessairement

عدد و، فإن عدد ح عدد ناقص؛ ومبلغ زيادته إن كان زائداً أو نقصانه إن كان ناقصاً مثل فضل ما بين عددي و ز.

برهان ذلك: أنا إن جعلنا الأعداد المجتمعة من ضرب عدد ز في كل واحد من أعداد ب جـ د ⟨ه⟩ أعداد ط كـ ل ⟨ح⟩، فإن عدد ح عدد مسطح وضلعاه عددا ه ز اللذان عدد ه منهما عدد مركب / ا-١١٤-و وعدد ز منهما عدد أول؛ / ب-١٧٤-و فعدد ح إذاً يعدّه عددا ه ز وكل عدد يعد ه وكل عدد مجتمع من ضرب عدد ز في كل عدد يعد ه، ولا يعده عدد آخر غير هذه. فأما كل عدد يعد ه، فهو ⟨من⟩ أعداد ب جـ د، لا يعده عدد آخر غيرها، لأن أعداد ب جـ د ه متوالية على نسبة واحدة من الواحد والذي يلي الواحد منها عدد أوّل، فليس يعد أكثرها إلا عدد من أعداد هذه النسبة. وأما الأعداد المجتمعة من ضرب عدد ز في كل عدد يعد ه من الأعداد الأخر، فهي أعداد ط كـ ل. فعدد ح يعده عددا ه ز وكل عدد يعده من الأعداد الأخر، وهي أعداد ب جـ د وكل الأعداد التي تجتمع من ضرب عدد ز في كل الأعداد التي تعد ه وهي أعداد ط كـ ل. ولا يعد عدد ح عدد آخر غير هذه الأعداد التي ذكرنا ويعده الواحد، فهي إذاً والواحد كل جزء لعدد ح وليس منها واحد يساوي صاحبه، فيكون مكرراً معاداً. وذلك أن عدد ز ضرب في أعداد ب جـ د، فاجتمعت أعداد ط كـ ل؛ والذي يكون من ضرب ز في ا هو عدد ز لأن ا هو الواحد. فنسب أعداد ز ط كـ ل بعضها إلى بعض كنسب ا ب جـ د بعضها إلى بعض، فهي إذاً متوالية على نسبة الضعف. فليس من أعداد ز ط كـ ل شيء يساوي صاحبه ولا من ا ب جـ د ه شيء يساوي صاحبه.

وأقول أيضًا: إنه ليس من أعداد ز ط كـ ل عدد يساوي واحداً من أعداد ا ب جـ د ه، لأنه إن ساوى عدد من تلك واحداً من هذه، فإنه إما يساوي نظيره في المرتبة، وإما ما هو قبل نظيره وإما ما هو بعد نظيره.

فإن ساوى شيء منها مثل عدد كـ نظيره، وهو عدد جـ، فإنه يتبين أن بنسبة المساواة تكون نسبة كـ إلى ز كنسبة جـ إلى ا. ولكن كـ مثل جـ.

1 و: د [ب] – 2 مثل فضل: ناقصة [ب] – 6 يعد ه: يعدها [ا] – 7 يعد ه: يعدها [ا] / فأما: واما [ا] – 8 غيرها: غير ه [ا] – 11 ه: ها [ا] / الأخر: كتب بعدها «وهي أعداد ب جـ» [ا] – 12 يعده: يعدها [ا] – 13 الأعداد (الثانية): ناقصة [ب] / يعد ه: يعدها [ا] – 14 عدد (الأولى): ناقصة [ب] – 17 هو (الثانية): ناقصة [ب] – 18 فنسب: فنسبة [ا] / كنسب: كنسبة [ا] – 19 إذاً: ناقصة [ا] – 20 ه: ناقصة [ا] – 22 أعداد: ناقصة [ب] / ه: ناقصة [ا] / ساوى: ساوا [ا]، وكذلك فيما يلي / عدد: عدا [ب] / واحداً: عدد [ا] / اما: انما [ا] – 23 قبل ... ما هو: ناقصة [ب] – 24 شيء منها: ناقصة [ب].

que g est égal à a, qui est l'unité, ce qui est impossible car le nombre g est différent de l'unité par hypothèse.

Si l'un des nombres g, i, k, ℓ est égal à celui qui précède son homologue d'entre les <nombres> a, b, c, d, par exemple si le nombre k est égal au nombre b, alors la multiplicité de k, i, g sera plus grande que la multiplicité de b, a. Si donc nous prenons de g, i, k ce dont la multiplicité est égale à celle de a, b – soit k, i –, le rapport de k à i sera égal au rapport de b à a. Mais le nombre k est égal au nombre b, donc le nombre i est égal au nombre a, qui est l'unité, ce qui est impossible [A-114v] car le nombre i est différent de l'unité.

Si l'un des nombres g, i, k, ℓ est égal à celui qui suit son homologue d'entre les nombres a, b, c, d, e, par exemple si le nombre k est égal au nombre d, alors la multiplicité de d, c, b, a sera plus grande que la multiplicité des nombres k, i, g. Si donc nous prenons de d, c, b, a ce dont la multiplicité est égale à la multiplicité des nombres k, i, g, soit les nombres d, c, b – il est clair qu'ils sont suivant le même rapport – alors, par le rapport d'égalité, le rapport de k à g est égal au rapport de d à l'un [B-174v] des nombres d, b, c, qui est ici le nombre b. Mais k est égal à d, donc g est égal à l'un des nombres b, c, d. Mais chacun des nombres b, c, d est ou bien un nombre composé ou bien le nombre deux. Le nombre g est par conséquent un nombre composé ou est le nombre deux. Or nous avons posé pour condition qu'il n'en est pas ainsi, ce qui est absurde. Aucun des nombres g, i, k, ℓ n'est donc égal à aucun des nombres a, b, c, d, e. Par conséquent aucun des nombres a, b, c, d, e et des nombres g, i, k, ℓ n'est égal à un de ses associés.

De même, si on multiplie le nombre g par le nombre e, on obtient le nombre h ; mais le nombre g a été également multiplié par chacun des nombres a, b, c, d et on a obtenu les nombres g, i, k, ℓ. Donc les rapports des nombres g, i, k, ℓ, h les uns aux autres sont égaux aux rapports des nombres a, b, c, d, e les uns aux autres. Mais a, b, c, d, e sont successifs suivant le rapport du double, les nombres g, i, k, ℓ, h, sont par conséquent successifs suivant le rapport du double. Si on additionne les nombres g, i, k, ℓ, la somme sera moindre que le nombre h d'un nombre égal à g ; mais la somme de a, b, c, d, e est le nombre f. Donc les nombres g, i, k, ℓ et les nombres b, c, d, e et a, qui est l'unité, avec eux, si on les additionne tous,

فيجب من ذلك أن يكون ز مثل ا، الذي هو الواحد؛ وهذا غير ممكن لأن عدد ز غير الواحد فرضاً.

وإن ساوى شيء من أعداد ز ط ك ل ما قبل نظيره من ا ب جـ د مثل عدد ك إن هو ساوى عدد ب، فإن عدة ك ط ز تكون أكثر من عدة ب ا. فإن أخذنا من ز ط ك ما يكون عدته كعدة ا ب وهو ك ط، كانت نسبة ك إلى ط كنسبة ب إلى ا، وعدد ك مثل عدد ب، فعدد ط مثل عدد ا الذي هو الواحد؛ وهذا أيضاً غير ممكن، / لأن عدد ط غير الواحد. ا-١١٤-ظ

وإن ساوى شيء من أعداد ز ط ك ل ما بعد نظيره من أعداد ا ب جـ د ه مثل عدد ك إن ساوى عدد د، فإن عدة د جـ ب ا تكون أكثر من عدة أعداد ك ط ز. فإن أخذنا من د جـ ب ا ما تكون عدته كعدة أعداد ك ط ز وهي أعداد د جـ ب، وهو بيّنٌ أنها تكون على نسبتها، كانت بنسبة المساواة نسبة ك إلى ز كنسبة د إلى واحد / من أعداد د ب جـ، وهو هاهنا عدد ب-١٧٤-ظ ب. ولكن ك مثل د، فيكون ز مثل واحد من أعداد ب جـ د. ولكن كل واحد من أعداد ب جـ د إما أن يكون عدداً مركبًا وإما أن يكون عدد الاثنين، فعدد ز إذاً عدد مركب أو هو عدد الاثنين. وقد كنا اشترطنا أنه ليس كذلك، هذا خلف. فليس يساوي إذاً شيء من أعداد ز ط ك ل شيئًا من أعداد ا ب جـ د ه، فليس إذاً من أعداد ا ب جـ د ه وأعداد ز [ح] ط ك ل شيء يساوي صاحبه.

وأيضًا، فإن عدد ز ضرب في عدد ه، فاجتمع عدد ح. ولكن عدد ز أيضًا ضرب في كل واحد من أعداد ا ب جـ د، فاجتمعت أعداد ز ط ك ل. فنسب أعداد ز ط ك ل ح بعضها إلى بعض كنسب أعداد ا ب جـ د ه بعضها إلى بعض. ولكن ا ب جـ د ه متوالية على نسبة الضعف، فأعداد ز ط ك ل ح إذاً متوالية على نسبة الضعف. فإذا جمعت أعداد ز ط ك ل، كانت أقل من عدد ح بمثل عدد ز؛ وجملة ا ب جـ د ه هي عدد و، فتكون أعداد ز ط ك ل وأعداد ب جـ د ه وا الذي هو الواحد معها، إذا جمعت كلها، كان مثل

1 ز: ناقصة [ب] – 2 فرضاً: ناقصة [ب] – 3 شيء: ناقصة [ب] – 4 عدد ك إن هو ساوى: ان يكون عدد ك يساوي [ا] / ب ا: ا ب [ا] – 5 ا ب: ب ا [ا] – 6 عدد (الثالثة): ناقصة [ا] – 8 شيء: عدد [ا] / أعداد: ناقصة [ب] – 9 ه: ناقصة [ا] / ساوى: يساوي [ا] – 10 أعداد: ناقصة [ا] – 11 كانت: ناقصة [ا] – 14 ب: ز [ب] – 15 أو: و [ا] – 16 يساوي إذاً: إذاً يساوي [ا] – 17 أعداد (الأولى): ناقصة [ب] – 17-18 فليس ... صاحبه: ناقصة [ا] – 20 أعداد: ناقصة [ا] – 21 أعداد (الثانية): ناقصة [ب] – 22-23 ح إذاً: ناقصة [ب] – 24 هي: ناقصة [ب] – 25 كان: ناقصة [ا].

donnent une somme égale à celle des nombres f et h diminuée du nombre g. Mais on a montré que chacun des nombres de ces deux ensembles de nombres et de l'unité que nous avons mentionnés est une partie du nombre h, que celui-ci n'a aucune autre partie qu'eux et qu'aucun d'entre eux n'est repris ni répété. Si donc on additionne les parties du nombre h, on a une somme égale à celle des nombres f et h diminuée du nombre g. Si donc le nombre g est égal au nombre f, alors on retranche le nombre g de la somme des nombres g et h, il reste le nombre h égal à la somme obtenue en additionnant toutes ses parties ; c'est donc un nombre parfait, ce qu'Euclide a démontré.

Si le nombre g est plus petit que le nombre f, alors, si on retranche le nombre g de la somme des nombres f et h, il reste quelque chose de plus grand que le nombre h, égal [A-115^r] à la somme obtenue de l'addition de toutes les parties du nombre h. Le nombre h sera par conséquent un nombre abondant et son excédent sera égal à l'excédent du nombre f sur le nombre g. Si le nombre g est plus grand que le nombre f, alors, si on retranche le nombre g de la somme des nombres f, h, il reste quelque chose de plus petit que le nombre h, égal à la somme obtenue de l'addition de toutes les parties du nombre h ; alors le nombre h sera un nombre déficient et son défaut sera égal au défaut du nombre f par rapport au nombre g. Ce qu'il fallait démontrer.

– **6** – Si on additionne des nombres successifs selon le rapport du double à partir de l'unité, y compris l'unité, tels que l'on ait une certaine somme, puis qu'on multiplie le nombre le plus grand parmi les nombres additionnés par un nombre plan dont les côtés sont deux nombres premiers différents et différents de deux, alors le nombre ainsi engendré est un nombre abondant ou un nombre déficient. [B-175^r] Si ce nombre plan est plus petit que la somme obtenue plus le produit de celle-ci par la somme des deux côtés de ce nombre plan, alors le nombre engendré est un nombre abondant et son excédent est égal à l'excédent de la somme de ces deux nombres sur le nombre plan. Mais si ce nombre plan est plus grand que la somme obtenue plus son produit par la somme des deux côtés de ce nombre plan, alors le nombre engendré est un nombre déficient et son défaut est égal au défaut des deux nombres par rapport au nombre plan.

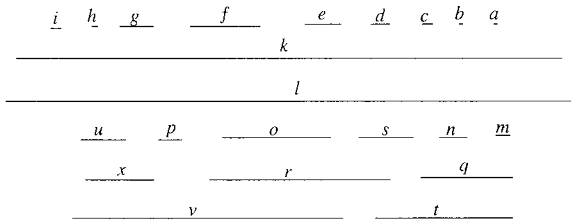
عددي و ح إذا جمعا، ونقص منهما عدد ز. لكن أعداد هاتين الجماعتين اللتين ذكرنا من الأعداد والواحد معها قد بيّنا أن كل واحد منها جزء لعدد ح، وأنه ليس له جزء غير هذه، وأنه ليس منها شيء معاد مكرر. فإذا جمع إذاً كل جزء لعدد ح، كانت جملة ذلك مثل عددي و ح إذا جمعا، ونقص منهما عدد ز. فإن كان عدد ز إذاً مساوياً لعدد و، فإنه إذا نقص عدد ز من عددي ز ح مجموعين، بقي عدد ح مساوياً للجملة الحاصلة من جمع كل جزء له، فكان عدداً تاماً، وهو الذي بينه أقليدس.

وإن كان عدد ز أقل من عدد و، فإنه إذا نقص عدد ز من عددي و ح مجموعين، بقي شيء هو أكثر من عدد ح مساوياً / للجملة الحاصلة من جمع ا-١١٥-و كل جزء لعدد ح. فيكون عدد ح إذاً عدداً زائداً ويكون مبلغ زيادته كمبلغ زيادة عدد و على عدد ز. وإن كان عدد ز أكثر من عدد و، فإنه إذا نقص عدد ز من عددي و ح مجموعين، بقي شيء هو أقل من عدد ح مساوياً للجملة الحاصلة من جمع كل جزء لعدد ح، فيكون عدد ح عدداً ناقصاً ويكون مبلغ نقصانه كمبلغ نقصان عدد و عن عدد ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– و – إذا جمعت أعداد متوالية على نسبة الضعف من الواحد مع الواحد، فكانت منها جملة ما، ثم ضرب في العدد الأكثر من الأعداد التي جمعت عدد مسطح ضلعاه عددان أولان مختلفان غير الاثنين، فإن العدد الذي يتولد من ذلك عدد زائد أو عدد ناقص. / أما إن كان ذلك العدد ب-١٧٥-و المسطح أقل من الجملة التي جمعت مع الذي يجتمع من ضربها في ضلعي ذلك العدد المسطح مجموعين، فإن العدد المتولد عدد زائد ومبلغ زيادته كمبلغ زيادتهما على العدد المسطح. وأما إن كان ذلك العدد المسطح أكثر من الجملة التي كانت جمعت مع الذي يجتمع من ضربها في ضلعي ذلك العدد المسطح مجموعين، فإن العدد الذي كان تولد لنا عدد ناقص ومبلغ نقصانه كمبلغ نقصانهما عن العدد المسطح.

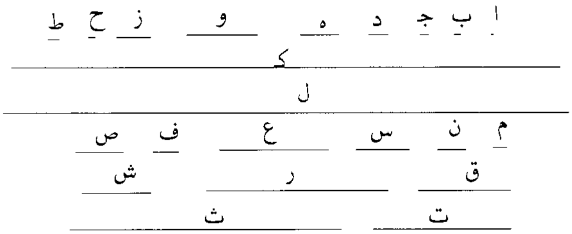
3 جمع: جمعا [ا] – 4 إذا جمعا: مجموعين [ا] – 5 إذاً: ناقصة [ا] / لعدد و: لعد هو [ب] – 7 فكان: وهو أيضًا [ا] / أقليدس: اوقليدس [ب] – 10 إذاً: ناقصة [ب] – 13 عدداً ناقصاً: عدد ناقصة [ا] عدد ناقصا [ب] – 17 ما: ناقصة [ا] / الأعداد التي: الذي [ب] – 19 عدد (الثانية): ناقصة [ا] / العدد: ناقصة [ب] – 20 العدد: ناقصة [ب] – 22 العدد المسطح: السطح [ب] / ذلك: ناقصة [ب] – 24 لنا: اذا [ب] – 25 عن: من [ا].

Soient des nombres successifs selon le rapport du double à partir de l'unité, y compris l'unité, les nombres a, b, c, d, e. Que leur somme soit le nombre f. Que le nombre g soit un nombre plan et que ses côtés soient les nombres h, i, deux nombres premiers différents, aucun d'eux n'étant le nombre deux. Que le produit du nombre e par le nombre g soit le nombre k. Et que le produit du nombre f par la somme des nombres h et i soit le nombre ℓ. Je dis que le nombre k est un nombre abondant ou un nombre déficient et que, si le nombre g est plus petit que la somme des nombres ℓ et f, alors le nombre k est un nombre abondant et son excédent est égal à l'excédent de la somme des nombres ℓ et f sur le nombre g et que si le nombre g est plus grand que la somme des nombres ℓ et f, alors le nombre k est un nombre déficient et son défaut est égal au défaut de la somme des nombres ℓ et f relativement au nombre g.



Démonstration : Posons les nombres obtenus à partir des produits des nombres b, c, d, e successivement par le nombre h, les nombres m, n, s, o successivement, les nombres obtenus à partir des produits des nombres b, c, d, e aussi successivement par le nombre i, les nombres p, u, q, r successivement et les nombres obtenus à partir des produits du nombre g [A-115^{v}] par les nombres b, c, d, successivement, les nombres x, t, v successivement ; le nombre k est un nombre plan dont les côtés sont les nombres e et g composés, étant donné que le produit de l'un par l'autre donne le nombre k. Le nombre k est mesuré par conséquent par les nombres e, g parmi les autres nombres ainsi que par tout nombre qui mesure le nombre e, tout nombre qui mesure le nombre g, tout nombre obtenu du produit du nombre e par tout nombre qui mesure g, tout nombre obtenu du produit du nombre g par tout nombre qui mesure le nombre e et tout nombre obtenu du produit de tout nombre qui mesure le nombre e par tout nombre qui mesure le nombre g et aucun nombre autre que ces nombres ne mesure le nombre k.

فلتكن أعداد متوالية على نسبة الضعف من الواحد مع الواحد، وهي أعداد ا ب جـ د ه؛ ولتكن جملتها عدد و، وليكن عدد ز عدداً مسطحاً وليكن ضلعاه عددي ح ط؛ وليكونا عددين أولين مختلفين، وليس واحد منهما عدد الاثنين. وليكن المجتمع من ضرب عدد ه في عدد ز عدد ك، والمجتمع من ضرب عدد و في عددي ح ط مجموعين عدد ل؛ فأقول: إن عدد ك عدد زائد أو عدد ناقص، وإنه إن كان عدد ز أقل من عددي ل و مجموعين، فإن عدد ك عدد زائد ومبلغ زيادته كمبلغ زيادة عددي ل و على عدد ز، وإن كان عدد ز أكثر من عددي ل و مجموعين، فإن عدد ك عدد ناقص ومبلغ نقصانه كمبلغ نقصان عددي ل و مجموعين عن عدد ز.



برهان ذلك: أنا جعلنا الأعداد المجتمعة من ضرب أعداد ب جـ د ه على تواليها في عدد ح أعداد م ن س ع على تواليها، والأعداد المجتمعة من ضرب أعداد ب جـ د ه أيضاً على تواليها في عدد ط أعداد ف ص ق ر على تواليها، والأعداد المجتمعة من ضرب عدد ز / في أعداد ب جـ د على تواليها أعداد ش ت ث على تواليها، فإن عدد ك عدد مسطح وضلعاه عددا ه ز المركبان، إذ كان قد ضرب أحدهما في الآخر، فاجتمع عدد ك. فعدد ك إذاً يعده من الأعداد الأخر عددا ه ز، وكل عدد يعد عدد ه، وكل عدد يعد عدد ز، وكل عدد مجتمع من ضرب عدد ه في كل عدد يعد ز، وكل عدد مجتمع من ضرب عدد ز في كل عدد يعد عدد ه، وكل عدد مجتمع من ضرب كل عدد يعد عدد ه في كل عدد يعد عدد ز، ولا يعد عدد ك عدد آخر غير هذه الأعداد. ا-١١٥-ظ

1 وهي: ناقصة [ا] – 2 أعداد: ناقصة [ب] / عدداً: عدا [ب] – 6 ل و: و ل [ا] – 7 عدد: ناقصة [ب] / ل و: و ل [ا] – 8 ل و: و ل [ا] – 9 عن: على [ا] – 10 برهان: وبرهان [ا] / جعلنا: نجعل [ا] – 13 د: د ه [ب] – 14 على تواليها: ناقصة [ب] – 15 إذ كان ... عدد ك: ناقصة [ا] – 16 إذاً: اذن [ا] / يعده: يعد [ب] / عددا: عدا [ب] / عدد (الثانية): ناقصة [ب] / وكل عدد: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] – 17 عدد (الأولى والثالثة): ناقصة [ب] / يعد: ناقصة [ا] – 18 عدد (الأولى والثالثة): ناقصة [ب] – 19 عدد (الثانية والرابعة): ناقصة [ب] – 20 الأعداد: ناقصة [ب].

Quant au nombre *e*, il est mesuré par les nombres *b*, *c*, *d* et aucun autre nombre ne le mesure, car ils sont successifs suivant le même rapport à partir de l'unité ; le nombre qui succède à l'unité est un nombre premier. Donc le plus grand d'entre eux n'est mesuré que par l'un des nombres qui sont suivant ce rapport. Quant au nombre *g*, il est mesuré par les nombres *h*, *i* qui sont ses deux côtés et qui sont deux nombres premiers. Donc aucun autre nombre à part eux ne le mesure. Le nombre *k* est donc mesuré par les deux nombres *e*, *g*, par tout autre nombre qui mesure le nombre *e* et qui sont les nombres *b*, *c*, *d*, et par tout autre nombre qui mesure le nombre *g* et qui sont les nombres *h* et *i*, par tous les nombres obtenus à partir du produit de *e* par tout autre nombre qui mesure *g*, qui sont les nombres *o* et *r*, par tous les nombres obtenus à partir du produit du nombre *g* par tout autre nombre qui mesure *e*, soit les nombres *x*, *t*, *v*, et par tous les nombres obtenus à partir du produit de tout autre nombre [B-175v] qui mesure le nombre *g* par tout autre nombre qui mesure le nombre *e* et qui sont les nombres *m*, *n*, *s* et les nombres *p*, *u*, *q* ; aucun autre nombre que ceux que nous avons mentionnés ne mesure le nombre *k*. Mais l'unité le mesure, donc ces nombres et l'unité sont toutes les parties du nombre *k* et aucun d'eux n'est égal à un de ses associés et donc ni répété ni repris.

Démonstration : On a multiplié le nombre *g* par les nombres *b*, *c*, *d* et on a obtenu les nombres *x*, *t*, *v*. Le produit de *a* par le nombre *g* est le nombre *g* car *a* est l'unité. Les rapports des nombres *g*, *x*, *t*, *v*, *k*, les uns aux autres, sont égaux aux rapports des <nombres> *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, les uns aux autres ; ils sont donc successivement dans le rapport du double. Nous montrons de la même manière aussi que les nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o* et les nombres *i*, *p*, *u*, *q*, *r* sont également successifs suivant ce rapport. Aucun des nombres *g*, *x*, *t*, *v* n'est donc égal à un de ses associés, car ils sont successifs suivant le rapport du double. De même les nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o* et les nombres *i*, *p*, *u*, *q*, *r* ; aucun d'eux n'est égal à son associé ; de même également <les nombres> *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et nous montrons aussi qu'aucun des nombres *g*, *x*, *t*, *v* n'est égal à aucun [A-116r] des nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o*. En

فأما عدد ه فيعده أعداد ب جـ د ولا يعده عدد آخر غيرها، لأنها متوالية على نسبة واحدة من الواحد، والذي يلي الواحد منها عدد أول. فليس يعد أكثرها إلا عدد من أعداد هذه النسبة. وأما عدد ز، فيعده عددا ح ط اللذان هما ضلعاه وهما عددان أولان. فليس يعده عدد آخر غيرهما. فعدد كـ يعده عددا ه ز وكل عدد آخر يعد عدد ه، وهي أعداد ب جـ د، وكل عدد آخر يعد عدد ز، وهما عددا ح ط، وكل الأعداد التي تجتمع من ضرب ه في كل عدد آخر يعد ز، وهي عددا ع ر، وكل الأعداد التي تجتمع من ضرب عدد ز في كل عدد آخر يعد ه، وهي أعداد ش ت ث، وكل الأعداد التي تجتمع من ضرب كل عدد آخر / يعد عدد ز في كل عدد آخر يعد عدد ه، وهي أعداد ب-١٧٥-ظ م ن س وأعداد ف ص ق؛ وليس يعد عدد كـ عدد آخر غير هذه الأعداد التي ذكرنا. ويعده الواحد، فهي إذاً والواحد كل جزء لعدد كـ وليس منها واحد يساوي صاحبه فيكون مكرراً معاداً.

برهان ذلك: أن عدد ز ضرب في أعداد ب جـ د، فاجتمعت أعداد ش ت ث؛ والذي يكون من ضرب ا في عدد ز هو عدد ز، لأن ا الواحد. فنسب أعداد ز ش ت ث كـ بعضها إلى بعض كنسب ا ب جـ د ه بعضها إلى بعض، فهي إذاً متوالية على نسبة الضعف. وبمثل ذلك أيضًا نبين أن أعداد ح م ن س ع وأعداد ط ف ص ق ر متوالية أيضًا على مثل هذه النسبة. فأعداد ز ش ت ث ليس منها عدد يساوي صاحبه، لأنها متوالية على نسبة الضعف. وكذلك أعداد ح م ن س ع وكذلك أعداد ط ف ص ق ر ليس منها عدد يساوي صاحبه وكذلك أيضًا ا ب جـ د ه وكذلك نبين أن ليس من أعداد ز ش ت ث عدد يساوي شيئًا من / أعداد ح م ن س ع. وذلك أنه إن ساوى من تلك ا-١١٦-و

2 من الواحد: ناقصة [ا] – 3 من أعداد هذه النسبة: منها [ا] – 4 عددان: عدان [ب] – 5 عدد (الثانية): ناقصة [ب] – 6 عدد: ناقصة [ب] / عددا: عدا [ب] – 6-7 كل عدد آخر يعد ز وهي: في عددي ح ط وهما [ا] – 7عددا: عدا [ب] – 8 كل عدد آخر يعد ه: أعداد ب جـ د [ا] – 9 كل عدد ... ه: كل واحد في عددي ح ط في كل واحد من أعداد ب جـ د [ا] – 11 ويعده الواحد: ومعلوم أن الواحد وهو ا يعد عدد كـ [ا] – 12 واحد: واخر [ا] ناقصة [ب] – 13 برهان: وبرهان [ا] / ب جـ د: ا ب جـ د ه على الولاء [ا] – 13-14 ش ت ث: ز ش ت ث كـ على الولاء [ا] – 14 والذي ... الواحد: ناقصة [ا] – 15 كـ: ناقصة [ب] / ه: ناقصة [ب] – 16 أيضًا: ناقصة [ا] / نبين: يتبين [ا] – 17 مثل هذه النسبة: نسبة الضعف [ا] – 19 كذلك: ناقصة [ا] – 19-20 ليس ... صاحبه: ناقصة [ب] – 20 وكذلك نبين أن ليس: ولا [ب] / ث: ناقصة [ب] – 21 ساوى: كتب بعدها «عدد» [ا].

effet, si parmi ceux-là un nombre est égal à l'un de ceux-ci, alors il n'est égal qu'à son homologue dans le rang ou bien à celui qui précède son homologue, ou bien à celui qui suit son homologue. Si l'un quelconque d'entre eux est égal à son homologue, soit le nombre t égal à son homologue, qui est le nombre n, alors on montre, à partir du rapport d'égalité, que le rapport de t à g est égal au rapport de n à h ; donc si le nombre t est égal au nombre n, alors le nombre g est égal au nombre h. Et il n'est pas possible qu'il en soit ainsi, car le nombre g est plus grand que lui étant donné que le nombre h est l'un de ses deux côtés.

Si l'un quelconque de ceux-là est égal à celui qui précède son homologue parmi ceux-ci, soit le nombre t par exemple égal au nombre m, alors le nombre des nombres t, x, g est plus grand que le nombre <des nombres> m, h. Si nous prenons parmi ceux-là l'un dont le numéro <à partir de t> est égal au nombre des nombres m, h, c'est-à-dire x, alors le rapport de t à x est égal au rapport de m à h, donc, si le nombre t est égal au nombre m, alors le nombre x est égal au nombre h. Mais le nombre x est plus grand que le nombre g, donc le nombre h est plus grand que le nombre g et cela ne se peut pas non plus car il est son côté.

Si l'un quelconque de ceux-là est égal à l'un quelconque de ceux qui suivent son homologue dans le rang de ceux-ci, comme le nombre t par exemple s'il est égal au nombre o, alors le nombre des nombres o, s, n, m, h est plus grand que le nombre des nombres t, x, g. Si nous prenons parmi eux celui dont le numéro <à partir de o> est égal au nombre des nombres t, x, g, qui sont les nombres o, s, n, et il est clair qu'ils sont suivant leur rapport, on a, par le rapport d'égalité, le rapport de t à g égal au rapport de o à n. Si donc o est égal à t, alors g est égal à n. Nous prenons parmi les nombres a, b, c, d, e celui dont le numéro est égal au nombre des nombres h, m, n, soit c ; donc on a, par le rapport d'égalité, le rapport de h à n égal au rapport de a à c. Le produit du premier, qui est h, par le quatrième, qui est c, est donc égal au produit du second, qui est n, par le troisième, qui est

عدداً من هذه، فإنه إنما يساوي منها إما نظيره في المرتبة، وإما ما هو قبل نظيره، وإما ما هو بعد نظيره. فإن ساوى شيء منها مثل عدد ت نظيره، وهو عدد ن، فإنه يتبين من نسبة المساواة أن نسبة ت إلى ز كنسبة ن إلى ح؛ فإن كان عدد ت مثل عدد ن، فإن عدد ز يكون مثل عدد ح؛ وليس يمكن أن يكون ذلك كذلك لأن عدد ز أكثر منه، إذ كان عدد ح أحد ضلعيه.

وإن ساوى شيء منها من تلك ما قبل نظيره من هذه مثل عدد ت مثلاً إن ساوى عدد م، فإن عدة أعداد ت ش ز تكون أكثر من عدة م ح. وإن أخذنا منها ما يكون عدته كعدة م ح، وهو [ت] ش، فإن نسبة ت إلى ش تكون كنسبة م إلى ح، فإن كان عدد ت مثل عدد م، فإن عدد ش يكون مثل عدد ح. وعدد ش أكثر من عدد ز، فعدد ح أكثر من عدد ز، وليس يمكن أن يكون ذلك كذلك لأنه ضلعه.

وإن ساوى شيء من تلك شيئًا مما بعد نظيره في المرتبة من هذه كعدد ت مثلاً إن ساوى عدد ع، فإن عدة أعداد ع س ن م ح تكون أكثر من عدة ت ش ز. وإن أخذنا منها ما يكون عدته مثل عدة أعداد ت ش ز، وهي أعداد ع س ن، وهو بيّنٌ أنها على نسبتها، كانت بنسبة المساواة نسبة ت إلى ز كنسبة ع إلى ن. فإن كان ع مثل ت، فإن ز مثل ن. ونأخذ من أعداد آ ب جـ د ه ما يكون عدته مثل عدة أعداد ح م ن، وهو [آ ب] جـ. فيكون بنسبة المساواة نسبة ح إلى ن كنسبة آ إلى جـ؛ فالذي يكون من ضرب الأول، وهو ح، في الرابع، وهو جـ، مثل الذي يكون من ضرب الثاني، وهو ن،

1 هذه: أعداد ح م ن س ع [ا] / إنما: ناقصة [ب] / منها إما نظيره: نظيره منها [ا] / قبل: ناقصة [ا] – 2 نظيره: كتب بعدها «في المرتبة» [ا] / ساوى: تساوا [ا] / مثل: كتب بعدها «ان ساوى» [ا] – 3 ت: ث [ب] / ن: ر [ب] – 4 ت: ث [ب] / ز: ن [ب] / يكون: ناقصة [ا] – 5 أكثر منه: هو أكثر من عدد ح [ا] / كان: ناقصة [ا] / عدد: ناقصة [ب] / ضلعيه: ضلعيه مسطح ز [ا] – 6-7 وإن ساوى ... عدة: وإن ساوى عدد ت ما قبل نظيره من أعداد ح م ن س ع مثل أن يساوي عدد ت عدد م فعدة [ا] – 6 ت: ث [ب] – 7 ت: ث [ب] – 7-8 وإن أخذنا: فنأخذ [ا] – 8 عدته: عدتها [ا] / ت: ث [ب] / فإن نسبة: فنسبة [ا] / ت: ث [ب] – 9 تكون: ناقصة [ا] / فإن كان عدد: وعدد [ا] / ت: ث [ب] / فإن عدد: فعدد [ا] / يكون: ناقصة [ا] – 12 شيء من تلك شيئًا مما: عدد ب ما [ا] – 12-13 من هذه ... ساوى: من أعداد ح م ن س ع مثل أن يساوي عدد ت [ا] – 13 فإن عدة: فعدة [ا] / تكون: ناقصة [ا] – 14 وإن أخذنا: فنأخذ [ا] / عدته: عدتها [ا] / أعداد: ناقصة [ا] – 15 هو: ناقصة [ا] / على نسبتها كانت: يكون [ا] – 16 ز مثل ن: ن مثل ز [ا] / أعداد: ناقصة [ب] – 17 عدته: عدتها [ا] / مثل عدة: كعدة [ا] – 18 ن: ر [ب] – 19 ن: ر [ب].

a. Mais le produit de [B-176r] *n* par *a* est *n*, car *a* est l'unité ; donc le produit de *h* par *c* est le nombre *n*. Or nous avons montré qu'il est égal au nombre *g* ; donc le produit de *h* par *c* est égal au nombre *g*. Or le nombre *g* est également obtenu du produit de *h* par *i*, donc le nombre *i* est égal au nombre *c*. Mais le nombre *c* est l'un des nombres successifs suivant le rapport du double à partir de l'unité. Donc le nombre *i* est l'un des nombres successifs suivant le rapport du double à partir de l'unité. Mais chacun de ces nombres que nous avons mentionnés ou bien est un nombre composé ou bien est le nombre deux. Donc le nombre *i* ou bien est un nombre composé, ou bien est le nombre deux. Or nous avons posé comme condition qu'il n'en est pas ainsi. Par conséquent aucun des nombres *g*, *x*, *t*, *v* [A-116v] n'est égal à l'un quelconque des nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o*. De la même manière, on montre également qu'aucun de ceux-là n'est égal à aucun des nombres *i*, *p*, *u*, *q*, *r* et qu'aucun de ceux-là n'est égal à aucun des nombres *a*, *b*, *c*, *d*, *e* car si l'un d'eux est égal à son homologue ou à celui qui précède son homologue dans le rang, nous montrons par une méthode semblable à celle qui précède qu'il s'ensuit que le nombre *g* ou un autre nombre parmi eux serait égal à *a*, qui est l'unité et si l'un d'eux est égal à celui qui suit son homologue dans le rang, nous montrons par une méthode semblable à celle qui précède qu'il s'ensuit que le nombre *g* est égal à l'un des nombres *b*, *c*, *d*, *e* et par conséquent il sera mesuré par ce qui est plus petit que les nombres *b*, *c*, *d*, *e* ; aucun autre nombre ne le mesure car ce qui succède à l'unité parmi eux est un nombre premier. Mais le nombre *g* n'est mesuré que par ses deux côtés, qui sont *h* et *i*, étant donné qu'ils sont premiers. Donc les nombres *h* et *i* sont parmi les nombres *b*, *c*, *d*, *e* ; mais chacun des nombres *b*, *c*, *d*, *e* est un nombre composé ou c'est le nombre deux. Donc chacun des nombres *h*, *i* est un nombre composé ou est le nombre deux. Or nous avons posé comme condition que les nombres *h*, *i* ne sont pas ainsi ; ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible qu'aucun des nombres *g*, *x*, *t*, *v* ne soit égal à aucun des nombres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

في الثالث، وهو آ. لكن الذي يكون من ضرب / ن في آ هو ن، لأن آ هو ب-١٧٦-و الواحد؛ فالذي يكون من ضرب ح في جـ هو عدد ن. وقد كنا بينا أنه مثل عدد ز؛ فالذي يكون من ضرب ح في جـ هو عدد ز. وقد كان عدد ز أيضاً مجتمعاً من ضرب ح في ط، فعدد ط مثل عدد جـ. وعدد جـ هو واحد من الأعداد المتوالية على نسبة الضعف من الواحد، فعدد ط [جـ] هو واحد من الأعداد المتوالية على نسبة الضعف من الواحد. وكل واحد من هذه الأعداد التي ذكرنا إما أن يكون عدداً مركباً، وإما أن يكون عدد الاثنين. فعدد ط، إما أن يكون عدداً مركباً، وإما أن يكون عدد الاثنين. وقد كنا اشترطنا أنه ليس كذلك، فليس إذاً من أعداد ز ش ت ث عدد/ يساوي شيئًا من أعداد ا-١١٦-ظ ح م ن س ع. وبمثل ذلك أيضًا يتبين أنه ليس منها شيء يساوي واحداً من أعداد ط ف ص ق ر ولا منها أيضًا شيء يساوي واحداً من أعداد آ ب جـ د ه، لأنه لو ساوى واحد منها نظيره أو ما قبل نظيره في المرتبة، لبينا بمثل السبيل التي تقدمت أنه يجب من ذلك أن يكون عدد ز أو عدد آخر منها يساوى آ الذي هو الواحد، ولو ساوى عدد منها شيئًا مما بعد نظيره في المرتبة، لبينا بمثل السبيل التي تقدمت أنه يجب من ذلك أن يكون عدد ز يساوي واحداً من أعداد ب جـ د ه فيعده إذاً كل شيء هو أقل من أعداد ب جـ د ه، ولا يعده غيرها لأن الذي يلي الواحد منها هو عدد أول. لكن عدد ز لا يعده غير ضلعيه اللذين هما ح ط، إذ كانا أولين. فعددا ح ط هما بعض أعداد ب جـ د ه؛ وكل واحد من أعداد ب جـ د ه عدد مركب أو هو عدد الاثنين. فكل واحد من عددي ح ط هو عدد مركب أو هو عدد الاثنين. وقد كنا اشترطنا أن عددي ح ط ليسا كذلك، هذا خلف؛ فليس يمكن أن يساوي شيء من أعداد ز ش ت ث شيئًا من أعداد آ ب جـ د ه.

1 ن (الأولى): ب [ب] / ن (الثانية): ر [ب] – 2 كنا: ناقصة [ب] – 3 أيضًا: ناقصة [ا] – 4 جـ (الثانية): ناقصة [ا] – 5 الأعداد: أعدد آ ب جـ د ه [ا] – 5-6 فعدد ط ... الواحد: ناقصة [ا] – 7 عدداً: ناقصة [ب] – 9 ث: ر [ب] / شيئًا: عدداً [ا] – 10 أيضًا: ناقصة [ا] / منها شيء: من أعداد ر ش ت ث عدد [ا] / واحداً: واحد [ب] – 12 واحد: واحداً [ا] / قبل: قبل هو [ب] – 13 تقدمت: تقدم [ا] – 14 آ: ناقصة [ب] / الواحد: كتب بعدها «وهذا خلف» [ا] / عدد: شيء [ا] – 15 المرتبة: النسبة [ب] / تقدمت: تقدم [ا] / عدد ز: ناقصة [ب] – 16 من (الثانية): منه من [ا] – 17 ه: ناقصة [ا] / هو: ناقصة [ب] – 18 اللذين: اللذان [ا] / إذ: اذا [ب] – 19 ب (الأولى): ز [ب] – 20 هو (الأولى): ناقصة [ب] – 21 هذا خلف: ناقصة [ب] / يمكن أن: ناقصة [ب] – 22 شيء: عدد [ا] / شيئًا: عدد [ا] / أعداد: ناقصة [ب] / آ: ناقصة [ب].

Je dis également qu'aucun des nombres *b*, *c*, *d*, *e* n'est égal à aucun des nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o* ou à aucun des nombres *i*, *p*, *u*, *q*, *r*. Car si l'un d'eux est égal à son homologue parmi eux, nous montrons par la même voie que celle qui précède qu'il s'ensuit que le nombre *h* ou le nombre *i* parmi ceux-là est *a* d'entre ceux-ci, qui est l'unité ; ce qui ne se peut pas. Et si l'un de ceux-là est égal à celui qui précède son homologue parmi ceux-ci, nous montrons par une voie analogue qu'il s'ensuit qu'il y a un nombre parmi ceux-ci autre que les nombres *h*, *i* et qui est l'unité ; ce qui ne se peut pas. Et si l'un de ceux-là est égal à celui qui suit son homologue parmi ceux-ci, nous montrons de la même manière que précédemment que l'un des nombres *h*, *i* est égal à l'un des nombres *b*, *c*, *d*, *e*. Il s'ensuit que l'un des deux nombres *h*, *i* est un nombre composé ou le nombre deux. Tous ces cas que nous avons mentionnés ne sont pas possibles. Donc, parmi les nombres *b*, *c*, *d*, *e*, aucun n'est égal à aucun des nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o* ni à aucun des nombres *i*, *p*, *u*, *q*, *r*.

Je dis également qu'aucun des nombres *h*, *m*, *n*, *s*, *o* n'est égal à aucun des nombres *i*, *p*, *u*, *q*, *r*. [A-117^{r}] En effet, si l'un quelconque d'entre eux était égal à l'un quelconque de ceux-là, alors ou bien il serait aussi égal à son homologue, ou bien il ne serait pas égal à son homologue. S'il est égal à son homologue, nous montrons, par la même méthode [B-176^{v}] que nous avons décrite précédemment, que les deux nombres *h* et *i* sont égaux. Or nous avons posé comme condition qu'ils sont différents, ce qui est absurde et ne se peut pas. Si l'un d'eux est égal à un qui n'est pas son homologue, nous montrons par une voie analogue à celle qui précède qu'il s'ensuit que le nombre *h* est égal à l'un des nombres *p*, *u*, *q*, *r* ou que le nombre *i* est égal à l'un des nombres *m*, *n*, *s*, *o*. Mais aucune des branches de cette alternative n'est possible car les nombres *h* et *i* sont premiers et les nombres *m*, *n*, *s*, *o* et les nombres *p*, *u*, *q*, *r* sont tous composés, car chacun d'eux est mesuré par ceux d'entre les autres nombres qui les précèdent que nous avons posés. Par conséquent, de tous les nombres que nous avons mentionnés, aucun n'est égal à un de ses associés.

وأقول أيضًا: إنه ليس من أعداد ب جـ د ه شيء يساوي عدداً من أعداد ح م ن س ع أو من أعداد ط ف ص ق ر؛ لأنه إن ساوى نظيره منها، بينا بمثل المذهب الذي قد تقدم أنه يجب من ذلك أن يكون عدد ح أو عدد ط من هذه هو آ من تلك، الذي هو الواحد، ولا يمكن ذلك. وإن ساوى واحد من هذه ما قبل نظيره من تلك، بينا بمثل ذلك المذهب أنه يجب من ذلك أن يكون عدد آخر من هذه غير عددي ح ط هو الواحد، ولا يمكن ذلك. وإن ساوى واحد من هذه ما بعد نظيره من تلك، بينا بمثل ما تقدم أن أحد عددي ح ط يساوي واحداً من أعداد ب جـ د ه. فيجب من ذلك أن يكون أحد عددي ح ط عدداً مركبًا أو عدد الاثنين. وكل هذه الوجوه التي ذكرنا غير ممكن، فليس في أعداد ب جـ د ه شيء يساوي واحداً من أعداد ح م ن س ع أو من أعداد ط ف ص ق ر.

وأقول أيضًا: إنه ليس من أعداد ح م ن س ع شيء يساوي واحداً من أعداد ط ف ص ق ر؛ / وذلك أنه إن ساوى شيء منها شيئًا منها، فإنه أيضاً ا-١١٧-و إما أن يساوي ما هو نظيره، وإما أن يساوي ما ليس بنظيره. فإن ساوى نظيره، بينا بمثل المسلك الذي قد / تقدم وصفه أن عددي ح ط متساويان. ب-١٧٦-ظ وقد كنا شرطنا أنهما مختلفان؛ وهذا خلف، لا يمكن. وإن ساوى واحد منها ما ليس بنظيره من الآخر، بينا بمثل السبيل التي قد تقدمت أنه يجب من ذلك أن يكون عدد ح مساويًا لأحد أعداد ف ص ق ر أو عدد ط مساويًا لأحد أعداد م ن س ع. ولكن كل واحد من هذين الأمرين غير ممكن، لأن عددي ح ط أولان وأعداد م ن س ع وأعداد ف ص ق ر أيضًا جميعًا مركبة، لأن كل واحد منها يعده ما قبله من الأعداد الأخر التي وضعناها. فليس إذاً من جميع الأعداد التي ذكرنا شيء يساوي صاحبه.

1 شيء: عدد [ا] / عدداً: عدد [ا] – 4 ولا يمكن ذلك: ناقصة [ب] / وإن: فان [ا] / واحد: واحداً [ا] – 6 ولا يمكن ذلك: ناقصة [ب] – 7 واحد: واحداً [ا] – 8-9 أحد عددي ح ط: ناقصة [ب] – 9 عدد: ناقصة [ب] / وكل: وكل واحد، ثم ضرب على «واحد» بالقلم [ب] – 9-10 وكل هذه الوجوه التي ذكرنا غير ممكن: وذلك غير ممكن لأن عددي (عددا .ms) ح ط عددان أولان مختلفان وليس واحد منهما عدد الاثنين كذلك فرضناهما [ا] – 10 ب: زَ [ب] / شيء: عدد [ا] – 12 شيء: عدد [ا] / واحداً: عدد [ا] – 13 شيء: عدد [ا] / شيئًا: عدد [ا] – 14 إما: انما [ا] / ما ... بنظيره: نظيره او ما ليس نظيره [ا] – 16 كنا: ناقصة [ا] / لا يمكن: ناقصة [ب] / واحد: واحدا [ا، ب] – 17 التي: الذي [ا، ب] / تقدمت: تقدم [ا] – 18 أو عدد: وعدد [ب] / مساويًا: ناقصة [ب] – 19-20 ولكن ... ع: ناقصة [ا] – 21 منها: منهما [ب] / قبله: قبلها [ا] / وضعناها: كتب بعدها «معها» [ا] – 22 شيء: عدد [ا] / صاحبه: عدد من الأعداد الأخر المذكورة [ا].

De même, si on multiplie le nombre g par le nombre e, on obtient le nombre k ; mais si on multiplie le nombre g également par les nombres a, b, c, d, on obtient les nombres g, x, t, v. On a donc multiplié les nombres a, b, c, d, e par le nombre g et on a obtenu les nombres g, x, t, v, k. Les rapports des nombres g, x, t, v, k les uns aux autres sont donc égaux aux rapports des nombres a, b, c, d, e les uns aux autres. Mais a, b, c, d, e sont successifs selon le rapport du double, donc les nombres g, x, t, v, k sont successifs selon le rapport du double. La somme des nombres g, x, t, v est donc plus petite que le nombre k du nombre g. De même, si on multiplie a, b, c, d, e par le nombre h, on a les nombres h, m, n, s, o ; c'est pourquoi la somme de h, m, n, s, o est égale au produit de la somme de a, b, c, d, e, qui est le nombre f, par le nombre h. De même nous montrons également que la somme des nombres i, p, u, q, r est égale au produit du nombre f par le nombre i. Donc la somme des nombres h, m, n, s, o et des nombres i, p, u, q, r est égale au produit du nombre f par la somme des nombres h et i, ce qui est le nombre ℓ. Donc la somme de tous les nombres que nous avons mentionnés est le nombre ℓ, et la somme de a, b, c, d, e est le nombre f. Or nous avons montré que la somme des nombres g, x, t, v est plus petite que le nombre k d'un nombre égal au nombre g. Donc les nombres g, x, t, v, les nombres h, m, n, s, o, les nombres i, p, u, q, r, les nombres b, c, d, e et a, qui est l'unité, si on les somme tous, donnent la somme de ℓ et de k diminuée du nombre g. Mais nous avons montré que chacune de ces quatre sommes mentionnées et l'unité avec elles est <la somme> des parties du nombre k, que celui-ci n'a pas d'autre partie qu'elles et qu'aucune d'elles n'est répétée ni reprise. Si donc [A-117v] on somme toutes les parties du nombre k, on a une somme égale aux nombres k et ℓ diminuée du nombre g.

وأيضًا، فإن عدد ز ضرب في عدد ه، فاجتمع عدد كـ. ولكن عدد ز أيضًا ضرب في أعداد ا ب جـ د، فاجتمعت أعداد ز ش ت ث، فأعداد ا ب جـ د ه ضربت في عدد ز واجتمعت أعداد ز ش ت ث كـ. فنسب أعداد ز ش ت ث كـ بعضها إلى بعض كنسب أعداد ا ب جـ د ه بعضها إلى بعض. ولكن ا ب جـ د ه متوالية على نسبة الضعف، فأعداد ز ش ت ث كـ متوالية على نسبة الضعف. فأعداد ز ش ت ث إذا جمعت، كانت أقل من عدد كـ بمثل عدد ز. وأيضًا، فإن ا ب جـ د ه إذا ضربت في عدد ح، كان منها أعداد ح م ن س ع؛ فلهذا ح م ن س ع إذا جمعت مثل الذي يكون من ضرب جملة ا ب جـ د ه التي هي عدد و في عدد ح. وكذلك أيضًا نبين أن أعداد ط ف ص ق ر إذا جمعت هي مثل الذي يكون من ضرب عدد و في عدد ط. فجملة أعداد ح م ن س ع وأعداد ط ف ص ق ر إذا جمعت مثل المجتمع من ضرب عدد و في عددي ح ط مجموعين، الذي هو عدد ل. فجملة هذه الأعداد التي ذكرنا هي عدد ل، وجملة ا ب جـ د ه هي عدد و. وقد كنا بينا أن أعداد ز ش ت ث إذا جمعت، كانت أقل من عدد كـ بمثل عدد ز. فيكون أعداد ز ش ت ث وأعداد ح م ن س ع وأعداد ط ف ص ق ر وأعداد ب جـ د ه وا الذي هو الواحد معها إذا جمعت كلها مثل عددي ل وكـ إذا جمعت ونقص منها عدد ز. لكن هذه الأربع الجماعات التي ذكرنا من الأعداد والواحد معها قد بينا أن كل واحد منها جزء لعدد كـ، وأنه ليس له جزء غيرها، وأنه ليس منها شيء مكرر معاد. فإذا / جمع إذاً كل جزء لعدد كـ، كانت جملة ذلك ا-١١٧-ظ مثل عددي كـ ول إذا جمعت ونقص منها عدد ز.

1 فاجتمع: اجتمع [ا] / ز: كـ [ب] / أيضًا: ناقصة [ا] – 2 أعداد (الأولى): ناقصة [ب] – 2-3 فأعداد ... كـ: ناقصة [ب] – 4 كـ: ناقصة [ب] / أعداد: ناقصة [ب] – 5 ث: ر [ب] – 6 ث: ر كـ [ب] – 8 ع: ناقصة [ب] / فلهذا: فأعداد [ا] فلهذا جـ [ب] – 9 نبين: يتبين [ا] – 10 هي: ناقصة [ب] – 13 هي (الثانية): ناقصة [ا] – 14 كانت: ناقصة [ب] – 15 ع: ناقصة [ب] / ب: ا ب [ا] – 15-16 وا ... معها: ناقصة [ا] – 16 عددي: أعداد [ا، ب] / ل وكـ: ل كـ ح [ا] – 20 عددي: أعداد [ا، ب] / كـ ول: ل و كـ [ا].

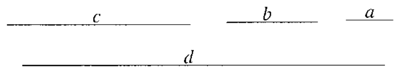
Si donc il était possible que le nombre g soit égal à la somme des nombres ℓ et f, alors, si on retranchait le nombre g de la somme des nombres ℓ, f et k, il resterait le nombre k égal à la somme obtenue de toutes ses parties et ce serait un nombre parfait. Si le nombre g est plus petit que la somme des nombres ℓ et f, alors si on retranche le nombre g de la somme des nombres ℓ, f et k, le reste sera plus grand que le nombre k égal à la somme obtenue de toutes les parties du nombre k et le nombre k sera un nombre abondant et son excédent sera égal à l'excédent de la somme des nombres ℓ et f sur le nombre g. Si le nombre g est plus grand que la somme des nombres ℓ et f, alors, si on retranche le nombre g de la somme des nombres ℓ, f et k, [B-177r] le reste sera plus petit que le nombre k et égal à la somme obtenue de toutes les parties du nombre k ; alors le nombre k sera un nombre déficient et son défaut sera le défaut de la somme des nombres ℓ et f par rapport au nombre g. Mais le nombre g ne peut pas être égal à la somme des nombres ℓ et f. En effet le nombre ℓ est le produit du nombre f par la somme des nombres h et i et le nombre f est égal au produit de f par l'unité. Donc la somme des nombres ℓ et f est égale au produit du nombre f par la somme des nombres h, i et l'unité. Si donc la somme des nombres ℓ et f est égale au nombre g, alors le nombre g est égal au produit du nombre f par la somme des nombres h, i à laquelle on ajoute l'unité. Donc chacun des nombres f et <la somme> des nombres h, i plus l'unité mesure le nombre g sans être égal aux nombres h, i. Or nous avons montré qu'aucun autre nombre que les nombres h et i ne mesure g ; ce qui est absurde. Par conséquent, le nombre k ne peut pas être un nombre parfait. C'est donc un nombre abondant ou un nombre déficient. Si le nombre g est plus petit que la somme des nombres ℓ et f, c'est donc un nombre abondant et son excédent est égal à l'excédent de la somme des nombres ℓ, f sur le nombre g. Mais si le nombre g est plus grand que la somme des nombres ℓ, f, alors c'est un nombre déficient et son défaut est égal au défaut de la somme des nombres ℓ, f par rapport au nombre g. Ce qu'il fallait démontrer. [A-118r]

فلو أمكن إذاً أن يكون عدد ز مساوياً لعددي ل و مجموعين، لكان إذا نقص عدد ز من أعداد ل و كـ مجموعة، بقي عدد كـ مساوياً للجملة الحاصلة من جمع كل جزء له وكان يكون عدداً تاماً. وإن كان عدد ز أقل من عددي ل و مجموعين، فإنه إذا نقص عدد ز من أعداد ‹ل›و كـ مجموعة، بقي شيء هو أكثر من عدد كـ مساوياً للجملة الحاصلة من جمع كل جزء لعدد كـ، فيكون عدد كـ عدداً زائداً ويكون مبلغ زيادته كمبلغ زيادة عددي ل و مجموعين على عدد ز. وإن كان عدد ز أكثر من عددي ل و مجموعين، فإنه إذا نقص عدد ز من أعداد ل و كـ مجموعة، / بقي شيء هو أقل من عدد كـ ب-١٧٧-و مساوياً للجملة الحاصلة من جمع كل جزء لعدد كـ، فيكون عدد كـ عدداً ناقصاً ويكون مبلغ نقصانه كمبلغ نقصان عددي ل و مجموعين عن عدد ز. لكن عدد ز لا يمكن أن يكون مساوياً لعددي ل و مجموعين. وذلك أن عدد ل مجتمع من ضرب عدد و في عددي ح ط مجموعين، وعدد و مثل المجتمع من ضرب و في الواحد. فعددا ل و إذا جمعا مثل المجتمع من ضرب عدد و في عددي ح ط وزيادة واحد. فإن كان عددا ل و مجموعين مثل عدد ز، فإن عدد ز مثل المجتمع من ضرب عدد و في عددي ح ط مجموعين مزيداً عليهما واحد. فكل واحد من عدد و ومن عددي ح ط مع الواحد يعد عدد ز وليسا بمساويين لعددي ح ط. وقد كنا بينا أنه لا يعد ز عدد غير عددي ح ط؛ هذا خلف. فليس يمكن إذاً أن يكون عدد كـ عدداً تامًا، فهو إذاً عدد زائد أو عدد ناقص. أما إن كان عدد ز أقل من عددي ل و مجموعين، فهو عدد زائد ومبلغ زيادته كمبلغ زيادة عددي ل و على عدد ز. وأما إن كان عدد ز أكثر من عددي ل و مجموعين، فهو عدد ناقص ومبلغ نقصانه كمبلغ نقصان عددي ل و مجموعين عن عدد ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

1 إذا: أول [ب] / ل: د [ب] – 2 ل و كـ: ل كـ و [ا] / عدد: ناقصة [ا] – 3 عددي: عدد [ب] – 4 فإنه ... مجموعة: ناقصة [ا] – 6 عدداً: ناقصة [ب] – 6-10 زيادته ... مبلغ: مكررة [ب] – 10 عن: عير [ا] – 13 فعددا: فعدا [ب] / مثل المجتمع: ناقصة [ا] – 14 عددا: عدا [ب] – 15 عدد (الثانية): ناقصة [ا] – 15-16 مجموعين مزيداً عليهما: وزيادة [ا] – 16 عدد: عددي [ا] / ومن: وجميع [ا] – 17 بينا: قلنا [ا] / يعد ز عدد: يعده [ا] – 18 يمكن إذاً: إذا يمكن [ا] / عدد كـ: ناقصة [ب] – 21 عدد (الثانية): ناقصة [ب] – 22 مجموعين: ناقصة [ا].

– **7** – Soit quatre nombres successifs selon le rapport du double, tels que le premier soit le plus petit, alors le nombre solide dont l'un des côtés est le troisième nombre, dont le deuxième côté est la somme du troisième et du quatrième nombre et dont le troisième côté est la somme du troisième et du deuxième nombre, est égal au nombre solide dont l'un des côtés est le troisième nombre, le deuxième côté le quatrième nombre et le troisième côté la somme du quatrième et du premier nombre.

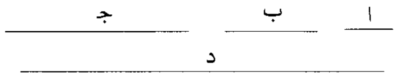
Soient quatre nombres successifs selon le rapport du double, les nombres a, b, c, d, a étant le plus petit. Je dis que le nombre solide dont l'un des côtés est le nombre c, le second côté la somme des nombres d et c et le troisième côté la somme des nombres b et c, est égal au nombre solide dont l'un des côtés est le nombre c, le deuxième côté le nombre d et le troisième côté la somme des nombres d et a.



Démonstration : Les nombres a, b, c, d sont successivement proportionnels, donc le rapport de a à b est égal au rapport de b à c et au rapport de c à d. Si nous additionnons et si nous permutons, le rapport de la somme de a et b à la somme de b et c est égal au rapport de b à c, qui est égal au rapport a à b, qui est égal au rapport de c à d. Si nous composons, le rapport de la somme de c et d à d est égal au rapport de a plus c plus le double de b à la somme de b et c. Mais le nombre c est le double du nombre b. Donc le rapport de la somme de c et d à d est égal au rapport de a plus le double de c à la somme de b et c. Mais [B-177^{v}] le double du nombre c est le nombre d. Donc le rapport de la somme de c et d à d est égal au rapport de la somme de a et d à la somme de b et c. Donc le nombre plan formé du produit du premier de ces nombres, qui est la somme de c et d, par le quatrième, qui est la somme de b et c, est égal au nombre plan formé du

– ز – كل أربعة أعداد متوالية على نسبة الضعف يكون أولها أقلها، فإن ا-١١٨-و العدد المجسم الذي أحد أضلاعه العدد الثالث منها، وضلعه الثاني العدد الثالث والرابع مجموعين، وضلعه الثالث العدد الثالث والثاني مجموعين، مثل العدد المجسم الذي أحد أضلاعه العدد الثالث منها وضلعه الثاني العدد الرابع منها، وضلعه الثالث العدد الرابع والأول مجموعين.

فليكن أربعة أعداد متوالية على نسبة الضعف، وهي أعداد ا ب جـ د وأقلها ا؛ فأقول إن العدد المجسم الذي يكون أحد أضلاعه عدد جـ، وضلعه الثاني عددي د جـ مجموعين، وضلعه الثالث عددي ب جـ مجموعين مثل العدد المجسم الذي يكون أحد أضلاعه عدد جـ، والضلع الثاني منه عدد د، والضلع الثالث عددا د ا مجموعين.



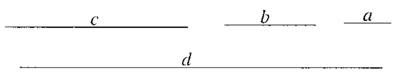
برهان ذلك: أن أعداد ا ب جـ د متناسبة على التوالي، فنسبة ا إلى ب كنسبة ب إلى جـ وكنسبة جـ إلى د. وإذا جمعنا، ثم بدلنا، كانت نسبة ا ب مجموعين إلى ب جـ مجموعين كنسبة ‹ب إلى جـ التي هي كنسبة› ا إلى ب التي هي كنسبة جـ إلى د. وإذا ركبنا، كانت نسبة جـ د مجموعين إلى د كنسبة ا جـ ومثلي ب مجموعة إلى ب جـ مجموعين. ولكن عدد جـ مثلا عدد ب، فيكون نسبة جـ د مجموعين إلى د كنسبة ا مع مثلي جـ إلى ب جـ مجموعين. ولكن / مثلي عدد جـ هو عدد د، فنسبة جـ د مجموعين إلى د ب-١٧٧-ظ كنسبة ا د مجموعين إلى ب جـ مجموعين. فالعدد المسطح الكائن من ضرب الأول من هذه، وهو جـ د مجموعين، في الرابع، وهو ب جـ مجموعين، مثل

1 أربعة: اربع [ا] – 2 العدد (الأولى): العد [ب] – 5 منها: ناقصة [ب] – 8 عددي (الأولى والثانية): عددا [ا] – 10 د ا: ا د [ا] – 11 برهان: وبرهان [ا] / على التوالي: ناقصة [ب] – 12 وكنسبة جـ إلى د: ناقصة [ب] / ثم بدلنا: ناقصة [ب] – من سطر 11 نجد في [ا]: «وبرهان ذلك: أن أعداد ا ب جـ د متناسبة على التوالي، فنسبة ا إلى ب كنسبة ب إلى جـ وكنسبة جـ إلى د. فنسبة ا إلى ب كنسبة ب إلى جـ. فإذا جمعنا ثم بدلنا، تكون نسبة ا ب مجموعين إلى ب جـ مجموعين كنسبة ب إلى جـ. لكن نسبة ب إلى جـ كنسبة جـ إلى د، فنسبة ا ب مجموعين إلى ب جـ مجموعين كنسبة جـ إلى د. فإذا جمعنا، تكون نسبة ا جـ ومثلا ب إلى ب جـ مجموعين كنسبة جـ د مجموعين إلى د. ولكن عدد جـ مثلا عدد ب، فتكون نسبة ا مع مثلي (ثلثي ms) جـ إلى عددي ب جـ مجموعين كنسبة جـ د مجموعين إلى د. ولكن أيضًا مثلا عدد جـ هو عدد د، فنسبة ا د مجموعين إلى ب جـ مجموعين كنسبة جـ د مجموعين إلى د. فالعدد المسطح الكائن من ضرب الأول وهو عددا

produit du deuxième, qui est *d*, par le troisième, qui est la somme de *a* et *d*. Si nous multiplions le nombre *c* par ces deux nombres plans égaux, le nombre solide obtenu du produit du nombre *c* par le nombre plan formé du produit de la somme des deux nombres *d* et *c* par la somme des deux nombres *b* et *c* est égal au nombre obtenu du produit du nombre *c* par le nombre plan formé du produit du nombre *d* par la somme des nombres *d* et *a*. Ce qu'il fallait démontrer. [A-118^{v}]

– **8** – Soit quatre nombres successifs selon le rapport du double, tels que le premier soit le plus petit, alors le nombre plan dont l'un des côtés est le troisième nombre et l'autre côté la somme du deuxième nombre, du quatrième <nombre> et du double du troisième <nombre> est égal au nombre plan dont l'un des côtés est le quatrième nombre et l'autre côté la somme du quatrième et du premier nombre.

Soient *a*, *b*, *c*, *d* quatre nombres successifs dans le rapport du double. Je dis que le <nombre> plan dont l'un des côtés est le nombre *c* et l'autre côté la somme de *b* et *d* plus le double du nombre *c* est égal au nombre plan dont l'un des côtés est le nombre *d* et l'autre côté la somme des nombres *d* et *a*.

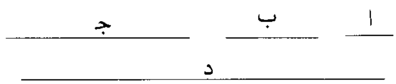


Démonstration : Le nombre *d* est le double du nombre *c*, c'est pourquoi le nombre *d* plus le double du nombre *c* est le double du nombre *d*. Mais le nombre *b* est aussi égal au double du nombre *a*, donc le nombre *d* plus le double du nombre *c* plus le nombre *b* est le double de la somme de *d* et de *a*. Mais le nombre *d* est aussi le double du nombre *c*, donc le rapport de *c* à *d* est égal au rapport de la somme des deux nombres *d* et *a* à la somme des nombres *d* et *b* plus le double du nombre *c*. Donc le produit du premier, qui

العدد المسطح الكائن من ضرب الثاني، وهو د، في الثالث، وهو ا د مجموعين. وإذا ضربنا عدد جـ في هذين المسطحين المتساويين جميعًا، كان العدد المجسم المجتمع من ضرب عدد جـ في العدد المسطح الكائن من ضرب عددي د جـ مجموعين في عددي ب جـ مجموعين مثل العدد المجتمع من ضرب عدد جـ في العدد المسطح الكائن من ضرب عدد د في عددي د ا مجموعين؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

- ح - كل أربعة أعداد متوالية على نسبة الضعف، يكون أولها أقلها، ا-١١٨-ظ فإن العدد المسطح الذي أحد ضلعيه العدد الثالث منها، وضلعه الآخر العدد الثاني والرابع ومثلا الثالث مجموعة، مثل العدد المسطح الذي أحد ضلعيه العدد الرابع، وضلعه الآخر العدد الرابع والأول مجموعين.

فلتكن أربعة أعداد متوالية على نسبة الضعف، وهي ا ب جـ د؛ فأقول: إن المسطح الذي أحد ضلعيه عدد جـ وضلعه الآخر عددا ب د مع مثلي عدد جـ مجموعة مثل العدد المسطح الذي أحد ضلعيه عدد د وضلعه الآخر عددا د ا مجموعين.



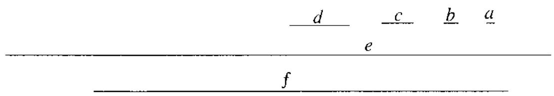
برهان ذلك: أن عدد د مثلا عدد جـ، ولذلك يكون عدد د ومثلا عدد جـ مثلي عدد د. ولكن عدد ب أيضًا مثلا عدد ا، فيكون عدد د ومثلا عدد جـ وعدد ب مثلي عددي د ا مجموعين. ولكن عدد د أيضًا مثلا عدد جـ، فنسبة جـ إلى د كنسبة عددي د ا مجموعين إلى عددي د ب مع مثلي عدد جـ

(ms. عدد) ا د مجموعين في الرابع الذي هو د مثل المسطح الكائن من ضرب الثاني وهو عددا ب جـ مجموعين في الثالث الذي هو عددا جـ د مجموعين. وإذا ضربنا عدد جـ في كل واحد من هذين المسطحين المتساويين يكون العدد المجسم المجتمع من ضرب عدد جـ في العدد المسطح الكائن من ضرب عددي ب جـ مجموعين في عددي جـ د مجموعين مثل العدد المجسم المجتمع من ضرب عدد جـ في العدد المسطح الكائن من ضرب ا د مجموعين في عدد د؛ وذلك ما أردنا أن نبين» - 10 الرابع والأول: الأول والرابع [ا] - 12 الذي: الذي يكون [ا] / عددا: عدا [ب] / جـ: د [ب] - 13 د ا: ا د [ا] - 15 برهان: وبرهان [ا] / د ومثلا عدد جـ: و مثلا عدد جـ وعدد جـ [ب] - 16 لكن: ناقصة [ا] / أيضًا مثلا: هو مثلى [ا] / د ومثلا: و مثلا [ب] - 17 د ا: ا د [ا] / د (الثانية): ز [ب] - 18 د ا: ا د [ا] / د ب: ب د [ا].

est le nombre *c*, par le quatrième, qui est la somme des nombres *b* et *d* plus le double du nombre *c*, est égal au produit du deuxième, qui est le nombre *d*, par le troisième, qui est la somme de *d* et de *a*. Ce qu'il fallait démontrer.

– **9** – Soit quatre nombres successifs selon le rapport du double, tels que le premier soit le plus petit, alors le produit du dernier par la somme du premier et du dernier moins un est égal au produit du troisième nombre par la différence entre le produit du dernier par la somme du premier et du dernier, duquel on retranche un, et le produit de la somme du quatrième nombre et du troisième moins un par la somme du deuxième nombre et du troisième moins un.

Soient *a*, *b*, *c*, *d* quatre nombres successifs selon le rapport du double, le plus petit étant le nombre *a*. Soit *e* le produit [B-178$^{\mathrm{r}}$] du nombre *d* par la somme des nombres *d* et *a* et soit *f* le produit du nombre *d* plus *c* moins un par le nombre *b* plus *c* moins un. Je dis que le produit du nombre *d* par le nombre *a* plus *d* moins un est égal au produit du nombre *c* par la différence entre le nombre *e* moins un et le nombre *f*. [A-119$^{\mathrm{r}}$]

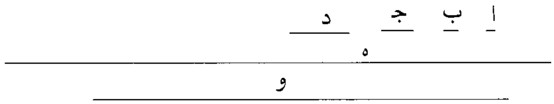


Démonstration : Les nombres *a*, *b*, *c*, *d* sont successifs selon le rapport du double, et le nombre *a* est le plus petit, donc le nombre solide obtenu à partir du produit du nombre *c* par le nombre plan obtenu à partir du produit

مجموعة. فالسطح الذي يكون من ضرب الأول، وهو عدد جـ، في الرابع، وهو عددا ب د مع مثلي عدد جـ، مثل السطح الذي يكون من ضرب الثاني، وهو عدد د، في الثالث، وهو عددا د آ مجموعين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– ط – كل أربعة أعداد متوالية على نسبة الضعف، يكون أولها أقلها، فإن المسطح الكائن من ضرب آخرها في أولها وآخرها غير واحد مجموعين مثل المجتمع من ضرب العدد الثالث منها في فضل ما بين المسطح الكائن من ضرب آخرها في أولها وآخرها مجموعين منقوصًا من هذا المسطح واحد وبين المسطح الكائن من ضرب العدد الرابع والثالث منها غير واحد مجموعين في العدد الثاني والثالث غير واحد مجموعين.

فلتكن أربعة أعداد متوالية على نسبة الضعف، وهي آ ب جـ د، وأقلها عدد آ، وليكن المسطح الكائن من / ضرب عدد د في عددي د آ مجموعين ب-١٧٨-و مسطح ه، والمسطح الكائن من ضرب عددي د جـ غير واحد في عددي ب جـ غير واحد مسطح و؛ فأقول: إن المجتمع من ضرب عدد د في عددي آ د غير واحد مثل المجتمع من ضرب عدد جـ في فضل ما بين عدد ه منقوصًا منه واحد وبين عدد و./



برهان ذلك: أن أعداد آ ب جـ د متوالية على نسبة الضعف، وعدد آ هو ا-١١٩-و أقلها، فالعدد المجسم الكائن من ضرب عدد جـ في العدد المسطح الكائن من

1 مجموعة: ناقصة [ب] / فالسطح: فالمسطح [ا] – 2 وهو: الذي هو [ا] / السطح: المسطح [ا] – 3 د آ: آ د [ا] – 5 آخرها: احدها [ا، ب] / غير واحد مجموعين: مجموعين غير واحد [ا] – 5-6 مثل المجتمع: من المسطح الكائن [ا] – 6 العدد: ناقصة [ا] / منها: ناقصة [ا] – 7 منقوصًا: منقوص [ا] / المسطح: السطح [ب] – 8 منها: ناقصة [ا] / غير واحد مجموعين: مجموعين غير واحد [ا] – 9 العدد: ناقصة [ب] / الثاني والثالث غير واحد مجموعين: الثالث والثاني مجموعين غير واحد [ا] – 11 د آ: آ د [ا] – 13-15 د في ... عدد و: جـ في فضل ما بين عدد ه منقوص منه واحد وبين العدد و مثل المجتمع من ضرب عدد د في عددي آ د مجموعين غير واحد [ا] – 16 على: غير [ا] – 16-17 وعدد آ هو أقلها: ناقصة [ب] – 17 العدد: ناقصة [ا].

de la somme des nombres d et c par la somme des nombres b et c est égal au nombre solide obtenu à partir du produit du nombre c par le nombre plan obtenu à partir du produit du nombre d par la somme des nombres a et d, qui est le <nombre> plan e. De même le nombre plan obtenu à partir du produit du nombre c par le nombre b plus d plus le double du nombre c est égal au nombre plan obtenu à partir du produit du nombre d par la somme des deux nombres a et d, qui est le nombre e.

Si nous retranchons ces deux nombres plans égaux des deux nombres solides égaux que nous avons mentionnés, les restes sont égaux. Le nombre plan obtenu du produit du nombre c par les nombres b plus d plus le double du nombre c, si on le retranche du nombre solide obtenu du produit du nombre c par le nombre plan formé par le produit de la somme des nombres d et c par la somme des nombres b et c, il reste le produit du nombre c par le nombre plan obtenu du produit de la somme des deux nombres d et c par la somme de b et c, une fois retranché de ce produit le nombre b plus d plus le double du nombre c. Le nombre plan e, qui est égal au produit de l'unité par lui, si on le retranche du <nombre> solide obtenu du produit du nombre c par le nombre e, il reste le produit du nombre c moins un par le nombre e. Donc le produit du nombre c par le produit de la somme des nombres d et c par la somme des nombres b et c, une fois retranché de ce produit les nombres b et d et le double du nombre c, est égal au produit du nombre c moins un par le nombre e. Mais le produit de la somme des nombres d et c par la somme des nombres b et c, si on en retranche les nombres b, d et le double du nombre c, alors le reste sera égal au produit du nombre d plus c moins un par le nombre b plus c moins un, duquel produit on retranche un. Mais ce produit est le nombre f. Le produit du nombre c par le nombre plan f, une fois retranché un du nombre f, est

ضرب عددي د جـ مجموعين في عددي ب جـ مجموعين مثل العدد المجسم الكائن من ضرب عدد جـ في العدد المسطح الكائن من ضرب عدد د في عددي ا د مجموعين، الذي هو مسطح ه. وأيضًا، فإن العدد المسطح الكائن من ضرب عدد جـ في عددي ب د مع مثلي عدد جـ مجموعة مثل العدد المسطح الكائن من ضرب عدد د في عددي ا د مجموعين، الذي هو عدد ه.

فإن نقصنا هذين العددين المسطحين المتساويين من العددين المجسمين المتساويين اللذين ذكرنا، كان ما يبقى متساويًا. فأما العدد المسطح الكائن من ضرب عدد جـ في عددي ب د مع مثلي عدد جـ، فإنه إذا نقص من العدد المجسم المجتمع من ضرب عدد جـ في المسطح الكائن من ضرب عددي د جـ مجموعين في عددي ب جـ مجموعين، بقي المجتمع من ضرب عدد جـ في المسطح الكائن من ضرب عددي د جـ مجموعين في ب جـ مجموعين بعد أن ينقص من هذا المسطح عددا ب د ومثلا عدد جـ. وأما عدد ه المسطح الذي هو مثل ضرب الواحد فيه، فإنه إذا نقص من المجسم المجتمع من ضرب عدد جـ في عدد ه، بقي المجتمع من ضرب عدد جـ غير واحد في عدد ه. فيكون المجتمع من ضرب عدد جـ في المسطح الكائن من ضرب عددي د جـ مجموعين في عددي ب جـ مجموعين، بعد أن ينقص من هذا المسطح عددا ب د ومثلا عدد جـ، مثل المجتمع من ضرب عدد جـ غير واحد في عدد ه. ولكن المسطح الكائن من ضرب عددي د جـ مجموعين في عددي ب جـ مجموعين، إذا نقص منه عددا ب د ومثلا عدد جـ، فإن الباقي يكون مثل المسطح المجتمع من ضرب عددي د جـ غير واحد في عددي ب جـ غير واحد منقوصًا من هذا السطح واحد. وهذا المسطح هو عدد و، فالمجتمع من ضرب عدد جـ في عدد و المسطح، منقوصًا من عدد و واحد، مثل المجتمع من

4 مجموعة: ناقصة [ب] – 5 مجموعين: ناقصة [ب] – 8 العدد: ناقصة [ب] – 16 ب: د [ب] – 10 من «بقي المجتمع» إلى «ه و» صفحة 139، سطر 8: «بقي مثل ضرب فضل المسطح الكائن من ضرب عددي د جـ مجموعين في عددي ب جـ مجموعين على عددي ب د ومثلي عدد جـ في عدد جـ لكن عددا ب د ومثلا عدد جـ مثل عددي ب جـ مجموعين ومثل عددي جـ د مجموعين. فالباقي إذاً مثل ضرب فضل المسطح الكائن من ضرب عددي ب جـ مجموعين في عددي جـ د مجموعين على عددي ب جـ مجموعين وعددي جـ د مجموعين في عدد جـ. لكن فضل ما بين المسطح الكائن من ضرب عددي ب جـ مجموعين في عددي جـ د مجموعين وعددي ب جـ مجموعين وعددي جـ د مجموعين هو مثل المسطح الكائن من ضرب عددي ب جـ مجموعين غير واحد في عددي جـ د مجموعين غير واحد منقوصًا (منقوص .ms) من هذا المسطح واحد. وهذا المسطح غير واحد هو

donc égal au produit du nombre c moins un par le nombre plan e. Si nous leur ajoutons un ajout commun, le produit de l'unité par le nombre e, alors le produit du nombre c par le nombre f, une fois retranché un du nombre f, plus le nombre e, est égal au produit du nombre c [B-178v] par le nombre e.

Si nous retranchons de la somme ce qui est commun, c'est-à-dire le produit du nombre c par le nombre f, le reste, qui est le nombre e, duquel on a retranché le produit du nombre c par l'unité, est égal au reste, qui est le produit du nombre c par la différence entre les nombres e et f.

Si nous retranchons également ce qui est commun, c'est-à-dire le produit du nombre c par l'unité, le reste, qui est le nombre e, duquel on a retranché le double du produit du nombre c par l'unité, sera égal au reste, qui est le produit du nombre c par la différence entre les nombres e et f moins l'unité. Mais le double produit du nombre c par l'unité est égal au produit du nombre d par l'unité une seule fois, car le nombre d est le double du nombre c. Ainsi le nombre e, duquel on retranche le nombre d, est égal au produit du nombre c par la différence entre les nombres e et f moins l'unité. Mais le nombre e était égal au produit du nombre d par la somme de

ضرب عدد جـ غير واحد في عدد ه المسطح. وإذا زدنا عليهما جميعًا زيادة مشتركة، وهي ما يجتمع من ضرب الواحد في عدد ه، كان المجتمع من ضرب عدد جـ في عدد و منقوصًا من عدد و واحد مع عدد ه مثل المجتمع من ضرب عدد جـ / في عدد ه. ب-١٧٨-ظ

وإذا نقصنا منها جميعًا نقصانًا مشتركًا، وهو المجتمع من ضرب عدد جـ في عدد و، كان الباقي وهو عدد ه، منقوصًا منه ما يجتمع من ضرب عدد جـ في الواحد مثل الباقي، وهو المجتمع من ضرب عدد جـ، في فضل ما بين عددي ه و.

وإذا نقصنا أيضًا منهما جميعًا نقصانًا مشتركًا، وهو ما يجتمع من ضرب عدد جـ في الواحد، كان الباقي، وهو عدد ه، منقوصًا منه ما يجتمع من ضرب عدد جـ في الواحد مرتين، مثل الباقي وهو المجتمع من ضرب عدد جـ في فضل ما بين عددي ه و غير الواحد. لكن المجتمع من ضرب عدد جـ في الواحد مرتين مثل المجتمع من ضرب عدد د في الواحد مرة واحدة، لأن عدد د ضعف عدد جـ. فيصير عدد ه منقوصًا منه عدد د مثل المجتمع من ضرب عدد جـ في فضل ما بين عددي ه و غير واحد. ولكن عدد ه قد كان مثل المجتمع من ضرب عدد د في عددي ا د مجموعين، فيكون المجتمع من ضرب

مثل عدد و غير واحد. فالباقي إذاً ضرب عدد جـ في عدد و غير واحد. وأما العدد المسطح الذي هو عدد ه إذا نقص من المجسم المجتمع من ضرب عدد جـ في مسطح ه، فإن الباقي مثل ضرب عدد جـ غير واحد في عدد ه، فضرب عدد جـ في عدد و غير واحد مثل ضرب عدد جـ غير واحد في عدد ه. فإذا زدنا عليهما زيادة مشتركة، وهي ما يجتمع من ضرب الواحد في عدد ه المسطح، كان المجتمع من ضرب عدد جـ كله في عدد ه مثل ضرب عدد جـ في عدد و غير واحد / مزيد على ا-١١٩-ظ ذلك عدد ه، فضرب فضل مسطح ه على مسطح و غير واحد في عدد جـ مساوٍ لعدد ه. فإذا نقصنا منهما جميعًا نقصانًا مشتركًا وهو المجتمع من ضرب عدد جـ في الواحد، كان الباقي عدد ه 〈منقوصًا〉 منه ضرب الواحد في عدد جـ مرة واحدة مثل الباقي وهو المجتمع من ضرب عدد جـ في فضل ما بين عددي ه و» [ا] – 9 جميعًا: ناقصة [ا] – 12 عددي ه و غير الواحد: مسطح ه غير واحد وعدد و [ا] – 13 واحدة: ناقصة [ب] – 14 ضعف: مثلا [ا] – 15 عددي ه و غير واحد: عدد ه غير واحد وعدد و [ا] / ولكن: لكن [ا] – 15-16 مثل المجتمع: مجتمعاً [ا] – 16 مجموعين: ناقصة [ب].

a et de *d* ; donc le produit du nombre *d* par la somme des nombres *a* et *d*, duquel on retranche le nombre *d* – ce qui est égal au produit du nombre *d* par la somme des nombres *a* et *d* moins un –, est égal au produit du nombre *c* par la différence entre les nombres *e* et *f* moins un. Mais la différence entre les nombres *e* et *f* moins un est égale à la différence entre le nombre *e* moins un et le nombre *f*. Par conséquent, le produit du nombre *d* par la somme des nombres *a* et *d* moins un est égal au produit du nombre *c* par la différence entre le nombre *e* moins un et le nombre *f*. Ce qu'il fallait démontrer. [O-295^r, K-20^v]

– **10** – <Théorème> : Nous voulons montrer comment trouver des nombres amiables à volonté.

Posons les nombres successifs selon le rapport du double à partir de un, avec un qui les précède ; soient les nombres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Nous continuons à les additionner successivement, y compris l'unité, comme nous le faisons pour déterminer les nombres parfaits. Soit le nombre *g* la somme des <nombres> *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Ajoutons au nombre *g* le dernier des nombres additionnés, le nombre *e*, et que leur somme soit le nombre *h*. Retranchons du nombre *g* ce qui précède le nombre *e*, soit le nombre *d*, et que le reste soit le nombre *i*. Si chacun des nombres *h* et *i* est un nombre premier différent du nombre deux, alors c'est celui que nous voulons. Sinon, [A-120^r] nous allons au-delà des nombres additionnés, jusqu'à d'autres, jusqu'à ce que nous aboutissions à deux nombres qui soient des nombres premiers. Que les deux nombres *h* et *i* soient premiers et qu'aucun d'eux ne soit le nombre deux. Multiplions l'un par [B-179^r] l'autre et que le produit soit le nombre *k*. Multiplions le nombre *k* par le dernier des nombres qu'on avait

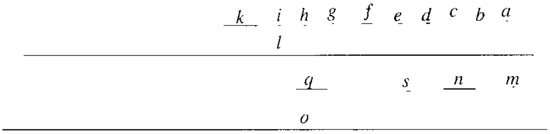
عدد د في عددي ا د، منقوصاً منه عدد د، وذلك مثل المجتمع من ضرب عدد د في عددي ا د غير واحد، مساوياً للمجتمع من ضرب عدد جـ في فضل ما بين عددي ه و غير واحد. ولكن فضل ما بين عددي ه و غير واحد هو مثل فضل ما بين عدد ه غير واحد وبين عدد و. فالمجتمع إذاً من ضرب عدد د في عددي ا د غير واحد مثل المجتمع من ضرب عدد جـ في عدد فضل ما بين عدد ه غير واحد وبين عدد و؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ع-٢٩٥-و
ك-٢٠-ظ
– ي – نريد أن نبين كيف نجد أعداداً متحابة كم شئنا.

فنضع أعداداً متوالية على نسبة الضعف من الواحد ومعها الواحد يقدمها؛ ولتكن أعداد ا ب جـ د ه. ولا نزال نجمعها على الولاء والواحد معها كما نفعل في استخراج الأعداد التامة. فلتكن جملة ا ب جـ د ه إذا جمعت عدد ز. ونزيد على عدد ز آخر الأعداد التي جمعت، وهو عدد ه، ولتكن جملتها عدد ح. ولننقص من عدد ز ما يلي عدد ه قبله، وهو عدد د، وليكن الباقي عدد ط. فإن كان كل واحد من عددي ح ط عدداً أولاً غير عدد الاثنين، فهو الذي نريد. وإلا / تجاوزنا الأعداد التي جمعت إلى غيرها حتى ننتهي إلى ما ا-١٢٠-و يكون هذان العددان منه عددين أولين. فليكن عددا ح ط أولين وليس واحد منهما عدد الاثنين. ونضرب أحدهما في / الآخر، وليكن المجتمع من ب-١٧٩-و ذلك عدد كـ. ونضرب عدد كـ في آخر الأعداد التي كانت جمعت، وهو عدد

1-6 منقوصاً ... نبين: مجموعين غير واحد مساوياً (مساو .ms) لعدد ه منقوصاً منه عدد د. وعدد ه منقوصاً منه عدد د مثل المجتمع من ضرب عدد جـ في فضل ما بين عدد ه غير واحد وعدد و. فضرب عدد د في عددي ا د مجموعين غير واحد مثل ضرب عدد جـ في فضل ما بين عدد ه غير واحد وعدد و؛ وذلك ما أردنا أن نبين [ا] – 2 د (الأولى): و [ب] / د (الثانية): ب [ب] – 6 و: د [ب] – 7 ي: يجـ [كـ] / ي ... نجد: قال صاحب الاستكمال إذا أردنا أن نجمع [ع] / نبين كيف نجد: نبين، وكتب فوقها «نجد» [ك] / أعداداً: اعداد [ا] – 8 فنضع: فإن نضع [ع] / أعداداً: اعداد [ا] / يقدمها: ناقصة [ا] – 9 أعداد: ناقصة [ب، ك] / ه: كتب بعدها «و» [ا، ك] ناقصة [ع]؛ كتب ناسخ [ك] الحروف كما ينطق بها، وكذلك ناسخ [ع] – 10 ه: ناقصة [ع] – 11 ز (الأولى): روح [ع] – 12 ح: ها [ع] / ولننقص: وننقص [ا، ك] وانقص [ع] / عدد (الرابعة): ناقصة [ب، ك، ع] – 13 عددي: أعداد ز [ا] / عدداً: ناقصة [ع] عدا [ب] / أولاً: اول [ب] / عدد: ناقصة [ا، ع] – 13-14 فهو الذي نريد: ناقصة [ع] – 14 نريد: ناقصة، وكتب في الهامش «يزيد» مع صح [ك] / الأعداد: هنا يتوقف نص مخطوطة [ك] – 15 هذان .. أولين: هذه الأعداد منه أوائل [ا] / عددا: عدا [ب] / وليس: ليس [ع] – 16 واحد منهما عدد الاثنين: عدد الاثنين واحد منهما [ب] – 16-17 من ذلك: منها [ع] – 17 ونضرب عدد كـ: ناقصة [ع].

additionnés, qui est le nombre e, et que le produit soit le nombre ℓ. On a ainsi un seul nombre, que nous reconnaissons et que nous retenons. De même, si nous additionnons le nombre qui suit le nombre e, parmi les nombres qu'on a considérés, selon le rapport du double, soit le nombre f, avec celui qui précède de un le dernier des nombres additionnés, soit le nombre c, et que leur somme soit le nombre m ; que le produit du nombre m par le nombre f soit le nombre n, duquel on retranche un ; nous posons le reste le nombre s. Alors, si le nombre s est un nombre premier, c'est celui que nous voulons. Sinon, nous dépassons les nombres qu'on a additionnés jusqu'à aboutir à celui qui fera de ce nombre ainsi que de chacun des nombres précédemment mentionnés[2], un nombre premier. Soit s un nombre premier ; nous le multiplions [O-295^{v}] par le nombre e, que le produit soit le nombre o. Je dis que les nombres ℓ et o sont deux nombres amiables.

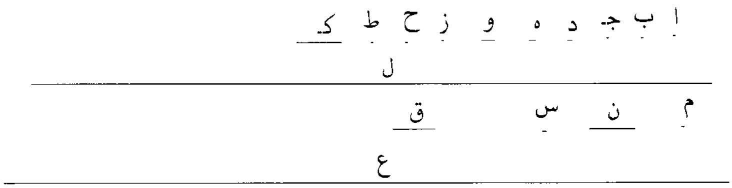


Démonstration : On avait additionné des nombres successifs selon le rapport du double à partir de l'unité, y compris l'unité, a, b, c, d, e ; leur somme était alors le nombre g. Puis on a multiplié par le plus grand des nombres additionnés, le nombre e, un autre nombre parmi les nombres premiers, le nombre s, plus grand que le nombre g ; on a eu pour produit le nombre o. Le nombre o est donc un nombre déficient[3] et son défaut est égal à l'excédent du nombre s sur le nombre g. Si nous posons cet excédent le nombre p, alors la somme des nombres p et g sera égale au nombre s. Mais le nombre n excède de un le nombre s, donc la somme des nombres p et g plus un est égale au nombre n. Mais le nombre n est le produit du nombre f

[2] Il s'agit des nombres h et i.

[3] On trouve à cet endroit dans le manuscrit [A] la phrase suivante : « d'après ce qu'on a établi au cours de la démonstration de la sixième proposition de ce livre » ; ce qui est exact. Cette phrase mentionnée dans un seul manuscrit pourrait avoir été ajoutée par le copiste de [A] ou par l'un de ses ancêtres.

هَ، وليكن المجتمع من ذلك عدد لَ، فيكون هذا عدداً واحداً، نقف عليه ونحفظه. وأيضًا، فإنا نجمع العدد الذي يتلو عدد هَ من الأعداد التي أخذت على نسبة الضعف، وهو عدد وَ، مع ما قبل آخر الأعداد التي جمعت بواحد، وهو عدد جَ، وليكن جميعهما عدد مَ، وليكن المجتمع من ضرب عدد مَ في عدد وَ عدد نَ وننقص منه واحداً، ونجعل الباقي عدد سَ. فإن كان عدد سَ عدداً أولاً، فهو الذي نريد. وإلا تجاوزنا الأعداد التي جمعت حتى ننتهي إلى ما يصير هذا العدد والأعداد التي تقدم ذكرها كل واحد منها عدداً أولاً. فليكن سَ عدداً أولاً، ونضربه / في عدد هَ، وليكن المجتمع من ذلك عدد عَ؛ ع-٢٩٥-ظ
فأقول: إن عددي لَ عَ عددان متحابان.



برهان ذلك: أنه قد جمعت أعداد متوالية على نسبة الضعف من الواحد والواحد معها، وهي اَ بَ جَـ دَ هَ؛ فكانت جملتها عدد زَ. ثم ضرب في العدد الأكثر من الأعداد التي جمعت، وهو عدد هَ، عدد آخر من الأعداد الأول، وهو عدد سَ وهو أكثر من عدد زَ. فاجتمع من ذلك عدد عَ، فعدد عَ عدد ناقص ومبلغ نقصانه مثل زيادة عدد سَ على عدد زَ. وإذا جعلنا هذه الزيادة عدد فَ، صار عددا فَ زَ مجموعين مثل عدد سَ. وعدد نَ يزيد على عدد سَ واحداً، فعددا فَ زَ مجموعين مع الواحد مثل عدد نَ. ولكن عدد نَ قد

1 من ذلك عدد: ناقصة [ع] / نقف عليه: ناقصة [ع] فقف عليه [ا] – 2 ونحفظه: فنحفظه [ع] واحفظه [ا] / وأيضًا: أيضًا [ع] / يتلو: يتلوا [ا، ب] – 3 بواحد: بعد و واحد [ع] – 4 وهو عدد جَ: ناقصة [ب] / عدد (الثلاث): ناقصة [ع] / جميعهما: جميعا [ع] – 5 عدد (الأولى): ناقصة [ع] / وَ عدد: دَ وعدد [ب] / منه: ناقصة [ب] / ونجعل: وليكن [ا] / عدد (الرابعة): ناقصة [ب، ع] – 6 عدداً: ناقصة [ع] / أولاً: اول [ب] / إلى: مكررة [ع] – 7 والأعداد ... منها: ناقصة [ب، ع] / عدداً: منه [ع] – 8 وليكن: فيكون [ا] / من ذلك عدد: ناقصة [ع] – 9 عددان: ناقصة [ا، ع] / متحابان: متحابين [ا] – 10 برهان ذلك: وبرهان ذلك [ا] وبرهانه [ع] / قد: اذا [ع] – 11 معها: فيها [ب] – 13 عدد (الأولى والثانية): ناقصة [ع] – 14 ناقص: كتب بعدها «كالذي تبين في برهان الشكل السادس من هذا الكتاب» [ا] / جعلنا: جمعنا [ب] – 15 صار: ناقصة [ع] / عددا: ناقصة [ا] فعددا [ع] / نَ: رَ [ب] – 16 واحداً: واحد [ب] / فعددا: فعدد [ع] / نَ: رَ [ب].

par le nombre m. Donc la somme des nombres p, g et un est égale au produit du nombre f par le nombre m. Mais nous avons posé le nombre m égal à la somme des nombres f et c. Donc la somme des nombres p, g et l'unité est égale au produit du nombre f par la somme des nombres f et c. Mais le nombre g plus l'unité égale le nombre f, donc la somme des nombres p et f est égale au produit du nombre f par la somme des nombres f et c. Si on ôte de tous deux le nombre f, le reste, qui est le nombre p, sera égal au reste, qui est le produit du nombre f par la somme des nombres f et c moins un. Mais la somme des nombres f et c moins un est égale à la somme des nombres g et c car f excède g de un. Donc le nombre p [A-120v] est égal au produit du nombre f par la somme des nombres g et c.

De même on avait additionné des nombres successifs selon le rapport du double, commençant par l'unité, y compris l'unité, les nombres a, b, c, d, e ; leur somme était le nombre g ; puis on a multiplié par le plus grand nombre parmi [B-179v] les nombres additionnés, le nombre e, un nombre plan dont les deux côtés sont deux nombres premiers différents, autres que deux, le nombre k, dont les deux côtés sont les nombres h et i ; on a ainsi obtenu le nombre ℓ. Le nombre plan k est inférieur au produit de la somme des deux nombres h et i [O-296r] par le nombre g, auquel on ajoute le nombre g, de la somme du produit du nombre i par le nombre g et du produit du nombre h par l'excédent du nombre g sur le nombre i, somme à laquelle on a ajouté le nombre g. Le nombre ℓ est par conséquent un nombre abondant et son excédent est égal à la somme du produit du nombre i par le nombre g et du produit du nombre h par l'excédent du nombre g sur le nombre i, somme à laquelle on a ajouté le nombre g. Si nous posons la somme de cet excédent que nous avons mentionné, égale au nombre u, il est clair que, pour ces nombres que nous avons mentionnés : parmi eux, le nombre i est égal au nombre g duquel on a retranché le nombre d ; le nombre h est égal à la somme des nombres g et e ; l'excédent du nombre g sur le nombre i est

كان مجتمعًا من ضرب عدد و في عدد م. فعددا ف ز مجموعين مع الواحد مثل ما يجتمع من ضرب عدد و في عدد م. وعدد م قد كنا جعلناه مثل عددي و جـ مجموعين، فعددا ف ز مع الواحد مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ. لكن عدد ز مع الواحد مثل عدد و، فعددا ف و مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ. فإذا أسقطنا منهما جميعًا عدد و، كان الباقي وهو عدد ف، مثل الباقي، وهو المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ غير واحد. لكن عددي و جـ غير واحد مثل عددي ز جـ مجموعين، لأن و يزيد على ز واحداً، فعدد/ ف مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي ز جـ مجموعين. ا-١٢٠-ظ

وأيضًا، فإنه قد جمعت أعداد متوالية على نسبة الضعف مبتدئة من الواحد، والواحد فيها، وهي أعداد ا ب جـ د ه، فكانت جملتها عدد ز. ثم ضرب في العدد الأكثر من / الأعداد التي جمعت، وهو عدد ه، عدد مسطح ضلعاه عددان أولان مختلفان غير الاثنين، وهو عدد ك، الذي ضلعاه عددا ح ط، فاجتمع عدد ل. وعدد ك المسطح أقل من المجتمع من ضرب عددي ح ط / مجموعين في عدد ز مزيداً على المجتمع عدد ز بمثل المجتمع من ضرب عدد ط في عدد ز ومن ضرب عدد ح في زيادة عدد ز على عدد ط مزيداً على جملة ذلك عدد ز. فعدد ل إذاً عدد زائد، ومبلغ زيادته مثل المجتمع من ضرب عدد ط في عدد ز ومن ضرب عدد ح في زيادة عدد ز على عدد ط مزيداً على جملة ذلك عدد ز. وإذا جعلنا جملة هذه الزيادة التي ذكرنا عدد ص، كان بينًا أن هذه الأعداد التي ذكرنا: أما عدد ط منها، فهو مثل عدد ز منقوصًا منه عدد د؛ وأما عدد ح، فهو مثل عددي ز ه مجموعين؛ وأما زيادة ب-١٧٩-ظ ع-٢٩٦-و

2-1 فعددا ... عدد م: ناقصة [ا] – 2 قد كنا: كما [ا، ع] – 3 فعددا: فعدد [ع] – 6 الكائن: الذي [ا] – 7 عددي: عددا [ا، ع] – 8 لأن: ولان [ع] / واحداً: واحد [ب] – 10 مبتدئة: ومبتدئة [ا] – 11 أعداد: ناقصة [ب، ع] / فكانت: وكان [ع] / عدد: ناقصة [ع] – 12 العدد: أثبتها في الهامش [ع] / عدد مسطح: كتب قبلها «فاجتمع» [ع] – 13 غير: وليس واحد منهما عدد [ا] / عددا: ناقصة [ع] – 14 المسطح: فالمسطح [ا] – 15 مزيداً: مزاد [ا] / بمثل: مثل [ب] – 16 عدد (الخمس): ناقصة [ع] / مزيداً: مزاد [ا] – 17-19 فعدد ل ... ز: ناقصة [ا، ع] – 19 وإذا: اذا [ع] – 20 كان: وكان [ا] فكان [ع] / أن: لان [ع] / مثل: في الهامش [ب] – 21 منقوصًا: ومنقوصا [ع] / عدد (الأولى): ناقصة [ع] / ه: حا [ع] / وأما: فاما [ع].

égal au nombre d. Le nombre u est donc égal au produit du nombre g duquel on retranche le nombre d par le nombre g plus le produit de la somme des nombres g et e par le nombre d, somme à laquelle on ajoute le nombre g. Tout cela est égal au produit du nombre g par lui-même plus le produit du nombre e par le nombre d auquel on ajoute le nombre g. Le nombre u est donc égal au produit du nombre g par lui-même plus le produit du nombre e par le nombre d, somme à laquelle on ajoute le nombre g. Mais le produit du nombre e par le nombre d est égal au produit du nombre f par le nombre c, car les quatre nombres c, d, e, f sont proportionnels. Le nombre u est donc égal au produit du nombre g par lui-même plus le produit du nombre f par le nombre c, somme à laquelle on ajoute le nombre g.

Mais la somme du produit du nombre g par lui-même et du nombre g est égale au produit de la somme du nombre g plus un par le nombre g. Le nombre u est donc égal à la somme du produit du nombre g plus un par le nombre g et du produit du nombre f par le nombre c. Mais le nombre g plus un est égal au nombre f, donc le nombre u est égal à la somme du produit du nombre f par le nombre g et du produit du nombre f par le nombre c. Mais tout cela est égal au produit du nombre f par la somme des nombres g et c. Le nombre u est par conséquent égal au produit du nombre f par la somme des nombres g et c. De même le nombre ℓ est le produit du nombre k par [A-121^r] le nombre e et le nombre o est le produit du nombre e par le nombre s. Si nous posons la différence entre les nombres o et ℓ le nombre q, alors le nombre q sera égal au produit du nombre e par la différence entre les nombres s et k. [O-296^v] Mais le nombre s de ceux-ci était égal au nombre n diminué de un et le nombre k était le produit du nombre h par le nombre i dont [B-180^r] l'un était égal à la somme des nombres e et g et l'autre égal à l'excédent du nombre g sur le nombre d. Le

عدد ز على عدد ط، فهي مثل عدد د. فإن عدد ص يكون مثل المجتمع من ضرب عدد ز منقوصًا منه عدد د في عدد ز ومن ضرب عددي ز ه مجموعين في عدد د مزيداً على جملة ذلك عدد ز. وذلك كله مثل المجتمع من ضرب عدد ز في نفسه ومن ضرب عدد ه في عدد د مزيداً على جملة ذلك عدد ز، فعدد ص مثل المجتمع من ضرب عدد ز في نفسه ومن ضرب عدد ه في عدد د مزيداً على جملة ذلك عدد ز. لكن المجتمع من ضرب عدد ه في عدد د مثل المجتمع من ضرب عدد و في عدد جـ لأن أعداد جـ د ه و الأربعة متناسبة. فعدد ص مثل المجتمع من ضرب عدد ز في نفسه ومن ضرب عدد و في عدد جـ مزيداً على جملة ذلك عدد ز.

لكن المجتمع من ضرب عدد ز في نفسه مع عدد ز إذا جمعا مثل المجتمع من ضرب عدد ز وزيادة واحد في عدد ز، فعدد ص مثل المجتمع من ضرب عدد ز وزيادة واحد في عدد ز مع المجتمع من ضرب عدد و في عدد جـ. لكن عدد ز مع الواحد مثل عدد و، فعدد ص مثل المجتمع من ضرب عدد و في عدد ز ومن ضرب عدد و في عدد جـ؛ وذلك كله مثل المجتمع من ضرب عدد و في عددي ز جـ. فعدد ص إذاً مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي ز جـ مجموعين. وأيضًا، فإن عدد ل مجتمع من ضرب عدد كـ في / عدد ه وعدد ع مجتمع من ضرب عدد ه في عدد س. فإذا جعلنا ا-١٢١-و
فضل ما بين عددي ع ل عدد ق، كان عدد ق مثل المجتمع من ضرب عدد ه في فضل ما بين عددي س كـ./ فأما عدد س منهما، فقد كان مثل عدد ن ع-٢٩٦-ظ
منقوصًا منه واحد؛ وأما عدد كـ، فقد كان مجتمعًا من ضرب عدد ح في عدد ط اللذين / أحدهما مثل عددي ه ز مجموعين والآخر مثل زيادة عدد ز ب-١٨٠-و

1 عدد (الأولى والثانية): ناقصة [ع] / فهي: فهو [ب] / فإن عدد: فعدد [ا] فان [ع] / يكون: اذا [ا] – 2 ز (الثالثة): د [ب] – 3 د: ناقصة [ع] / مزيداً: مزاد [ا] / وذلك: وهذا [ع] – 4 مزيداً: مزاد [ا] – 5 مثل: ناقصة [ب] /عدد (الثانية والثالثة) – 6 مزيداً: مزاد [ا] – 8 مثل المجتمع: هو [ع] / ومن: من [ع] – 10 لكن: ولكن [ا، ع] – 11 عدد: ناقصة [ع] / مثل: اذا مثل [ا] – 11-13 فعدد ... عدد و: ناقصة [ع] – 13 لكن: ولكن [ا] – 15-16 فعدد ... جـ: ناقصة [ا] – 16 عددي: عدد [ع] / عدد (الثانية): ناقصة [ب] – 17 كـ: ز [ب] / عدد (الثالثة): ناقصة [ع] / ه في عدد س: س في عدد ه [ا] – 18 ع ل: لام عين [ع] / كان: وكان [ع] / عدد (الثالثة): ناقصة [ا] – 20 واحد: واحداً [ا] / فقد كان: وكان [ع] – 21 ه ز: ز ه [ا] / مجموعين: ناقصة [ا] / عدد: ناقصة [ع].

nombre q sera donc égal au produit du nombre e par l'excédent du nombre n moins un sur le produit de la somme des nombres g et e par l'excédent du nombre g sur le nombre d. Mais le nombre n était le produit du nombre f par le nombre m, donc le nombre q est égal au produit du nombre e par la différence entre le produit du nombre f par le nombre m, duquel on retranche un, et le produit de la somme des nombres g et e par l'excédent du nombre g sur le nombre d. Mais parmi ces nombres, le nombre m est égal à la somme des nombres f et c, la somme des deux nombres g et e est égale aux nombres f et e moins un, car le nombre f excède de un le nombre g. Quant à l'excédent du nombre g sur le nombre d, il est égal à ce même excédent du nombre f moins un sur le nombre d. Le nombre q sera donc égal au produit du nombre e par la différence entre le produit du nombre f par la somme des nombres f et c diminué de un et le produit de la somme de f et e moins un par l'excédent du nombre f moins un sur le nombre d. Mais l'excédent du nombre f moins un sur le nombre d est égal à la somme des nombres d et e moins un, car les nombres d, e, f sont successifs selon le rapport du double. Le nombre q sera donc égal au produit du nombre e par la différence entre le produit du nombre f par la somme des nombres f, c, diminué de un, et le produit de la somme des nombres f et e moins un par la somme des nombres d et e moins un. Mais le produit du nombre e par la différence entre le produit du nombre f par la somme des nombres f, c, diminué de un, et le produit de la somme des nombres f et e moins un par la somme des nombres d et e moins un est égal au produit du nombre [O-297^r] f par la somme des nombres f et c moins un, car les nombres c, d, e sont successifs selon le rapport du double. Le nombre q est donc égal au produit du nombre f par la somme des nombres f et c moins un ; mais la somme des nombres [A-121^v] f et c moins un est égale à la

على عدد د. فيكون عدد ق مثل المجتمع من ضرب عدد ه في فضل ما بين عدد ن غير واحد وبين المسطح الكائن من ضرب عددي ز ه مجموعين في زيادة عدد ز على عدد د. لكن عدد ن قد كان مجتمعاً من ضرب عدد و في عدد م، فيكون عدد ق مثل المجتمع من ضرب عدد ه في فضل ما بين المسطح الكائن من ضرب عدد و في عدد م، منقوصاً من هذا المسطح واحد، وبين المسطح الكائن من ضرب عددي ز ه مجموعين في زيادة عدد ز على عدد د. وهذه الأعداد، أما عدد م منها، فهو مثل عددي و جـ؛ وأما عددا ز ه، فهما مثل عددي و ه غير واحد، لأن عدد و يزيد على عدد ز واحداً. وأما زيادة عدد ز على عدد د، فهي مثل زيادة عدد و غير واحد على عدد د بمثل ذلك بعينه، فيكون عدد ق مثل المجتمع من ضرب عدد ه في فضل ما بين المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ منقوصاً من هذا المسطح واحد وبين المسطح الكائن من ضرب عددي و ه غير واحد في زيادة عدد و غير واحد على عدد د. لكن زيادة عدد و غير واحد على عدد د مثل عددي د ه غير واحد، لأن أعداد د ه و متوالية على نسبة الضعف، فيكون عدد ق مثل المجتمع من ضرب عدد ه في فضل ما بين المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ منقوصاً من هذا المسطح واحد وبين المسطح الكائن من ضرب عددي و ه غير واحد في عددي د ه غير واحد. ولكن المجتمع من ضرب عدد ه في فضل ما بين المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ منقوصاً من هذا المسطح واحد وبين المسطح الكائن من ضرب عددي و ه غير واحد في عددي د ه غير واحد مثل المسطح الكائن من ضرب عدد/ و في عددي و جـ غير واحد لأن أعداد جـ د ه [و] ع-٢٩٧-و
متوالية على نسبة الضعف، فيكون عدد ق مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي و جـ غير واحد. لكن عددي / و جـ غير واحد مثل عددي ا-١٢١-ظ

3 و: قاف [ع] – 3-4 و ... ضرب عدد: ناقصة [ا] – 5 منقوصاً ... واحد: منقص منه واحدا [ع] – 7 فهما: فهو [ب] – 8-9 لأن ... عدد د: ناقصة [ع] – 9 فهي: فهو [ب] – 10 د: ز [ب] / بمثل: لمثل [ب] / فيكون: يكون [ع] / ق: و [ب] – 12 واحد: واحداً [ا] / واحد وبين المسطح: ناقصة [ع] – 12-13 في زيادة عدد و غير واحد: ناقصة [ب] – 13 عدد (الأولى): ناقصة [ع] – 14 د ه و: و ه د حـ [ا] واو ها دال [ع] – 16 هذا: ذلك [ع] – 17 ه (الأولى): جيم، وكتب «ظ» فوقها [ع] – 17-20 في عددي د ه غير واحد ... د ه غير واحد: ناقصة [ب] – 19 واحد: واحداً [ا] – 21 [و]: وهي [ع] – 22-23 المسطح ... لكن عددي و جـ: مسطح عدد واو في عددي جيم واو [ع].

somme des nombres g et c car le nombre f excède de un le nombre g. Donc le nombre q est égal au produit du nombre f par la somme des deux nombres g et c. Or nous avons montré que chacun des nombres p et u est aussi égal au produit du nombre f par la somme des nombres g et c. Donc les trois nombres p, u, q sont égaux. Quant au nombre p, nous avons montré qu'il est égal au défaut de la somme des parties du nombre déficient o par rapport à lui. Quant au nombre q, il est le défaut du nombre ℓ par rapport au nombre o. Le nombre ℓ est par conséquent égal à la somme des parties du nombre o. De même nous avons montré que le nombre u est égal à l'excédent du nombre abondant ℓ par rapport à la somme de toutes ses parties ; mais le nombre q est l'excédent du nombre o sur le nombre ℓ. Le nombre o est par conséquent égal à la somme des parties du nombre ℓ. Mais le nombre ℓ est égal à la somme des parties du nombre o, donc les nombres ℓ et o sont amiables. Ce qu'il fallait démontrer. [B-180^{v}]

D'après ce que nous avons décrit, pour deux nombres associés parmi les nombres amiables, l'un est un nombre abondant, et c'est le plus petit, et l'autre est un nombre déficient, et c'est le plus grand. Et l'excédent de celui des deux qui est abondant est égal au défaut du déficient et cela est égal à la différence des deux nombres. Et si on considère toutes les parties de chacun d'eux qu'on additionne, la somme sera égale à la somme de ces deux nombres.

Le livre d'Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra sur les nombres appelés amiables est achevé, et il comporte dix propositions.

ز جـ، لأن عدد و يزيد على عدد ز واحداً، فعدد ق مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي ز جـ مجموعين. وقد كنا بينا أن كل واحد من عددي ف ص أيضًا مثل المسطح الكائن من ضرب عدد و في عددي ز جـ مجموعين، فأعداد ف ص ق الثلاثة متساوية. فأما عدد ف منها فقد بينا أنه مثل نقصان كل جزء لعدد ع الناقص إذا جمع ذلك عليه كله؛ وأما عدد ق، فهو نقصان عدد ل عن عدد ع، فعدد ل إذاً مساوٍ لكل جزء لعدد ع إذا جمع. وأيضًا، فإن عدد ص قد بينا أنه مثل زيادة كل جزء لعدد ل الزائد إذا جمع ذلك كله عليه؛ وعدد ق هو زيادة عدد ع على عدد ل، فعدد ع إذاً مساوٍ لكل جزء لعدد ل إذا جمع، وعدد ل مساوٍ لكل جزء لعدد ع إذا جمع، فعددا ل ع متحابان؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

وهو بين مما وصفنا أن كل عددين مقترنين من الأعداد المتحابة، فإن ب-١٨٠-ظ أحدهما عدد زائد وهو أقلهما والآخر عدد ناقص، وهو أكثرهما، وأن زيادة الزائد منهما مثل نقصان الناقص وإن ذلك يكون بمثل فضل ما بين العددين أنفسهما، وإنه إذا أخذ كل جزء لكل واحد منهما وجمع ذلك كله معًا، كانت جملة ذلك مثل ذينك العددين مجموعين.

تم كتاب أبي الحسن ثابت بن قرة في الأعداد التي تلقب بالمتحابة وهو عشرة أشكال.

1 واحداً: واحد [ب، ع] / المسطح الكائن من ضرب: مسطح [ع] – 2 و: ز [ب] – 3 المسطح الكائن من ضرب: مسطح [ع] – 5 إذا جمع ذلك عليه كله: اذا جمعت ونقص ذلك عنه [ا] / عليه كله: عنه [ع] / عن: عير [ا] – 7 جمع: جمعت [ا] – 8 جمع : جمعت [ا] / ذلك كله: ناقصة [ا] ذلك وزيد [ع] – 9 مساوٍ: ساوى [ا] / جمع: جمعت [ا، ع] كتب بعدها «يجب أن يكون» [ب] / مساوٍ: مساويًا [ب] – 9-10 وعدد ... جمع: ناقصة [ا] – 10 فعددا: فعدد [ع] – 11 وهو بين مما وصفنا: ومما وصفنا يتبين [ا] / مقترنين: متقارنين [ا] – 12 والآخر: والثاني [ا] – 13 بمثل: مثل [ا] – 14 جزء لك: ناقصة [ب] – 15 جملة ذلك: جملته [ب] / مجموعين: كتب بعدها «فافهم» [ا] – 16 أبي الحسن: ناقصة [ا] – 17 أشكال: نجد بعدها «كتبه أحمد بن محمد بن عبد الجليل بشيراز من نسخة أبي الحسن المهندس أيده الله في آخر خردادماه سنة ثمانٍ وثلاثين وثلاثمائة يزدجرد» [ب] «بحمد الله وعونه وصلواته على سيدنا نبينا محمد وآله الطاهرين وفرغت من كتابته بدمشق في رمضان سنة ٦٢٦ هجرية»؛ ونجد في الهامش بخط المراغي: « هذه الرسالة بعينها مسطورة في كتاب الاستكمال للمؤتمن خليفة أندلس وقد حررته وسميته الإكمال وهو الفصل الرابع من النوع الأول في العدديات منه. حرره الفقير إلى الله تعالى محمد بن سرتاق المراغي» [ا] – 11-17 وهو ... أشكال: آخر شرح المقالة التاسعة من كتاب أقليدس في الأصول والحمد لله وسلام على عبده الذي اصطفي [ع].

RÉSOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Roshdi RASHED

Ces quelques pages intitulées « Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques » ont une importance historique certaine : Thābit ibn Qurra y donne la première contribution en algèbre géométrique. L'expression, me semble-t-il, ne s'applique en effet à aucune étude, qu'elle soit grecque ou arabe, antérieure à celle d'Ibn Qurra, puisque l'algèbre géométrique ne pouvait voir le jour avant que le livre d'al-Khwārizmī fût combiné aux *Éléments* d'Euclide. Or c'est précisément cette combinaison que Thābit ibn Qurra, successeur du premier et réviseur de la traduction de l'ouvrage du second, a pu opérer. Rappelons succinctement quelques éléments de cette histoire.

Pour le fondateur de l'algèbre, al-Khwārizmī, l'algèbre, comme discipline mathématique indépendante de l'arithmétique et de la géométrie, est à la fois algorithmique et démonstrative[1]. À la différence de ce qui a lieu en géométrie, on n'entend pas démontrer la vérité d'un énoncé, mais on veut démontrer que l'algorithme qui permet de déterminer l'inconnue de l'équation à partir du connu est bien établi, qu'il est nécessaire et universel ; c'est-à-dire qu'il mène nécessairement à la solution et que celle-ci ne dépend pas des données particulières de l'équation, mais vaut quels que soient les coefficients.

Pour al-Khwārizmī, il ne suffit donc pas de vérifier l'algorithme en montrant qu'il est satisfait pour certaines valeurs de l'inconnue ; il faut établir par des déductions contraignantes que l'algorithme permet de déterminer l'inconnue. Cette démonstration doit donc, selon l'expression d'al-Khwārizmī, établir « la cause » (*al-'illa*) de l'algorithme[2], en théorie des équations aussi bien qu'en calcul algébrique. Or cette démonstration « par la cause » consiste à dériver l'algorithme des relations géométriques établies

[1] R. Rashed, *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, Librairie A. Blanchard, 2007.

[2] *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, p. 49 *sqq*.

entre les éléments d'une figure, délibérément construite afin de traduire géométriquement les notions primitives de l'algèbre ainsi que les relations qui les unissent et que décrit l'équation. Cette démonstration « par la cause » est fondée sur une traduction géométrique des identités suivantes :

$$x^2+bx=c \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c\ ;$$
$$x^2+c=bx \Leftrightarrow \left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\ ;$$
$$x^2=bx+c \Leftrightarrow \left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c.$$

Al-Khwārizmī trace alors les figures nécessaires, à partir desquelles il établit ces identités. Mais, non plus qu'Euclide dans le second livre des *Éléments*, il ne procède pas par la méthode d'application des aires, laquelle exige le recours à la théorie des proportions.

Or c'est ici qu'intervient la contribution de Thābit ibn Qurra dans ce petit traité. Pour fonder la « démonstration par la cause » sur des bases solides, il établit rigoureusement :

1° que l'application des aires telle qu'elle est pratiquée dans le sixième livre des *Éléments* est équivalente à une équation du second degré ;

2° qu'un problème de division d'une droite donnée, sous une condition exprimée par l'égalité de deux aires, conduit à une équation du second degré, résoluble par la méthode de l'application des aires ;

3° que l'on peut recourir, pour démontrer l'algorithme de solution d'une équation quadratique, à la langue et aux concepts de la théorie des proportions telle qu'elle est exposée dans le cinquième livre des *Éléments*.

C'est ainsi qu'il assure le primat de la géométrie et donne la première contribution en algèbre géométrique. Il sera suivi par Abū Kāmil, et bien d'autres plus tard.

Venons-en à présent au contenu du texte.

I. $x^2 + bx = c$

Le nombre inconnu x et le nombre connu b sont les mesures de deux segments avec la même unité : $AB = x$ et $BE = b$. On trace le carré $ABCD$ et on prolonge AB de la longueur BE. On achève le rectangle DBE. On a :

$$\text{aire } (ABCD) = x^2,\ \text{aire } (DE) = AB \cdot BE = bx,$$

donc

$$\text{aire } (CE) = x^2 + bx = c.$$

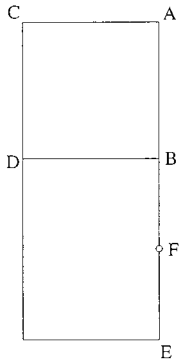


Fig. 1

Les connues sont $BE = b$ et aire $(CE) = c$. Thābit montre que l'on peut en déduire AB.

$$\text{Aire } (CE) = AC \cdot AE = AB \cdot AE = c.$$

Si F est le milieu de BE, on a en appliquant Euclide, *Éléments*, II.6,

$$AB \cdot AE + BF^2 = AF^2$$

ou

$$c + \frac{b^2}{4} = AF^2.$$

La longueur AF est donc connue, BF également ; on a donc

$$AB = AF - BF,$$

soit

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$$

Cette démonstration coïncide, pas à pas, avec l'algorithme des algébristes.

II. $x^2 + c = bx$

Comme dans le cas I, on considère un carré $ABCD$ de côté $AB = x$; on doit avoir $b > x$; on prolonge AB jusqu'en E tel que $AE = b$.

On a

$$\text{aire }(ABCD) = x^2,$$

$$\text{aire }(CE) = bx,$$

donc

$$\text{aire }(DE) = c.$$

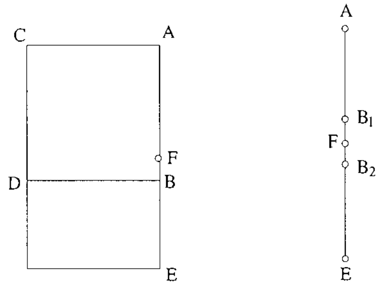


Fig. 2

Les éléments connus sont $AE = b$ et aire $(DE) = c$.

Comme dans le cas I, on peut en déduire AB en appliquant Euclide, *Éléments*, II.5. On a

$$\text{aire }(DE) = BD \cdot BE = AB \cdot BE = c.$$

Soit F le milieu de AE,

$$BA \cdot BE + BF^2 = AF^2,$$

soit

$$c + BF^2 = \frac{b^2}{4}$$

(ce qui implique $c \leq \frac{b^2}{4}$),

$$BF^2 = \frac{b^2}{4} - c.$$

La longueur BF est donc connue[3], et $AF = \frac{b}{2}$.

Les points A, E et F sont les points connus. On cherche B. Le point B peut se trouver entre A et F (B_1) ou au-delà de F (B_2), donc

[3] Pour que BF existe, il faut que $\frac{b^2}{4} \geq c$; Thābit suppose implicitement que $\frac{b^2}{4} > c$. On obtient alors deux solutions pour le point B. Dans le cas particulier où $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, les points B et F coïncident, on a $AB_2 = AB_1 = AF = \frac{1}{2}AE$, racine double $x = \frac{b}{2}$.

$$AB = AF \pm BF,$$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

On vérifierait que, dans les deux cas, $x < b$.

Cette démarche, comme la précédente, coïncide avec celle des algébristes.

III. $c + bx = x^2$

On considère un carré $ABCD$ de côté $AB = x$.

Il faut que $b < x$. On prend sur $[AB]$ le point E tel que $AE = b$. On a alors : aire $(ABCD) = x^2$ et aire $(CE) = bx$, et par conséquent aire $(ED) = c$.

On connaît

$$AE = b \text{ et aire } (ED) = c\ ;$$

$$\text{aire } (ED) = EB \cdot BD = EB \cdot AB = c.$$

De ces deux données, on peut déduire l'inconnue AB en appliquant Euclide, *Éléments*, II.6.

Soit F le milieu de AE. On a

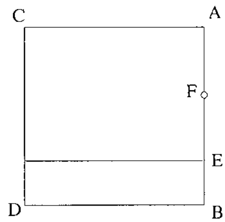


Fig. 3

$$BE \cdot BA + EF^2 = BF^2\ ;$$

or

$$EF = \frac{AE}{2} = \frac{b}{2},$$

donc

$$c + \frac{b^2}{4} = BF^2\ ;$$

BF est donc connue et $AB = AF + BF$; or $AF = \frac{b}{2}$, d'où

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Remarque : Le premier et le troisième cas correspondent à des équations qui ont des racines de signes contraires. On a obtenu la racine positive.

Le deuxième cas correspond à une équation qui a deux racines positives, lorsque $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$ (condition qui n'a pas été indiquée). On a obtenu les deux racines.

Ainsi comme al-Khwārizmī, et pour des siècles encore, Thābit ibn Qurra ne détermine que les racines positives de ces équations. L'interprétation géométrique choisie exclut les racines négatives.

HISTOIRE DU TEXTE

Nous avons établi ce texte à partir des cinq manuscrits suivants dont l'examen montre qu'ils représentent deux familles [T, S, Th] et [A, B] :

Istanbul, Topkapi Saray, Ahmet III 2041, fol. 245^{r}-246^{v}, noté [B]
Istanbul, Süleymaniye, Aya Sofya 2457, fol. 39^{r}-41^{v}, noté [A]
Meshhed, Āstān Quds 5258, fol. 1^{v}-2^{r}, noté [S]
Oxford, Bodleian Library, Thurston 3, fol. 139^{v}, noté [Th]
Téhéran, Majlis Shūrā, 2773, fol. 125-129, noté [T].

P. Luckey a établi ce texte et l'a traduit en allemand (« Thābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen », *Berichte über die Verhandl. der sächs. Akad. d. Wiss.*, 93, 1941, p. 93-114).

TEXTE ET TRADUCTION

Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques

Fī taṣḥīḥ masā'il al-jabr bi-al-barāhīn al-handasiyya

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Traité de Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra
Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques

Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra a dit : les principes auxquels se ramènent la plupart des problèmes de l'algèbre sont <au nombre> de trois.

Le premier principe est : un *c*arré[1] plus des racines égalent un nombre.

La manière de résoudre cela est par la proposition six du second livre de l'ouvrage d'Euclide, comme je le décris. Posons le *c*arré un carré [T-126] *ABCD* et posons dans *BE* autant de fois l'unité par laquelle on mesure les lignes, que le nombre supposé des racines. Complétons le rectangle *DE*. Il est clair que la racine est *AB*, étant donné que le *c*arré est le carré *ABCD*, et cela dans le domaine du calcul et du nombre, égal au produit de *AB* par l'unité, par laquelle on mesure les lignes ; donc le produit de *AB* par l'unité, par laquelle on mesure les lignes, est la racine, du point de vue du calcul et du nombre. Mais il y a dans *BE* autant de fois cette unité que le nombre supposé des racines, donc le produit de *AB* par *BE* est égal aux racines du problème, dans le domaine du calcul et du nombre. Mais le produit de *AB* par *BE* est le rectangle *DE* car *AB* est égale à *BD*, donc le rectangle *DE* est égal aux racines du problème, d'après cette voie. Le rectangle *CE* tout entier est donc égal au *c*arré plus les racines. Mais la somme du *c*arré et des

[1] carré rend *murabba'* et *c*arré rend *māl*.

بسم الله الرحمن الرحيم

ا-٣٩-و
ب-٢٤٥-و
ت-١٢٥
ث-١٣٩-ظ
س-١-ظ

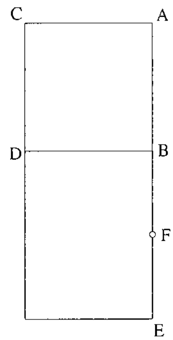
قول لأبي الحسن ثابت بن قرة في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية

قال أبو الحسن ثابت بن قرة: إن الأصول التي إليها ترجع أكثر مسائل الجبر ثلاثة.

فالأصل الأول منها هو مال وجذور تعدل عدداً.

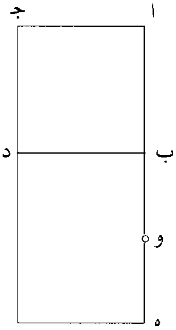
الوجه في استخراج ذلك بالشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب أوقليدس على ما أصف. نجعل المال مربع / ا ب جـ د، ونجعل في ب ه من ت-١٢٦ أضعاف الواحد الذي تقدر به الخطوط مثل العدة المفروضة للجذور. ونتمم سطح د ه. فمن البين أن الجذر هو ا ب إذ كان المال هو مربع ا ب جـ د، وذلك في باب الحساب والعدد، مثل ضرب ا ب في الواحد الذي تقدر به الخطوط. فضرب ا ب في الواحد الذي تقدر به الخطوط هو الجذر على جهة الحساب والعدد. ولكن في ب ه من هذه الآحاد مثل عدة الجذور المفروضة، فضرب ا ب في ب ه مساوٍ لجذور المسألة في باب الحساب والعدد. لكن ضرب ا ب في ب ه هو مسطح د ه لأن ا ب مثل ب د، فسطح د ه مساوٍ لجذور المسألة على هذه السبيل. فجميع سطح جـ ه مثل المال مع الجذور.

1 البسملة: ناقصة [ث] كتب بعدها «وبه نستعين» [س] – 4 قال: ناقصة [ب] / أبو: ابي [ت، س] / أبو ... إن: ناقصة [ا، ب، ث] – 6 هو: ناقصة [س] – 7-8 بالشكل ... أوقليدس: بشكل و من مقالة ب من الأصول [ت، ث، س] – 8 المال: أثبتها في الهامش مع «صح» [ث] / ا ب جـ د: ا د [ت، ث، س] / نجعل: ناقصة [ت، ث، س] – 9 الذي تقدر به الخطوط: المقدّر للخطوط [ت، ث، س] / مثل: فـ ا ب مثل [س] / العدة المفروضة للجذور: عدة الجذور [ت، ث، س] – 10 هو: ناقصة [ت، ث، س] / إذ: اذا [ت، س] / هو: ناقصة [ت، ث، س] / ا ب جـ د: آ [س] ا د [ت، ث] – 11 والعدد: والقدر [ت، س] / مثل ضرب: كضرب [ت، ث، س] – 11-12 الذي تقدر به الخطوط: المقدر للخطوط [ت، ث، س] – 12 فضرب ا ب: فـ ا ب [ت، ث، س] / الذي تقدر به الخطوط: المقدر [ت، ث، س] – 13 ولكن: وليكن [ت، ث، س] – 14 فضرب ا ب: فـ ا ب [ت، ث، س] – 15 ضرب: ناقصة [ت، ث، س] / مسطح: ناقصة [ت، ث، س] / لأن ا ب مثل ب د: ناقصة [ت، ث، س] – 16 لجذور: للجذور [ت، س].



racines est égale à un nombre connu, donc le rectangle *CE* [A-39v] est connu, et il est égal au produit de *EA* par *AB*, car *AB* est égale à *AC*. Le produit de *EA* par *AB* est donc connu ; mais la droite *BE* est connue, car le nombre de ses unités est connu. La chose revient donc à un problème géométrique donné : la droite *BE* est connue ; [B-245v] on lui ajoute *AB*, et le produit de *EA* par *AB* est connu. Or on a montré dans la proposition six du second livre des *Éléments* que, si on partage la droite *BE* en deux moitiés au point *F*, le produit de *EA* par *AB* plus le carré de *BF* est égal au carré de *AF*. Mais le produit de *EA* par *AB* est connu et le carré de *BF* est connu ; le carré de *AF* est donc connu et *AF* est connue. Si on en retranche *BF*, [T-127] qui est connue, il reste *AB* connue, qui est la racine ; et si on la multiplie par elle-même, on a le carré *ABCD* connu, qui est le *c*arré. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette démarche concorde avec la démarche des algébristes pour résoudre ce problème. En effet, lorsqu'ils prennent la moitié du nombre des racines, c'est comme lorsque nous prenons la moitié de la droite *BE* ; lorsqu'ils la multiplient par elle-même, c'est comme lorsque nous prenons le carré de la moitié de la droite *BE* ; lorsqu'ils ajoutent le nombre au produit, c'est comme lorsque nous ajoutons le produit de *EA* par *AB* pour obtenir de tout cela le carré de la somme de *AB* et de la moitié de la droite <*BE*> ; lorsqu'ils prennent la racine de la somme, c'est comme quand nous disons que la somme de *AB* et de la moitié de la droite <*BE*> est connue, étant



ولكن جميع المال والجذور مثل عدد معلوم، فسطح جـ ه / معلوم، وهو مثل ضرب ه ا في ا ب لأن ا ب مثل ا جـ. فضرب ه ا في ا ب معلوم؛ وخط ب ه معلوم لأن عدد آحاده معلوم. فقد رجع الأمر إلى مسألة هندسية مفروضة: وهي أن خط ب ه معلوم / وزيد عليه ا ب، وكان ضرب ه ا في ا ب معلومًا. وقد تبين في الشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب *الأصول* أنه إذا قسم خط ب ه بنصفين على نقطة و، صار ضرب ه ا في ا ب مع مربع ب و مثل مربع ا و. ولكن ضرب ه ا في ا ب معلوم، ومربع ب و معلوم، فمربع ا و معلوم، فـ ا و معلوم. وإذا نقص منه ب و، / وهو معلوم، بقي ا ب معلومًا، وهو الجذر. وإذا ضربناه في مثله، كان مربع ا ب جـ د معلومًا، وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ا-٣٩-ظ

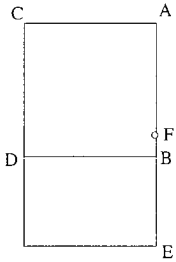
ب-٢٤٥-ظ

ت-١٢٧

وهذا المسلك موافق لمسلك أصحاب الجبر في استخراج هذه المسألة، وذلك أن أخذهم نصف عدد الأجذار هو كأخذنا نصف خط ب ه، وضربهم أياه في مثله هو كأخذنا مربع نصف خط ب ه، وزيادتهم العدد على ما يجتمع هو كزيادتنا ضرب ه ا في ا ب ليجتمع من ذلك مربع مجموع ا ب مع نصف الخط، وأخذهم جذر المجتمع هو كقولنا أن مجموع ا ب مع نصف الخط

1 ولكن ... والجذور: ومجموعهما [ت، ث، س] – 1-2 فسطح جـ ه: فـ جـ ه [ت، ث، س] – 2 وهو مثل ضرب: أعني [ت، ث، س] – 2-3 لأن ا ب مثل ا جـ: ناقصة [ت، ث، س] – 3 فضرب ه ا: فـ ه ا [ت، ث] فـ ا [س] – 3 خط: ناقصة [ت، ث، س] – 4 رجع: يرجع [ا] – 5 خط: ناقصة [ت، ث، س] / عليه: عليها [ا، ب] – 6 وكان: فكان [ت، ث، س] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 7 السادس ... *الأصول*: المذكور [ت، ث، س] – 8 قسم: نصف [ت، ث، س] / خط: ناقصة [ت، ث، س] / بنصفين: ناقصة [ت، ث، س] / نقطة: ناقصة [ت، ث، س] / صار: وصار [ت، س] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 9 مع: ناقصة [س] / مثل مربع: كمربع [ت، ث، س] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 9-10 معلوم ومربع ب و معلوم: ومربع ب و معلومان [ت، ث، س] كتب في الهامش «مع مربع ب و مثل مربع ا و» [ب] – 10 معلوم فـ: بل [ت، ث، س] / منه: فوق السطر [س] / وهو معلوم: والمعلوم [س] ب و المعلوم [ت] المعلوم [ث] – 11 بقي: يبقى [ت، ث، س] / معلومًا: معلوم [ا، ب] / ضربناه: ضرب [ت، ث، س] ضرب بناه [ب] / ا ب جـ د: ا د [ت، ث، س] – 12 ما أردنا أن نبين: ما اردناه [ت، س] هو المراد [ث] – 13 الجبر: الجذر [ا، ب] – 14-15 كأخذنا ... مثله: مكررة [ت] – 14 خط: ناقصة [ت، ث، س] – 15 نصف: ناقصة [ت، س] / خط: ناقصة [ت، ث، س] / وزيادتهم: وزدناهما [ا] – 16 ضرب: ناقصة [ت، ث، س] / ا ب: ب ا [ث] / من ذلك: من الجميع [ت، ث، س] / مجموع: ناقصة [ت، ث، س] – 17 مجموع: ناقصة [ت، ث، س].

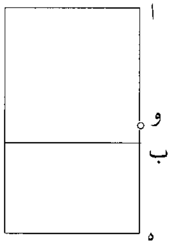
donné que la somme est un carré connu ; lorsqu'ils retranchent la moitié du nombre des racines, c'est comme lorsque nous retranchons la moitié de *BE*. Ils obtiennent le reste qui est la grandeur de la racine, et lorsqu'ils retranchent de cela la moitié de la grandeur de la racine, c'est comme quand nous retranchons la droite *BF* pour obtenir le reste, comme nous avons obtenu *AB* ; et lorsqu'ils la multiplient par elle-même et connaissent ainsi le *c*arré, c'est comme lorsque nous avons connu à partir de *AB*, son carré, qui est le *c*arré. [B-246r]



Deuxième principe : un *c*arré plus un nombre sont égaux à des racines.

La manière de résoudre cela à partir du second livre de l'ouvrage d'Euclide par la cinquième proposition est comme je le décris. Posons le *c*arré un carré *ABCD* et posons dans *AE* autant de fois l'unité par laquelle on mesure les lignes, que le nombre supposé des racines. Il est clair que *AE* est plus longue que *AB*, étant donné que [T-128] les racines, qui sont dans le domaine du calcul le produit de *CA* par *AE*, [S-2r] sont supérieures au *c*arré. Complétons le rectangle *CE* ; il est clair, comme on l'a dit, qu'il est égal aux racines selon la voie du calcul ; si on en retranche <le carré> *BC*, qui est le *c*arré, il reste le <rectangle> *DE* égal au nombre. <Le rectangle> *DE*, qui est égal au produit de *AB* par *BE*, est donc connu et la droite *AE* est connue. On en vient donc à ce qu'une droite *AE* connue soit divisée en *B* de sorte que le produit [A-40r] de *AB* par *BE* soit connu. Mais on a montré dans la cinquième proposition du second livre de l'ouvrage d'Euclide que si on partage *AE* en deux moitiés en *F*, alors le produit de *AB* par *BE* plus le carré de *BF* est égal au carré de *AF*. Mais *AF* est connu, son carré est connu et le produit de *AB* par *BE* est connu ; il reste donc le carré de *BF* connu ; *BF* est donc connu et si on le

معلوم إذ كان 〈المجموع〉 مربعًا معلومًا، ونقصهم نصف عدد الأجذار هو كنقصنا نصف ب ه، فحصل لهم الباقي وهو مقدار الجذر، ونقصهم من ذلك نصف مقدار الجذر كنقصنا خط ب و ليحصل الباقي كما حصل لنا ا ب، وضربوه في مثله فعرفوا المال كما عرفنا من ا ب مربعه، وهو المال. /



ب-٢٤٦-و

الأصل الثاني: وهو مال وعدد تعدل جذوراً.

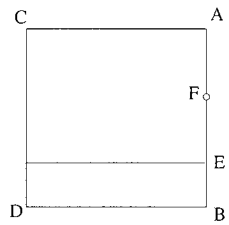
الوجه في استخراج ذلك من المقالة الثانية من كتاب أوقليدس بالشكل الخامس على ما أصف. نجعل المال مربع ا ب جـ د ونجعل في ا ه من أضعاف الواحد الذي تقدر به الخطوط مثل العدة المفروضة للأجذار. فبين أن ا ه أطول من ا ب إذ / كانت ت-١٢٨ الجذور وهي في باب الحساب ضرب جـ ا في ا ه / أعظم من المال. ونتمم س-٢-و سطح جـ ه، ويتبين كما قيل أنه مساوٍ للأجذار على مذهب الحساب؛ وإذا نقص منه ب جـ وهو المال، بقي د ه مساوياً للعدد، فـ د ه معلوم وهو مثل ضرب ا ب في ب ه، وخط ا ه معلوم. فقد حصل الأمر على أن خط ا ه المعلوم قسم على ب، فكان ضرب/ ا ب في ب ه معلومًا، وقد تبين في الشكل ا-٤٠-و الخامس من المقالة الثانية من كتاب أوقليدس أنه إذا قسم ا ه بنصفين على و، فإن ضرب ا ب في ب ه مع مربع ب و مثل مربع ا و. لكن ا و معلوم ومربعه معلوم، وضرب ا ب في ب ه معلوم. فيبقى مربع ب و معلوماً، فـ ب و معلوم.

2 لهم الباقي: الباقي لهم [ت، س] – 3 مقدار الجذر: المقدار المجذور [ت، س] مقدار [ا، ب] / مقدار الجذر: عدد الأجذار [ت، ث، س] / خط ب و ليحصل: نصف ب ه وليحصل [ت، س] – 5 الأصل: والأصل [ت، ث، س] – 6-7 من المقالة ... أصف: بشكل ه من المقالة المذكورة [ت، ث، س] – 8 ا ب جـ د: ا د [ت، ث، س] / نجعل: ناقصة [ت، ث، س] – 9 الذي تقدر به الخطوط: المذكورة [ت، س] المذكور [ث] / تقدر: يقد [ب] – 9-10 العدة المفروضة للأجذار: عدة الأجذار المفروضة [ت، ث، س] – 10 فبين: فتبين [ت، ث] / إذ: اذا [ا، ب] – 11 ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 12 قيل: بينا [ت، ث، س] – 13-14 مثل ضرب ا ب: كـ ا ب [ت، ث، س] – 14 خط (الأولى والثانية): ناقصة [ت، ث، س] / المعلوم: معلوم [ا، ب] – 15 فكان: وكان [ت، ث، س] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] / وقد: فقد [ت، س] – 16 الخامس ... أوقليدس: المذكور [ت، ث، س] / قسم: نصف [ت، ث، س] / بنصفين: ناقصة [ت، ث، س] – 17 ضرب: ناقصة [ت، ث، س] / مثل مربع: كمربع [ت، ث، س] / لكن: ولكن [ت، س] – 17-18 معلوم ومربعه ... ب ه معلوم: ومربعه وا ب في ب ه معلومات [ت، ث، س].

retranche de *AF*, ou si on l'ajoute à celle-ci, *AB* sera connue et c'est la racine ; si on la multiplie par elle-même, on a *ABCD* connu, qui est le *c*arré. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette démarche concorde également avec la démarche des algébristes pour le calcul de ce problème. C'est pourquoi il est possible, selon les deux voies, d'utiliser l'addition ou la soustraction en ce qui concerne la droite *FB*.

Troisième principe : un nombre plus des racines sont égaux à un *c*arré.

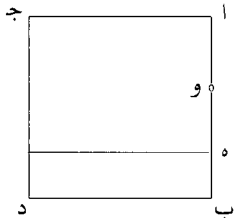


La manière de déterminer cela par la sixième proposition du second livre de l'ouvrage d'Euclide est comme je le décris.

Posons le *c*arré un carré *ABCD* et posons dans *AE* autant de fois l'unité, par laquelle on mesure les lignes, que le nombre des racines. Elle est nécessairement connue et plus courte que *AB* car les racines, qui sont selon la voie [T-129] du calcul le produit de *CA* par *AE*, sont inférieures au *c*arré. Complétons le rectangle *CE* ; le rectangle *CE* est alors égal [B-246v] aux racines et il reste le rectangle *ED* égal au nombre. Il est par conséquent connu et il est le produit de *AB* par *EB*. On en vient donc à une droite *AE* connue à laquelle on a ajouté *EB* de sorte que le produit de *AB* par *EB* soit connu. Or on a montré dans la sixième proposition du second livre de l'ouvrage d'Euclide que, si on divise *AE* en deux moitiés au <point> *F*, alors le produit de *AB* par *BE* plus le carré de *EF* est égal au carré de *FB*. Mais le produit de *AB* par *BE* est connu et le carré de *EF* est connu ; le carré de *FB* est donc connu et la droite *FB* est connue. Mais la droite *FA* est connue étant donné qu'elle est la moitié de *AE*, connue ; *FB*

وإذا نقص من ا و أو زيد عليه حصل ا ب معلومًا، وهو الجذر. وإذا ضربناه في مثله، كان ا ب جـ د معلومًا، وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وهذا المسلك أيضًا موافق لمسلك أهل الجبر في حساب هذه المسألة، ولذلك احتملت على المذهبين جميعًا استعمال الزيادة والنقصان في خط و ب.



الأصل الثالث: وهو عدد وجذور تعدل مالاً.

الوجه في استخراج ذلك بالشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب أوقليدس على ما أصف. نجعل المال مربع ا ب جـ د، ونجعل في ا ه من أمثال الواحد الذي تقدر به الخطوط مثل عدة الأجذار، وواجب أن يكون معلومًا وأن يكون أقصر من ا ب، لأن الجذور وهي على مذهب/ الحساب ضرب جـ ا ت-١٢٩ في ا ه أقل من المال، ونتمم سطح جـ ه، فسطح جـ ه مثل / الجذور، ويبقى سطح ه د مساويًا للعدد، فهو إذن معلوم، وهو ضرب ب-٢٤٦-ظ ا ب في ه ب. فقد حصل الأمر على أن خط ا ه معلوم، وزيد فيه ه ب، فكان ضرب ا ب في ه ب معلومًا. وقد تبين في الشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب أوقليدس أنه إذا قسم ا ه بنصفين على و، كان ضرب ا ب في ب ه مع مربع ه و كمربع و ب. وا ب في ب ه معلوم ومربع ه و معلوم، فمربع و ب معلوم، فخط و ب معلوم. وخط و ا معلوم، لكونه نصف ا ه المعلوم، فـ و ب

1 ا و: ا ه [ب] – 2 ا ب جـ د: ا د [ت، ث، س] / وهو ... نبين: وهو المراد [ت، ث، س] – 4 خط: ناقصة [ت، ث، س] – 6 الأصل: والاصل [ت، س] – 7-8 بالشكل ... أصف: بشكل و من المذكورة [ت، ث، س] – 9 ا ب جـ د: ا د [ت، ث، س] / نجعل: ناقصة [ت، ث، س] – 10 الذي تقدر به الخطوط: المذكور [ت، ث، س] – 12 وهي: هي [ب] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 13 فسطح جـ ه: فـ جـ ه [ت، ث، س] – 14 سطح: ناقصة [ت، ث، س] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 15 ه ب: ب ه [س] / خط: ناقصة [ت، ث، س] / فيه: عليه [ت، ث، س] / فكان: وكان [ت، ث، س] – 16 ضرب: ناقصة [ت، ث، س] / ا ب: ا ه [ت، ث، س] – 16-17 السادس ... أوقليدس: المذكور [ت، ث، س] – 17 قسم: نصف [ت، ث، س] / بنصفين: ناقصة [ت، ث، س] / ضرب: ناقصة [ت، ث، س] – 18 مع ... ب ه: ناقصة [ا، ب] / معلوم (الأولى): معلوما [ا] – 19 معلوم، فخط: بل [ت، ث، س] / خط: ناقصة [ت، ث، س] / و ا: ا و [ت، ث، س] / لكونه نصف ا ه المعلوم: إذا كان نصف ا ه معلومًا [ا، ب]، ربما كانت هذه العبارة في الأصل المنسوخ: «إذ كان نصف ا ه وهو معلوم» أو «إذ كان نصف ا ه المعلوم».

est donc connue et AF est connue ; AB tout entière est donc connue et c'est la racine. Et si nous la multiplions par elle-même, on a le carré $ABCD$ connu, qui est le *c*arré. Ce qu'il fallait démontrer.

La voie de ce problème est celle des deux précédents en ceci que la méthode de sa résolution par la géométrie concorde avec la méthode de sa résolution par l'algèbre.

معلوم وا و معلوم، فجميع ا ب معلوم، وهو الجذر. وإذا ضربناه في مثله، كان مربع ا ب جـ د معلوماً، وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وسبيل هذه المسألة سبيل اللتين قبلها في موافقة طريق استخراجها بالهندسة طريق استخراجها بالجبر.

1 ا ب: مكررة [ت، س] / الجذر: الجذور [ا، ب] / ضربناه: ضربنا [ت، س] – 2 ا ب جـ د: ا د [ت، ث، س] / أردنا أن نبين: اردناه [ت، ث، س] – 3 سبيل اللتين: التي [ا، ب] – 4 الجبر: كتب بعدها: والحمد لله رب العالمين [ت، ث، س] تم والله ولى التوفيق [ا، ب].

CHAPITRE III

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES

THĀBIT IBN QURRA ET L'ART DE LA MESURE

Roshdi RASHED

Il existe une classe d'éminents savants qui marquent leur époque tant par leurs inventions scientifiques que par leur réflexion philosophique sur la connaissance et par l'enseignement qu'ils ont dispensé. Thābit ibn Qurra est bien de ceux-là. On s'accorde à reconnaître l'importance de ses recherches en mathématiques et en astronomie : il suffit d'évoquer ses travaux en géométrie infinitésimale, son livre sur la figure secteur, son mémoire sur les nombres amiables, son travail sur l'algèbre géométrique, etc. L'étude séminale qu'il adresse à Ibn Wahb, dans laquelle il engage une réflexion philosophique profonde sur la méthode de la découverte[1], ainsi que sa fameuse *Épître sur l'infini*[2], sont une autre dimension de son œuvre, inséparable d'un autre trait : Thābit est un enseignant et un pédagogue. Cette fonction d'enseignement des mathématiques, il l'a exercée auprès des enfants de son patron, Muḥammad ibn Mūsā, au nombre desquels on trouve Naʿīm, auteur d'un livre qui reflète en un certain sens cet enseignement[3]. D'autres écrits en mathématiques de Thābit ibn Qurra sont animés du même souci didactique, par exemple une anthologie de problèmes, établie et traduite ici[4]. Il s'agit d'exposés, où Thābit traite de problèmes type, résolus et parfois démontrés. On mesure la valeur didactique de ces problèmes résolus, sans doute accompagnés d'un commentaire oral. On doit d'autre part à Thābit une seconde forme de rédaction, celle de manuels destinés cette fois aux hommes cultivés mais non mathématiciens, fonctionnaires, artisans, etc., dont les démonstrations sont absentes. Mais comme le pédagogue est aussi

[1] *Kitāb Thābit ilā Ibn Wahb fī ta'atti li-istikhrāj 'amal al-masā'il al-handasiyya*, dans R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, al-Furqān, 2002, Appendice I.

[2] *Min al-masā'il allatī sa'ala 'anhā Abū Mūsā 'Īsā b. Usayyid Abā al-Ḥasan Thābit b. Qurra al-Ḥarrānī*, voir *infra*, Chapitre V.

[3] R. Rashed et Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IXᵉ siècle. Le recueil de propositions géométriques de Na'īm ibn Mūsā*, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

[4] Voir *infra*, *Lemmes* (*Muqaddamāt*).

logicien et philosophe, il cherche une classification rationnelle qui permette au lecteur de saisir et de retenir l'essentiel. Le principe de cette classification était donc, dans la mesure du possible, de réduire la diversité des objets en les dérivant d'un petit nombre. C'est de ce type de rédaction que relève un court traité sur la mesure – traité élémentaire assurément, mais qui a eu un impact considérable sur les successeurs de Thābit ibn Qurra. Son petit-fils, Ibrāhīm ibn Sinān, rédigera, dans un autre domaine, celui des cadrans solaires, un semblable traité, destiné aux artisans[5]. Plus tard, Ibn al-Haytham écrira lui aussi un traité sur la mesure, dans lequel il démontre toutes les propositions[6]. On peut avancer sans risque que c'est dans ce même traité de Thābit ibn Qurra qu'il avait trouvé son inspiration.

L'intention didactique qui anime Thābit ibn Qurra se manifeste dans l'organisation de ce livre et dans la place qu'il occupe dans l'œuvre du mathématicien. Tout indique en effet que l'auteur entend mener son lecteur par la main, en partant du plus simple – c'est-à-dire des éléments des figures dont la combinaison permet d'en obtenir de plus compliquées. Tel est le principe à la fois logique et didactique qui régit ce petit traité.

Thābit ibn Qurra commence par les figures polygonales pour donner les règles de la mesure des aires des polygones plus complexes, à partir des polygones simples, et notamment les triangles. Il passe ensuite aux solides de révolution, dont il donne les règles de calcul de l'aire latérale et de l'aire totale, pour terminer avec des calcul de volumes.

Remarquons que ce texte élémentaire a été rédigé après les trois traités fondamentaux de Thābit : *La Mesure du paraboloïde* (*Fī misāḥat al-mujassamāt al-mukāfi'a*), lui-même rédigé avant *La Mesure de la parabole* (*Kitāb fī misāḥat qaṭ' al-makhrūṭ alladhī yusammā al-mukāfi'*), puis *Les Sections du cylindre et sa surface latérale* (*Kitāb fī quṭū' al-usṭuwāna wa-basīṭihā*)[7]. C'est donc délibérément que, mathématicien au sommet de sa carrière, Thābit ibn Qurra a choisi de rédiger ce traité évidemment adressé aux non-mathématiciens. C'est en ce sens qu'on peut déceler dans ces pages un aspect social de la science de l'époque, ou plus précisément un écho de la demande sociale en mathématiques.

[5] *Fī ālāt al-aẓlāl*, dans R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xᵉ siècle*, Leyde, E.J. Brill, 2000.

[6] Voir *Qawl fī uṣūl al-misāḥa*, éd., trad. et commentaire dans *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle*, vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, Londres, al-Furqān, 2000, chap. IV.

[7] Voir l'édition, la traduction et le commentaire de ces trois traités dans *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, al-Furqān, 1996, chap. II.

Ibn al-Haytham poursuivra dans cette voie tracée par Thābit ibn Qurra, à la fois pour l'élargir en introduisant d'autres mesures, et pour démontrer les différentes règles de ce chapitre que l'on pourrait nommer la « géométrie pratique » ou « l'art de la mesure des figures géométriques élémentaires ».

Nous avons établi ce traité à partir du manuscrit : Istanbul, Süleymaniye, Aya Sofya 4832, fol. 41^{r}-44^{r}. Voir la description de ce manuscrit dans *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, al-Furqān, 1996, chap. II, p. 147.

TEXTE ET TRADUCTION

Sur la mesure des figures planes et solides

Fī misāḥat al-ashkāl al-musaṭṭaḥa wa-al-mujassama

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux
La puissance est à Dieu

Livre de Thābit ibn Qurra sur la mesure des figures planes et solides

Les figures, même si elles sont en nombre infini, ont des éléments et des prémisses auxquels elles se ramènent et le reste s'engendre à partir de la composition de ceux-ci. Si donc on connaît ces éléments et si on saisit les règles de leurs mesures, il sera possible de déterminer les mesures des figures restantes, en les séparant en les parties dont elles sont composées et qui se ramènent à ces éléments.

Les figures sont de trois sortes : les planes, les autres surfaces, les solides. On peut réunir ces trois sortes en deux sortes ; en effet, les planes et les autres surfaces sont réunies sous un terme général : ce sont des surfaces, c'est-à-dire qu'elles ont une longueur et une largeur, mais pas de profondeur ; de même les solides sont réunis sous un terme général : ils ont une longueur, une largeur et une profondeur. La différence entre les surfaces planes et les autres est en effet que les planes s'étendent en longueur et en largeur d'une manière égale et rectiligne, comme le carré, le triangle et leurs homologues ; toutes les surfaces autres que planes s'étendent d'une manière inégale, ou bien dans une seule direction comme la surface latérale du cylindre dont la largeur est en forme d'arc, alors que sa longueur est égale, ou bien dans deux directions, comme la surface latérale d'une sphère qui est de forme arquée en longueur et en largeur à la fois.

Ces trois sortes de figures que nous avons mentionnées exigent qu'on commence par connaître la mesure des <figures> planes que l'on pose premières eu égard aux autres car si on ne les connaît pas, on ne connaîtra pas non plus la mesure des solides. Puis nous posons secondes les autres surfaces et nous posons troisièmes les solides.

Nous commençons donc par les planes.

بسم الله الرحمن الرحيم

العزة لله ٤١-و

كتاب ثابت بن قرة
في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة

إن الأشكال، وإن كانت لا نهاية لها، فإن لها أصولاً وأوائل إليها ترجع، وعن تركيبها يتولّد باقيها. فإذا عُرفت تلك الأصول ووقف على أبواب مسائحها، أمكن استخراج مسائح الأشكال الباقية بتفصيلها إلى أجزائها التي هي منها مركبة الراجعة إلى تلك الأصول.

وأصناف الأشكال ثلاثة: وهي المسطحة وسائر البسط والمجسمة. وقد يمكن أن تجمع هذه الثلاثة الأصناف في صنفين؛ وذلك أن المسطحة منها وسائر البسيط يجمعها ويعمها أنها بسيط ومعناها أنها ذوات طول وعرض بلا سمك كما يعم المجسمات أنها ذوات طول وعرض وسمك. وإنما الفرق بين المسطحة وسائر البسط: أن المسطحة تمتدّ طولاً وعرضًا على استواء واستقامة مثل المربع والمثلث ونظائرهما. وأما سائر البسط دون المسطحة، فإنها تمتد على غير استواء، إما في جهة واحدة مثل البسيط المحيط بالأسطوانة، فإن عرضه على تقويس وإن كان طوله على استواء، وإما في جهتين مثل البسيط المحيط بالكرة، فإنه يجري على تقويس في الطول وفي العرض جميعًا.

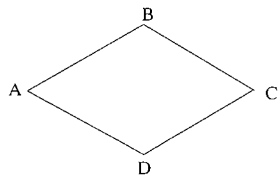
وهذه الثلاثة الأصناف التي ذكرنا من الأشكال تحتاج أن نقدم منها علم مساحة المسطحة، فتجعل أولاً لغيرها، لأنه إن لم تعلم لم تعلم مساحة المجسمة. ثم نجعل الثاني سائر البسط ونجعل الثالث المجسمة.

فنحن نبدأ أولاً بالمسطحة.

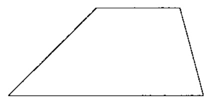
9 البسط: البسيط – 13 البسط: البسيط – 14-15 وأما ... استواء: أثبتها في الهامش مع الإشارة – 14 البسط: البسيط – 18 جميعًا: أثبتها في الهامش مع الإشارة – 21 البسط: البسيط.

Les figures planes sont de deux sortes : celles qui ont des côtés rectilignes, comme le triangle et le carré, et celles qui n'ont pas de côtés rectilignes, comme le cercle. Ce qu'il faut exposer en premier de tout cela est le carré car la mesure de toute figure plane se ramène à lui et par lui sont mesurés les quadrilatères qui sont de cinq sortes : le carré, quadrilatère, qui a des angles droits et des côtés égaux et dont l'aire est le produit de sa longueur par sa largeur ; le quadrilatère rectangle est celui qui a des angles droits sans avoir des côtés égaux, et dont l'aire est également le produit de sa longueur par sa largeur ; le quadrilatère losange est celui dont les côtés sont égaux, sans que les angles soient droits, et dont on obtient l'aire, si l'on veut, en multipliant l'une de ses diagonales – qui sont les droites menées de chacun de ses angles à celui qui lui est opposé – par l'autre diagonale, produit dont on prend la moitié : [41^v] c'est l'aire du losange ; et on peut, si on veut, mener une seule de ses diagonales, on le partage ainsi en deux triangles égaux, dont on détermine l'aire comme on détermine l'aire des triangles d'après ce que nous allons décrire plus loin. On les additionne ; on a alors l'aire du losange ; on peut, si on veut, prendre l'une des perpendiculaires abaissées de l'un de ses angles à l'un quelconque de ses côtés, que l'on multiplie par ce côté ; le produit sera son aire.

Exemple : le losange $ABCD$[1].

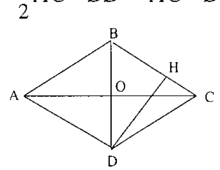


Le quadrilatère semblable au losange[2] est celui dont les côtés opposés sont parallèles et égaux, mais qui n'est ni à côtés égaux, ni à angles droits ; on peut en mesurer l'aire si on le veut, par la deuxième règle à l'aide de laquelle on a mesuré l'aire du losange, et si on veut par la troisième règle aussi[3].



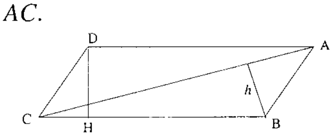
Le trapèze est celui dont les angles ne sont pas droits[4] et dont les côtés opposés ne sont pas tous égaux.

[1] Notons par $\mathscr{A}$ l'aire : $\mathscr{A} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AC \cdot BO = BC \cdot DH.$



[2] Il s'agit du parallélogramme dont le losange est un cas particulier.

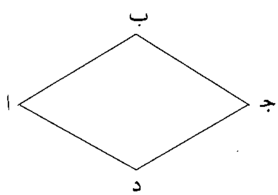
[3] $\mathscr{A} = BC \cdot DH = h \cdot AC.$



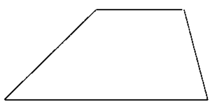
[4] Un trapèze peut avoir deux angles droits.

الأشكال المسطحة صنفان: منها المستقيمة الأضلاع مثل المثلث والمربع، ومنها التي ليست بمستقيمة الأضلاع مثل الدائرة. وأول ما يجب ذكره من ذلك كله المربع، لأن مساحة كل مسطح إليه ترجع وبه تقدر الأشكال ذوات الأضلاع الأربعة خمسة أصناف. فمنه الشكل المربع، وهو ما كانت له أربعة أضلاع وكان قائم الزوايا متساوي الأضلاع، ومساحته هي ما يجتمع من ضرب طوله في عرضه؛ وذو الأربعة الأضلاع المستطيل، وهو ما كان قائم الزوايا وليس بمتساوي الأضلاع، ومساحته أيضًا هي ما يجتمع من ضرب طوله وعرضه؛ وذو الأربعة الأضلاع المعيّن، وهو ما كان منها متساوي الأضلاع غير قائم الزوايا، والإنسان إن يمسحه، إن شاء، بأن يضرب أحد قطريه – وهما الآخذان من كل زاوية منه إلى التي تقابلها – في القطر الآخر منهما، ويأخذ نصف ما يجتمع فهو / مساحة المعين؛ وله، إن شاء، أن ظ-٤١ يخرج فيه واحداً من قطريه، فيكون قد قسمه بمثلثين متساويين، فيستخرج مساحتها كما يستخرج مساحة المثلثات على ما نصف من ذلك فيما بعد، ويجمعها، فيكون ذلك مساحة المعين؛ وله، إن شاء، أن يأخذ عموداً من أعمدته الواقعة من زاوية من زواياه على ضلع من أضلاعه أيها شاء، فيضربه في ذلك الضلع، فيكون ما اجتمع هو مساحته.

مثال ذلك: معين ا ب جـ د.



وذو الأربعة الأضلاع الشبيه بالمعين وهو الذي أضلاعه المتقابلة متوازية متساوية وليس بمتساوي الأضلاع ولا قائم الزوايا. وللإنسان أن يمسحه إن شاء بالباب الثاني الذي مسح به المعين، وإن شاء بالباب الثالث منها أيضًا.



وذو الأربعة الأضلاع المنحرف وهو الذي ليس زواياه بقائمة ولا جميع أضلاعه المتقابلة بمتساوية.

1 المثلث: أثبتها في الهامش مع الإشارة – 8 منها: أثبتها فوق السطر.

On peut mesurer l'aire de toutes ces sortes par la deuxième règle à l'aide de laquelle on a mesuré le losange ; mais parmi ces sortes il y en a qu'on peut mesurer plus facilement, comme celles qui ont deux côtés parallèles : si nous additionnons ces deux côtés et les multiplions par la perpendiculaire abaissée de l'un d'eux sur son associé et si nous prenons la moitié du produit, on a l'aire du trapèze[5].

Cette perpendiculaire peut être déterminée, sans qu'elle soit mesurée, par une règle que nous décrivons : on prend le plus court des deux côtés parallèles qu'on retranche du plus long. Nous retenons ce qui reste ; si les deux côtés qui restent sont égaux, nous prenons la moitié du reste, nous la multiplions par elle-même, nous retranchons le produit du produit de l'un des côtés égaux par lui-même et nous prenons la racine du reste ; c'est la perpendiculaire.

Si les deux côtés qui restent sont inégaux, nous multiplions chacun d'eux par lui-même, nous retranchons le plus petit produit du plus grand, nous divisons le reste par la différence entre les deux côtés parallèles que nous avons retenue, nous retranchons le quotient de cette différence que nous avons retenue ; nous prenons la moitié du reste que nous multiplions par elle-même, nous retranchons le produit du plus petit des côtés qui restent par lui-même et nous prenons la racine du reste ; c'est la perpendiculaire[6].

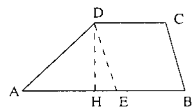
Les triangles : règle commune à toutes les sortes de triangles. Certains l'ont attribuée à l'Inde et d'autres ont rapporté qu'elle est due aux Grecs. Description : on additionne les trois côtés du triangle, on en prend la moitié, on prend l'excédent de cette moitié sur chacun des côtés, puis on multiplie cette moitié par l'excédent sur l'un des côtés du triangle, on multiplie le produit par l'excédent sur un deuxième côté, et on multiplie le produit par l'excédent sur le troisième côté, puis on prend la racine du produit ; c'est l'aire du triangle[7].

[5] $\mathscr{A} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DH.$

[6] Supposons $CD < AB$, on a $AB - CD = AE$, $DC = BE$ et $DE = BC$. Deux cas se présentent :

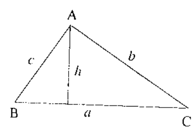
• $AD = BC$, alors ADE est isocèle, H est donc le milieu de AE et on a

$$DH^2 = AD^2 - \left(\frac{AE}{2}\right)^2.$$



• $AD \neq BC$. Par exemple, $AD > BC$, alors $AD > DE$ et on a

$$(*)\quad DH^2 = DE^2 - \left(\frac{AE^2 - \left(AD^2 - DE^2\right)}{2AE}\right)^2.$$



[7] Soit a, b, c les côtés du triangle ABC, p le demi-périmètre, on a $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

وللإنسان أن يمسح جميع أصنافه بالباب الثاني الذي مسح به المعين، غير أن منها ما يمسح بما هو أسهل من ذلك، مثل ما كان له منها ضلعان متوازيان، فإنا إذا جمعنا ذينك الضلعين وضربناهما في العمود الواقع من أحدهما على صاحبه وأخذنا نصف ما اجتمع، كان ذلك مساحة المنحرف.

وهذا العمود قد يمكن أن يستخرج من غير أن يمسح بباب نصفه وهو هذا: يؤخذ أقصر الضلعين المتوازيين فينقص من أطولها، فما بقي حفظناه؛ فإن كان الضلعان الباقيان متساويين، أخذنا نصفه فضربناه في نفسه ونقصناه من ضرب أحد الضلعين المتساويين في نفسه؛ فما بقي أخذنا جذره، وهو العمود.

وإن كان الضلعان الباقيان غير متساويين، ضربنا كل واحد منهما في نفسه، ونقصنا أقل المجتمعين من أكثرهما، وما بقي قسمناه على فضل ما بين الضلعين المتوازيين الذي كنا حفظنا؛ فما خرج من القسمة، نقصناه من ذلك الفضل الذي حفظنا، وأخذنا نصف ما بقي فضربناه في نفسه؛ ونقصنا ما اجتمع من ضرب أقصر الضلعين الباقيين في نفسه؛ فما بقي أخذنا جذره، وهو العمود.

المثلثات: باب يعم أصناف المثلثات كلها. وقد نسبه قوم إلى الهند وذكر آخرون أنه للروم. صفته: أن تجمع أضلاع المثلث ثلاثتها، ويؤخذ نصف ذلك، ويؤخذ زيادة ذلك النصف على كل واحد من الأضلاع، ثم يُضرب ذلك النصف في الزيادة على ضلع من أضلاع المثلث، ويُضرب ما اجتمع في الزيادة على ضلع ثانٍ منها، وما اجتمع في الزيادة على الضلع الثالث منها، وما اجتمع أخذ جذره، وهو مساحة ذلك المثلث.

Une autre règle, encore, commune à l'aire de toutes les sortes de triangles. Description : on prend l'une des hauteurs du triangle que l'on multiplie par le côté sur lequel elle tombe et on prend la moitié du produit ; c'est l'aire du triangle[8].

On peut déterminer par deux règles de calcul la hauteur ; l'une a été utilisée par Euclide : nous multiplions deux des côtés du triangle, chacun par lui-même, nous additionnons les produits et nous multiplions le troisième côté par lui-même ; s'il est égal à la somme des deux premiers multipliés par eux-mêmes, alors ce triangle est rectangle et chacun des deux premiers côtés est une de ses hauteurs ; si le produit du troisième côté par lui-même n'est pas égal à la somme que nous avons mentionnée, mais est plus petit qu'elle, alors ce triangle a un angle aigu, celui entouré par les deux côtés ; s'il est plus grand qu'elle, alors ce triangle a un angle obtus. Quel que soit le cas, si l'inégalité a lieu, alors nous prenons leur différence, nous la divisons par un des côtés que nous avions multipliés par eux-mêmes et dont nous avions additionné les produits ; nous prenons la moitié du quotient, nous la multiplions par elle-même, nous retranchons le produit du produit de l'autre des deux côtés, celui par lequel on n'a rien divisé, par lui-même, et nous prenons la racine du reste ; c'est la perpendiculaire abaissée sur le côté par lequel nous avons divisé ce que nous avons divisé[9].

Autre règle pour déterminer la hauteur, utilisée par Ptolémée : nous examinons si le triangle est isocèle, [42r] nous multiplions l'un des deux côtés par lui-même, nous multiplions la moitié du troisième côté par elle-même, nous retranchons le produit du produit que l'on a obtenu de l'un des deux premiers côtés par lui-même, et nous prenons la racine du reste ; c'est la hauteur du triangle abaissée sur le troisième côté[10]. Et s'il n'y a pas deux côtés égaux dans le triangle, nous prenons le plus petit de ses trois côtés, nous le multiplions par lui-même, nous prenons le second qui le suit en petitesse, nous le multiplions également par lui-même, nous retranchons le

[8] $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\, a \cdot h$, h hauteur relative au côté BC.

[9] Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors $\hat{A}$ est un angle droit.

Si $BC^2 \gtrless AB^2 + AC^2$, alors $\hat{A}$ est respectivement obtus ou aigu. En effet, si D est le projeté orthogonal de C sur AB, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2AC \cdot AD$ (Euclide, *Éléments*, I.47 pour $\hat{A}$ droit, II.12 pour $\hat{A}$ obtus et II.13 pour $\hat{A}$ aigu).

Dans le premier cas, on a $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\, AB \cdot AC$. Dans les deux autres cas, il faut déterminer $AD^2 = \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB}\right)^2$ et $CD^2 = AC^2 - AD^2$.

[10] Pour calculer la hauteur h d'un triangle (a, b, c) isocèle $(b = c)$, Thābit donne une formule attribuée à Ptolémée :

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\,.$$

وباب آخر أيضًا يعم مساحة أصناف المثلثات، وصفته: أن يؤخذ عمود من أعمدة المثلث، فيضرب في الضلع الذي عليه يقع، ويؤخذ نصف ما اجتمع، وهو مساحة ذلك المثلث.

والعمود قد يستخرج ببابين من الحساب، أحدهما استعمله أقليدس، وهو: أن نضرب ضلعين من أضلاعه كل واحد منهما في نفسه، ونجمعهما، ونضرب الضلع الثالث في نفسه، فإن كان مساويًا لمجموع الأولين في أنفسهما، فإن ذلك المثلث قائم الزاوية وكل واحد من الضلعين الأولين عمود له؛ وإن لم يكن ضرب الضلع الثالث في نفسه مساويًا للمجموع الذي ذكرنا، بل كان أقل منه، فإن ذلك المثلث حادّ الزاوية التي يحيط بها الضلعان؛ وإن كان أكثر منه، فإن ذلك المثلث منفرج الزاوية. وكيف كانت القضية إذا وقع الاختلاف، فإنا نأخذ الفضل في ذلك، فنقسمه على أحد الضلعين اللذين كنا ضربناهما في أنفسهما وجمعنا منهما المجتمع، فما خرج من القسمة أخذنا نصفه فضربناه في نفسه، ونقصنا ما يجتمع من المجتمع من ضرب الضلع الآخر منهما الذي لم نقسم عليه شيئًا في نفسه، فما بقي أخذنا جذره، وهو العمود الواقع على الضلع الذي كنا قسمنا عليه ما قسمنا.

وباب آخر في استخراج العمود استعمله بطلميوس، وهو أن ننظر، فإن كان في المثلث ضلعان / متساويان، ضربنا أحدهما في نفسه، ⟨وضربنا ٤٢-و
نصف الضلع الثالث في نفسه⟩ وما اجتمع نقصناه مما كان اجتمع لنا من ضرب أحد الضلعين الأولين في نفسه، وأخذنا جذر ما بقي، وهو العمود الواقع على الضلع الثالث. وإن لم يكن في المثلث ضلعان متساويان، أخذنا أقصر أضلاعه الثلاثة، فضربناه في مثله، والثاني بعده في القصر، فضربناه أيضًا في مثله، ونقصنا ما يجتمع من الأول مما يجتمع من الثاني، وقسمنا ما

produit du premier du produit du second, nous divisons le reste par le troisième et plus long côté du triangle, nous retranchons le quotient du plus long côté, nous prenons la moitié du reste, que nous multiplions par elle-même, nous retranchons le produit du produit du premier côté par lui-même, et nous prenons la racine du reste ; c'est la perpendiculaire abaissée sur le troisième et plus long côté.

Quelle que soit celle de ces deux règles, nous procédons et nous déterminons la hauteur ; nous la multiplions alors par le côté sur lequel elle tombe et nous prenons la moitié du produit ; c'est l'aire du triangle.

Ce sont là des règles de calcul communes à tout triangle[11]. Mais il se peut que la règle propre à certaines sortes de triangles, sans l'être à d'autres, soit plus proche que celles communes à tous ; comme pour les triangles équilatéraux, si nous multiplions le côté de l'un d'eux par lui-même et le produit par lui-même, si nous prenons le huitième et la moitié du huitième du produit et que nous prenons la racine de cela, cette racine sera l'aire du triangle[12].

Les figures planes et rectilignes polygonales à partir des pentagones et des hexagones et ce qui est au-delà de cela.

Les figures planes et rectilignes qui viennent après les triangles et les quadrilatères sont appelées polygones ; elles ont toutes en commun pour règle relative à leurs aires, que chacune d'elles peut se découper en triangles. On peut connaître l'aire de chacun des triangles par l'une des règles mentionnées précédemment pour les aires des triangles. Nous additionnons ensuite les aires de tous les triangles qui composent cette figure, cette somme sera son aire.

Le nombre des triangles en lesquels on partage la figure est toujours inférieur de deux au nombre des côtés de cette figure[13].

[11] Pour un triangle quelconque (a, b, c), $a > b > c$:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - \left(b^2 - c^2\right)}{2a} \right)^2,$$

c'est la formule (*) (voir note 6).

[12] $\mathscr{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

[13] L'idée de Thābit ibn Qurra ici formulée, et qui sera reprise par Ibn al-Haytham, est la suivante : tout polygone convexe peut être décomposé en triangles ; son aire est donc la somme des aires de ces triangles. Le nombre de ces triangles peut être déterminé à l'aide du nombre de côtés du polygone convexe. Ainsi un polygone convexe de n côtés est décomposable en $n - 2$ triangles, ce qui peut se faire si on joint un sommet aux $n - 3$ autres. Voir la discussion de cette règle dans *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, Londres, 2000, p. 509 sqq.

تبقّى على الضلع الثالث الأطول من المثلث، فما خرج من القسمة نقصناه من الضلع الأطول، وأخذنا نصف ما تبقّى، فضربناه في نفسه، ونقصنا ما يجتمع منه من المجتمع من ضرب الضلع الأول في نفسه؛ فما بقي أخذنا جذره، وهو العمود الواقع على الضلع الأطول الثالث.

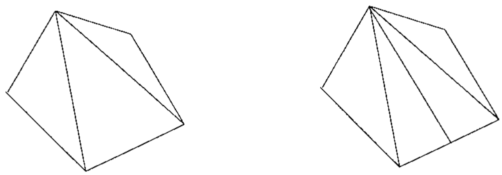
فبأي هذين البابين عملنا واستخرجنا العمود، فإنا نضربه في الضلع الذي عليه يقع، ونأخذ نصف ما يجتمع، وهو مساحة المثلث.

فهذه وجوه من أبواب الحساب تعم كل مثلث. وقد يخُصّ بعضَ أصنافِ المثلثات دون بعض البابُ مما هو أقرب مما يعم الجميع، مثل المثلثات المتساوية الأضلاع، فإنا إذا ضربنا ضلع الواحد منها في نفسه وما اجتمع منه في نفسه، وأخذنا مما يجتمع منه ثمنه ونصف ثمنه وأخذنا جذر ذلك، كان الجذر مساحة ذلك المثلث.

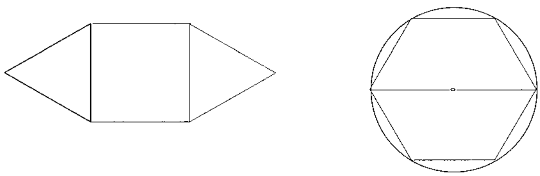
الأشكال المسطحة المستقيمة الخطوط الكثيرة الأضلاع من المخمسات والمسدسات وما فوق ذلك.

فأما باقي الأشكال المسطحة المستقيمة الخطوط التي بعد المثلثات وذوات الأربعة الأضلاع، فإنها تسمى الكثيرة الأضلاع ويعمها جميعًا في باب مسائحها أن كل واحد منها يقطع بمثلثات. ويتعرف مساحة كل مثلث منها بباب من أبواب مسائح المثلثات التي قد تقدم ذكرها. ثم نجمع مسائح جميع المثلثات التي منها تركيب ذلك الشكل، فيكون ذلك هو مساحته.

وعدد المثلثات التي نقسمه إليها يكون أبداً أقل من عدد أضلاع ذلك الشكل باثنين.



Exemple : le pentagone se partage en trois triangles comme sur cette figure, l'hexagone en quatre triangles comme sur cette figure également, et de même pour les figures qui suivent, suivant cette analogie. Ceci est une règle commune à tous les polygones, mais il peut exister pour chacun une règle, même si elle n'est pas commune à d'autres, qui peut être plus aisée et plus proche. Par exemple, l'hexagone régulier : nous n'avons pas besoin de le découper en triangles, mais nous multiplions l'un de ses côtés par lui-même et le produit par lui-même ; nous multiplions le produit par six plus un demi plus un quart et nous prenons la racine du produit ; ce qui est l'aire de l'hexagone[14] – et de même pour l'hexagone à côtés égaux composé de deux triangles équilatéraux et d'une figure à angles droits comme sur cette figure. Alors nous le partageons en les deux triangles et la figure à angles droits ; nous déterminons les aires des trois et nous additionnons leurs aires ; on a son aire[15].



Si nous voulons, nous multiplions son côté par lui-même et le produit par lui-même, nous prenons la moitié et le quart du produit, nous extrayons sa racine, nous ajoutons cette racine au produit du côté par lui-même ; ce que l'on obtient est son aire.

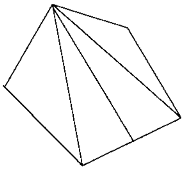
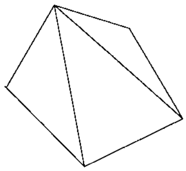
[14] $\mathscr{A}^2 = a^4\left(6+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{4}a^2$; d'où $\mathscr{A}= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Remarque : si on considère le centre du cercle circonscrit, son rayon est égal au côté a et l'aire de l'hexagone est égale à la somme des aires de six triangles équilatéraux de côté a :

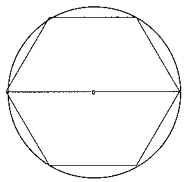
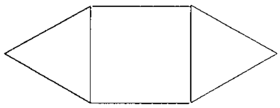
$$\mathscr{A}= 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

[15] L'hexagone à côtés égaux peut être divisé en deux triangles et un carré. Si les deux triangles sont équilatéraux, de côté a, on a

$$\mathscr{A}= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}+a^2.$$

مثل المخمس فإنه ينقسم بثلاثة مثلثات على ما في هذه الصورة، والمسدس بأربع على ما في هذه الصورة أيضًا وما بعد ذلك من الأشكال على هذا القياس. فهذا الباب علم بجميع الأشكال الكثيرة الأضلاع، وقد يوجد للواحد بعد الواحد منها باب وإن لم يعمه مع غيره، فإنه قد يكون أسهل وأقرب. مثل المسدس المتساوي الأضلاع والزوايا، فإنا لا نحتاج إلى تقطيعه بمثلثات، لكنا نضرب ضلعًا من أضلاعه في مثله وما اجتمع في مثله، ونضعف ما اجتمع ست مرات ونصف وربع، فما اجتمع أخذنا جذره، وهو مساحة المسدس؛ ومثل المسدس المتساوي الأضلاع الذي يتركب من مثلثين متساوي الأضلاع وشكل قائم الزوايا على ما في هذه الصورة، فإن لنا أن نقسمه بالمثلثين والشكل القائم الزوايا، فنمسحها ثلاثتها ونجمع مساحتها فهي مساحته.

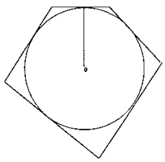
 

ولنا أن نضرب إن شئنا ضلعه في نفسه، وما اجتمع من ذلك في نفسه، ونأخذ مما اجتمع نصفه وربعه، ونستخرج جذره ونزيد على ذلك الجذر ما يجتمع من ضرب الضلع في نفسه؛ فما اجتمع فهو مساحته.

1 بثلاثة: ثلث.

Il y a des analogues à ces règles de calcul que l'homme a produites et par lesquelles il connaîtra l'aire de n'importe laquelle de ces figures qui se présente à lui, selon ce à quoi le mène sa pensée. Ces règles sont les plus faciles s'il sépare la figure, la partage et la ramène aux principes des figures que nous avons précédemment mentionnées.

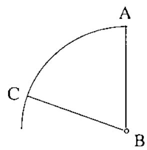
Cela peut parfois être facile selon la circonstance qui convient et on approche grâce à elle la règle de son calcul, de sorte que toutes les figures polygones rectilignes, quand il arrive que l'une d'elles soit circonscrite à un cercle, ses côtés sont tangents, alors lorsqu'on ajoute la mesure de tous ses côtés et qu'on la multiplie par la moitié du diamètre du cercle, qu'on prend la moitié du produit, on a l'aire de cette figure, que ses côtés soient égaux ou inégaux, comme sur cette figure[16].



Les figures courbes [42v] *utilisées parmi les surfaces* :

La première de ces figures est le cercle, son aire est égale au produit de son demi-diamètre par la moitié de la circonférence. Si nous connaissons le diamètre du cercle, nous pouvons déterminer la mesure de la circonférence par approximation, même si nous ne la mesurons pas, en multipliant le diamètre par trois plus un septième ; ce qu'on obtient est la circonférence par approximation et selon le procédé duquel les gens sont convenus ; nous pouvons, d'après ce principe d'approximation, si nous voulons mesurer le cercle, multiplier son diamètre par lui-même et en retrancher son septième et la moitié de son septième ; ce qui reste est l'aire du cercle, par approximation et selon le procédé sur lequel les gens se sont accordés. Quant à la première règle, elle est exacte[17].

L'aire d'un demi-cercle est connue lorsque l'aire du cercle est connue.



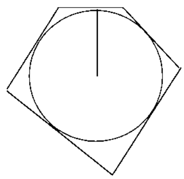
L'aire de la figure appelée secteur <de cercle>, qui est celle entourée par une portion de la circonférence du cercle et par deux droites menées des extrémités de cette portion et qui aboutissent au centre du cercle, comme sur cette figure, est égale au produit du demi-diamètre de ce cercle auquel elle appartient, par la moitié de l'arc, c'est-à-dire la moitié de la

[16] $\mathscr{A} = p \cdot r$, p le périmètre du polygone et r le rayon du cercle inscrit. Cette formule, déjà énoncée par al-Khwārizmī dans le cas de polygones réguliers, est démontrée par les Banū Mūsā dans leur calcul de l'aire du cercle (lemme I).

[17] L'aire du cercle de diamètre $d = 2r$ et de périmètre p est $\frac{1}{2}\,rp$. Par approximation, le périmètre est $\frac{22}{7}d$, donc $\mathscr{A} = d^2 - d^2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right) = \frac{11\,d^2}{14}$.

ونظائر لذلك من أبواب الحساب التي يولدها الإنسان وتنفتح له في مساحة شكل شكل مما يرد عليه من هذه الأشكال بحسب ما يهتدي إليه بالفكر؛ وهذه الأسهل، فيه إذا فصله وقطعه فرده إلى أصول الأشكال وهي التي قدمنا ذكرها.

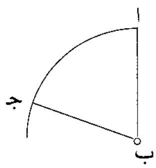
وقد يسهل ذلك أحياناً بحسب الحال التي تتفق، فيقرب بها باب حسابه حتى أن الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة كلها متى اتفق في الواحد منها أن يحيط بدائرة تماسها أضلاعه، فإنها متى جمعت مساحة أضلاعه كلها وضربت في نصف القطر للدائرة وأخذ نصف ذلك، كان هو مساحة ذلك الشكل، استوت أضلاعه أو اختلفت مثل ما في هذه الصورة.



الأشكال ذوات التقويس / المستعملة من المسطحة: ٤٢-ظ

أول هذه الأشكال الدائرة، ومساحتها مثل المجتمع من ضرب نصف قطرها في نصف الخط المحيط بها. ولنا إذا عرفنا قطر الدائرة، أن نستخرج مساحة الخط المحيط بها بالتقريب وإن لم نمسحه، بأن نضرب القطر في ثلاثة وسبع؛ فما اجتمع فهو الخط المحيط بالتقريب وعلى ما قد اصطلح الناس على العمل به؛ ولنا على حسب هذا الأصل من التقريب، إذا أردنا أن نمسح الدائرة أن نضرب قطرها في نفسه وننقص مما يجتمع سبعه ونصف سبعه، فما بقي فهو مساحة الدائرة بالتقريب وعلى ما قد تراضى الناس بالعمل به. فأما الباب الأول، فهو على الحقيقة.

وأما نصف الدائرة فمساحتها معلومة إذا كانت مساحة الدائرة قد علمت.

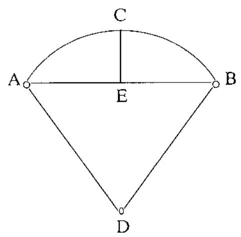


وأما الشكل الذي يسمى القطاع، وهو الذي يحيط به قطعة من محيط الدائرة وخطان مستقيمان يخرجان من طرفي القطعة وينتهيان إلى مركز الدائرة على هذه الصورة، فإن مساحته تكون مثل ضرب نصف قطر تلك الدائرة التي

20 فمساحتها: كذا، والأفصح «فمساحته».

portion qui se trouve dans le secteur, comme le produit de la droite *AB* par la moitié de l'arc *AC*[18].

Le segment de cercle est limité par un arc et sa corde, son aire est alors connue à partir de l'aire des secteurs et des triangles.



Exemple : soit *ACB* la portion de l'arc ; si nous voulons son aire, nous menons des points *A* et *B* deux droites au centre du cercle ; soit *AD* et *BD*. On aura la figure *DACB*, un secteur : nous la mesurons par la règle de l'aire des secteurs et la figure *ABD* sera un triangle ; nous la mesurons par la règle du calcul de l'aire des triangles, nous déterminons à partir de l'aire du triangle l'aire du segment de cercle *ACB* en la retranchant de l'aire du secteur, si le segment est plus petit qu'un demi-cercle, et en l'ajoutant s'il est plus grand[19].

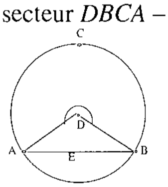
Il faut que tu saches que nous pouvons connaître la grandeur du demi-diamètre *AD*, sans le mener ni le mesurer, si nous connaissons la mesure de la corde *AB* et de la flèche *CE* ; et la règle pour cela est de multiplier la moitié de *AB* par elle-même et de diviser le produit par *CE* ; nous ajoutons alors *CE* à ce qui en résulte et nous prenons la moitié de ce que l'on a obtenu, c'est la droite *AD*[20].

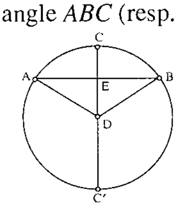
Les aires des surfaces latérales de solides :

Sache que parmi les solides il y a ceux qui sont limités par des surfaces planes et il y a ceux qui sont limités par des surfaces courbes. Parmi ceux

[18] Aire du secteur $BAC = AB \cdot \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

[19] Si un segment est plus petit (respectivement plus grand) qu'un demi-cercle, alors son aire est $\mathscr{A}$ = aire du secteur *DBCA* – aire du triangle *ABC* (resp. +).

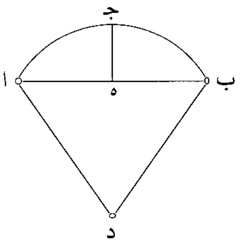




[20] On a $EA^2 = EC \cdot EC'$ (puissance du point) ; d'où $AD = \frac{1}{2}\left[\frac{EA^2}{EC} + EC\right]$ (cf. *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, 2007, p. 204, n. 86).

هو منها في نصف القوس، أعني نصف القطعة التي هي فيه، مثل ضرب خط ا ب في نصف قوس ا جـ .

وأما قطع الدائرة التي يحيط بها قوس ووترها، فإن مساحتها تعلم من مساحة القطاعات والمثلثات.



مثال ذلك: قطعة قوس ا جـ ب، فإنا متى أردنا مساحتها، أخرجنا من نقطتي ا ب خطين إلى مركز الدائرة، وهما ا د ب د. فصار لنا شكل د ا جـ ب قطاعًا، فمسحناه بباب مساحة القطاعات وصار شكل ا ب د مثلثًا، فمسحناه بباب حساب مساحة المثلثات، واستخرجنا منها مساحة قطعة ا جـ ب من الدائرة، بأن ننقصه منه إذا كانت القطعة أقل من نصف دائرة ونزيده عليه إذا كانت أكثر.

وينبغي أن تعلم أن نصف قطر ا د قد يمكنا معرفة مقداره من غير أن يخرج ويمسح إذا نحن عرفنا مساحة وتر ا ب وسهم جـ ه. والباب في ذلك أن نضرب نصف ا ب في مثله ونقسم ما اجتمع على جـ ه، فما خرج من القسمة زدنا عليه جـ ه وأخذنا نصف ما اجتمع، فهو خط ا د.

في مسائح البسط المحيطة بالمجسمات:

اعلم أن المجسمات منها ما يحيط به بسط مسطحة ومنها ما يحيط به بسط ذوات تقويس. أما التي يحيط بها منها بسط مسطحة، فمثل المكعب

3 التي: كذا، والأفصح «الذي» – 15 البسط: البسيط – 16 البسط: البسيط – 17 البسط: البسيط.

limités par des surfaces planes : le cube, qui est limité par six surfaces planes à angles droits ; le prisme, qui est la moitié du solide limité par des surfaces planes à côtés parallèles : si nous imaginons qu'on l'a scié suivant le diamètre, on a pris ainsi sa moitié et soustrait sa moitié, alors il est limité par trois surfaces planes à côtés parallèles et par deux triangles ; le tétraèdre, dont la base est un triangle et qui s'effile vers un point au-dessus de lui – il est entouré par quatre triangles ; et toutes les figures semblables.

Parmi les solides limités par des surfaces courbes : la sphère, le cylindre et son cône cylindrique.

Pour ce qui est des figures planes qui limitent les solides – ce qui est le premier de ces deux genres – nous avons achevé dans la première partie de ce livre la description de celles des règles dont on a besoin pour déterminer leur aire, car chacune de ces surfaces planes qui entourent ces solides a pour figure l'une des figures mentionnées précédemment. Si donc nous mesurons chacune d'elles par la règle décrite précédemment, si ensuite nous les additionnons, on aura l'aire de la surface entière qui entoure ce solide et nous n'aurons besoin pour cela de rien d'autre ; mais il est cependant parfois possible que le calcul de l'aire de cette surface, telle quelle, soit aisé par une règle d'un accès plus direct.

Exemple : pour tout solide dont la figure de la partie supérieure est semblable à la figure de la base et lui est parallèle et égale, et entre lesquelles il y a des plans perpendiculaires qui l'entourent, si nous voulons son aire, nous prenons l'un des côtés de ces plans du haut vers le bas et nous le multiplions par la somme de ce qui entoure sa base ; ce que l'on obtient est l'aire de son pourtour. Si nous ajoutons à cela l'aire de sa base et celle de sa partie supérieure, la somme sera l'aire totale de la surface qui l'entoure de tous les côtés[21].

Quant aux surfaces courbes qui entourent les solides, [43^r] *la manière de les calculer est la suivante* :

La surface de la sphère : Pour la sphère, si nous voulons, nous multiplions son diamètre par la droite qui l'entoure, c'est-à-dire la circonférence de l'un des cercles qui la partage en deux moitiés ; ce que l'on obtient est l'aire de sa surface. Si nous voulons, nous déterminons l'aire de l'un des cercles qui la partage en deux moitiés par l'une des règles du calcul des cercles que nous avons mentionnées précédemment, puis nous multiplions cela par quatre ; ce que l'on obtient est l'aire de sa surface. Le premier à avoir déterminé l'aire de la surface de la sphère est Archimède[22].

[21] L'aire du prisme droit de hauteur h : l'aire latérale $\mathscr{A}' = h \cdot p$ (p le périmètre d'une base) ; l'aire totale est égale à $\mathscr{A} = \mathscr{A}' + 2S$; S est l'aire d'une base.

[22] Aire de la sphère : $\mathscr{A} = d \cdot \pi d = 4\pi r^2$ (r rayon d'un grand cercle).

فإن الذي يحيط به هو ستة سطوح قائمة الزوايا؛ ومثل المنشور الذي هو نصف المجسم الذي تحيط به سطوح متوازية الأضلاع إذا توهمنا أنه نُشِر على القطر، فأُخذ نصفه وطرح نصفه، فإنه يحيط به ثلاثة سطوح متوازية الأضلاع ومثلثان؛ ومثل الشكل المخروط الذي قاعدته مثلث وينخرط إلى نقطة في أعلاه، فإنه يحيط به أربع مثلثات؛ وما أشبه ذلك من الأشكال.

وأما التي تحيط بها بسط ذوات تقويس فمثل الكرة والأسطوانة ومخروطها.

فما كان من هذه البسط المحيطة بالمجسمات مسطحًا، وهو الأول من هذين الجنسين، فقد أتينا على وصف ما يحتاج إليه من أبواب مساحته في القسم الأول من هذا الكتاب، لأن كل واحد من هذه السطوح المحيطة بهذه المجسمات يكون شكله أحد الأشكال التي قد تقدم ذكرها. فإذا مسحنا كل واحد منها على حدة ببابه الذي قد تقدم وصفه، ثم جمعناها، كان ذلك مساحة جملة البسيط المحيط بذلك المجسم ولم نحتج في أمره إلى غير هذا، غير أنه قد يمكن في نفسها أن يسهل حسابه بباب هو أقرب مأخذ أحيانًا.

مثال ذلك: أن كل مجسم يكون شكل أعلاه شبيهًا بشكل قاعدته وموازيًا ومساويًا لها وما بينهما سطوح قائمة الزوايا محيطة به، فإنا إذا أردنا مساحته، أخذنا ضلعًا من أضلاع تلك السطوح أخذاً من أعلاه إلى أسفله، فضربناه في جملة ما يحيط بقاعدته، فما اجتمع فهو مساحة دوره، فإذا زدنا على ذلك مساحة قاعدته وأعلاه، كانت الجملة مساحة جميع البسيط المحيط به من كل جانب.

وأما ما كان من البسط المحيطة بالمجسمات مقوسًا، / فالوجه في ٤٣-و
حسابها على ما أصف:

بسيط الكرة: أما الكرة منها فإنا إن شئنا ضربنا قطرها في خط دورها، أعني الخط المحيط بدائرة من دوائرها التي تقسمها بنصفين؛ فما اجتمع فهو مساحة بسيطها. وإن شئنا استخرجنا مساحة دائرة من دوائرها هذه التي تقسمها بنصفين بباب من أبواب حساب الدوائر التي قدمنا ذكرها. ثم ضربنا ذلك في أربعة؛ فما اجتمع فهو مساحة بسيطها. ومساحة بسيط الكرة كان أول مَن استخرجه أرشميدس.

6 بسط: بسيط.

La surface du cylindre : Pour la surface du cylindre droit nous prenons son côté, qui est sa longueur, et le demi-diamètre de l'une de ses deux bases, nous multiplions leur somme par la circonférence du cercle de l'une des deux bases ; ce que l'on obtient est l'aire de la surface qui l'entoure de tous les côtés, plus les deux bases. Si nous ne voulons que l'aire qui l'entoure sans les bases, nous multiplions le côté seul par la circonférence du cercle de l'une des deux bases ; ce que l'on obtient est son aire[23].

La surface du cône circulaire: Le cône circulaire droit est celui dont la base est un cercle et dont le sommet s'effile en un point qui sera vis-à-vis du centre de sa base. Si nous prenons son côté, qui est entre le point de son sommet et un point de la circonférence de sa base, et le demi-diamètre de sa base, et si nous multiplions leur somme par la moitié de la circonférence du cercle de sa base, ce qu'on obtient est l'aire de la surface qui l'entoure de tous les côtés plus sa base. Si nous ne voulons que l'aire de la surface latérale qui l'entoure sans la base, alors nous multiplions le côté seul par la demi-circonférence du cercle de sa base ; ce que l'on obtient est son aire[24].

La surface du solide circulaire dont les extrémités sont inégales : Le solide dont les extrémités sont inégales n'est pas comme la figure cylindrique et ne s'effile pas en un point comme le cône circulaire ; mais il s'effile vers un cercle plus petit que le cercle de sa base, c'est comme s'il s'agissait du cône mentionné précédemment, si ce n'est qu'on aurait coupé à partir de son sommet une portion par un plan parallèle à sa base et qu'elle aurait été retranchée. Nous prenons l'un de ses côtés, entre un point de la circonférence du cercle supérieur et son homologue du cercle de base, que nous multiplions par la moitié de la circonférence du cercle supérieur plus la moitié de la circonférence du cercle de sa base ; ce que l'on obtient est son aire, c'est-à-dire l'aire de la surface qui l'entoure de tous les côtés. Si nous ajoutons à cela l'aire du cercle de sa base et celle du cercle supérieur, la somme sera l'aire de toute la surface qui l'entoure de tous les côtés. Il faut que tu saches que cette figure est une portion de la figure complète qui est le cône circulaire <droit>[25]. De même, il existe également des portions pour la sphère et pour la figure du cylindre.

[23] Aire du cylindre de révolution de hauteur h et dont le rayon du cercle de base est r
aire totale : $\mathscr{A} = (h + r) \cdot 2\pi r$
aire latérale : $\mathscr{A}' = 2\pi r h$.

[24] Aire du cône de révolution de génératrice de longueur l et de cercle de base de rayon r : aire totale : $\mathscr{A} = (l + r) \cdot \pi r$; aire latérale : $\mathscr{A}' = l \cdot \pi r$.

[25] Aire d'un tronc de cône de révolution : aire latérale : $\mathscr{A}' = \pi l(r_1 + r_2)$ (avec r_1 et r_2 les rayons respectifs des cercles de base) ; aire totale $\mathscr{A} = \mathscr{A}' + \pi(r_1^2 + r_2^2)$.

بسيط الأسطوانة: وأما بسيط الأسطوانة القائمة، فإنا نأخذ ضلعها الذي هو طولها ونصف قطر إحدى قاعدتيها، فنضربهما في الخط المحيط بدائرة إحدى قاعدتيها؛ فما اجتمع فهو مساحة البسيط المحيط بها من جنباتها مع قاعدتيها. فأما إن كنا إنما نريد مساحة الدور دون القاعدة، فإنما نضرب الضلع وحده في الخط المحيط بدائرة إحدى القاعدتين؛ فما اجتمع فهو مساحته.

بسيط المخروط المستدير: وأما المخروط المستدير القائم وهو الذي قاعدته دائرة وتنخرط رأسه إلى نقطة تحاذي مركز قاعدته. فإنا نأخذ ضلعه وهو ما بين نقطة رأسه وبين نقطة من الخط المحيط بقاعدته، ونصفَ قطر قاعدته، فنضربهما مجموعين في نصف الخط المحيط بدائرة قاعدته؛ فما اجتمع فهو مساحة البسيط المحيط به من جنباته مع قاعدته. فأما إن كنا إنما نريد منه مساحة الدور دون القاعدة، فإنما نضرب الضلع وحده في نصف الخط المحيط بدائرة قاعدته؛ فما اجتمع فهو مساحته.

بسيط المجسم المستدير المختلف الطرفين: وأما المجسم الذي ليس بمتساوي الطرفين مثل شكل الأسطوانة ولا منخرطاً إلى نقطة مثل المخروط المستدير، لكنه ينخرط إلى دائرة أصغر من دائرة قاعدته، الذي كأنه إنما هو المخروط الذي تقدم ذكره، إلا أنه قد قطع من رأسه قطعة بسطح يوازي قاعدته فطرحت. فإنا نأخذ ضلعًا من أضلاعه التي بين نقطة من الخط المحيط بدائرة أعلاه وبين نظيرتها من دائرة قاعدته، فنضربه في نصف الخط المحيط بدائرة أعلاه مع نصف الخط المحيط بدائرة قاعدته مجموعين؛ فما اجتمع فهو مساحته، أعني مساحة بسيطه الذي يحيط به من جنباته. وإن زدنا على ذلك مساحة دائرة قاعدته ودائرة أعلاه، كانت الجملة هي مساحة جميع البسيط المحيط به من كل جهة. وينبغي أن تعلم أنه كما أن هذا الشكل قطعة من الشكل التام الذي هو المخروط المستدير، كذلك قد يوجد أيضًا للكرة ولشكل الأسطوانة قطع.

4 القاعدة: الأصح «القاعدتين» – 7 القائم: أثبتها في الهامش مع الإشارة – 9 من: مركز – 21 أعني مساحة بسيطه: أثبتها في الهامش مع الإشارة.

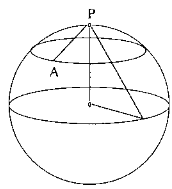
L'aire de la surface des portions de la sphère a été déterminée par Archimède le philosophe. Il a montré dans son livre *Sur la sphère et le cylindre* que, si nous déterminons la droite menée du point du sommet d'une portion de sphère, qui est le pôle associé à un cercle, à la circonférence du cercle de sa base, si nous construisons un cercle tel que cette droite soit son demi-diamètre et si nous déterminons l'aire de ce cercle, ce sera l'aire de la surface courbe de cette portion de sphère[26].

Quant à l'aire de la surface d'une portion de cylindre, je l'ai déterminée et j'ai montré dans mon livre *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale*[27] que l'aire de la surface courbe qui entoure cette portion est connue – même si la section est faite par un plan qui n'est pas parallèle à la base et qui est tel que les droites longueurs entre la section et la base qui sont des segments des côtés du cylindre, sont de longueurs inégales – en prenant la plus petite de ces droites et la plus grande, en les additionnant et en prenant la moitié de la somme qu'on multiplie par la circonférence du cercle de la base si le cylindre est droit[28], et que par une méthode analogue on détermine les aires de toutes les surfaces courbes situées entre deux plans sécants au cylindre, quelle que soit la manière par laquelle ils l'ont coupé.

Il est possible à celui qui a saisi ce que nous avons décrit au sujet de l'aire des surfaces, de réfléchir à volonté, à ce qui s'engendre comme innombrables figures par composition à partir de cela ; il les ramène ainsi à ces dernières et détermine leurs aires.

[26] Aire d'une calotte sphérique :

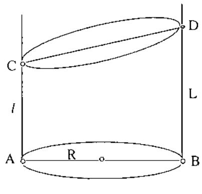
Soit sur la sphère un cercle – une section plane quelconque – et P son pôle, et soit l la longueur du segment joignant P à un point quelconque du cercle ; l'aire de la calotte de pôle P est alors $\mathscr{A} = \pi l^2$.



Remarque : si le cercle donné a pour centre le centre de la sphère, alors la calotte est une demi-sphère ; dans ce cas, on a $l = r\sqrt{2}$ et $\mathscr{A} = 2\pi r^2$.

[27] Voir R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, 1996, chap. II, section 2.4.

[28] L'aire d'une portion de cylindre droit : $\mathscr{A} = \pi r\,(l + L)$, l et L étant les segments respectifs de deux génératrices opposées AC et BD.



فأما مساحة بسيط قطع الكرة منها فقد كان استخرجها أرشميدس الحكيم، وبيّن في كتابه الذي *في الكرة والأسطوانة*: أنا إذا استخرجنا الخط المستقيم الخارج من نقطة رأس القطعة من الكرة، الذي هو قطبها الذي قرن بها دائرة، إلى الخط المحيط بدائرة قاعدتها، وعملنا دائرة يكون ذلك الخط نصف قطرها، واستخرجنا مساحة تلك الدائرة، كان ذلك مساحة بسيط تلك القطعة من الكرة المقوس.

وأما مساحة بسيط قطع الأسطوانة فإني قد استخرجتها، وبينت في كتابي الذي *في قطوع الأسطوانة وبسيطها* أن: مساحة ما يحيط بالقطعة من ذلك من البسيط المقوس تعرف، وإن كان القطع بسطح لا يوازي القاعدة وكان ما بينه وبينها من خطوط الطول التي هي قطع من أضلاع الأسطوانة مختلف الأطول، بأن نأخذ أقصر هذه الخطوط وأطولها فيجمعان، ويؤخذ نصفهما، فنضرب في الخط المحيط بدائرة القاعدة إذا كانت الأسطوانة قائمة، وأن بشبيه هذا الطريق، تستخرج مسائح سائر البسط المقوسة التي تقع فيما بين كل سطحين يقطعان الأسطوانة كيفما قطعاها.

وقد يمكن من وقف على ما وصفنا من أمر مساحة البسط أن يتفكر فيما شئنا مما يتولد عن تركيب ذلك من الأشكال الكثيرة التي لا نهاية لها، فيردها إليها ويستخرج مسائحها منها.

13 البسط: البسيط – 15 البسط: البسيط.

Volumes des figures solides : Le cas des figures solides est analogue au cas des figures planes, en ce sens qu'il y en a deux sortes : [43v] l'une concerne celles entourées par des surfaces planes sans courbure, comme le cube et l'octaèdre et les semblables ; l'autre concerne celles entourées par des surfaces courbes, comme la sphère, le cylindre, le cône de révolution et les semblables. Nous allons décrire les principes auxquels on ramène celles d'entre elles que l'on utilise.

La première qu'il faut mentionner parmi celles-ci est le cube, car le volume de tout solide se ramène à lui et est mesuré par lui, comme l'aire des figures planes se ramène au carré.

Le cube : Le cube est ce qui est entouré par six surfaces carrées et dans lequel tous les angles sont droits et les côtés sont égaux ; son volume est le produit de sa longueur par sa largeur et de ce que l'on obtient par sa hauteur.

Le parallélépipède : Ce solide est entouré par six surfaces à côtés parallèles, même si leurs côtés ne sont pas égaux et si leurs angles ne sont pas droits. Son volume est ce qu'on obtient du produit de sa hauteur – prise entre la surface supérieure et la surface inférieure suivant une perpendiculaire qui tombe sur les deux surfaces – par l'aire de la surface de sa base.

Les solides dont les deux extrémités sont égales : En général, ces solides sont ceux dont la surface de la base et la surface supérieure sont parallèles, semblables et égales, quelle que soit leur figure : triangles, carrés, pentagones, et ainsi de suite parmi les figures rectilignes, ou le cercle. Ces solides sont entourés et contenus par des surfaces parallèles et à côtés parallèles, ou par la surface d'un cylindre. On connaît le volume de chacun de ces solides en multipliant sa hauteur – prise entre la surface supérieure et la surface de sa base suivant une perpendiculaire entre ces deux surfaces – par l'aire de sa base.

Le prisme[29] : Il est clair, à partir de ce que nous avons dit, que la figure prismatique – c'est-à-dire le solide engendré si nous imaginons une figure solide à surfaces parallèles qui a été sciée suivant sa diagonale et qui s'est ainsi partagée en deux solides dont chacun est entouré par deux triangles égaux et semblables et trois surfaces à côtés parallèles – a pour volume le

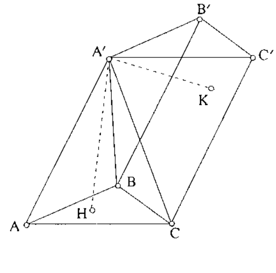
[29] Prisme :

Les bases sont des polygones égaux dans deux plans parallèles, et les faces latérales sont des parallélogrammes.

Si on prend comme base ABC la hauteur $A'H$ perpendiculaire au plan ABC, le volume $V = \text{aire } ABC \times A'H$.

Si on prend comme base le parallélogramme $BCC'B'$, la hauteur $A'K$ perpendiculaire au plan BCC', on a

$$V = \text{aire } BCC'B' \times A'K.$$



في مسائح الأشكال المجسمة: الحال في الأشكال المجسمة نظيره للحال في الأشكال المسطحة في أنها صنفان: / أحدهما ما يحيط به سطوح ٤٣-ظ مستوية لا تقويس فيها مثل المكعب وذي الثماني القواعد وما أشبه ذلك، والآخر ما يحيط به سطوح ذوات تقويس مثل الكرة والأسطوانة والمخروط المستدير وما أشبه ذلك. ونحن نصف أصولها التي ترجع إليها المستعملة منها.

وأول ما يجب ذكره منها المكعب، لأن مساحة كل مجسم إليه ترجع وبه تقدر كما ترجع مساحة المسطحات إلى المربع.

المكعب: المكعب هو ما أحاطت به ستة سطوح مربعة وكانت الزوايا كلها فيه قائمة والأضلاع متساوية؛ ومساحته هي ما يجتمع من ضرب طوله في عرضه وما اجتمع في ارتفاعه.

المجسم المتوازي السطوح: هذا المجسم تحيط به ستة سطوح متوازية الأضلاع، وإن لم تكن جميع أضلاعها متساوية ولا زواياها قائمة؛ ومساحته هي ما يجتمع من ضرب ارتفاعه، وهو المأخوذ بين سطح أعلاه وبين سطح أسفله على عمود يقع على سطحيهما، في مساحة سطح قاعدته.

المجسمات المتساوية الطرفين: هذه المجسمات بالجملة هي ما كان له سطح قاعدته وسطح أعلاه متوازيين متشابهين متساويين بأي شكل كانا من المثلثات أو المربعات أو المخمسات، وما بعد ذلك من المستقيمة الخطوط ومن الدائرة، وتحيط به وتحويه معهما فيما بينهما سطوح متوازية متوازية الأضلاع أو بسيط الأسطوانة. ومساحة كل مجسم منها تعرف بأن نضرب ارتفاعه، وهو المأخوذ بين سطح أعلاه وبين سطح قاعدته على عمود بين السطحين، في مساحة قاعدته.

المنشور: وتبين مما قلنا أن الشكل المنشور، ومعناه أنه المجسم الذي يحدث إذا توهمنا أن شكلاً مجسماً متوازي السطوح قد نشر على قطره، فانقسم بمجسمين يحيط بكل واحد منهما مثلثان متساويان متشابهان وثلاثة سطوح متوازية الأضلاع، فإن مساحته هي ما يجتمع من ضرب

21 بين (الثالثة): من.

produit de sa hauteur – si nous posons pour base l'un des triangles et si nous prenons sa hauteur entre la surface supérieure et sa base selon une perpendiculaire – par l'aire de sa base ; car la voie pour y parvenir est comme celle pour les solides que nous avons mentionnés et qui sont appelés « à deux extrémités égales ». Si nous posons pour base l'une des trois surfaces à côtés parallèles, alors son volume sera le demi-produit de sa hauteur – prise entre la ligne supérieure et la surface de la base selon une perpendiculaire – par l'aire de la base que nous avons mentionnée, car cela est la moitié du parallélépipède à partir duquel nous avons imaginé qu'il a été scié. Mais ces deux règles pour son volume sont égales et s'accordent.

Quant à la pyramide façonnée à partir de ce prisme, si l'on en pose pour base la première base, c'est-à-dire le triangle, et si on l'effile jusqu'à un point – quel que soit ce point – de sa face supérieure, alors son volume est égal au tiers du volume du prisme. Il est aussi égal au sixième <du volume> du parallélépipède dont il fait partie. Mais si on l'effile en supposant que sa base est une des trois surfaces à côtés parallèles et son sommet un point de la ligne supérieure, alors le volume de cette pyramide sera les deux tiers du volume de ce prisme et le tiers du volume du parallélépipède dont il fait partie. Dans le chapitre suivant, on montre ce cas ainsi que ses analogues.

Les pyramides[30] : Quant aux pyramides dont les bases sont des triangles, des carrés, des pentagones, des cercles ou d'autres figures, le volume de chacune d'elles est le tiers du volume de la figure à deux extrémités égales, dont la base est sa base et dont la surface supérieure est aussi parallèle, égale et semblable à sa base. C'est pourquoi quand nous voulons le volume de

[30] Si dans le prisme triangulaire de la figure précédente, on joint un point quelconque de la face $A'B'C'$ aux trois points A, B, C de la base, on obtient une pyramide à base triangulaire dont le volume $V = \frac{1}{3}\, A'H \times$ aire ABC, c'est-à-dire le tiers du prisme. On a donc $V = \frac{1}{6}$ du volume du parallélépipède associé à ce prisme.

D'autre part, si on joint le point A' aux sommets du quadrilatère $BCC'B'$, on obtient une pyramide qui est la différence entre le prisme triangulaire et la pyramide (A', ABC), son volume $V' = 2\,V$ est donc le tiers du volume du parallélépipède ; soit $V' = \frac{1}{3} A'K \times$ aire $(BCC'B')$; dans les deux cas – pyramide à base triangulaire ou à base quadrangulaire – le volume est donc $V = \frac{1}{3}$ aire de base $\times$ hauteur. Enfin, à toute pyramide dont la base est un polygone, on peut associer un prisme de même base et de même hauteur. La seconde base du prisme passe par le sommet de la pyramide et est égale à la première base. Dans tous les cas, on a $V = \frac{1}{3}$ base $\times$ hauteur.

Pour le cône à base circulaire, le résultat est le même et on a $V = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \times h$.

ارتفاعه – إذا جعلنا قاعدته أحد المثلثين، وأخذنا ارتفاعه بين أعلاه وقاعدته على عمود – في مساحة قاعدته؛ لأن سبيله تكون سبيل المجسمات التي ذكرنا التي تسمى المتساوية الطرفين. وإنا إن جعلنا قاعدته أحد السطوح الثلاثة المتوازية الأضلاع، فإن مساحته تكون نصف ما يجتمع من ضرب ارتفاعه – المأخوذ بين خط أعلاه وبين سطح قاعدته على عمود – في مساحة قاعدته التي ذكرنا، لأن ذلك هو نصف المجسم المتوازي السطوح الذي كنا توهمنا أن منه نشر. وكلا هذين البابين من أبواب مساحته متساويان متفقان.

وأما المخروط الذي يخرط من هذا المنشور إذا جعلت قاعدته القاعدة الأولى، أعني المثلث، وخرط إلى نقطة في أعلاه أي نقطة كانت، فإن مساحته تكون مثل ثلث مساحته، وهي أيضًا مثل سدس المجسم المتوازي الأضلاع الذي هو منه. فأما إن خرط على أن قاعدته أحد السطوح الثلاثة المتوازية الأضلاع ورأسه نقطة على خط أعلاه، فإن مساحة ذلك المخروط تكون الثلثين من مساحة ذلك المنشور والثلث من مساحة المجسم المتوازي الذي كان منه. وبيان الحال في ذلك ونظائره في الباب الذي يتبع هذا.

المخروطات: وأما المخروطات التي قواعدها مثلثات أو مربعات أو مخمسات أو دوائر أو غير ذلك من الأشكال، فإن مساحة كل واحد منها ثلث مساحة الشكل المتساوي الطرفين الذي قاعدته قاعدته وأعلاه أيضًا موازٍ ومساوٍ وشبيه لقاعدته. ولذلك متى أردنا مساحة شيء من أصناف هذه

7 كنا: كانا / توهمنا: توهما.

l'une de ces sortes de figures pyramidales, nous prenons l'aire de la base que nous multiplions par la hauteur qui est la perpendiculaire abaissée du point de son sommet sur la surface de sa base, comme nous l'aurions fait si elle était à deux extrémités égales, puis nous prenons le tiers de cela, ou nous en ôtons les deux tiers ; on a son volume.

Les solides à extrémités inégales : Quant aux solides dont les extrémités sont inégales, non effilées comme pour toutes les pyramides vers un point, mais dont l'une des extrémités est plus resserrée que l'autre, et telle que cette extrémité resserrée aboutisse à une figure parallèle à la base – qui est l'extrémité la plus étendue – et qui lui est semblable tout en étant plus petite, [44r] que ce soit un cercle ou un polygone, chacun d'eux est un cône[31] dont la base est cette base, si ce n'est qu'on en a coupé par un plan parallèle à la base du côté de son sommet une portion qui a été retranchée[32].

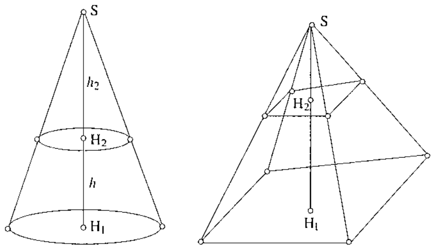
[31] Cône ou pyramide.

[32] Tronc de pyramide ou tronc de cône (droit ou oblique) : Il s'agit du solide qu'on obtient en coupant un cône ou une pyramide par un plan parallèle à sa base. Le solide a alors deux bases dont la deuxième est homothétique de la première. Son volume est la différence des volumes de deux cônes ou de deux pyramides. Thābit ibn Qurra donne deux méthodes pour calculer ce volume.

1) Méthode de Thābit ibn Qurra : Soit $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ les aires des deux bases, $h_1 = SH_1$ et $h_2 = SH_2$, les hauteurs qui leur correspondent, le volume cherché est alors :

$$V = \frac{1}{3}\,(\mathscr{A}_1 h_1 - \mathscr{A}_2 h_2).$$

La hauteur h du solide étudiée est $h = h_1 - h_2$.



Posons $\frac{h_1}{h_2} = k$; on a par l'homothétie (S, k), $\frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_2} = k^2$. D'autre part, $\frac{h_1 - h_2}{h_2} = k - 1 = \frac{h}{h_2}$, d'où $h_2 = \frac{h}{k-1}$ et $h_1 = \frac{h\,k}{k-1}$. On a donc

$$V = \frac{1}{3}(\mathscr{A}_1 h_1 - \mathscr{A}_2 h_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{k^3 \mathscr{A}_2 h}{k-1} - \frac{\mathscr{A}_2 h}{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\mathscr{A}_2 h \cdot \frac{k^3 - 1}{k-1} = \frac{1}{3} h \mathscr{A}_2 \left[k^2 + k + 1\right] = \frac{1}{3} h \left[\mathscr{A}_1 + \sqrt{\mathscr{A}_1 \mathscr{A}_2} + \mathscr{A}_2\right].$$

C'est le résultat donné par Thābit ibn Qurra dans le dernier paragraphe du texte.

2) Méthode usuelle : Soit d_1 et d_2 les diamètres des cercles ou les longueurs de deux côtés homologues des polygones de base. Les calculs successifs indiqués donnent

$$V = \frac{1}{3}\left[\left(h \frac{d_2}{d_1 - d_2} + h\right)\mathscr{A}_1 - \frac{h d_2}{d_1 - d_2}\mathscr{A}_2\right].$$

Si on pose comme dans le calcul précédent $\frac{d_1}{d_2} = k$, on a

$$\mathscr{A}_1 = k^2 \mathscr{A}_2 \text{ et } V = \frac{1}{3}\frac{h}{k-1}\left(k^3 \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_2\right) = \frac{1}{3} h \mathscr{A}_2 \left[k^2 + k + 1\right],$$

et on retrouve le résultat donné par la première méthode.

الأشكال المخروطة، أخذنا مساحة قاعدته، فضربناها في ارتفاعه الذي هو العمود الواقع من نقطة رأسه على سطح قاعدته، كما كنا نفعل لو كان متساوي الطرفين، ثم نأخذ من ذلك ثلثه أو نطرح الثلثين، فهو مساحته.

المجسمات المختلفة الطرفين: وأما المجسمات التي ليست بمتساوية الطرفين ولا منخرطة مثل سائر المخروطات إلى نقطة، لكن أحد طرفيها أدق من الآخر، وينتهي ذلك الطرف الدقيق إلى شكل يوازي القاعدة التي هي الطرف الأغلظ ويشبهما إلا أنه أصغر / منها، دائرة كانت أو شكلاً ذا ٤٤-و أضلاع، فكان كل واحد منها إنما هو مخروط قاعدته تلك القاعدة إلا أنه قد قطع منه من جهة رأسه قطعة بسطح يوازي قاعدته، فطرحت.

3 أو نطرح: ونطرح.

D'habitude pour déterminer leur volume, les gens prennent la hauteur du <point> le plus haut en partant de la base selon une perpendiculaire ; ils la multiplient par le diamètre du cercle de la surface supérieure, si c'est un cercle, ou par l'un des côtés de la surface supérieure, si celle-ci est un polygone ; puis on divise le produit par l'excédent du diamètre de sa base sur le diamètre de la surface supérieure, si ce sont deux cercles, ou par l'excédent de l'un des côtés de sa base homologue de celui des côtés de la surface supérieure par lequel a été multipliée la hauteur, sur ce côté par lequel on a multiplié. On retient le quotient que l'on multiplie par l'aire de la surface supérieure du solide ; on retient aussi le résultat, puis on prend le premier retenu, on lui ajoute la hauteur que nous avons prise et on prend le produit de la somme par l'aire de la base de cette figure solide ; on retranche ce qu'on obtient du deuxième retenu et on prend le tiers du reste ; c'est le volume de ce solide.

Quant à moi, j'en ai déterminé le volume d'une manière d'accès plus proche et j'ai en exposé la démonstration dans un autre livre[33]. Voici cette manière :

On prend l'aire de la surface supérieure de cette figure solide et l'aire de la surface inférieure ; on multiplie l'une par l'autre et on prend la racine du produit que l'on ajoute à la somme des aires de sa surface supérieure et de sa base ; on multiplie la somme par la hauteur de ce solide et on en prend le tiers, c'est le volume du solide.

La sphère : Il nous reste à mentionner, parmi les figures mesurables et qui sont des principes pour d'autres, la sphère[34].

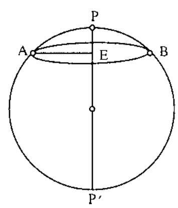
[33] Voir *La Mesure du paraboloïde* dans *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 286-289 et 363-367.

[34] Sphère et calotte sphérique : Si d est le diamètre de la sphère, on a

$$V=\left(d^2\cdot\pi d\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi d^3}{6}=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad r=\frac{1}{2}d.$$

Soit maintenant APB une calotte sphérique de pôle P, et soit E le centre du cercle de base de la calotte, $PE = h$ sa hauteur ; posons $AB = 2r$ et soit R le rayon de la sphère. Thābit ibn Qurra donne le calcul suivant :

aire de la base : πr^2, donc $V=\frac{(3R-h)h}{2R-h}\cdot\pi r^2\cdot\frac{1}{3}$;



mais $AE^2 = PE\cdot EP'$, donc $r^2 = h(2R-h)$. On a donc

$$V=\frac{1}{3}\pi(3R-h)h^2=\frac{1}{3}\pi h\left[(2R-h)h+Rh\right],$$

d'où

$$V=\frac{1}{3}\pi hr^2+\frac{1}{3}\pi Rh^2.$$

Remarque : La demi-sphère est une calotte avec $h = R = r$, la formule précédente donne $V=\frac{2}{3}\pi R^3$.

فإن الذي جرى عليه الناس في مساحتها هو أن يؤخذ ارتفاع أعلاه عن قاعدته على عمود، فيضرب في قطر دائرة أعلاه إن كان دائرة، أو في ضلع من أضلاع أعلاه إن كان أعلاه ذا أضلاع، ويقسم ما اجتمع على زيادة قطر قاعدته على قطر أعلاه، إن كان دائرتين، أو على زيادة الضلع من أضلاع قاعدته النظير للضلع الذي ضرب فيه الارتفاع من أضلاع أعلاه على ذلك الضلع الذي فيه ضرب. فما خرج من القسمة حفظ، وضرب في مساحة سطح أعلى الشكل المجسم؛ فما اجتمع حفظ أيضًا، ثم أخذ المحفوظ الأول، فنزيد عليه الارتفاع الذي كنا أخذنا وضرب ما اجتمع في مساحة قاعدة ذلك الشكل المجسم، ونقص مما اجتمع [من] المحفوظ الثاني؛ فما بقي أخذ ثلثه، فهو مساحة ذلك المجسم.

وأما أنا، فإني استخرجت مساحة ذلك بوجه أقرب مأخذاً، بينتُ برهانه في كتاب آخر، وهو هذا الوجه:

يؤخذ مساحة سطح أعلى هذا الشكل المجسم ومساحة سطح أسفله، ويضرب أحدهما في الآخر، ويؤخذ جذر ما اجتمع ويزاد على مساحة سطح أعلاه وأسفله مجموعين؛ وما اجتمع ضرب في ارتفاع ذلك المجسم وأخذ ثلثه، وهو مساحة المجسم.

الكرة: والذي بقي علينا ذكره من الأشكال التي لها قدر وكأنها من الأصول لغيرها هي الكرة.

Le premier à avoir déterminé son volume est Archimède. La manière de faire cela est de prendre le diamètre de la sphère que l'on multiplie par lui-même, puis on multiplie le produit par la circonférence du cercle qui partage la sphère en deux moitiés et on prend de ce que l'on obtient sa moitié puis son tiers[35] ; c'est le volume de la sphère.

La manière d'obtenir le volume d'une portion de sphère, limitée par une surface plane et une portion de la surface de la sphère, est de déterminer d'abord l'aire du cercle où a eu lieu la section – en effet toute section plane d'une sphère est suivant un cercle ; on prend ensuite le diamètre de la sphère, on en retranche la hauteur de cette portion de la sphère, nous retenons le reste et on lui ajoute le demi-diamètre de sphère ; on multiplie la somme par la hauteur de cette portion et on divise le produit par le retenu, on multiplie le quotient par l'aire du cercle dont nous avons dit qu'il est le lieu de la section, on prend le tiers du produit ; c'est le volume de cette portion de sphère.

Nous venons donc d'achever la description des principes des mesures des figures planes et solides et de celles qui se composent à partir de cela, hormis quelques figures exceptionnelles peu utilisées et d'accès éloigné, même si nous avons traité de quelques-unes en d'autres lieux. Quant aux figures planes, c'est par exemple la figure qui ressemble au cercle, sans être un cercle car sa longueur est plus grande que sa largeur, et qui est appelée ellipse, et d'autres parmi les figures de sections de cône et de cylindre ; j'ai consacré à ce que j'en ai découvert et déterminé des livres dans lesquels je me suis expliqué[36]. Quant aux figures solides, c'est par exemple les figures engendrées à partir de la rotation de celles-ci.

Le livre de Thābit ibn Qurra sur la mesure des figures est terminé. Bien des grâces soient rendues à Dieu, maître des mondes.

[35] Le tiers de la dernière moitié mentionnée.

[36] Voir l'édition de ces textes dans *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I.

وكان أول من استخرج مساحتها أرشميدس. والوجه في ذلك هو أن يؤخذ قطر الكرة، فيضرب في نفسه، وما اجتمع في الخط المحيط بالدائرة التي تقسم الكرة بنصفين ويؤخذ مما اجتمع نصفه وثلثه، فهو مساحة الكرة.

وأما قطعة الكرة التي يحيط بها سطح مستوٍ وقطعة من بسيط الكرة، فالوجه في مساحتها أن نستخرج أولاً مساحة الدائرة التي هي موضع القطع؛ فإن كل قطع يكون في كرة على استواء، فهو على دائرة، ثم يؤخذ قطر الكرة، فينقص منه ارتفاع تلك القطعة من الكرة، ويحفظ ما يبقى ويزاد عليه نصف قطر الكرة؛ فما اجتمع ضرب في ارتفاع تلك القطعة، وقسم على ذلك المحفوظ؛ فما خرج من القسمة ضرب في مساحة الدائرة التي قلنا إنها موضع القطع، وأخذ ثلث ما اجتمع، فهو مساحة تلك القطعة من الكرة.

فقد أتينا على وصف أصول مسائح الأشكال البسيطة والمجسمة وما يتركب من ذلك إلا الشاذ منها مما يقل استعماله ويبعد المأخذ فيه وإن كنا قد أتينا من ذلك أشياء في مواضع أخر. أما من الأشكال المسطحة فمثل الشكل الذي يشبه الدائرة وليس بدائرة، لأن طوله أكثر من عرضه ويسمى القطع الناقص وغيره من أشكال قطوع المخروط والأسطوانة، فإني قد أفردت مما وجدته واستخرجته من ذلك كتباً بينته فيها؛ وأما من الأشكال المجسمة، فمثل الأشكال التي تتولد من إدارة هذه.

تم كتاب ثابت بن قرة في مساحة الأشكال والحمد لله رب العالمين كثيراً.

1 هو: أثبتها فوق السطر – 3 نصفه وثلثه: غير واضحة.

LEMMES GÉOMÉTRIQUES DE THĀBIT IBN QURRA

Roshdi RASHED

Les lemmes (*al-Muqaddamāt*) désignent une collection de vingt problèmes géométriques, qui nous est parvenue en un unique manuscrit, lequel n'est pas des meilleurs, faut-il le souligner. Cet opuscule fait partie de la collection Thurston 3, à Oxford. Nous avons établi à propos d'autres écrits de cette collection – écrits d'al-Qūhī, d'Abū al-Jūd, d'Ibn al-Haytham, de Kamāl al-Dīn ibn Yūnus[1] – pour lesquels on dispose d'autres manuscrits, que le copiste est intervenu pour abréger la formulation en éliminant non seulement le prologue mais les termes qui lui ont paru inutiles, tels que droite, point, etc., sans toutefois modifier la démonstration.

L'examen du manuscrit unique du texte de Thābit ibn Qurra soulève d'autres difficultés que celles qui tiennent à l'intervention du copiste. Le traité est composé de vingt problèmes, dont dix seulement sont établis en bonne et due forme. Des autres nous n'avons que l'énoncé, parfois suivi d'une brève indication relative à la solution. Or une telle rédaction est à l'opposé de ce à quoi le mathématicien nous a habitués dans ses écrits. De là à conclure que l'élimination des solutions de ces dix problèmes est le fait du copiste de ce manuscrit, ou de celui d'un de ses ancêtres, il n'y a qu'un pas. Toutefois nous nous garderons de franchir ce pas, faute d'un autre témoin textuel – même si la conjecture nous paraît vraisemblable.

Mais, comme une difficulté ne vient jamais seule, notons maintenant que le titre de ce traité est absent de la fameuse liste des écrits de Thābit ibn Qurra transcrite par l'ancien biobibliographe al-Qifṭī[2]. Mais on ne peut y voir un argument suffisant pour douter de l'attribution de ces pages à Thābit ibn Qurra. D'autres écrits attestés, comme le *Livre des hypothèses* (*Kitāb al-Mafrūḍāt*), ne figurent en effet pas non plus dans cette liste. En revanche, plusieurs problèmes de ce traité ont été d'une manière ou d'une autre repris, non seulement par Thābit ibn Qurra lui-même dans d'autres écrits, mais aussi par ses successeurs, et notamment par son petit-fils

[1] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX*^{e} *au XI*^{e} *siècle,* vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, Londres, al-Furqān, 2000, voir notamment p. 657-659.

[2] Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, éd. Julius Lippert, Leipzig, 1903.

Ibrāhīm ibn Sinān ; nous y reviendrons au cours du commentaire. De plus certains lemmes se retrouvent dans le livre de Naʿīm ibn Mūsā[3], l'élève de Thābit ibn Qurra. D'ailleurs le style de rédaction du livre de Naʿīm rappelle celui de ces lemmes de Thābit ibn Qurra, qui l'ont pour le moins inspiré : l'ordre d'exposition n'est nullement celui d'un écrit destiné à l'enseignement élémentaire ; on n'y procède pas du plus simple au plus complexe, et la difficulté des problèmes n'est nullement graduée.

Le rapprochement entre ces deux écrits va cependant beaucoup plus loin ; l'intention qui préside à leur rédaction, les objets traités, les méthodes proposées, voire les problèmes posés eux-mêmes, sont autant de points de concordance entre les deux textes. Leur parenté se trouve également confirmée par la présence de problèmes communs. Ainsi le problème 12 des *Lemmes* est identique au problème 26 du livre de Naʿīm : même énoncé, même figure, même démonstration et même vocabulaire. On peut aussi rapprocher les problèmes 15 et 19 des *Lemmes* des problèmes 29 et 15 de Naʿīm.

Toutefois les objets considérés et les méthodes suivies sont encore plus remarquables que les problèmes traités. Un bon nombre de problèmes dans les deux écrits appartiennent à l'algèbre géométrique, que le calcul géométrique soit explicitement traduit en équations quadratiques ou que ce calcul soit implicitement calqué sur celui pratiqué pour résoudre les équations quadratiques, bien connues de Thābit. Il suffit par exemple d'examiner les problèmes 8, 9 et 15 des *Lemmes*. Thābit n'hésite pas à recourir à la formule dite de Héron, dont l'application le conduit à considérer des grandeurs de dimension quatre (produits de surfaces).

Reste à s'interroger sur l'intention qui préside à une telle composition. On n'y repère aucun plan précis, même pas celui que pourrait dicter le souci d'aller du simple au complexe. Tel était aussi le cas du livre de Naʿīm. Mais dans l'un et l'autre livre, on tente manifestement de développer une *étude géométrique apte à englober aussi des problèmes algébriques*. Thābit ibn Qurra fut le premier mathématicien à montrer l'équivalence entre les solutions par al-Khwārizmī des équations quadratiques et celles des problèmes géométriques du livre II des *Éléments* d'Euclide[4]. Certains problèmes relèvent explicitement de cette recherche, d'autres de la géométrie métrique, d'autres enfin évoquent ceux des *Données* d'Euclide. L'ensemble pourrait donc constituer un manuel d'enseignement destiné aux élèves et surtout aux apprentis-chercheurs, et la variété des niveaux de difficulté des problèmes

[3] R. Rashed et Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle. Le Recueil de propositions géométriques de Naʿīm ibn Mūsā*, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

[4] Voir ici même son traité intitulé *Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques* (*Fī taṣḥīḥ masāʾil al-jabr bi-al-barāhīn al-handasiyya*).

choisis serait alors l'effet de cette visée didactique. Tout comme le livre de Naʿīm, *Les Lemmes* appartiennent à ce genre littéraire d'anthologie de problèmes, ou de « problèmes choisis », qui sera appelé à se développer et à s'étendre au cours du Xᵉ siècle, avec Ibn Sinān[5] et al-Sijzī[6] par exemple.

Nous donnons ici l'*editio princeps* de ce traité, ainsi que sa première traduction. Dans le commentaire, nous avons établi les démonstrations des propositions non démontrées dans le texte. Pour ces propositions, comme pour les autres, même dans les cas les plus simples, nous avons traduit algébriquement la démarche. Même si cette traduction est absente du texte, elle ne serait sans doute pas désavouée par celui qui fut le premier à rapprocher le livre II des *Éléments* d'Euclide et le traité d'algèbre d'al-Khwārizmī.

PROBLÈME 1 : Diviser une droite AB donnée en un point C de manière que

$$n \cdot AC \cdot CB = AC^2 + G,$$

n un entier quelconque (pris égal à 3) et G une aire donnée.

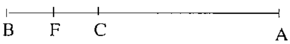


Fig. 1

On a

$$AC \cdot CB = \frac{1}{n} AC^2 + \frac{1}{n} G = AC \cdot CF + E,$$

où $CF = \frac{1}{n} AC$, F entre C et B et $E = \frac{1}{n} G$.

Ainsi $AC \cdot FB = E$ et $CF \cdot FB = \frac{1}{n} E$ connu. Or $AF = AC + CF$, donc

$$AF \cdot FB = \frac{n+1}{n} E = \frac{n+1}{n^2} G \text{ connu ;}$$

et comme $AF + FB = AB$ est connu, AF et FB sont connus. On en déduit

$$(*) \qquad FC = \frac{1}{n+1} AF,$$

puis

[5] Voir *al-Masā'il al-mukhtāra*, dans R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xᵉ siècle*, Leyde, E.J. Brill, 2000.

[6] R. Rashed et P. Crozet, *Œuvres mathématiques d'al-Sijzī*, vol. II, à paraître.

$$AC = \frac{n}{n+1} AF \text{ et } BC = AB - AC = AB - \frac{n}{n+1} AF = \frac{1}{n+1} AF + FB.$$

Remarque : Notons qu'à partir des *Éléments*, VI.28 (ou *Données*, 50), on déduirait (*) à condition que $\frac{n+1}{n^2} G \leq \frac{AB^2}{4}$. Ibn Qurra n'engage pas ici le diorisme puisqu'il procède par la seule analyse. La traduction algébrique du texte est immédiate et elle exhibe distinctement la condition précédente.

Algébriquement, on peut prendre $AC = x$ comme inconnue. On a $nx(a - x) = x^2 + G$, où $a = AB$; équation du second degré $(n + 1)x^2 + G = n\,ax$, dont les racines sont réelles si $n^2a^2 \geq 4(n + 1)G$, soit $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq \frac{n+1}{n^2} G$.

Thābit ibn Qurra utilise plutôt l'inconnue $y = AF$, telle que $x = \frac{n}{n+1} y$, l'équation en y s'écrit

$$y^2 + \frac{n+1}{n^2} G = ay \text{ ou } y(a - y) = \frac{n+1}{n^2} G = \frac{n+1}{n} E.$$

PROBLÈME 2 : Déterminer deux points E et B d'un cercle donné connaissant $EB^2 - BA^2$, où A est le milieu de l'arc EB.

Le diamètre AC coupe orthogonalement la corde EB en D et on a $AB^2 = AD^2 + DB^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} EB^2 - BA^2 &= 4BD^2 - AD^2 - DB^2 = 3BD^2 - AD^2 = \\ &= 3AD \cdot DC - AD^2 = G \end{aligned}$$

est connu.

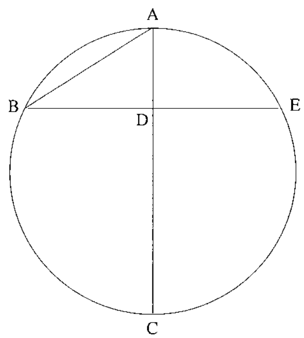


Fig. 2

On a donc $3AD \cdot DC = AD^2 + G$, et on est ramené au problème précédent pour déterminer AD et DC ; on aura ensuite

$$AB^2 = AD \cdot AC \text{ et } EB^2 = AB^2 + G = AD \cdot AC + G,$$

d'où AB et EB.

Remarque : La traduction algébrique est immédiate : on prend $AD = x$ comme inconnue. On a

$$AB^2 = x^2 + BD^2 = x^2 + x(a - x) = ax$$

et

$$EB^2 = 4BD^2 = 4x(a - x),$$

donc

$$EB^2 - AB^2 = 3\ ax - 4x^2 = G \text{ connu.}$$

On est ramené à l'équation $4x^2 + G = 3ax$ traitée dans le problème précédent avec ici $n = 3$. La condition de possibilité est $G \leq \frac{9}{16}a^2$.

PROBLÈME 3 : On considère trois segments A, B, C en proportion continue tels que $A^2 + B^2 = G$ et $B^2 + C^2 = F$, où F et G sont des aires connues. Déterminer A, B et C.

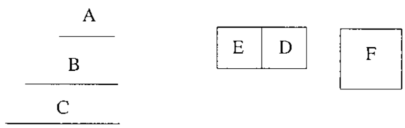


Fig. 3

On divise G en deux parties D et E telles que $\frac{D}{E} = \frac{G}{F}$ et on établit que $A^2 = D$ et $B^2 = E$.

En effet $\frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{C^2} = \frac{A^2 + B^2}{B^2 + C^2} = \frac{G}{F} = \frac{D}{E}$ et $A^2 + B^2 = D + E = G$, d'où $A^2 = D$ et $B^2 = E$.

Remarque : La traduction algébrique est immédiate : on prend $A^2 = x$ comme inconnue, on a alors $B^2 = kx$ et $C^2 = k^2x$, où k est la raison de la progression ; d'où

$$(1 + k)x = G \text{ et } k(1 + k)x = F.$$

Ainsi

$$k = \frac{F}{G},\ 1 + k = \frac{F + G}{G} \text{ et } x = \frac{1}{1 + k}G = \frac{G}{F + G} \cdot G = A^2,$$

puis

$$A = \frac{G}{\sqrt{F+G}},\ B^2 = \frac{G}{F+G}F \text{ et } C^2 = \frac{F}{F+G}F,$$

d'où

$$B = \sqrt{\frac{FG}{F+G}} \text{ et } C = \frac{F}{\sqrt{F+G}}.$$

PROBLÈME 4 : Soient ABC et ABD deux triangles semblables rectangles en B et d'hypoténuses données AC et AD respectivement ; on veut connaître les autres côtés.

On a $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et $AB^2 + BD^2 = AD^2$, de plus $\frac{DB}{BA} = \frac{BA}{BC}$ puisque les triangles sont semblables. Ainsi BC, BA et BD sont en proportion continue et $BC^2 + BA^2 = AC^2$, $BA^2 + BD^2 = AD^2$ sont connues. On est ainsi ramené au problème 3. On a donc

$$BC = \frac{AC^2}{\sqrt{AC^2 + AD^2}},\ AB = \frac{AC \cdot AD}{\sqrt{AC^2 + AD^2}} \text{ et } BD = \frac{AD^2}{\sqrt{AC^2 + AD^2}}.$$

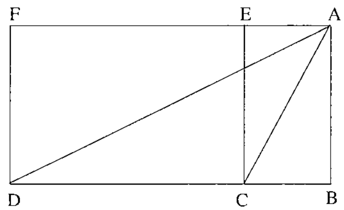


Fig. 4

Ce problème peut aussi s'énoncer ainsi : déterminer deux rectangles semblables $ABCE$ et $ABDF$ connaissant leurs diagonales AC et AD.

PROBLÈME 5 : Soient trois segments AB, BC, CD en proportion continue ; on suppose connus la somme $AB + BC = AC$ et le segment CD. Déterminer AB et BC.

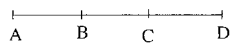


Fig. 5

On a

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD},$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BD}{CD} \text{ et } AC \cdot CD = BC \cdot BD,$$

où le premier membre est un rectangle connu ; on a donc BC (et par conséquent BD) connus (application de l'aire $AC \cdot CD$ le long du segment CD avec excès d'un carré).

Thābit ibn Qurra montre ainsi l'équivalence de cette application des aires avec l'équation du second degré $x^2 + CD \cdot x = AC \cdot CD$.

PROBLÈME 6 : Déterminer un triangle rectangle ABC (rectangle en B) connaissant la hauteur BH et la différence $AB - BC$ des côtés de l'angle droit[7].

Thābit ibn Qurra commence par démontrer le lemme suivant :

LEMME 6 : Soit un demi-cercle AC et un point B sur celui-ci. Sur AB on prend $BD = BC$ et on construit le point E du demi-cercle tel que $AE = AD$. Si H et G sont les projections respectives de B et E sur AC, on a $CG = 2BH$.

Démonstration du lemme :

$$\begin{aligned} AD^2 &= (AB - BD)^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \\ &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC = AC^2 - 2AB \cdot BC \\ &= AE^2 + EC^2 - 2AB \cdot BC, \end{aligned}$$

d'où

$$EC^2 = 2AB \cdot BC = AC \cdot CG.$$

Or $AB \cdot BC$ est le double de l'aire du triangle ABC et est donc égal à $AC \cdot BH$; ainsi $2AC \cdot BH = AC \cdot CG$, d'où $2BH = CG$.

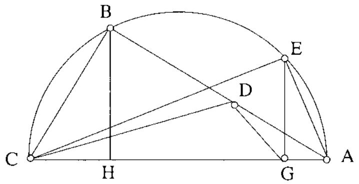


Fig. 6

[7] Ce problème a été traité par Ibn Sinān dans son *Anthologie de problèmes* dans le cas général où l'angle B est donné, mais pas nécessairement droit (*al-Masā'il al-mukhtāra*, problème 27, p. 542-545, p. 704-709).

Démonstration de la proposition :

On applique le précédent lemme à la détermination d'un triangle rectangle ABC (rectangle en B) connaissant la hauteur BH et la différence $AB - BC$ des côtés de l'angle droit.

Une première méthode proposée par Thābit ibn Qurra consiste à remarquer que, dans la figure précédente, $AE = AD = AB - BC$ est connu, donc $CA \cdot AG = AE^2$ est connu. Par ailleurs $CG = 2BH$ est connu ; on en déduit $AG = AC - CG$ par la proposition 5, appliquée aux trois segments $\frac{AG}{CG} \cdot AG$, AG et CG, où CG est connu, ainsi que la somme $\frac{AG}{CG} \cdot AG + AG = \frac{AG \cdot AC}{CG}$. On connaît donc $AC = CG + AG$ et par conséquent $BH \cdot AC = AB \cdot BC$ (aire du triangle). Les côtés AB et BC sont donc connus puisqu'on connaît leur différence et leur produit.

La deuxième méthode consiste à considérer les triangles ADG et ACD ; ils sont semblables car $\frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AG}$ (on a $AD = AE$) et l'angle A est commun. On a

$$AC^2 = AC \cdot (AG + GC) = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DB$$

avec $AC \cdot AG = AD^2$, d'où

$$AC \cdot CG = DC^2 + 2AD \cdot BD. \text{ Or } DC^2 = BD^2 + BC^2 = 2BD^2 ;$$

on a donc

$$2BD \cdot (BD + AD) = CG \cdot AC,$$

soit

$$2BH \cdot AC = 2BC \cdot AB = CG \cdot AC,$$

d'où $CG = 2BH$ connu et AG est déterminé comme précédemment, donc $AC = CG + AG$ est connu et $AB^2 + BC^2 = AC^2$ est connu ; les côtés AB et BC sont alors connus puisqu'on connaît leur différence et la somme de leurs carrés.

La seule différence entre les deux méthodes consiste à utiliser, dans l'une le produit des côtés cherchés, dans l'autre, la somme de leurs carrés.

Remarque : Ibrāhīm ibn Sinān généralise ce problème au cas où l'angle B est connu sans être nécessairement droit[8].

[8] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, problème 27, p. 542-545.

PROPOSITION 7 : Diviser un segment AB en un point C de manière que

$$n \cdot AB \cdot BC = AC^2,$$

où n est un entier donné.

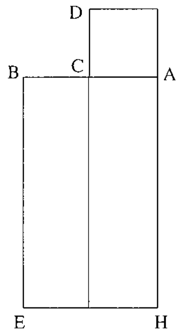


Fig. 7

On mène $BE = n \cdot AB$ perpendiculaire à AB et on applique l'aire $(BH) = AB \cdot BE = n \cdot AB^2$ à AH avec un excédent carré (AD). On a $AC^2 = (AD) = BC \cdot BE = n \cdot BC \cdot AB$ comme on voulait.

Si on pose $x = AC$, l'équation s'écrit $x^2 = n\,a\,(a - x)$ où $a = AB$; elle se transforme en $n\,a^2 = n\,ax + x^2$, où $n\,a^2 = (BH)$ et $n\,ax = (CH)$.

PROPOSITION 8 : Soit un triangle d'aire $\mathscr{A}$; la somme de ses côtés est $2p$ et l'un de ses côtés est a ; déterminer les deux autres côtés b et c.

On a $2p = a + b + c$ et $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ d'après la formule dite de Héron dont l'helléniste Thābit ibn Qurra en personne déclare ignorer l'origine – grecque ou indienne – et dont on trouve une démonstration chez les Banū Mūsā[9].

Thābit propose l'algorithme suivant : il définit successivement

$$(1) = 2p - a,\ (2) = \frac{2p-2a}{2} = p - a,\ (3) = p \cdot (2) = p(p-a),$$

$$(4) = (2p - a - p)p = p(p-a),$$

$$(5) = \frac{\mathscr{A}^2}{(3)} + (4) = \frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)} + p(p-a),$$ « terme soustractif »,

[9] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, al-Furqān, 1996, chap. I.

$$(6)\ \frac{(2)\cdot(2)+(3)}{(3)}\cdot\frac{p}{2}=\frac{(p-a)^2+p(p-a)}{p(p-a)}\cdot\frac{p}{2}=p-\frac{a}{2},\ \text{« plus petite partie »},$$

$$(7)=(6)^2-(5)=\left(p-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}-p(p-a)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}.$$

Finalement $b,c=(6)\pm\sqrt{(7)}=p-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}}$.

On retrouve l'algorithme de résolution d'une équation du second degré ; celle-ci détermine les côtés inconnus b et c connaissant leur somme (1) $b+c=2p-a$ et leur produit bc. On a en effet

$$\mathscr{A}^2=p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)=p(p-a)\,(p^2-p(b+c)+bc),$$

soit

$$\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}=bc-p(p-a)\ \text{et (5)}\ bc=\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}+p(p-a).$$

L'équation est donc

$$x^2-(2p-a)x+\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}+p(p-a)=0$$

et son discriminant

$$(7)\ \left(p-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}+p(p-a)\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{\mathscr{A}^2}{p(p-a)}.$$

PROPOSITION 9 : Déterminer le rayon R du cercle circonscrit à un triangle en fonction de ses côtés a, b, et c[10].

Comme dans la proposition 8, on utilise la formule reliant l'aire $\mathscr{A}$ aux côtés a, b, c :

$$\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\qquad \text{où}\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Si AE est la hauteur du triangle issue de son sommet A, on a

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}a\cdot AE,$$

[10] C'est la proposition 14 du *Livre des hypothèses* avec à peu près la même démonstration.

d'où

$$AE = \frac{2\mathscr{A}}{a}.$$

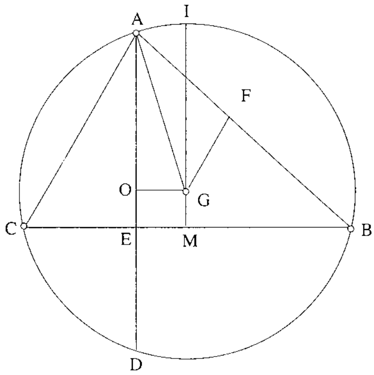


Fig. 8

Soit $CE = x$, on a $b^2 = x^2 + AE^2$, d'où

$$x = \sqrt{b^2 - \frac{4\mathscr{A}^2}{a^2}}.$$

Or

$$AE \cdot ED = CE \cdot EB = x(a-x) = \sqrt{a^2b^2 - 4\mathscr{A}^2} - b^2 + \frac{4\mathscr{A}^2}{a^2} ;$$

ainsi

$$ED = \frac{a}{2\mathscr{A}}\left(\sqrt{a^2b^2 - 4\mathscr{A}^2} - b^2 + \frac{4\mathscr{A}^2}{a^2}\right) = a\left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{4\mathscr{A}^2} - 1} - \frac{b^2}{2\mathscr{A}}\right) + \frac{2\mathscr{A}}{a}$$

et

$$AD = AE + ED = \frac{4\mathscr{A}}{a} + a\left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{4\mathscr{A}^2} - 1} - \frac{b^2}{2\mathscr{A}}\right).$$

La projection O du centre G sur AD est le milieu de AD et on a

$$AO = \frac{1}{2}(AE + ED) = \frac{2\mathscr{A}}{a} + \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{4\mathscr{A}^2} - 1} - \frac{b^2}{2\mathscr{A}}\right).$$

Enfin

$$GO = ME = \left|\frac{a}{2} - x\right| = \left|\frac{a}{2} - \sqrt{b^2 - \frac{4\mathscr{A}^2}{a^2}}\right|$$

donne

$$R^2 = AG^2 = AO^2 + GO^2 = \frac{a^4b^2}{16\mathscr{A}^2} + \frac{a^2b^4}{16\mathscr{A}^2} - \frac{a^2b^2}{4\mathscr{A}}\sqrt{\frac{a^2b^2}{4\mathscr{A}^2} - 1}.$$

Notons que

$$\begin{aligned}16\mathscr{A}^2 &= (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)\\ &= \left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right),\end{aligned}$$

d'où

$$c^4 - 2c^2\left(a^2+b^2\right) + 16\mathscr{A}^2 + \left(a^2-b^2\right)^2 = 0,$$

équation qui donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4\mathscr{A}^2},$$

si l'angle C est aigu. On a donc

$$R = \frac{abc}{4\mathscr{A}}.$$

On peut trouver cette formule plus simplement en observant que, si F est la projection de G sur AB, les angles ACB et AGF sont égaux, donc les triangles rectangles AEC et AFG sont semblables, donc

$$\frac{AG}{AF} = \frac{AC}{AE},$$

d'où

$$R = AG = \frac{AF \cdot AC}{AE} = \frac{bc}{2 \cdot \dfrac{2\mathscr{A}}{a}} = \frac{abc}{4\mathscr{A}}.$$

Thābit ibn Qurra aurait évidemment pu faire ce raisonnement, mais il a vraisemblablement préféré une démarche mieux traduisible en algèbre.

PROPOSITION 10 : Soit G le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Traçons GA, GB et GC ; le triangle ABC est subdivisé en trois triangles GAB, GBC et GCA d'aires respectives $\frac{1}{2}rc$, $\frac{1}{2}ra$ et $\frac{1}{2}rb$, où $r = GE = GD = GH$ est le rayon du cercle et $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

L'aire $\mathscr{A}$ de ABC est donc égale à

$$\frac{1}{2}r(a+b+c) = pr = \mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

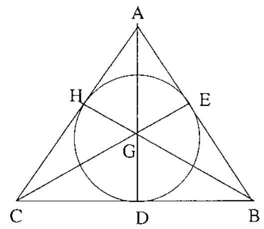


Fig. 9

On a ainsi

$$r = \frac{\mathscr{A}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

PROPOSITION 11 : Soient *AB* et *CD* des cordes parallèles du cercle *ACDB* connu, de centre *G*. On suppose connues les cordes $AC = BD$ ainsi que la distance *CE* des parallèles. Déterminer *AB* et *CD*[11].

Le triangle rectangle *AEC* est connu puisque ses côtés *AC* et *CE* sont connus. L'angle *ACE* est donc connu, et il est égal à l'angle *IGH* où *I* est le milieu de *AC* et *GH* est parallèle à *AB*. Si la direction commune de *AB*, *CD* et *GH* est fixée, le rayon *GI* est donc de position connue ; comme les angles $AGI = CGI$ sont connus, les points *A* et *C* sont donc connus et on en déduit *B* et *D*.

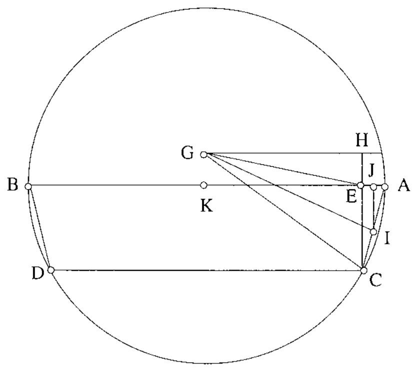


Fig. 10

Si $A\hat{C}E = \alpha$ et $A\hat{G}I = \beta$, on a $AC = 2r\sin\beta$ et $CE = AC\cos\alpha$; d'où

$$\sin\beta = \frac{AC}{2r} \text{ et } \cos\alpha = \frac{CE}{AC} = \cos I\hat{G}H.$$

[11] Cf. la proposition 15 du *Livre des hypothèses*.

Soit J la projection de I sur AB, c'est le milieu de AE et on a $AB = 2AK = 2(AJ + JK) = AE + 2JK$, où K est le milieu de AB. Or

$$JK = GI\cos\alpha = GI \cdot \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{AC}\sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \text{ et } AE = \sqrt{AC^2 - CE^2}.$$

On a donc

$$AB = \sqrt{AC^2 - CE^2} + \frac{CE}{AC}\sqrt{4r^2 - AC^2}$$

et on a ensuite

$$CD = AB - 2AE = \frac{CE}{AC}\sqrt{4r^2 - AC^2} - \sqrt{AC^2 - CE^2}.$$

PROBLÈME 12 : Soit un triangle ABC rectangle en B, dont l'aire $\mathscr{A}$ et la somme $2p$ des côtés sont connues. Déterminer les côtés a, b, c.

D'après la proposition 10, le rayon r du cercle inscrit est égal à $\frac{\mathscr{A}}{p}$. Par ailleurs

$$b = AC = AH + HC = AE + CD,$$

donc

$$AC + EB + BD = AB + BC,$$

où $EB = BD = r$. On a donc

$$b + 2r = a + c \text{ et } a + b + c = 2(b + r),$$

ce qui donne

$$b = p - r = p - \frac{\mathscr{A}}{p}.$$

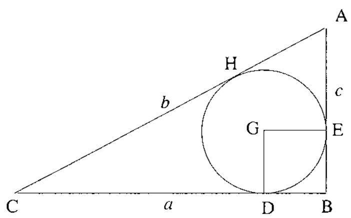


Fig. 11

Comme $\mathscr{A} = \frac{1}{2}bh$, où h est la hauteur issue de B, on a $h = \frac{2\mathscr{A}}{b} = \frac{2\mathscr{A}p}{p^2 - \mathscr{A}}$. Les côtés $AB = c$ et $BC = a$ sont alors déterminés par la proposition 8 :

$$a, c = p - \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\mathscr{A}^2}{p(p-b)}} = \frac{p}{2} + \frac{\mathscr{A}}{2p} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{3\mathscr{A}}{2} + \frac{\mathscr{A}^2}{4p^2}}.$$

Notons qu'on pourrait aussi utiliser la relation

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ac \text{ et } a + c = 2p - b = p + \frac{\mathscr{A}}{p}$$

pour obtenir a et c comme racines de l'équation

$$x^2 - \left(p + \frac{\mathscr{A}}{p}\right)x + 2\mathscr{A} = 0.$$

Ce problème est traité, sous le numéro 26, dans le recueil des problèmes de l'élève de Thābit ibn Qurra : Naʿīm ibn Mūsā[12].

PROBLÈME 13 : Soit un trapèze $ABCD$ dont on connaît la somme des côtés, $s = AB + BC + CD + DA$. On suppose de plus que la diagonale BD est le double de la diagonale AC. Déterminer les diagonales.

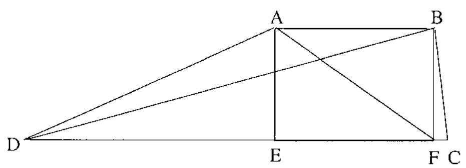


Fig. 12

On suppose $AB < CD$ et on projette A et B en E et F sur CD, éventuellement prolongée du côté de C car $AC < BD$.

Posons $CD + AB = e < s$ et $CD - AB = d$. Si F est entre C et D, on a $DE + FC = d$, sinon $DE - FC = d$.

Posons $f = DE - FC$ dans le premier cas et $f = DE + FC$ dans le second. On a donc

$$CD = \frac{e+d}{2},\ AB = \frac{e-d}{2},\ DE = \frac{d+f}{2} \text{ et } FC = \frac{|d-f|}{2} \text{ (il faut que } d < e).$$

Posons enfin $h = AE = BF$. On a

[12] R. Rashed et Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle,* p. 48-49 et 108-109.

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = h^2 + \left(\frac{e-f}{2}\right)^2 \qquad \text{car } EC = \frac{|e-f|}{2}.$$

De même

$$BD^2 = FB^2 + DF^2 = h^2 + \left(\frac{e+f}{2}\right)^2 \qquad \text{car } DF = \frac{e+f}{2}\ ;$$

la condition $BD = 2AC$ s'écrit donc

$$h^2 + \frac{(e+f)^2}{4} = 4h^2 + (e-f)^2,$$

soit

(1) $\qquad 12h^2 + 3(e^2 + f^2) = 10\, ef$

ou

(1′) $\qquad h^2 = \dfrac{(3f-e)(3e-f)}{12}.$

Ceci impose que $\frac{e}{3} < f < 3e$. On a alors

(2) $\qquad AC^2 = \dfrac{5ef}{6} - \dfrac{e^2+f^2}{4} + \dfrac{(e-f)^2}{4} = \dfrac{ef}{3}$

et

$$BD^2 = \frac{5ef}{6} - \frac{e^2+f^2}{4} + \frac{(e+f)^2}{4} = \frac{4ef}{3}.$$

Il reste à écrire que la somme des côtés est égale à s, c'est-à-dire que $AD + BC = s - e$; or

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = h^2 + \frac{(d+f)^2}{4},\ BC^2 = BF^2 + FC^2 = h^2 + \frac{(d-f)^2}{4},$$

et

$$AD^2 + BC^2 + 2AD \cdot BC = (s-e)^2,$$

d'où

$$\sqrt{h^2 + \frac{(d+f)^2}{4}}\sqrt{h^2 + \frac{(d-f)^2}{4}} = \frac{1}{2}(s-e)^2 - h^2 - \frac{d^2+f^2}{4}.$$

En élevant au carré, on obtient

(3) $\qquad 4(s-e)^2 h^2 = \left((s-e)^2 - d^2\right)\left((s-e)^2 - f^2\right)$

ou, en tirant h^2 de (1) :

$$10ef(s-e)^2 = 3(s-e)^4 + 3(s-e)^2e^2 - 3\left((s-e)^2 - f^2\right)d^2$$

d'où

$$(4) \qquad d^2 = \frac{(s-e)^2}{3}\frac{3(s-e)^2 + 3e^2 - 10ef}{(s-e)^2 - f^2}.$$

Notons que $s - e = AD + BC > DE + CF$ égal à d si F est entre C et D et à f dans le cas contraire ; comme dans le premier cas $f \leq d$ et dans le second $d \leq f$, on voit que le second membre de (3) est positif. On a donc $\sup(d, f) < s - e$.

L'inégalité $d < e$ s'écrit :

$$e^2f^2 - \frac{10}{3}(s-e)^2ef + (s-e)^4 = \left(ef - \frac{(s-e)^2}{3}\right)\left(ef - 3(s-e)^2\right) < 0$$

et on doit imposer

$$\frac{(s-e)^2}{3e} < f < 3\frac{(s-e)^2}{e},$$

soit

$$\frac{s-e}{3} < AC < s - e.$$

Quant à $d < s - e$, elle s'écrit $3e^2 + 3f^2 < 10ef$, soit $(3e - f)\,(3f - e) > 0$ ou $\frac{e}{3} < f < 3e$.

Pour $e \leq \frac{s}{2}$, $\frac{e}{3} \leq \frac{(s-e)^2}{3e}$ et $3e \leq \frac{3(s-e)^2}{e}$, on doit donc imposer $\frac{(s-e)^2}{3e} < f < 3e$, ce qui exige $e > \frac{1}{4}s$; on a alors aussi $s - e < 3e$ et on doit écrire

$$\text{(a)} \qquad \frac{(s-e)^2}{3e} < f < s - e \text{ pour } \frac{1}{4}s < e \leq \frac{s}{2}.$$

Pour $e > \frac{s}{2}$, $\frac{(s-e)^2}{3e} < \frac{e}{3}$ et $3\frac{(s-e)^2}{e} < 3e$; on doit donc imposer $\frac{e}{3} < f < 3\frac{(s-e)^2}{e}$, ce qui exige $e < \frac{3}{4}s$; on a alors $s - e < 3\frac{(s-e)^2}{e}$. Finalement

(b) $\frac{e}{3} < f < s - e$ pour $\frac{s}{2} < e < \frac{3}{4}s$.

Lorsque les inégalités (a) et (b) sont vérifiées, on peut déterminer les côtés et la hauteur h en fonction de s, de e et de f, au moyen de (1′) et de (4), ainsi que les diagonales $AC = \sqrt{\frac{ef}{3}}$, $BD = 2AC$.

L'équation $f = d$, soit $FC = 0$ caractérise les trapèzes rectangles en C. Elle s'écrit :

$$(5) \qquad f^4 - (s-e)^2 f^2 - \frac{10}{3}(s-e)^2 ef + (s-e)^4 + (s-e)^2 e^2 = 0.$$

On vérifie que le premier membre s'annule une fois au plus dans l'intervalle de variation de f, pour une valeur f_0 où il passe du positif au négatif ; f_0 n'existe que si le premier membre de (5) est positif, lorsque $f = \frac{(s-e)^2}{3e}$, c'est-à-dire $e \geq s\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Le point F est entre C et D si $f \leq f_0$ et au-delà de C si $f > f_0$.

Posons $e = \lambda s$ et $AC = \mu s$, de sorte que $3\mu^2 s^2 = ef$; les conditions (a) et (b) deviennent :

$$(a') \qquad \frac{1-\lambda}{3} < \mu < \sqrt{\frac{\lambda(1-\lambda)}{3}}, \qquad \frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$$

$$(b') \qquad \frac{\lambda}{3} < \mu < \sqrt{\frac{\lambda(1-\lambda)}{3}}, \qquad \frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{3}{4} ;$$

on passe de l'une à l'autre en échangeant λ et $1 - \lambda$; l'équation (5) devient

$$(5') \qquad 81\mu^8 - 9(1-\lambda)^2\lambda^2\mu^4 - 10(1-\lambda)^2\lambda^4\mu^2 + (1-\lambda)^4\lambda^4 + (1-\lambda)^2\lambda^6 = 0.$$

Le domaine limité par (a′) et (b′) apparaît sur la figure 13, ainsi que la courbe définie par (5′), lieu des trapèzes rectangles ; λ est en abscisses et μ en ordonnées. On voit donc que la connaissance de s ne détermine pas les diagonales du trapèze, contrairement à ce qu'énonce le texte tel qu'il nous est transmis (état assez médiocre) ; celui-ci est donc incomplet. Notons cependant que l'intervalle pour AC est d'amplitude assez restreinte, surtout si on ne considère que les trapèzes pour lesquels F est entre C et D, qui sont représentés par la région I de la figure. Dans la région II, F est au-delà de C, mais E est entre C et D et, dans la région III, E et F sont tous les deux au-delà de C.

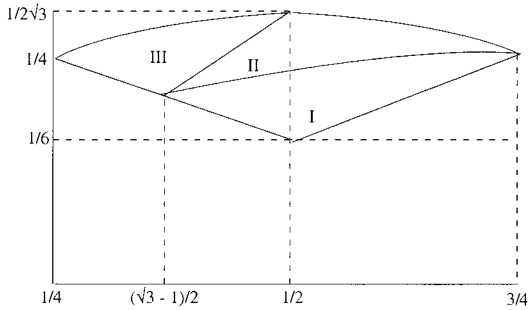


Fig. 13

La figure 12 correspond aux valeurs $s = 5$, $e = 3, f = \frac{6}{5}$, ce qui donne $d = \frac{5}{4}$, $CD = \frac{17}{8}$, $AB = \frac{7}{8}$, $DE = \frac{49}{40}$, $FC = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{10}\sqrt{39}$ et $AC = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

PROBLÈME 14 : Soit un triangle ABC dont les côtés $AC = b$ et $AB = c$ sont connus, de plus $BC = a = 2AH$. Déterminer la hauteur et la base. On a

$$BH = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad CH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

d'où

$$a = BC = |BH \pm CH| = \left|\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} + \varepsilon\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\right|,$$

où $\varepsilon = 1$ si H est entre B et C et $\varepsilon = -1$ dans le cas contraire.

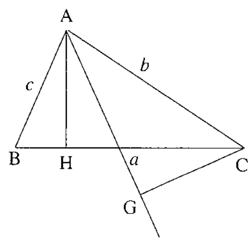


Fig. 14

Ainsi

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + 2\varepsilon\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

d'où

$$\left(b^2 + c^2 - \frac{3a^2}{2}\right)^2 = 4\left(c^2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)$$

ou, après réduction

$$(1) \qquad 2a^4 - 2\left(b^2 + c^2\right)a^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = \left(b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(b^2 - c^2\right)^2 = 6b^2c^2 - b^4 - c^4 = 8b^2c^2 - \left(b^2 + c^2\right)^2.$$

Il doit être positif, ce qui signifie que $b^2 + c^2 \leq 2bc\sqrt{2}$ ou bien que le rapport de b/c est compris entre $\sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{2} + 1$. Sous cette condition, l'équation (1) a deux racines positives a^2 ; comme il faut que $| b - c | \leq a \leq b + c$ pour que le triangle existe, on doit comparer ces racines à $b^2 + c^2 - 2bc$ et à $b^2 + c^2 + 2bc$. On voit que $b^2 + c^2 - 2bc$ est inférieur aux deux racines et que $b^2 + c^2 + 2bc$ est supérieur ; les deux racines conviennent donc. On a

$$a_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 \pm \sqrt{\Delta}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\left(b^2 + c^2\right) + \left(b^2 - c^2\right)\sqrt{2}} \pm \sqrt{b^2 + c^2 - \left(b^2 - c^2\right)\sqrt{2}}\right)^2,$$

d'où

$$a_{\pm} = \frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{b^2 + c^2 + \left(b^2 - c^2\right)\sqrt{2}}\right) \pm \sqrt{b^2 + c^2 - \left(b^2 - c^2\right)\sqrt{2}}\right|$$

$$(2) \qquad a_{\pm} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{b^2\left(\sqrt{2} + 1\right) - c^2\left(\sqrt{2} - 1\right)} \pm \sqrt{c^2\left(\sqrt{2} + 1\right) - b^2\left(\sqrt{2} - 1\right)}\right|.$$

Cas limites : 1) Si $b^2 + c^2 = 2bc\sqrt{2}$, $\Delta = 0$ et il n'y a qu'une solution $a^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) = bc\sqrt{2} = c^2\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$ puisque $b = c\ (\sqrt{2} \pm 1)$; ainsi $a = c\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$. Changer le signe $\pm$ revient à permuter b et c.

2) Si $b = c$, le triangle est isocèle et la formule (2) se réduit à $a = \frac{1}{2}\left|b\sqrt{2} \pm b\sqrt{2}\right|$. Le signe + donne $a_+ = b\sqrt{2}$, et on a donc un triangle rectangle (en A), tandis que $a_- = 0$ correspond à un triangle dégénéré (A sur BC, $B = C$).

Position de H : Pour situer ce point, on doit comparer BH et CH à a. Or $CH \leq a$ (respectivement $BH \leq a$) équivaut à $b^2 \leq \frac{5a^2}{4}$ ou $a^2 \geq \frac{4b^2}{5}$ (respectivement $c^2 \leq \frac{5a^2}{4}$ ou $a^2 \geq \frac{4c^2}{5}$).

En substituant $\frac{4b^2}{5}$ dans le premier membre de (1), on trouve $\frac{1}{25}(17b^2 - 5c^2)(b^2 - 5c^2)$, donc

(α) si $\sqrt{5} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{2}+1$, $CH \geq a_+ \geq a_-$

(β) si $\sqrt{\frac{5}{17}} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{5}$, $a_- \leq CH \leq a_+$

(γ) si $\sqrt{2}-1 \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{\frac{5}{17}}$, $CH \leq a_- \leq a_+$.

Les résultats pour BH sont analogues si on échange b et c. On trouve ainsi

(α) si $\sqrt{5} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{2}+1$, $BH \leq a_- \leq a_+ \leq CH$ et H est extérieur à BC, du côté de B, dans les deux cas.

(β′) si $\sqrt{\frac{17}{5}} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{5}$, $BH \leq a_- \leq CH \leq a_+$; H est extérieur à BC, du côté de B pour la solution a_- et il est entre B et C pour la solution a_+.

(β″) si $\sqrt{\frac{5}{17}} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{\frac{17}{5}}$, $a_- \leq BH$, $CH \leq a_+$, H est extérieur à BC pour la solution a_-, du côté de B si $\frac{b}{c} \geq 1$, du côté de C si $\frac{b}{c} \leq 1$, et il est entre B et C pour la solution a_+.

(γ′) si $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{\frac{5}{17}}$, $CH \leq a_- \leq BH \leq a_+$; H est extérieur à BC, du côté de C, pour la solution a_- et il est entre B et C pour la solution a_+.

(γ″) si $\sqrt{2}-1 \leq \frac{b}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, $CH \leq a_- \leq a_+ \leq BH$; H est extérieur à BC, du côté de C, dans les deux cas.

En résumé, pour a_+, H est entre B et C si $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{b}{c} \leq \sqrt{5}$, les cas limites correspondent à des triangles rectangles en C et en B. Pour a_-, H est toujours à l'extérieur de BC et l'un des angles B ou C est obtus.

Remarquons enfin qu'Ibrāhīm ibn Sinān généralise ce problème au cas où AB et AC sont connues, ainsi que $\frac{AH}{BC}$. Il montre alors que BC est connue, mais ne procède pas à son calcul[13].

PROBLÈME 15 : Dans le triangle ABC, on connaît la base $BC = a$, la hauteur $h = AH$ et le rapport $k = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}$ des deux autres côtés. Déterminer ces côtés.

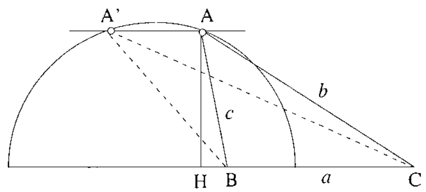


Fig.15

La construction est facile car le lieu des points dont le rapport des distances à C et à B est égal à k est un cercle centré sur BC prolongé. Il suffit donc de prendre l'intersection de ce cercle avec une parallèle AA' à BC à la distance h. La condition de possibilité est $h \leq r$ rayon du cercle ; on calcule facilement que $r = \frac{ak}{|k^2 - 1|}$ et on doit donc poser $h \leq \frac{ak}{|k^2 - 1|}$.

On obtient une solution algébrique en écrivant $b = kc$ et l'aire $\frac{1}{2}ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+(1+k)c}{2}$. On a

$$\frac{1}{4}a^2h^2 = \frac{a+(1+k)c}{2} \cdot \frac{(1+k)c-a}{2} \cdot \frac{a+(1-k)c}{2} \cdot \frac{a-(1-k)c}{2},$$

soit

$$\left((1+k)^2c^2 - a^2\right)\left(a^2 - (1-k)^2c^2\right) = 4a^2h^2$$

$$\left(1-k^2\right)^2c^4 - 2a^2c^2\left(1+k^2\right) + a^4 + 4a^2h^2 = 0$$

[13] Cf. R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*, problème 28, p. 545-546.

$$4a^4\left(1+k^2\right)^2-4\left(1-k^2\right)^2\left(a^4+4a^2h^2\right)$$

$$4a^2\left[a^2\left(1+k^2\right)^2-\left(1-k^2\right)^2\left(a^2+4h^2\right)\right]$$

$$4a^2\left[a^2\left(1+k^2\right)^2-a^2\left(1-k^2\right)^2-4h^2\left(1-k^2\right)^2\right]$$

$$4a^2\left[a^2\left(1+2k^2+k^4-1+2k^2-k^4\right)-4h^2\left(1-k^2\right)^2\right]$$

$$4a^2\left[a^2\left(4k^2\right)-4\left(1-k^2\right)^2h^2\right]$$

$$41a^2\left[4a^2k^2-4h^2\left(1-k^2\right)^2\right]$$

$$16a^2\left[a^2k^2-h^2\left(1-k^2\right)^2\right]$$

$$c^2=+\frac{2a^2\left(1+k^2\right)\pm 4a\sqrt{a^2k^2-h^2\left(1-k^2\right)^2}}{2\left(1-k^2\right)^2}$$

$$c^2=\frac{a^2\left(1+k^2\right)\pm 2a\sqrt{a^2k^2-h^2\left(1-k^2\right)^2}}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$c=\frac{1}{2\left(1-k^2\right)}\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)a^2+a\left(1-k^2\right)\sqrt{a^2+4h^2}}\pm\sqrt{\left(1+k^2\right)a^2-a\left(1-k^2\right)\sqrt{a^2+4h^2}}\right).$$

Ce problème est identique au problème 29 du recueil de Naʿīm ibn Mūsā ; on se ramène à la détermination du point H sur BC. Ibn Sinān rappelle une synthèse de ce problème qu'il attribue à son grand-père[14]. Il résout en plus un problème du même genre, en supposant connues la base, la hauteur et la différence des côtés[15]. Il résout également dans son traité sur *L'Analyse et la synthèse* le cas où la base, la hauteur et le produit des côtés sont connus[16].

[14] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au* X^e *siècle*, p. 479-484.
[15] *Ibid.*, p. 547-549.
[16] *Ibid.*, p. 72-74.

PROBLÈME 16 : Dans le trapèze $ABCD$, on a

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot DE,$$

où DE est la projection de AD sur DC.

Si le trapèze est isocèle, $DE = \frac{1}{2}(CD - AB)$ et la formule devient $AC^2 = AD^2 + AB \cdot CD$. La diagonale est ainsi déterminée en fonction des côtés.

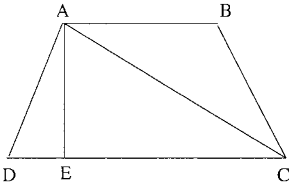


Fig. 16

PROBLÈME 17 :

« Soit un triangle rectangle de côtés et d'aire connus. Tu considères la grandeur de l'un des deux côtés qui entourent l'angle droit, d'où tu mènes une droite selon un angle droit, parallèle à la base. Alors il s'engendre un triangle rectangle dont l'aire est une coudée par un tiers de coudée et il s'engendre un carré dont l'aire est une coudée par une coudée. Tu veux le partager en deux parties entre lesquelles il y a un »[17].

Le texte est assez obscur et il ne comporte ni solution, ni figure. On peut le comprendre de la manière suivante :

On construit le carré $BEFG$ inscrit dans le triangle rectangle ABC et on veut partager le trapèze $ABGF$, réunion de ce carré et du triangle AEF, en deux parties par une parallèle HI à AB de manière que la différence des aires de ces deux parties soit donnée (une coudée d'après le texte).

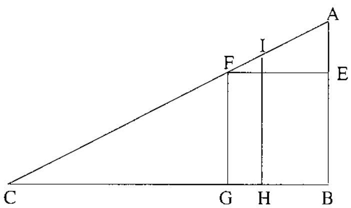


Fig. 17

[17] Voir *infra*, p. 252 ; ar. p. 253, 1-5.

Posons $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; le côté du carré $BEFG$ est égal à $d = \frac{ac}{a+c}$, puisque

$$\frac{FE}{CB} = \frac{d}{a} = \frac{AE}{AB} = \frac{c-d}{c} = \frac{c}{a+c}.$$

Soit $BH = x$; on a $\frac{HI}{CH} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a}$, d'où $HI = \frac{c}{a}(a-x)$. L'aire du trapèze $ABHI$ est donc égale à $xc\left(1 - \frac{x}{2a}\right)$; celle du trapèze $IHGF$ est égale à

$$\frac{1}{2}(d-x)\left(d + \frac{c}{a}(a-x)\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{ac(2a+c)}{(a+c)^2} - 2x + \frac{x^2}{a}\right).$$

La différence de ces aires est :

$$\frac{c}{2}\left(\frac{ac(2a+c)}{(a+c)^2} - 4x + \frac{2x^2}{a}\right) = k \text{ (aire donnée).}$$

On est ainsi ramené à une équation quadratique, dont le discriminant $\frac{a^2\left(a^2 + (a+c)^2\right)}{2(a+c)^2} + \frac{ak}{c}$ est toujours positif.

La substitution de $d = \frac{ac}{a+c}$ dans le premier membre de l'équation

$$x^2 - 2ax + \frac{a^2c(2a+c)}{2(a+c)^2} - \frac{ak}{c} = 0$$

donne

$$-\frac{a^2c}{2(a+c)^2}(2a+c) - \frac{ak}{c} < 0,$$

donc d est toujours entre les deux racines dont seule la plus petite convient. Or celle-ci n'est positive que si $k \leq \frac{ac^2(2a+c)}{2(a+c)^2}$; c'est la condition de possibilité du problème. Si on prend, comme dans le texte $k = d^2 = \frac{a^2c^2}{(a+c)^2}$, cette condition est vérifiée.

PROBLÈME 18 : On peut interpréter ce problème de la manière suivante : On considère un rectangle $ABCD$, de diagonale AC. On mène une parallèle EF aux côtés AB, CD, avec E sur le côté AD, puis on trace la diagonale BE du rectangle $ABFE$ ainsi obtenu. On voudrait déterminer AG et EG, où G est le point d'intersection de AC et de BE.

Comme les triangles AGE et CGB sont semblables, on a

$$\frac{AG}{GC}=\frac{EG}{GB}=\frac{AE}{BC}=k \qquad \text{rapport connu.}$$

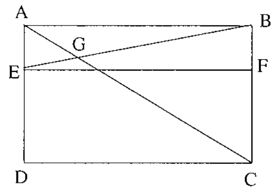


Fig. 18

On en déduit

$$\frac{AG}{AC}=\frac{k}{k+1}=\frac{EG}{EB}.$$

Or $AC=\sqrt{a^2+b^2}$ et $EB=\sqrt{a^2+k^2b^2}$ où $AB = a$ et $BC = b$. On a donc finalement

$$AG=\frac{k}{k+1}\sqrt{a^2+b^2}, \quad EG=\frac{k}{k+1}\sqrt{a^2+k^2b^2}\,.$$

PROBLÈME 19 : On considère une corde AB d'un cercle ABC. L'arc ACB est le lieu des points tels que l'angle ACB ait une valeur donnée. Si on fixe la somme $AC + BC$, on assujettit C à se trouver sur une ellipse de foyers A et B. Cette ellipse coupe l'arc ACB en C et en C' symétrique de C par rapport à la médiatrice de AB. Pour tout autre point M de l'arc ACB, l'angle AMB est égal à l'angle ACB, mais la somme $AM + MB$ est différente de $AC + CB$. Le problème a donc 2 solutions.

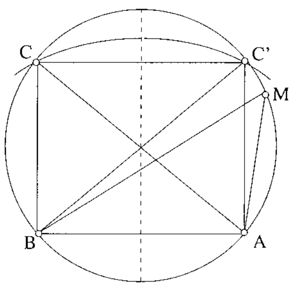


Fig. 19

Ce problème figure sous une forme à peu près équivalente sous le numéro 15 dans le recueil de Na'īm ibn Mūsā[18].

PROBLÈME 20 : On veut circonscrire un triangle équilatéral à un triangle scalène *ABC* donné. On mène *EAG* parallèle à *BC* puis *DE* et *DG* passant respectivement par *C* et par *B* et faisant avec *BC* des angles *BCD* et *CBD* égaux à 60°. Le triangle *DGE* est alors équilatéral.

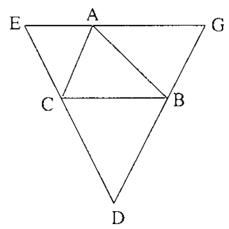


Fig. 20

L'auteur ajoute que l'on peut inscrire un triangle scalène dans un triangle équilatéral en choisissant arbitrairement les trois sommets sur les trois côtés. Ceci est évident.

[18] R. Rashed et Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle,* p. 34-37 et 92-95.

TEXTE ET TRADUCTION

Lemmes de Thābit ibn Qurra

Muqaddamāt li-Thābit ibn Qurra

Lemmes de Thābit ibn Qurra

– **1** – Si on divise une droite connue, comme AB, en deux parties comme AC et CB, et si trois fois le produit de AC par CB – ou un autre multiple <de ce produit> – excède le carré de l'une d'elles, comme AC, d'un excédent connu, comme l'aire DE, combien est alors chacune d'elles ?

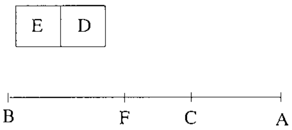


Fig. 1

Prenons de DE une partie homonyme du nombre de fois du <produit> de AC par CB ; soit 3. L'excédent de BC par CA sur la partie homonyme du nombre de fois du carré de AC est donc l'aire E connue. Soit CF une partie de CA homonyme du nombre de fois. Le produit de AC par CF est donc une partie du carré de AC, homonyme du nombre de fois. L'excédent du produit de BC par CA sur CA par CF est donc connu. Soit l'excédent de BC par CA sur CA par CF égal à BF par CA. Donc BF par CA est connu et son rapport à BF par FC est connu, car il est égal au rapport de FC à CA, donc BF par FC est connu. Mais BF par CA est connu, donc BF par FA est connu et AB est connu. Donc AC et CB sont connus. Ce qu'on voulait.

– **2** – Le diamètre AC est connu, l'arc EB est le double de l'arc BA et l'excédent du carré de EB sur le carré de BA est connu. Combien est chacun d'eux ?

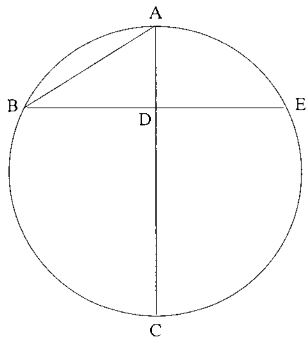


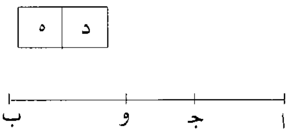
Fig. 2

Puisque le carré de AB est égal à la somme[1] des carrés de AD et DB, l'excédent du carré de BE, c'est-à-dire quatre fois le carré de BD, sur la somme des carrés de AD et DB, est connu. Une fois retranché ce qui est commun, il reste l'excédent du triple du carré de DB sur le

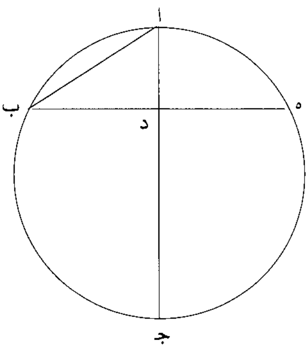
[1] Nous ajoutons parfois « somme » pour les besoins de la traduction.

مقدّمات لثابت بن قرة

- ١ - كل خط معلوم كـ ا ب قسم بقسمين كـ ا جـ جـ ب، وكان المجتمع من ا جـ في جـ ب، ثلاث مرات أو غيرها، يزيد على مربع أحدهما كـ ا جـ زيادة معلومة كسطح د ه؛ فكم كل واحد منهما؟



فنأخذ من د ه جزءاً سميًا لعدد المرات، التي هي من ا جـ في جـ ب، وهي ٣؛ فزيادة ب جـ في جـ ا على الجزء السمي لعدد المرات من مربع ا جـ هي سطح ه المعلوم. وليكن جـ و جزءاً من جـ ا سميًا لعدد المرات؛ فالمجتمع من ا جـ في جـ و جزء من مربع ا جـ، سميٌ لعدد هذه المرات؛ فزيادة المجتمع من ب جـ في جـ ا على جـ ا في جـ و معلومة. ولتكن زيادة ب جـ في جـ ا على جـ ا في جـ و وهي كـ ب و في جـ ا، فـ ب و في جـ ا معلوم، ونسبته إلى ب و في و جـ معلومة، لأنها كـ و جـ إلى جـ ا، فـ ب و في و جـ معلوم؛ وكان ب و في جـ ا معلومًا، فـ ب و في و ا معلوم، وا ب معلوم، فـ ا جـ جـ ب معلومان؛ وهو المراد.



- ٢ - قطر ا جـ معلوم، وقوس ه ب ضعف قوس ب ا، وزيادة مربع ه ب على مربع ب ا معلومة؛ كم كل واحد منهما؟

فلأن مربع ا ب كمربعي ا د د ب، فزيادة مربع ب ه - أعني أربعة أمثال مربع ب د - على مربعي ا د د ب معلومة. وبعد إسقاط المشترك، تبقى زيادة ثلاثة أمثال

carré de *DA* connu. Mais le triple du carré de *BD* est égal au triple de *AD* par *DC*. L'excédent du triple de *AD* par *DC* sur le carré de *AD* est connu ; *AC* est connu, donc chacun de *AD* et de *DC* est connu, comme nous l'avons montré précédemment. Donc *CA* par *AD*, c'est-à-dire le carré de *AB*, est connu et à partir de cela nous connaissons *EB*. Ce qu'on cherchait.

– **3** – *A*, *B*, *C* sont en proportion continue ; la somme des carrés de *A* et de *B* ainsi que la somme des carrés de *B* et de *C* sont connues. Combien est chacun d'eux ?

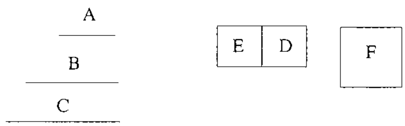


Fig. 3

Procédé : Posons <l'aire> *DE* égale à la somme des carrés de *A* et de *B* et *F* égal à la somme des carrés de *B* et de *C* et partageons *DE* en deux parties, qui sont *D* et *E*, telles que le rapport de l'une à l'autre soit égal au rapport de *DE* à *F*. Alors chacune d'elles sera connue. Nous disons que *D* est égal au carré de *A* et *E* est égal au carré de *B*. Étant donné la proportionnalité de *A*, *B*, *C*, on a <le rapport> du carré de *A* au carré de *B* égal au <rapport> du carré de *B* au carré de *C*. Si nous additionnons, on a le rapport de la somme des carrés de *A* et de *B* à la somme des carrés de *B* et de *C* égale au rapport du carré de *A* au carré de *B*. Mais le rapport de la somme des carrés de *A* et de *B* à la somme des carrés de *B* et de *C* est égal au rapport de *D* à *E*. Mais la somme de *D* et *E* est égale à la somme des carrés de *A* et de *B* et le rapport de *D* à *E* est égal au rapport du carré de *A* au carré de *B*. Donc *D* est égal au carré de *A* et *E* est égal au carré de *B*. Ce qu'on voulait.

Il est donc clair que cela n'a lieu que pour ces mêmes trois grandeurs[2].

– **4** – *ABC* et *ABD* sont semblables et *B* est droit ; *AC* et *AD* sont connus. Nous voulons connaître *BC*, *CD* et la perpendiculaire *AB*.

Cherchons trois grandeurs en proportion continue telles que la somme des carrés de la première et de la deuxième égale le carré de *AC* et que la somme des carrés de la deuxième et de la troisième égale le carré de *AD*. Nous disons que la première grandeur est égale à *BC*, la deuxième à *AB*, la troisième à *BD* et nous admettons que *CD* est connu[3].

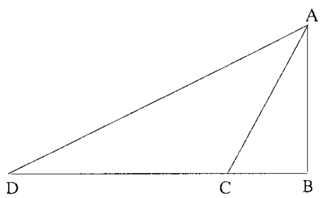


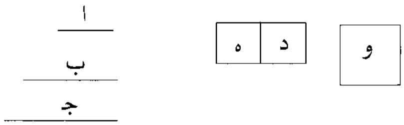
Fig. 4

[2] C'est-à-dire : en proportion continue.

[3] Cette hypothèse est en tout état de cause inutile.

مربع د ب على مربع د ا معلومة. لكن ثلاثة أمثال مربع ب د هي كـ ا د في د جـ ثلاث مرات؛ فزيادة ا د في د جـ ثلاث مرات على مربع ا د معلومة، وا جـ معلوم، فكل واحد من ا د د جـ معلوم كما بينا آنفًا، فـ جـ ا في ا د – أعني مربع ا ب – معلوم، ونعلم منه ه ب؛ وهو المطلوب.

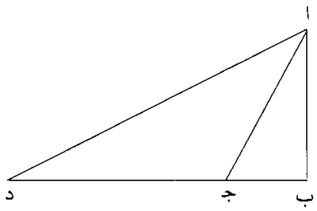
– ٣ – ا ب جـ متناسبة، ومربعا ا ب معًا ومربعا ب جـ معًا معلومان؛ كم كل واحد منها؟



بابه: أن نجعل د ه كمربعي ا ب، وو كمربعي ب جـ ونقسم د ه بقسمين، نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة د ه إلى و، وهما د ه، فيكون كل منهما معلومًا. فنقول: د كمربع ا، وه كمربع ب، إذ لتناسب ا ب جـ يكون مربع ا إلى مربع ب كمربع ب إلى مربع جـ. وإذا جمعنا، كانت نسبة مربعي ا ب إلى مربعي ب جـ كمربع ا إلى مربع ب. لكن مربعي ا ب إلى مربعي ب جـ كـ د إلى ه ود ه كمربعي ا ب، ود إلى ه كمربع ا إلى مربع ب. فـ د كمربع ا، وه كمربع ب؛ وهو المراد.

واستبان أن هذا لا يقع إلا في ثلاثة أقدار بعينها.

– ٤ – ا ب جـ ا ب د متشابهان وب قائمة، وا جـ ا د معلومان؛ نريد أن نعلم ب جـ جـ د وعمود ا ب.



نطلب ثلاثة أقدار متناسبة، يكون مربعا الأول والثاني كمربع ا جـ، ومربعا الثاني والثالث كمربع ا د. فنقول: القدر الأول كـ ب جـ والثاني كـ ا ب والثالث كـ ب د، ونقبل جـ د معلومًا.

11 مربعي (الثانية): مربعا – 15-16 نريد ... جـ د: مكررة.

Puisque AD est l'homologue de AC et BD l'homologue de BA et non de BC, étant donné que l'angle BAC n'est égal pas à <l'angle> BAD, donc <le rapport de> DB à BA est égal au <rapport de> BA à BC ; le carré de AC est égal à la somme des carrés de BC et BA et le carré de AD est égal à la somme des carrés de BD et BA. Les grandeurs BC, BD, BA sont donc égales aux grandeurs mentionnées, car cela n'a lieu que pour trois grandeurs seulement. Ce qu'on cherchait.

De même, nous connaissons cela si les deux <surfaces> semblables sont les surfaces AD et AC.

– **5** – Soit trois grandeurs en proportion continue, comme AB, BC et CD, telles que la somme de la première et de la deuxième soit connue et que la troisième soit connue. Comment connaître chacune des deux premières ?

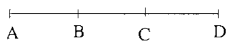


Fig. 5

Puisque <le rapport> de AB à BC est égal au <rapport de> BC à CD, alors par composition, <le rapport de> AC à CB sera égal au <rapport de> BD à DC, donc AC par CD, qui est connu, est égal à BC par BD, qui est donc connu. Mais CD est connue, donc BC sera connue et il reste AB connue. Ce qu'on voulait.

– **6** – ABC est un demi-cercle et BH une perpendiculaire. On sépare BD égal à BC et on mène AE égal à AD et la perpendiculaire EG. Alors CG est le double de BH, car le double de AB par BD plus le carré de AD est égal à la somme des carrés de AB et BD, bien plus à la somme des carrés de AB et BC, bien plus au carré de AC, et bien plus à la somme des carrés de AE et EC. Mais le carré de AE est égal au carré de AD, donc le double produit de AB par BD, c'est-à-dire le double produit de AB par BC est égal au carré de EC, c'est-à-dire AC par CG, donc le double produit de AB par BC, c'est-à-dire le quadruple de l'aire du triangle ABC, qui est égal au double produit de BH par AC, est égal à AC par CG, donc CG est le double de BH.

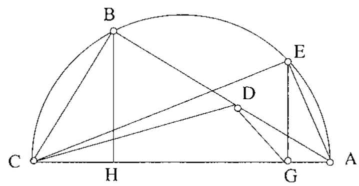
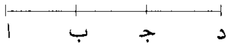


Fig. 6

ولأن ا د نظير لـ ا جـ وب د لـ ب ا، لا لـ ب جـ، إذ ليست زاوية ب ا جـ كـ ب ا د، فـ د ب إلى ب ا كـ ب ا إلى ب جـ؛ ومربع ا جـ كمربعي ب جـ ب ا، ومربع ا د كمربعي ب د ب ا. فأقدار ب جـ ب د ب ا مساوية للأقدار المذكورة لأن ذلك لا يكون إلا في ثلاثة أقدار فقط؛ وهو المراد.

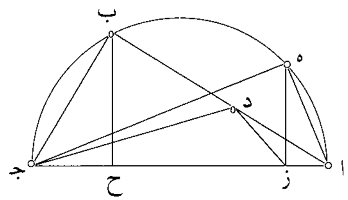
وكذلك نعلم هذا إن كان المتشابهان سطحي ا د ا جـ.

– ه – كل ثلاثة أقدار متناسبة كـ ا ب ب جـ جـ د، كان الأول والثاني معًا معلومًا والثالث معلومًا؛ كيف يعلم كل من الأولين؟



فلأن ا ب إلى ب جـ كـ ب جـ إلى جـ د، فبالتركيب ا جـ إلى جـ ب كـ ب د إلى د جـ. فـ ا جـ في جـ د المعلوم كـ ب جـ في ب د، فهو معلوم. وجـ د معلوم، فيصير ب جـ معلومًا ويبقى ا ب معلومًا؛ وهو المراد.

– ٦ – ا ب جـ نصف دائرة وب ح عمود. وفصل ب د كـ ب جـ، وأخرج ا ه كـ ا د وعمودُ ه ز. فـ جـ ز ضعف ب ح، لأن ا ب في ب د مرتين مع مربع ا د كمربعي ا ب ب د، بل مربعي ا ب ب جـ، بل مربع ا جـ، بل مربعي ا ه ه جـ. لكن مربع ا ه كمربع ا د، فـ ا ب في ب د مرتين، أعني ا ب في ب جـ مرتين كمربع ه جـ، أعني ا جـ في جـ ز. فـ ا ب في ب جـ مرتين، أعني أربعة أمثال مساحة مثلث ا ب جـ، التي هي كـ ب ح في ا جـ مرتين، يساوي ا جـ في جـ ز، فـ جـ ز ضعف ب ح.



5 سطحي: سطحا.

Par ce lemme, j'ai résolu ce problème ; je ne sais pas qui est le premier à l'avoir résolu. [135r]

<Théorème> : Pour tout triangle rectangle dont la hauteur et l'excédent de l'un de ses côtés sur l'autre sont connus, ses côtés sont connus.

Puisque le carré de *AE*, c'est-à-dire *CA* par *AG*, est connu et que *CG* est connu, alors *AG* – bien plus *AC*, bien plus *AH* par *HC*, bien plus *AB* par *BC* – est connu.

Cela peut être connu sans avoir le demi-cercle si on pose *CA* par *AG* égal au carré de *AD*, car *CG* sera égale au double de *BH*. Si on joint *DG*, on a <le rapport de> *CA* à *AD* égal au <rapport de> *AD* à *AG* et <l'angle> *A* est commun. Alors ils sont semblables[4].

Puisque le carré de *AC* est égal à *AC* par la somme de *AG* et *CG* et est égal à la somme des carrés de *AD* et *DC* et du double produit de *AD* par *DB*, alors nous simplifions *CA* par *AG* par le carré de *AD*. Il reste donc *AC* par *CG* égal au double produit de *AD* par *DB* plus le carré de *CD*, c'est-à-dire le double du carré de *DB*. Donc *AC* par *CG* est égal au double de *AB* par *BD* – lequel est égal à *BC* – c'est-à-dire au quadruple de l'aire égale à l'aire du triangle *ABC*, qui est égal au double produit de *BH* par *AC*. Donc *CG* est égal au double de *BH*. Donc *AG* sera connu ainsi que *AC*, bien plus les carrés de *AB* et *BC* seront connus, car leur somme est égale au carré de *AC* ; or l'excédent de *AB* sur *BC* est connu, donc chacun d'eux est connu. Ce qu'on voulait.

– **7** – Nous voulons diviser *AB* en deux parties telles que son produit par l'une, deux fois ou plus, soit égal au carré de l'autre. Menons la perpendiculaire *BE*, le double de *BA* et achevons *BH*. Appliquons à *AH* un parallélogramme égal à *BH* excédant d'un carré, soit *DH*. Une fois retranché *CH* qui est commun, il reste *AD*, c'est-à-dire le carré de *AC* égal à *CE*, qui est obtenu à partir de *CB* par *BE*, c'est-à-dire le double de *BA*. Ce qu'il fallait démontrer.

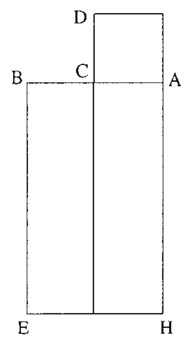


Fig. 7

– **8** – Pour tout triangle dont on connaît l'aire, la somme des côtés et l'un des côtés, les deux côtés qui restent sont connus.

[4] C'est-à-dire les triangles *ADG* et *ACD*.

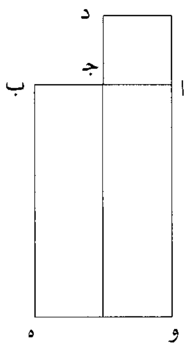
عملت بهذه المقدّمة هذه المسألة ولست أدري من أول من عملها . / ١٣٥-و وهي :

أن كل مثلث قائم الزاوية عموده وفضل أحد ضلعيه على الآخر معلومان، فأضلاعه معلومة.

لأن مربع ا ه، أعني جـ ا في ا ز، معلوم وجـ ز معلوم، فيصير ا ز – بل ا جـ، بل ا ح ح جـ، بل ا ب ب جـ – معلوماً .

وقد تعلم من غير نصف الدائرة إذا جعل جـ ا في ا ز كمربع ا د، لأن جـ ز ⟨يصير⟩ ضعف ب ح . إذا نصل د ز، فيكون جـ ا إلى ا د كـ ا د إلى ا ز وا مشتركة، فهما متشابهان .

فلأن مربع ا جـ كـ ا جـ في ا ز وفي ز جـ وكمربعي ا د د جـ وا د في د ب مرتين، فنسقط جـ ا في ا ز بمربع ا د، فيبقى ا جـ في جـ ز كـ ا د في د ب مرتين ومربع جـ د، أعني ضعف مربع د ب. فـ ا جـ في جـ ز كـ ا ب في ب د – أعني ب جـ – مرتين، أعني أربعة أمثال المساحة المساوية ⟨لمساحة مثلث ا ب جـ المساوية⟩ لـ ب ح في ا جـ مرتين. فـ جـ ز ضعف ب ح، فيصير ا ز معلوماً، فيصير ا جـ بل مربعا ا ب ب جـ معلومين، لأنهما كمربع ا جـ، وزيادة ا ب على ب جـ معلومة، فكل واحد منهما معلوم؛ وهو المراد .



– ٧ – نريد أن نقسم ا ب بقسمين، ضربه في أحدهما مرتين أو أكثر كمربع الآخر، فنخرج عمود ب ه ضعف ب ا، ونتمم ب ح. ونضيف إلى ا ح متوازي أضلاع كـ ب ح يزيد على تمامه مربعاً، وهو د ح. فبعد إسقاط جـ ح المشترك، يبقى ا د، أعني مربع ا جـ، كـ جـ ه الذي هو من جـ ب في ب ه، أعني ضعف ب ا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– ٨ – كل مثلث تكسيره وأضلاعه وضلع منه معلومات، فالضلعان الباقيان معلومان.

8 إذا: اذ – 24 وأضلاعه: يعني مجموع الأضلاع، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد .

La manière pour les connaître est à partir du calcul de l'excédent.

Démonstration : Tu prends la somme des côtés, de laquelle tu ôtes le côté connu, ce qui reste est le premier terme. Retiens-le. Ôte ensuite le double du côté connu de la somme des côtés et prends la moitié de ce qui reste ; c'est le second terme. Multiplie-le par la moitié de la somme des côtés et retiens le produit. C'est le troisième terme. Multiplie ensuite l'excédent du premier sur la moitié de la somme des côtés par la moitié ; ce que tu obtiens est le quatrième terme. Divise le carré de l'aire du triangle par le troisième et ajoute au quotient le quatrième. Ce que tu obtiens est le terme soustrait. Retiens-le. Multiplie ensuite l'excédent du premier sur la moitié de la somme des côtés par le second et ajoute le produit au troisième puis divise cela par le troisième et multiplie le quotient par le quart de la somme des côtés. Ce que tu obtiens est la plus petite partie. Retiens-la. Puis multiplie-la par elle-même et ôte du produit le terme soustrait. Ce qui reste, prends-en la racine et ajoute-le ou retranche-le de la petite partie. Ce que tu obtiens c'est l'un des deux côtés inconnus. Ce qu'on voulait.

– **9** – Le triangle ABC de côtés connus est inscrit dans un cercle. Quelle est la quantité du diamètre ?

Partageons BC en deux moitiés en M et menons la perpendiculaire MGI, la perpendiculaire AED et, du centre G, la perpendiculaire GO ; menons AG. Puisque BE par EC, qui est connu, est égal à AE par ED et que AE est connu, donc ED, bien plus AD, bien plus AO, sont connus. Or GO, c'est-à-dire EM, est connu. Donc AG, qui est en puissance équivalent à leur somme, est connu. Ce qu'on voulait.

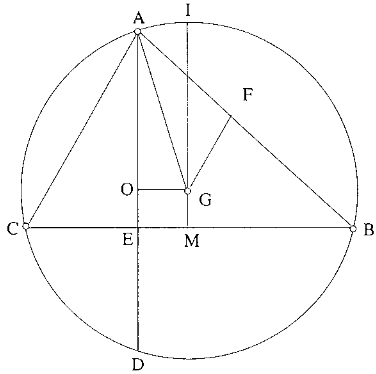


Fig. 8

– **10** – Si un cercle est inscrit dans un triangle de côtés connus, alors son diamètre est connu.

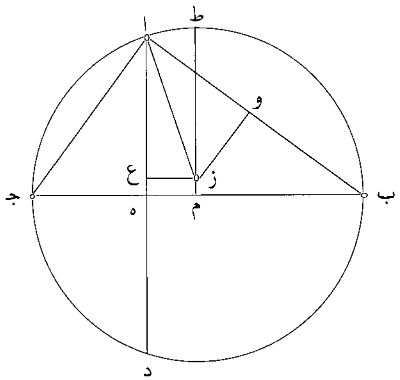
Puisque le demi-diamètre par la moitié de la somme des côtés connus est égale à l'aire du triangle connu, le demi-diamètre est connu.

ووجه معرفتها من حساب التفاضل.

برهانه: أن تأخذ الأضلاع وتلقي المعلوم منها، فما بقي فهو الأول. فاحفظه. ثم إلق ضعف الضلع المعلوم من الأضلاع، وخذ نصف الباقي وهو الثاني؛ فاضربه في نصف الأضلاع، فاحفظ المبلغ وهو الثالث. ثم اضرب فضل الأول على نصف الأضلاع في نصفها؛ فما بلغ فهو الرابع. واقسم مربع تكسير المثلث على الثالث، وزد الخارج على الرابع؛ فما بلغ فهو المنقوص، فاحفظه. ثم اضرب فضل الأول على نصف الأضلاع في الثاني، فما بلغ فزده على الثالث، ثم اقسم ذلك على الثالث، فما خرج فاضربه في ربع جماعة الأضلاع؛ فما بلغ فهو قسم الأصغر. فاحفظه، ثم اضربه في مثله وانقص مما اجتمع المنقوص. فما بقي فخذ جذره فزده على القسم الأصغر أو انقصه منه؛ فما حصل فهو أحد الضلعين المجهولين؛ وهو المراد.

– ٩ – مثلث ا ب جـ في دائرة معلوم الأضلاع؛ فكم القطر؟

ننصّف ب جـ على م ونخرج منه عمود م ز ط وعمود ا ه د، ومن مركز ز عمود ز ع، وا ز. فلأن ب ه في ه جـ المعلوم كـ ا ه في ه د وا ه معلوم، فـ ه د بل ا د بل ا ع معلوم. وز ع، أعني ه م، معلوم؛ فـ ا ز القوي عليهما معلوم؛ وهو المراد.



– ١٠ – إذا كان في مثلث معلوم الأضلاع دائرة، فقطرها معلوم.

لأن نصف القطر في نصف الأضلاع المعلومة يساوي تكسير المثلث المعلوم، فيصير نصف القطر معلوماً.

– **11** – Si on a dans un cercle deux droites inconnues parallèles, si on joint leurs extrémités par deux droites égales connues et si la distance entre les deux parallèles est connue, alors les deux parallèles sont connues.

– **12** – Pour tout triangle rectangle dont l'aire et la somme des côtés sont connues, chacun des côtés est connu.

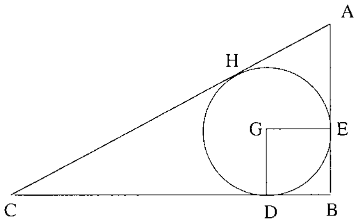


Fig. 9

Traçons alors dans le triangle un cercle et menons les perpendiculaires. Puisque le quotient de la division de l'aire par le demi-périmètre est le demi-diamètre, alors *GD*, c'est-à-dire *BE* ou *BD*, est connu. Il reste *AC* la moitié du reste[5], car *AH* est égal à *AE* et *CH* égal à *CD*, connu. Si donc on divise l'aire par la moitié de *AC*, on détermine la troisième hauteur du triangle *ABC*, à partir de laquelle on connaît les deux autres.

– **13** – Pour tout trapèze dont la somme des côtés est connue et dont l'une des diagonales inconnues est la moitié de l'autre, ces diagonales sont connues.

– **14** – Si on a un triangle dont la hauteur est la moitié de la base et dont les deux côtés qui restent sont connus, comment connaître la hauteur ou la base ?

– **15** – Si on a un triangle dont l'aire est connue[6] et dont la hauteur et la base et le rapport de l'un des côtés à l'autre sont tous connus, mais dont les côtés sont inconnus, comment les connaître ?

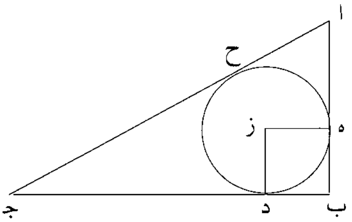
– **16** – Pour tout trapèze isocèle, comment connaître la diagonale ?

[5] C'est-à-dire la moitié de la différence entre la somme des côtés et le diamètre du cercle.

[6] Hypothèse inutile.

– ١١ – إذا كان في دائرة خطان مجهولان متوازيان ووصل أطرافهما بمتساويين معلومين و‹البعدُ› بين المتوازيين معلوماً، فالمتوازيان معلومان.

– ١٢ – كل مثلث قائم الزاوية تكسيره وأضلاعه معلومان، فكل ضلع معلوم.



إذ ندير فيه دائرة ونخرج الأعمدة. فلأن الخارج من قسمة التكسير على نصف الإحاطة نصفُ القطر، فـ ز د، أعني ب ه ‹أو› ب د، معلوم. ويبقى ا جـ نصف الباقي، لأن ا ح كـ ا ه وجـ ح كـ جـ د، معلوماً. وإذا قسمنا التكسير على نصف ا جـ، خرج عمود مثلث ا ب جـ الثالث، ويعرف منه الباقيان.

– ١٣ – كل منحرف معلوم الأضلاع وأحد قطريه المجهولين نصف الآخر، فهما معلومان.

– ١٤ – إذا كان مثلث عموده نصف قاعدته وضلعاه الباقيان معلومين؛ كيف نعلم العمود أو القاعدة؟

– ١٥ – إذا كان مثلث تكسيره معلوم وعموده وقاعدته ونسبة أحد ضلعيه إلى الآخر معلومات، وهما مجهولان؛ كيف يعلمان؟

– ١٦ – كل منحرف فيه زاويتان متساويتان؛ كيف يعلم القطر؟

2 و‹البعد› بين المتوازيين معلومًا: وبينهما المتوازيين معلومان؛ والعبارة لا تستقيم لغويًا ولا رياضيًا.

– **17** – Soit un triangle rectangle de côtés et d'aire connus. Tu considères la grandeur de l'un des deux côtés qui entourent l'angle droit, d'où tu mènes une droite selon un angle droit, parallèle à la base. Alors il s'engendre un triangle rectangle dont l'aire est une coudée par un tiers de coudée et il s'engendre un carré dont l'aire est une coudée par une coudée. Tu veux le partager en deux parties[7] entre lesquelles il y a un.

– **18** – Si on a un rectangle dont la diagonale est connue[8], tu considères une grandeur sur l'un des côtés et tu mènes une droite parallèle aux deux côtés du rectangle, puis tu mènes l'autre diagonale du quadrilatère. En quelles quantités se coupent les deux diagonales ?

– **19** – Il n'est pas possible d'élever à partir d'une même corde deux angles égaux tels que la somme des deux droites qui entourent l'un soit égale à la somme des deux droites qui entourent l'autre.

– **20** – Nous voulons construire sur le triangle scalène *ABC* un triangle équilatéral.

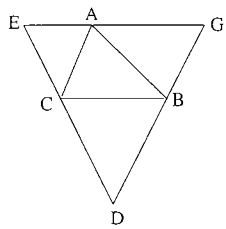


Fig. 10

Menons, de *A*, *AEG* parallèle à *BC* ; *DEG* est alors le recherché. Si nous voulons le scalène dans l'équilatéral, alors nous menons *IM* quelconque.

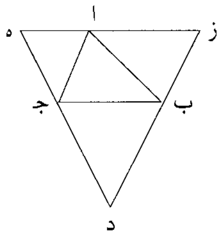
[7] Litt. : moitiés.
[8] Hypothèse inutile.

– ١٧ – إذا كان مثلث قائم الزاوية معلوم الأضلاع والمساحة، جئت إلى قدر من أحد الضلعين المحيطين بالقائمة، فأخرجت منه خطًا موازيًا للقاعدة على زاوية قائمة، فحدث مثلث قائم الزاوية وتكسيره ذراع بثلث ذراع والمربع الذي يحدث تكسيره ذراع بذراع. فأردت أن تقسمه بنصفين يكون بينهما واحد.

– ١٨ – إذا كان مربع متوازي الأضلاع قطره معلوم، جئت إلى قدر من أحد أضلاعه، فأخرجت منه خطًا يوازي ضلعي المربع. ثم أخرجت قطر المربع الآخر؛ على كم تقاطع القطران؟

– ١٩ – لا يمكن أن يقوم على وتر واحد زاويتان متساويتان ويكون الخطان المحيطان بأحدهما كالمحيطين بالأخرى إذا جمعا.

– ٢٠ – نريد أن نعمل على ا ب جـ المختلف الأضلاع مثلثًا متساوي الأضلاع.



ونخرج من ا ا ه ز يوازي ب جـ، فـ د ه ز هو المطلوب. وإن أردنا المختلف في المتساوي، فنخرج ط م كيفما اتفق.

5 واحد : واحدا.

LE LIVRE DES HYPOTHÈSES

Hélène BELLOSTA

Ce traité, qui peut sembler *a priori* assez élémentaire, contient 35 propositions, numérotées de 1 à 36, la proposition 33 présentant une démonstration alternative de la proposition 8. Nous avons également une rédaction de ce traité par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, ce qui semble témoigner d'un certain intérêt de celui-ci pour cette œuvre[1]. Ces 35 propositions se répartissent ainsi :

– Onze problèmes géométriques constructibles à la règle et au compas (propositions 5, 6, 8 = 33, 9, 10, 17, 19, 29, 30, 34, 35) dont Thābit ne donne que la synthèse. Ces onze problèmes ont été regroupés par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī au début de sa rédaction et constituent, dans le même ordre, les propositions 1 à 12[2]. Parmi ces problèmes, cinq (les problèmes 5, 17, 19, 29 et 34) sont des problèmes ayant un nombre fini de solutions, un (le problème 6) est un problème indéterminé (ayant une infinité de solutions) dont Thābit donne seulement une solution particulière ; notons également que ce problème serait immédiatement susceptible d'une lecture algébrique, ce qui n'est pas l'objet de Thābit dans ce traité ; cinq problèmes enfin (les problèmes 8, 9, 10, 30 et 35) sont des problèmes avec discussion, discussion que

[1] *Taḥrīr kitāb al-mafrūḍāt li-Thābit ibn Qurra*, éd. Hyderabad, 1940 ; nous avons consulté les manuscrits suivants de ce texte : Berlin, Qu 1867, fol. 151^v-155^v ; Paris, BN 2467, fol. 68^v-72^v ; Leyde, Or 14, p. 470-487. Le manuscrit de Leyde est une copie du manuscrit de Berlin ; c'est le manuscrit de Berlin, qui de ces trois manuscrits présente le meilleur état du texte, que nous utiliserons pour nos citations de cette rédaction.

Al-Ṭūsī signale en préambule à sa rédaction du *Livre des hypothèses* que certains des manuscrits du traité de Thābit comportaient 34 propositions et d'autres 36 : « Rédaction du *Livre des hypothèses* de Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī al-Ṣābi' : il comporte trente-six propositions et dans certaines copies trente-quatre propositions selon l'ordre indiqué par les numéros noirs en marge ; n'y figurent pas les propositions 4 et 28 » (ms. Berlin Or. Quart 1867, fol. 151^v, l. 2-4). La proposition 4 (33 chez Thābit) présente en effet une démonstration alternative de la proposition 3 (8 chez Thābit) ; la proposition 28 (15 chez Thābit) figure dans le manuscrit de Berlin, à la suite de la proposition 27 (14 chez Thābit) mais sans porter de numéro.

[2] Les problèmes 3 et 4, avec la numérotation d'al-Ṭūsī, présentent deux démonstrations alternatives du même problème, le problème 8 ou 33 avec la numérotation de Thābit.

n'aborde pas Thābit[3] ; quelques conditions (nécessaires ou suffisantes) à l'existence de solutions sont évoquées dans des notes marginales du manuscrit de Berlin de la rédaction d'al-Ṭūsī du *Livre des hypothèses*, nous indiquons ces *marginalia* dans les notes du texte arabe et de la traduction.

– Deux théorèmes, non formulés en termes de connus (propositions 11 et 36) ; ces deux théorèmes viennent à la suite des 11 problèmes dans la rédaction d'al-Ṭūsī et portent respectivement les numéros 13 et 14.

– Viennent enfin 22 théorèmes formulés en termes de connus (montrer que si certains éléments d'une figure sont donnés ou connus, d'autres éléments de la figure sont alors connus), les propositions 1 , 2, 3, 4, 7, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32 ; ces propositions, dans un ordre légèrement différent, sont les propositions 15 à 36 de la rédaction d'al-Ṭūsī.

Ces théorèmes formulés en termes de connus, dans le style des *Données* d'Euclide, forment donc le cœur de cet ouvrage et permettent d'en justifier le titre[4] : le terme *mu'ṭā* (donné), utilisé pour traduire le titre de l'ouvrage d'Euclide *Les Données* (*al-Mu'ṭayāt*, δεδομένα), est d'un usage peu fréquent dans les textes mathématiques, où il est le plus souvent remplacé par connu (*ma'lūm*) comme le fait d'ailleurs Thābit, dans sa révision de la traduction arabe des *Données* d'Euclide[5]. Les géomètres arabes ont également utilisé dans ce contexte le terme *mafrūḍ* (donné). L'ouvrage de Thābit se place donc, tant par son titre que par son contenu, dans la postérité des *Données* d'Euclide, propédeutique à l'analyse, puisque, comme le dira Ibrāhīm ibn Sinān, petit fils de Thābit : « l'analyse du géomètre est ce qui le conduit à faire en sorte que la chose que l'on demande dans le problème soit dans des termes donnés (*mafrūḍ*)[6] ». Que Thābit ait consacré un traité à des théorèmes énoncés en termes de connus est ainsi un des indices qui confirment l'intérêt pour le problème de l'analyse qui se manifeste, à partir du IX^{e} siècle, chez les géomètres du monde arabe. Après Thābit, d'autres géomè-

[3] Sur la classification des problèmes et l'analyse géométrique, voir R. Rashed & H. Bellosta, *Ibrāhīm Ibn Sinān : Logique et géométrie au X^{e} siècle*, Leyde, Brill, 2000, p. 24-30 ; H. Bellosta, « Ibrāhīm Ibn Sinān : On Analysis and Synthesis », *Arabic Sciences and Philosophy,* 1.2, 1991, p. 211-232 ; H. Bellosta, « Ibrāhīm Ibn Sinān : une nouvelle classification des problèmes de géométrie », dans S. Garma, D. Flament, V. Navarro (éds), *Contra los titanes de la rutina*, Madrid, 1994, p. 19-33.

[4] Ce ne sont pas les seules propositions formulées en termes de connus que l'on rencontre dans l'œuvre de Thābit : la troisième partie de son traité *Sur la composition des rapports* est également dévolue à des théorèmes de ce type (voir *infra*, P. Crozet, « Thābit ibn Qurra et la composition des rapports »).

[5] Euclide, *Kitāb al-Mu'ṭayāt* : traduction Isḥāq/Thābit, ms. Istanbul, Topkapi Saray, Ahmet III, 3464, fol. 1a-19b ; rédaction de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, ms. Le Caire, Riyāḍiyat 40, fol. 91^{v}-103^{v}.

[6] Rashed & Bellosta, *Ibrāhīm Ibn Sinān : Logique et géométrie*, p. 114.

tres, Ibn Sinān ou al-Qūhī, énonceront d'autres propriétés dans la langue des connues, soit comme Ibn Sinān en les énonçant au cours de la résolution de certains problèmes de son *Anthologie*[7], soit, comme al-Qūhī[8], en leur consacrant un traité, et ce avant même qu'Ibn al-Haytham, renouvelant totalement le genre, ne fonde une nouvelle discipline, *Les Connus* (*al-ma'lūmāt*)[9].

Si Euclide distinguait dans *Les Données* le donné de position (pour les points, les lignes et les angles), le donné de forme ou d'espèce (pour les figures rectilignes), le donné de rapport et le donné de grandeur (pour les lignes, les surfaces et les angles), l'objectif de Thābit dans les propositions relatives aux connues du *Livre des hypothèses* est uniquement de démontrer que certaines lignes (droites) sont de grandeur connue lorsque d'autres éléments de la figure sont donnés par hypothèse (*i. e.* supposés connus) ; Thābit se place donc délibérément, en ce qui concerne ces propositions, dans le cadre d'une géométrie des grandeurs. Montrer que certaines grandeurs sont connues pourrait alors aisément devenir : déterminer (ou calculer) ces grandeurs en fonction des éléments supposés connus de la figure, ce qui ferait de ces propositions des problèmes ; c'est d'ailleurs presqu'ainsi que Thābit rédige les énoncés de certaines de ces propositions : « nous voulons connaître » pour les propositions 14, 24, 25, 27, 31, ou « nous voulons montrer comment connaître » dans celui des propositions 16, 18, ou encore « comment connaître » en ce qui concerne les propositions 20, 22, 28[10]. Les démonstrations de ces propositions peuvent alors être, au choix, lues comme des démonstrations de théorèmes (relatifs aux « connus ») soit comme des analyses de problèmes[11].

[7] Rashed & Bellosta, *Ibrāhīm Ibn Sinān : Logique et géométrie*, p. 435-759.

[8] Le traité d'al-Qūhī dans lequel celui-ci énonce développe et généralise certaines des propriétés énoncées par Ibn Sinān dans son *Anthologie de problèmes* va être édité et traduit par Philippe Abgrall.

[9] R. Rashed, « La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham, II : Les Connus », *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire* (*MIDEO*), 21, 1993, pp. 87-275. R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, al-Furqān, 2002, p. 157-584.

[10] Notons que ce n'est pas le cas dans la rédaction de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī qui garde dans tous ces énoncés la terminologie de « connu ».

[11] Quelques-unes de ces propositions seront d'ailleurs reprises par des mathématiciens postérieurs en termes de problèmes : le petit-fils de Thābit, Ibn Sinān, dans son *Traité sur l'analyse et la synthèse*, reprend sous forme de problèmes les propositions 23 et 26 du *Livre des hypothèses* pour illustrer ce que doivent être l'analyse et la synthèse d'un problème de géométrie ; on retrouve également la proposition 31, énoncée sous la forme d'un problème rédigé sous une forme imagée et résolu algébriquement, tant dans le *Asās al-Qāwā'id* d'al-Fārisī que dans *La Clef de l'arithmétique* d'al-Kāshī. Rashed & Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān : Logique et géométrie*, p. 34-36, 45-51 ;

Notons qu'inversement tous les problèmes de constructions géométriques qui figurent dans ce traité pourraient être formulés en termes de théorèmes relatifs aux connus (de position cette fois), en remplaçant dans leur énoncé « construire un point (ou une droite) tel que ...» par « montrer que le point (ou la droite) tel que ... est donné de position » ; il suffit d'en reconstituer l'analyse pour s'en convaincre.

Quoi qu'il en soit, ces propositions formulées en termes de connus se répartissent ainsi :

des propositions traitant de relations métriques sur des droites : 23 et 26, auxquelles on peut ajouter la proposition 11 ;

des propositions traitant de relations métriques dans le triangle : 2, 3, 12, 13, 14, 16, 21, 24 et 28 ;

des propositions traitant de relations métriques dans le quadrilatère : 1, 4, 7 et 15, auxquelles on pourrait ajouter la proposition 31 ;

des propositions traitant de relations métriques dans le cercle : 18, 20, 22, 25, 27 et 32.

RELATIONS MÉTRIQUES SUR DES DROITES

PROPOSITION 11 : C étant un point du segment $[AB]$, $AC > CB$, alors $(AC + BC)\cdot(AC - BC) = AC^2 - BC^2$. Cette proposition n'est pas un théorème relatif aux « connus », cependant al-Ṭūsī, dans sa rédaction du *Livre des hypothèses*, en déduit que si deux des trois grandeurs $AC + BC$, $AC - BC$ et $AC^2 - BC^2$ sont connues, la troisième est connue ; on peut également en déduire (ce que fait Thābit dans la proposition 31) que si $AC^2 - BC^2$ et $AC + BC$ sont connues, alors AC et BC sont connues (puisque, outre leur somme, leur différence est alors connue).

PROPOSITION 23 : $AC\cdot CB$ connue, $\dfrac{AC}{CB}$ connu, alors AC et CB sont connues.

PROPOSITION 26 : B étant un point du segment $[AC]$, si $CA \cdot CB$ et $CA - CB$ sont connues, alors CA et CB sont connues[12].

M. Mawāldi, *al-Fārisī, Asās al-qawā'id fī uṣūl al-fawā'id*, Le Caire, Institute of Arab manuscripts, 1994, p. 579 ; A. S. Demerdash, *al-Kāshī, Miftāḥ al-hisāb*, Le Caire, Dār al-kitāb al-ʿarabī, p. 265-266.

[12] Lorsque dans ce texte nous disons qu'une droite est connue, sans autre précision, il s'agit d'une droite dont la grandeur est connue.

Ces trois propositions ne sont autres qu'une re-formulation, sous une forme que l'on pourrait qualifier d'algébrique (si la somme, et la différence des carrés, de deux grandeurs sont connues, ces deux grandeurs sont connues ; si le produit et le quotient de deux grandeurs sont connus alors ces deux grandeurs sont connues ; si le produit et la différence de deux grandeurs sont connus alors ces deux grandeurs sont connues, toutes ces grandeurs étant des droites), de propositions qui figuraient dans *Les Données* d'Euclide ou qui s'en déduisent immédiatement :

la proposition 23 est la proposition 55 des *Données* dans le cas particulier où la figure donnée d'espèce et de grandeur est un rectangle[13] ;

la proposition 26 est la proposition 84 des *Données* dans le cas particulier où l'angle donné est droit[14] ;

la proposition 11 est un corollaire immédiat de la proposition 6 du livre II des *Éléments* d'Euclide dont Thābit a été le premier à faire une lecture algébrique (*Pour aplanir les problèmes d'algèbre par des démonstrations géométriques*). Le corollaire de la proposition 11 se déduirait des propositions 57 (dans le cas particulier où l'angle donné est droit), 3 et 4 des *Données*[15].

RELATIONS MÉTRIQUES DANS DES TRIANGLES

Avec ces propositions, Thābit inaugure une longue tradition – que l'on pourra suivre jusqu'au XVIIᵉ siècle (par exemple chez Viète), en passant par son petit-fils Ibn Sinān, al-Sijzī, Ibn Sahl et Ibn al-Haytham – de problèmes de relations métriques dans le triangle, problèmes qui sont, à la lettre et avant l'heure, des problèmes de trigonométrie.

[13] Proposition 55 : *si un espace est donné d'espèce et de grandeur, ses côtés seront donnés de grandeur* (trad. Peyrard, de même que toutes les autres citations des *Données*, *Les Œuvres d'Euclide*, traduites littéralement par F. Peyrard, Paris, 1819 ; rééd. Paris, Blanchard, 1993, p. 517-603).

La définition que donne Euclide d'un espace, ou d'une figure, donné de grandeur n'est pas très claire, cependant l'usage qui en est fait dans les *Données* permet de la préciser : des espaces de grandeur donnée sont des espaces dont la surface est donnée.

[14] Proposition 84 : *si deux droites comprennent un espace donné dans un angle donné, et si l'une d'elles est plus grande que l'autre d'une droite donnée, chacune d'elles sera donnée.*

[15] Proposition 57 : *si un espace donné est appliqué à une droite donnée dans un angle donné, la largeur de l'application est aussi donnée.*

Proposition 3 : *si tant de grandeurs qu'on voudra sont réunies, la grandeur composée de ces grandeurs sera donnée.*

Proposition 4 : *si d'une grandeur donnée on retranche une grandeur donnée, la grandeur restante sera donnée.*

PROPOSITION 2 : si dans un triangle rectangle isocèle un des côtés est connu, les autres côtés sont connus.

PROPOSITION 3 : soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$, si un côté est connu, les autres le sont.

PROPOSITION 12 : soit ABC un triangle isocèle de sommet A, de surface connue, et tel que AB et AC soient connus, alors BC est connue.

PROPOSITION 13 : pour tout triangle isocèle ABC dont la base AC est connue, ainsi que la hauteur relative à un des côtés, AD, et le pied de la hauteur, DC, alors les côtés sont connus.

PROPOSITION 14 : si les côtés d'un triangle sont connus, le diamètre du cercle circonscrit est connu.

PROPOSITION 16 : soit ABC un triangle, AD la bissectrice de l'angle $\hat{A}$, si AB, BD et AD sont connus les côtés restants sont connus.

PROPOSITION 21 : ABC est un triangle rectangle en B, si BC et $AB + AC$ sont connues, alors AB et AC sont connues.

PROPOSITION 24 : soit ABC un triangle isocèle de sommet A, tel que $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$, de surface connue, alors ses côtés sont connus.

PROPOSITION 28 : soit ABC un triangle tel que $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, si AB est connue ainsi que le diamètre du cercle circonscrit, alors BC et AC sont connues.

À ces propositions il faudrait ajouter les deux propositions suivantes qui interviennent dans un grand nombre de démonstrations du *Livre des hypothèses* :

Lemme I : si deux côtés d'un triangle rectangle sont connus, le troisième côté est connu.

Lemme II : si un triangle ABC a ses côtés connus, alors la hauteur AH et le pied de la hauteur (BH ou CH) sont connus.

Si le lemme I est établi au cours de la démonstration de la proposition 3, le lemme 2 en revanche, bien qu'explicitement formulé et utilisé dans de nombreuses démonstrations (propositions 7, 13, 14, 15, 16 et 18), n'est pas démontré. Cependant, dans le traité *Sur la mesure des figures planes et solides*[16], Thābit propose deux méthodes de calcul de la hauteur et du pied de la hauteur, qu'il attribue l'une à Euclide et l'autre à Ptolémée ; ces méthodes reposent toutes deux sur les propositions II.12 (triangles obtusangles) ou II.13 (triangles acutangles) des *Éléments* mises en œuvre différemment ($AC^2 = AB^2 + BC^2 \pm 2BC \cdot BH$, où BH est le pied de la hauteur issue de A).

Les propositions 2, 3, 21, 24 et 28 ainsi que les lemmes I et II sont encore des cas particuliers de propositions des *Données* ou bien s'en déduiraient aisément :

le lemme I est une conséquence des propositions 52[17], 3 ou 4, et 55 des *Données* ;

le lemme II est une conséquence de *Éléments* II.12 ou II.13, des propositions 52, 3, 4 et 57 des *Données* et du lemme 1 ;

les propositions 2 et 3 se déduisent des propositions 40[18], 52 et 55 des *Données* ;

la proposition 21 se déduirait des propositions 1, 46[19], 52 et 55 des *Données* ;

la proposition 24 est une conséquence des propositions 41[20] et 55 des *Données* ;

la proposition 28 se déduirait des propositions 89[21], 40, 52 et 55 des *Données*.

Les propositions 39 à 46 des *Données* sont celles relatives aux triangles, elles permettent de montrer que, sous certaines hypothèses sur ses côtés et ses angles, un triangle est donné d'espèce (ou, avec la terminologie de

[16] Voir *supra*, p. 178-209.

[17] Proposition 52 : *si sur une droite donnée de grandeur on décrit une figure donnée d'espèce, la figure décrite est donnée de grandeur.*

[18] Proposition 40 : *si chacun des angles d'un triangle est donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce.*

[19] Proposition 1 : *la raison qu'ont entre elles des grandeurs données est donnée.*
Proposition 46 : *si un triangle a un angle donné et si la somme des côtés autour d'un autre angle a une raison donnée avec le côté restant, le triangle est donné d'espèce.*

[20] Proposition 41 : *si un triangle a un angle donné et si les côtés autour de l'angle donné ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce.*

[21] Proposition 89 : *si dans un cercle donné de grandeur on mène une ligne droite donnée de grandeur, cette droite retranchera un segment qui comprendra un angle donné.*

Thābit, qu'il est de forme connue – *ma'lūm al-ṣūra*)[22]. Cependant, si les propositions 52 et 55 des *Données*, appliquées au cas particulier d'un triangle, permettent ensuite d'affirmer que si un triangle donné d'espèce a un côté donné de grandeur, les autres côtés sont également donnés de grandeur, elles ne permettent cependant en aucune façon de déterminer (calculer) ces côtés. Les démonstrations que donne Thābit de ces propositions, qui diffèrent de celles d'Euclide, permettraient en revanche un calcul effectif des grandeurs dont il démontre qu'elles sont connues, en remplaçant, à chaque étape du raisonnement, les affirmations du type « *x* est connu » par « *x* est égal à ». Si les propositions traitant de relations métriques dans le quadrilatère ou dans le cercle qui figurent dans le traité de Thābit se déduisent moins immédiatement des théorèmes des *Données*, elles offrent également la possibilité de calculer effectivement, à chaque étape du raisonnement, les grandeurs dont on démontre qu'elles sont connues. La possibilité de ce calcul effectif se fait, d'une part, au prix d'une certaine perte de généralité (il n'est plus par exemple question d'angles de grandeur donnée quelconque, mais d'angles égaux à un angle droit, un demi-angle droit, un tiers ou deux tiers d'angle droit) ; elle requiert, d'autre part, que l'on s'autorise, à la manière des Banū Mūsā déjà, un traitement algébrique des grandeurs (essentiellement la possibilité de multiplier ou de diviser deux grandeurs et de définir la racine carrée d'une grandeur (surface), et non plus seulement la construire à la règle et au compas), ce que fait du reste Thābit, tant dans le *Traité sur les cadrans solaires*[23] que dans le traité *Sur la mesure des figures planes et solides*, et qu'il théorise partiellement dans le traité *Sur la composition des rapports*[24].

Si, en apparence, *Le Livre des hypothèses* reste parfaitement euclidien, tant dans ses énoncés que dans ses démonstrations, y est cependant sous-jacente une conception plus algébrique des grandeurs, déjà perceptible chez les prédécesseurs géomètres de Thābit, les Banū Mūsā[25]. Cette nouvelle orientation, plus calculatoire, de la géométrie va caractériser un nouveau « style » de démonstration propre à certains géomètres de la première moitié du Xe siècle, dont le petit-fils de Thābit, le géomètre Ibrāhīm ibn Sinān (900-946). Elle conduira ce dernier à se pencher sur un processus, l'analyse, partie intégrante de la pratique des géomètres, mais objet jusque-là

[22] Un triangle est donné d'espèce s'il est semblable à un triangle dont les trois sommets sont donnés, c'est-à-dire s'il est congru, modulo une similitude à un triangle dont les trois sommets sont donnés ; de même un triangle est donné d'espèce et de grandeur s'il est congru, modulo une isométrie, à un triangle dont les trois sommets sont donnés.

[23] R. Morelon, *Thābit Ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*, Paris, Les Belles Lettres, 1987, p. 157-158, 283.

[24] P. Crozet, « Thābit ibn Qurra et la composition des rapports ».

[25] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs*, Londres, 1996, p. 1-137.

parmi eux d'un consensus tacite. Ibn Sinān théorisera, dans son important traité sur *L'Analyse et la synthèse*[26], les nouveaux procédés d'analyse géométrique induits par cette conception plus calculatoire de la géométrie. Ceci l'amènera également à énoncer et à démontrer géométriquement, dans la postérité du *Livre des hypothèses* de Thābit et dans la langue des *Données* d'Euclide, un certain nombre de propositions revenant à transformer des égalités entre grandeurs, ou à éliminer une grandeur inconnue entre deux égalités[27] ; Ibn Sinān fondera, sur des bases strictement euclidiennes (essentiellement la théorie des proportions), la légitimité de ces transformations d'essence algébrique (qui permettent de ramener un certain nombre de problèmes de géométrie à des équations ou des systèmes d'équations entre grandeurs, résolus *more geometrico*, ce qui est possible tant que l'on ne considère que des problèmes plans, constructibles à la règle et au compas). Malgré son apparente modestie, ces développements ultérieurs sont en germe dans le traité de Thābit.

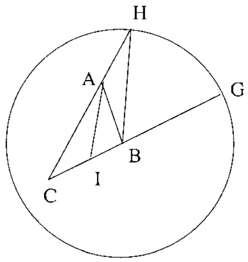
[26] Rashed & Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān : Logique et géométrie*, chap. I : L'analyse et la synthèse, p. 21-228.

[27] Rashed & Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān : Logique et géométrie*, chap. V : L'analyse géométrique : *L'Anthologie de problèmes*, p. 435-759.

NOTE COMPLÉMENTAIRE

Parmi les problèmes de construction non élémentaires, les problèmes 8, 9 et 10 sont trois problèmes avec discussion, dépendant les uns des autres, dont Thābit ne donne qu'incomplètement les diorismes. Ceux-ci sont partiellement évoqués dans des notes marginales du manuscrit de Berlin de la rédaction par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī de ce traité (voir le texte arabe et la traduction).

PROPOSITIONS 8 ET 33 : mener du sommet A d'un triangle ABC une droite qui coupe $[BC]$ en I tel que $\frac{AI}{IC}=\frac{d}{e}$.



Construction de la droite cherchée : soit G tel que $\frac{BG}{BC}=\frac{d}{e}=k$, $\mathscr{C}$ le cercle de centre B et de rayon BG, si la demi-droite $[CA)$ coupe le cercle en H, soit $(AI) \mathbin{//} (BH)$, AI est la droite cherchée.

Démonstration : $\frac{AI}{IC}=\frac{BH}{BC}=\frac{BG}{BC}=\frac{d}{e}$.

Pour que le problème ait une solution, il faut donc que la droite AC coupe le cercle $\mathscr{C}$ ou lui soit tangente. On pourrait préciser ainsi cette discussion : si J est le projeté orthogonal de B sur AC, il faut et il suffit, pour que la droite (AC) coupe le cercle, que $BJ \leq BG = k \cdot BC$, soit $\sin \hat{C} \leq k$.

Il faut en outre, si l'on veut que I appartienne au segment $[BC]$, que A appartienne au segment $[CH]$ et donc que la demi-droite $[CA)$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ à l'extérieur du segment $[CA]$. Donc :

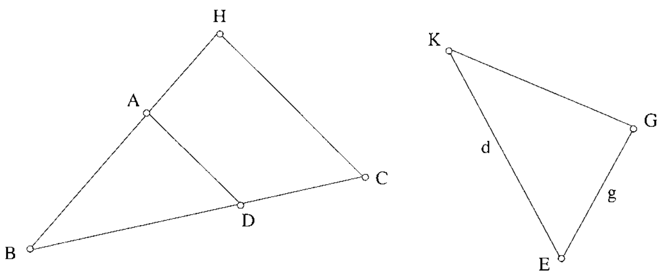
– si $k \geq 1$, la droite (AC) coupe le cercle $\mathscr{C}$ et le point C est intérieur au cercle $\mathscr{C}$ (ou sur le cercle $\mathscr{C}$) ; si le point A est intérieur au cercle $\mathscr{C}$ (ou sur le cercle $\mathscr{C}$), *i. e.* si $BA \leq k \cdot BC$, le problème a une solution unique (éventuellement confondue avec la droite AB) et si le point A est extérieur au cercle $\mathscr{C}$ le problème n'a pas de solution ;

– si $\sin \hat{C} \leq k < 1$, la droite (AC) coupe le cercle $\mathscr{C}$, le point C est extérieur au cercle $\mathscr{C}$; le point A est donc à l'intérieur de l'un ou l'autre des deux angles opposés par le sommet délimités par les tangentes menées du point C au cercle $\mathscr{C}$ et dont l'un des deux contient le cercle $\mathscr{C}$; si le point A est intérieur au cercle $\mathscr{C}$ (ou sur le cercle $\mathscr{C}$), *i. e.* si $BA \leq k \cdot BC$, le problème a une solution unique (éventuellement confondue avec la droite AB) ; si le point A est dans le triangle curviligne délimité par ces tangentes et la circonférence du cercle, le problème a deux solutions, et si le point A est extérieur à ce triangle et au cercle $\mathscr{C}$ le problème n'a pas de solution ;

– si $k < \sin \hat{C}$, la droite (AC) ne coupe pas le cercle $\mathscr{C}$ et le problème n'a pas de solution.

Ce problème fait également l'objet de la proposition 33 : mener du sommet A d'un triangle ABC une droite qui coupe $[BC]$ en D tel que $\frac{AD}{DB} = \frac{g}{d}$ (les rôles des points B et C sont intervertis) ; Thābit en donne une autre solution.

Construction du point cherché : on construit un triangle EKG tel que $G\hat{K}E = A\hat{B}C$, $KE = d$, $EG = g$, puis un triangle CBH semblable au triangle EKG. La parallèle à HC issue de A coupe BC en D.

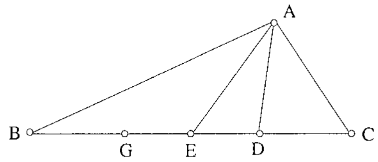


Démonstration : $[CBH \text{ et } EKG \text{ semblables}] \Rightarrow [\frac{HC}{CB} = \frac{GE}{EK} = \frac{g}{d}]$,

$$[(AD) \,//\, (HC)] \Rightarrow [\frac{AD}{DB} = \frac{HC}{CB} = \frac{g}{d}].$$

Pour que la construction du triangle EKG soit possible, il faut que $\sin \hat{B} < k = \frac{g}{d}$ (on retrouve la condition nécessaire précédente) ; il faudrait en outre que $BA < BH$ pour que le point D appartienne au segment $[AC]$, condition moins facile à interpréter géométriquement que celle donnée par la première méthode.

PROPOSITION 9 : mener du sommet A d'un triangle ABC tel que $BC > AC$ une droite qui coupe $[BC]$ en D tel que $AD + DC = BD$.

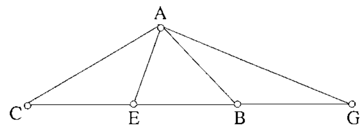


Construction de la droite cherchée : E milieu de $[BC]$, $D \in [EC]$ tel que $AD = 2DE$ (proposition 8), AD est la droite cherchée.

Démonstration : soit G le symétrique de D par rapport à E,
$[EG = ED$ et $EC = EB] \Rightarrow [BD = CG]$,
$[AD = 2DE = DG$ et $BD = CG] \Rightarrow [AD + DC = BD]$.

Le diorisme ($BC > AC$) est posé dans l'énoncé du problème, c'est une condition suffisante, puisque dans ce cas $k = \frac{AD}{DE} = 2$, le cercle $\mathscr{C}$ de la proposition 8 est alors le cercle de centre C et de rayon CB et le point A est intérieur à ce cercle.

PROPOSITION 10 (6) : (problème avec discussion) : mener du sommet A d'un triangle ABC une droite qui coupe $[BC]$ en E tel que $AE + EC = EB + BA$.



Construction du point cherché : G point de la demi-droite opposée à $[BC)$ tel que $BG = AB$, E point du segment $[GC]$ tel que $AE + EC = EG$ (proposition 9).

Démonstration : $AE + EC = EG = EB + BA$.

Thābit n'évoque pas le diorisme. La construction du point E est possible puisque alors $GC = GB + BC = AB + BC > AC$, diorisme de la proposition 9. Il faut en outre que E appartienne au segment $[BC]$ et non au segment $[BG]$. On peut préciser cette discussion : soit I le milieu de $[CG]$, E a été construit tel que $E \in [CI]$ et $AE = 2EI$ (cf. proposition 9) ; une condition suffisante pour que E appartienne au segment $[BC]$ serait alors que $CI < CB$, soit $CB + BA = CG < 2CB$ et donc $BA < BC$.

ÉDITION DU TEXTE

Nous avons du *Livre des hypothèses* un seul manuscrit (Aya Sofya 4832, fol. 35^{v}-39^{r}, 46) ; la numérotation des folios est postérieure à une interversion de ceux-ci : le folio 46 doit être intercalé entre les folios 35 et 36. Nous avons également, comme nous l'avons déjà signalé, une rédaction de ce texte par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī ; une dizaine de manuscrits de cette rédaction nous ont été conservés[28]. Une édition non critique de la rédaction de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī du *Livre des hypothèses* a été faite à Hyderabad (1940).

La collection Aya Sofya 4832, décrite par R. Rashed[29], antérieure au VI^{e}/XII^{e} siècle, date vraisemblablement du XI^{e} siècle ; les folios sont de dimensions 27,6 × 12 cm. Elle contient, outre *Le Livre des hypothèses*, divers autres traités de Thābit copiés à la suite les uns des autres :

Comment faut-il se comporter pour obtenir ce qu'on recherche de notions géométriques (fol. 1^{r}-4^{r}) ;

Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale (fol. 4^{r}-26^{r}) ;

La Mesure de la parabole (fol. 26^{v}-35^{v})[30] ;

Épître sur la preuve attribuée à Socrate concernant le carré et sa diagonale (fol. 39^{r}-41^{r}) ;

Sur la mesure des figures planes et solides (fol. 41^{r}-44^{r}) ;

La figure secteur (fol. 44^{r}-45^{v}, 47^{r}-49^{v}) ;

Présentation des orbes <des astres>, de leur disposition, du nombre de leurs mouvements et de la valeur de leur progression (fol. 50^{r}-51^{r}) ;

Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent (fol. 51^{r}-52^{r}) ;

L'Almageste simplifié (fol. 52^{r}-53^{v}) ;

Partie du discours de Thābit ibn Qurra sur l'astronomie (fol. 53^{v}-54^{r})[31].

[28] F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schriftums*, vol. V, Leyde, 1974, p. 271.

[29] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 147.

[30] Ce traité, ainsi que le précédent a été édité par R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 499-673, p. 188-271.

[31] Ce traité a été édité par R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. IV, p. 742-765. Les trois traités d'astronomie ont été édités par R. Morelon, *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*, p. 68-82.

Le texte du traité est écrit d'une écriture très lisible en *naskhī* souvent dépourvue de points diacritiques.

Nous indiquons entre parenthèses le numéro des propositions dans la rédaction de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (mss Berlin, Qu 1867, fol. 151^{v}-155^{v} ; Paris, BN 2467, fol. 68^{v}-72^{v} ; Leyde, Or 14, p. 470-487).

TEXTE ET TRADUCTION

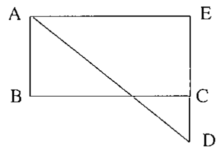
Le Livre des hypothèses de Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī

Kitāb al-Mafrūḍāt li-Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux,
à Dieu l'omnipotence

Le Livre des hypothèses de Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī

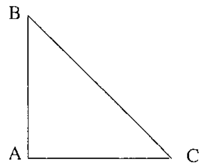
– **1 (15)** – Pour toute ligne droite connue, telle que l'on mène de ses deux extrémités, à angles droits et dans deux directions différentes, deux lignes droites connues, puis que l'on joint les extrémités des deux droites ainsi menées par une ligne droite, celle-ci est connue.



Exemple : *BC* est connue et droite, on a mené à ses deux extrémités, à partir des points *B* et *C*, deux lignes droites connues, *BA* et *CD*, dans deux directions différentes et à angles droits, on a joint leurs extrémités par la droite *AD*, je dis que *AD* est connue.

Démonstration : menons du point *A* une droite parallèle à la droite *BC*, prolongeons *CD* jusqu'à ce qu'elle la rencontre au point *E* ; la surface *CA* est alors un parallélogramme et *AE* est égale à *BC* ; *BC* est connue, *AE* est donc connue ; *CE* est égale à *AB*, *AB* est connue, *EC* est donc connue ; *CD* est connue, le tout, *ED* est donc connu[1] ; mais *EA* était connue et l'angle *AED* est droit, la droite *AD* est donc connue[2]. C'est ce que nous voulions démontrer[3].

– **2 (16)** – Pour tout triangle rectangle isocèle dont un des côtés est connu, les côtés restants sont connus[4].



Exemple : le triangle *ABC* est rectangle isocèle et le côté *BC* en est connu, je dis que chacun des deux côtés *AB* et *AC* est connu.

Démonstration : la droite *AB* est égale à la droite *AC*, le carré de *AB* est donc égal au carré de *AC* ; le carré de *BC* est égal à <la somme> des carrés de *AB* et de *AC*, le

[1] Euclide, *Les Données*, proposition 3.

[2] Lemme 1 : *si deux cotés d'un triangle rectangle sont connus, le troisième côté est connu*, démontré dans la proposition 3.

[3] Ce théorème est encore vrai si *AB* et *CD* sont d'un même côté de (*BC*) ; simplement *ED* n'est plus la somme des deux droites *AB* et *CD* mais leur différence (*Les Données*, proposition 4).

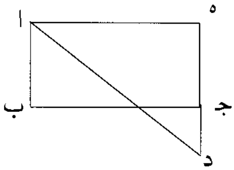
[4] Proposition non démontrée et qualifiée d'évidente par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī dans sa rédaction du *Livre des hypothèses*.

٣٥ - ظ

بسم الله الرحمن الرحيم القدرة لله

كتاب المفروضات لثابت بن قرة الحراني

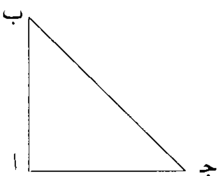
– آ – كلّ خطّ مستقيم معلوم يخرج من طرفيه خطّان في جهتين مختلفتين مستقيمان معلومان على زاويتين قائمتين، ثم يوصل بين طرفي الخطّين المخرجين بخطّ مستقيم، فإنه معلوم.



مثاله: أن ب جـ معلوم مستقيم، وقد خرج من طرفيه من نقطتي ب جـ خطّا ب ا جـ د مستقيمان معلومان في جهتين مختلفتين على زاويتين قائمتين، وقد وصل ما بين أطرافهما بخطّ ا د، فأقول: إن ا د معلوم.

برهانه: أنّا نخرج من نقطة آ خطًّا موازيًا لخطّ ب جـ، ونُخرج جـ د على استقامة، حتى يلقاه على نقطة ة، فسطح جـ ا متوازي الأضلاع، فـ ا ه مثل ب جـ؛ وب جـ معلوم، فـ ا ه معلوم؛ وجـ ه مثل ا ب، وا ب معلوم، فـ ه جـ معلوم؛ وجـ د معلوم، فجميع ه د معلوم؛ وقد كان ه ا معلومًا، وزاوية ا ه د قائمة، فخطّ ا د معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– بَ – كلّ مثلّث قائم الزاوية متساوي الساقين يكون ضلع من أضلاعه معلومًا، فإن باقي أضلاعه معلوم.



مثال ذلك: أن مثلّث ا ب جـ قائم الزاوية متساوي الساقين، وضلع ب جـ منه معلوم، فأقول: إن كلّ واحد من ضلعي ا ب ا جـ معلوم.

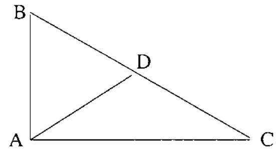
برهانه: أن خطّ ا ب مثل خطّ ا جـ، فمربّع ا ب مثل مربّع ا جـ؛ ومربّع ب جـ مساوٍ لمربّعي ا ب ا جـ،

carré de AB est donc la moitié du carré de BC ; or le carré de BC est connu, le carré de AB est donc connu et AB est connue[5] ; AC est égale à AB, AC est donc connue.

De même, si AB est connue, BC est connue car le carré de AB est la moitié du carré [46ʳ] de BC ; le carré de AB est connu, la moitié du carré de BC est donc connue et BC est connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **3 (17)** – Pour tout triangle rectangle dont l'un des deux angles restants est un tiers de droit et l'autre deux tiers de droit et dont un des côtés est connu, les côtés restants sont connus.

Exemple : le triangle ABC est rectangle et l'angle droit en est l'angle BAC, l'angle ACB est un tiers de droit et l'angle ABC est deux tiers de droit, je dis que si un des côtés du triangle ABC est connu, les côtés restants sont connus.



Démonstration : posons d'abord BC connue et montrons que chacun des deux côtés AB et AC est connu. Construisons au point A, à partir de la droite BA, l'angle BAD de deux tiers de droit, il reste l'angle ADB deux tiers de droit, le triangle ABD est alors équilatéral et la droite BD est égale à la droite DA. La droite DC est égale à la droite AD car l'angle BAC est droit et l'angle BAD est deux tiers de droit, il reste donc l'angle DAC un tiers de droit, or l'angle ACD est un tiers de droit, l'angle DAC est donc égal à l'angle ACD ; la droite BD est donc égale à la droite DC. La droite AB est égale à la droite BD, la droite AB est donc la moitié de la droite BC ; mais BC est connue, la droite AB est donc connue. Ôtons du carré de BC le carré de AB, il reste le carré de AC connu, AC est donc connue[6].

Posons ensuite AC connue, je dis que chacune <des droites> AB et BC est connue. On a démontré que AB est la moitié de BC, le carré de AB est donc le quart du carré de BC ; le carré de BC est égal à <la somme> des carrés de AB et de AC, le carré de AC est donc les trois quarts du carré de BC. Ajoutons alors au carré connu de AC son tiers – son tiers est connu – tout cela devient le carré de BC, le carré de BC est donc connu et BC est connue. AB est la moitié de BC et BC est connue, AB est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

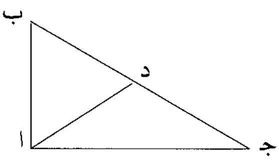
[5] Euclide, *Les Données*, proposition 55.

[6] C'est la démonstration du lemme 1. On trouve à la suite de cela, dans la rédaction d'al-Ṭūsī : « Puis que *AB* soit connue, *CB* son double est alors connu et à partir de là *AC* devient connue. »

فمربّع ا ب نصف مربّع ب جـ؛ ومربّع ب جـ معلوم، فمربّع ا ب معلوم، فـ ا ب معلوم، وا جـ مثل ا ب، فـ ا جـ معلوم.

وكذلك إن كان ا ب معلومًا، فإن ب جـ معلوم، وذلك أن مربّع ا ب نصف مربّع / ب جـ؛ ومربّع ا ب معلوم، فنصف مربّع ب جـ معلوم، فـ ب جـ ٤٦ - و معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- جـ - كلّ مثلّث قائم الزاوية، تكون إحدى زاويتيه الباقيتين - وحدها - ثلث قائمة والأخرى ثلثي قائمة ويكون ضلع من أضلاعه معلومًا، فإن باقي أضلاعه معلوم.



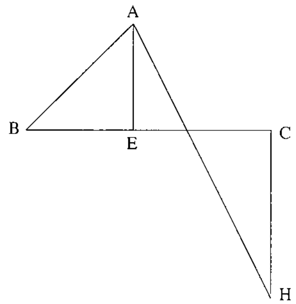
مثاله: أن مثلّث ا ب جـ قائم الزاوية والزاوية القائمة منه زاوية ب ا جـ، وزاوية ا جـ ب ثلث قائمة وزاوية ا ب جـ ثلثي قائمة، فأقول: إنه، إن كان ضلع من أضلاع مثلّث ا ب جـ وحده معلومًا، فإن باقي أضلاعه معلوم.

برهانه: أن نجعل أولاً ب جـ معلومًا، ونبيّن أن كلّ واحد من ضلعي ا ب ا جـ معلوم. فنعمل على نقطة ا من خطّ ب ا زاوية ب ا د ثلثي قائمة، فتبقى زاوية ا د ب ثلثي قائمة، فمثلّث ا ب د متساوي الأضلاع، فخطّ ب د مثل خطّ د ا. وخطّ د جـ مثل خطّ ا د، لأن زاوية ب ا جـ قائمة وزاوية ب ا د ثلثا قائمة، فتبقى زاوية د ا جـ ثلث قائمة، وزاوية ا جـ د ثلث قائمة، فزاوية د ا جـ مساوية لزاوية ا جـ د. فخطّ ب د مثل خطّ د جـ. وخطّ ا ب مثل خطّ ب د، فخطّ ا ب نصف خطّ ب جـ. وب جـ معلوم، فخطّ ا ب معلوم. فنسقط من مربّع ب جـ مربّع ا ب، فيبقى مربّع ا جـ معلومًا فـ ا جـ معلوم.

ثم نجعل ا جـ معلومًا، فأقول: إن كلّ واحد من ا ب ب جـ معلوم. وقد تبيّن أن ا ب نصف ب جـ، فمربّع ا ب ربع مربّع ب جـ. ومربّع ب جـ مساوٍ لمربّعي ا ب ا جـ، فمربّع ا جـ ثلاثة أرباع مربّع ب جـ. فنزيد على مربّع ا جـ المعلوم ثُلثه، وثُلثه معلوم، فيصير جميع ذلك ‹مربّع› ب جـ، فمربّع ب جـ معلوم فـ ب جـ معلوم. وا ب نصف ب جـ وب جـ معلوم، فـ ا ب معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

21 فـ ا جـ معلوم: نجد بعد ذلك في تحرير نصير الدين الطوسي «ثم ليكن ا ب معلومًا فيكون جـ ب ضعفه ‹معلومًا› ويصير منهما ا جـ معلومًا».

– **4 (18)** – Pour toute ligne droite connue, telle que l'on mène à ses deux extrémités, dans deux directions différentes, deux lignes droites connues, l'une selon un demi angle droit et l'autre selon un angle droit, puis que l'on joint leurs extrémités par une droite, la droite de jonction est connue. Il en va de même que la droite menée fasse un demi angle droit ou deux tiers d'angle droit ou un tiers d'angle droit[7].



Exemple : la ligne BC est droite et connue, on a mené à ses deux extrémités, des points B et C, deux lignes droites connues, BA et CH – BA selon un demi angle droit et CH selon un angle droit et chacune <des droites> CH et BA est connue ; on a joint leurs extrémités par la droite AH ; je dis que AH est connue.

Démonstration : menons AE, hauteur du triangle ABC, l'angle AEB est alors droit ; l'angle ABE est un demi angle droit, il reste l'angle BAE un demi angle droit ; le triangle AEB est donc rectangle isocèle et l'un de ses côtés, AB, est connu, AE est donc connue et BE est connue[8]. BC était connue, il reste donc EC connue. Alors AE est connue, EC est connue, CH est connue et chacune <des droites> EA et CH tombe sur EC selon un angle droit, la droite AH est donc connue[9].

De même, si l'angle ABC est deux tiers d'angle droit ou un tiers d'angle droit, nous menons EA, hauteur du triangle ABC ; le triangle ABE est alors rectangle et ses deux angles restants sont, l'un deux tiers d'angle droit et l'autre un tiers d'angle droit, le côté AB en est connu, chacune <des droites> AE et BE est donc connue[10]. Or BC est connue, BE est connue, EC est donc connue. Chacune <des droites> AE et CH est connue et elles tombent sur EC selon des angles droits, la droite AH est donc connue[11]. C'est ce que nous voulions démontrer.

[7] Cette proposition généralise la proposition 1 ; elle est encore vraie si l'angle non droit est quelconque, simplement on ne peut plus la déduire des propositions 2 ou 3 ; elle est également vraie si AB et CH sont d'un même côté de (BC).

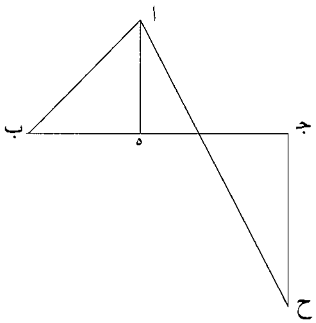
[8] Proposition 2.

[9] Proposition 1.

[10] Proposition 3.

[11] Proposition 1.

– د – كلّ خطّ مستقيم معلوم يخرج من طرفيه خطّان مستقيمان معلومان في جهتين مختلفتين، أحدهما على نصف زاوية قائمة والآخر على زاوية قائمة، ثم يوصل ما بين أطرافها بخطّ، فإن الخطّ الموصول معلوم. وكذلك إن كان الخطّ المخرج على نصف قائمة أو على ثلثي قائمة أو على ثلث قائمة.



مثاله: أن خطّ ب جـ مستقيم معلوم، قد خرج من طرفيه من نقطتي ب جـ خطّا ب ا جـ ح مستقيمان معلومان، وب ا على نصف قائمة وجـ ح على زاوية قائمة وكلّ واحد من جـ ح ب ا معلوم، وقد وصل ما بين أطرافهما بخطّ ا ح؛ فأقول: إن ا ح معلوم.

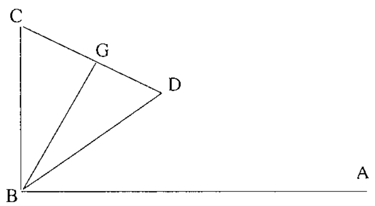
برهانه: أنا نخرج عمود مثلّث ا ب جـ، وهو ا ه، فزاوية ا ه ب قائمة؛ وزاوية ا ب ه نصف قائمة، فتبقى زاوية ب ا ه نصف قائمة، فمثلّث ا ه ب قائم الزاوية متساوي الساقين، وضلع من أضلاعه معلوم، وهو ا ب، فـ ا ه معلوم وب ه معلوم. وقد كان ب جـ معلوماً، فيبقى ه جـ معلوماً. فـ ا ه معلوم وه جـ معلوم وجـ ح معلوم وكلّ واحد من ه ا جـ ح قائم على ه جـ على زاوية قائمة، فخطّ ا ح معلوم.

وكذلك إن كانت زاوية ا ب جـ ثلثي قائمة أو ثلث قائمة، فنخرج عمود مثلّث ا ب جـ، وهو ه ا، فمثلّث ا ب ه قائم الزاوية وزاويتاه الباقيتان إحداهما ثلثا قائمة والأخرى ثلث قائمة وضلع ا ب منه معلوم، فكلّ واحد من ا ه ب ه معلوم. وب جـ معلوم وب ه معلوم فـ ه جـ معلوم. وكلّ واحد من ا ه جـ ح معلوم، وهما قائمان على ه جـ على زوايا قائمة، فخطّ ا ح معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 معلوم: في الهامش – 2 الآخر: الأخرى – 13 ا ب جـ: ا ب ز – 16 وب ه معلوم: في الهامش – 20 ا ب جـ: ا ب ز.

– **5 (1)** – Nous voulons partager l'angle droit en trois parties égales[12].

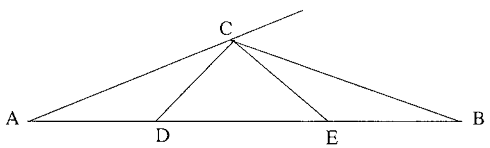
Posons l'angle droit l'angle ABC, nous voulons le partager en trois parties égales.



Construisons sur la droite BC un triangle équilatéral, le triangle DBC, partageons l'angle DBC en deux moitiés par la droite BG, je dis que nous avons partagé l'angle ABC comme nous le voulions.

Démonstration : le triangle DBC est équilatéral, chacun de ses angles est donc deux tiers de droit, l'angle DBC est donc deux tiers de droit ; l'angle ABC est droit, il reste l'angle ABD un tiers de droit ; chacun des deux angles DBG et GBC est égal à l'angle ABD, nous avons donc partagé l'angle ABC en trois parties égales, c'est ce que nous voulions démontrer. [46v]

– **6 (2)** – Nous voulons montrer comment partager une droite connue en trois parties telles que <la somme> des carrés des deux parties qui sont aux extrémités soit égale au carré provenant de la droite médiane.

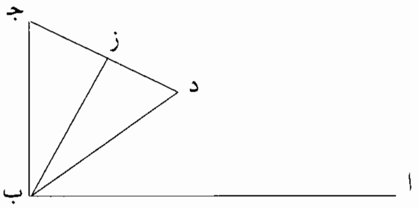


Exemple : posons la droite AB et construisons en son point A un quart d'angle droit ainsi qu'un quart d'angle droit au point B, ce sont les deux angles CAB et ABC. Construisons également au point C, à partir de la droite CA, un quart de droit, et en ce point également, à partir de la droite CB, un

[12] Ce problème est un cas particulier élémentaire du problème de la trisection de l'angle, auquel Thābit a consacré un traité (R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, Londres, al-Furqān, 2005, p. 564-573). Ce problème a également été résolu par les Banū Mūsā dans leur traité *Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques*, dans le cas d'un angle non droit (R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 128-132).

– ه – نريد أن نقسم الزاوية القائمة بثلاثة أقسام متساوية.

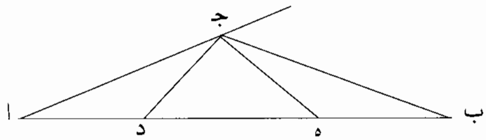
فنجعل الزاوية القائمة زاوية ا ب جـ، ونريد أن نقسمها بثلاثة أقسام متساوية.



فنعمل على خطّ ب جـ مثلّثًا متساوي الأضلاع، وهو مثلّث د ب جـ، ونقسم زاوية د ب جـ بنصفين بخطّ ب ز؛ فأقول: إنّا قسمنا زاوية ا ب جـ كما أردنا.

برهانه: أن مثلّث د ب جـ متساوي الأضلاع، فكلّ واحدة من زواياه ثلثا قائمة، فزاوية د ب جـ ثلثا قائمة. وزاوية ا ب جـ قائمة، فتبقى زاوية ا ب د ثلث قائمة؛ وكلّ واحدة من زاويتي د ب ز ز ب جـ مساوية لزاوية ا ب د، فقد قسمنا زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– و – نريد أن نبيّن كيف نقسم خطًّا معلومًا بثلاثة أقسام يكون مربّعا القسمين اللذين في الطرفين مساويين للمربّع الكائن من الخطّ الأوسط. ٤٦-ظ



مثاله: أن نفرض خطّ ا ب ونعمل على نقطة ا منه ربع زاوية قائمة، وعلى نقطة ب أيضًا ربع زاوية قائمة، وهما زاويتا جـ ا ب ا ب جـ. ونعمل على نقطة جـ من خطّ جـ ا أيضًا ربع قائمة وعلى هذه النقطة من خطّ جـ ب

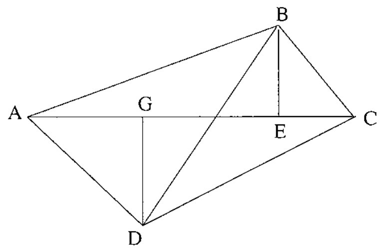
7 الأضلاع: في الهامش – 13 القسمين: كتب أولاً «الخطّين» ثم رجع وكتب «القسمين» فوقها / الطرفين: الطرف – 16 وعلى هذه: مكررة.

quart de droit, ce sont les deux angles *ACD* et *BCE* ; je dis que nous avons partagé la droite *AB* comme nous le voulions[13].

Démonstration : chacun des deux angles *CAB* et *CBA* est un quart de droit, il reste l'angle *ACB* un droit et demi. Chacun des deux angles *ACD* et *BCE* est un quart de droit, il reste l'angle *DCE* droit, le carré de *DE* est donc égal à <la somme> des carrés de *DC* et de *CE*. Mais *DC* est égale à *DA* et *CE* est égale à *EB*, le carré de *DE* est donc égal à <la somme> des carrés de *AD* et de *EB*. C'est ce que nous voulions faire[14].

– **7 (19)** – Pour tout quadrilatère dont chacun des côtés est connu et dont l'une des deux diagonales est connue, l'autre diagonale est connue.

Exemple : la figure *ABCD* a quatre côtés dont chacun est connu, et l'une des deux diagonales, *AC*, est connue ; je dis que l'autre diagonale, *BD*, est connue.



Démonstration : le triangle *ABC* a ses côtés connus, sa hauteur est donc connue et le pied de sa hauteur est connu ; sa hauteur est *EB* et le pied de sa hauteur est *AE* ou *EC*, chacune <des droites> *BE*, *EA* et *EC* est donc connue. De même aussi la hauteur du triangle *DCA* est connue et le pied de sa hauteur est connu ; sa hauteur est *DG*, le pied de sa hauteur est donc *AG* ou *GC* ; chacune <des droites> *DG*, *AG* et *GC* est alors connue. La droite *AE* est connue et la droite *AG* est connue, il reste la droite *EG* connue. Chacune des deux droites *BE* et *GD* est connue et elles sont perpendiculaires à *EG*, la droite *BD* est donc connue, car pour toute droite connue telle que l'on mène de ses deux extrémités des perpendiculaires connues dans deux directions différentes, puis que l'on joint les extrémités des deux droites ainsi menées par une droite, celle-ci est connue[15]. C'est ce que nous voulions démontrer.

[13] Thābit donne une solution de ce problème indéterminé dans le cas particulier où *D* et *E* vérifient l'hypothèse supplémentaire $AD = EB$. On obtiendrait toutes les solutions par une construction analogue, en posant $C\hat{A}B = A\hat{C}D$, $C\hat{B}A = B\hat{C}E$ et $C\hat{A}B + C\hat{B}A = \frac{1}{2}\hat{d}$.

[14] Conclusion d'un problème : « c'est ce que nous voulions faire », la conclusion d'un théorème étant plutôt « c'est ce que nous voulions démontrer » sans que cette différence soit toujours systématiquement marquée chez Thābit.

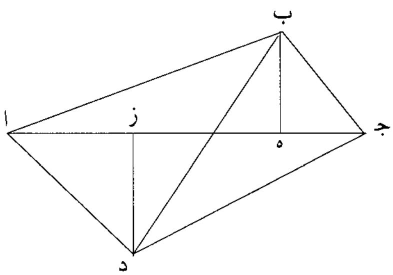
[15] Proposition 1.

أيضًا ربع قائمة، وهما زاويتا ا جـ د ب جـ ه. فأقول: إنّا قد قسمنا خطّ ا ب على ما أردنا.

برهان ذلك: أن زاويتي جـ ا ب جـ ب ا كلّ واحدة منهما ربع قائمة، فتبقى زاوية ا جـ ب قائمة ونصف. وكلّ واحدة من زاويتي ا جـ د ب جـ ه ربع قائمة، فبقيت زاوية د جـ ه قائمة، فمربّع د ه مساوٍ لمربّعي د جـ جـ ه. ود جـ مثل د ا وجـ ه مثل ه ب، فمربّع د ه مساوٍ لمربّعي ا د ه ب. وذلك ما أردنا أن نعمل.

– ز – كلّ شكل له أربعة أضلاع، كلّ واحد من أضلاعه معلوم وأحد قطريه معلوم، فالقطر الآخر معلوم.

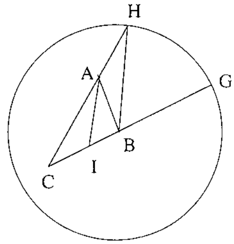
مثاله: أن شكل ا ب جـ د [معلوم] له أربعة أضلاع كلّ واحد منها معلوم وأحد قطريه، وهو ا جـ، معلوم، فأقول: إن القطر الآخر، وهو ب د، معلوم.



برهانه: أن مثلّث ا ب جـ معلوم الأضلاع، فعموده معلوم ومسقط حجره معلوم، وعموده هو ه ب ومسقط حجره ا ه وه جـ، فكلّ واحد من ب ه ا ه ه جـ معلوم. وكذلك أيضًا عمود مثلّث د جـ ا ‹معلوم› ومسقط حجره معلوم، وعموده د ز فمسقط حجره ا ز وز جـ، فكلّ واحد من د ز ا ز ز جـ معلوم. وخطّ ا ه معلوم وخطّ ا ز معلوم، فيبقى خطّ ه ز معلومًا. وكلّ واحد من خطّي ب ه ز د معلوم، وهما عمودان على ه ز، فخطّ ب د معلوم، لأن كلّ خطّ معلوم يخرج من طرفيه عمودان معلومان في جهتين مختلفتين ثم يوصل ما بين طرفي الخطّين المخرجين بخطّ فهو معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

8 وأحد: فأحد – 15 ز جـ (الثانية): د جـ.

– **8 (3)** – Nous voulons montrer comment mener dans un triangle, d'un angle connu à la droite qui sous-tend l'angle, une ligne droite telle que le rapport de la droite ainsi menée à l'une des deux parties de la base soit un rapport connu[16].



Posons le triangle le triangle ABC et le rapport connu le rapport de d à e. Nous voulons mener dans le triangle ABC, à partir de l'angle BAC une ligne droite qui partage la droite BC en deux parties telles que le rapport de la droite ainsi menée à l'une des deux parties de la base soit égal au rapport de la droite d à la droite e. Que la partie de la base soit celle qui est contiguë au côté AC.

Joignons au point B une droite, BG, et posons son rapport à la droite BC égal au rapport de la droite d à la droite e ; posons le point B centre et traçons, avec pour distance BG, le cercle GH ; prolongeons la droite CA, jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence du cercle, c'est la droite CAH[17]. Joignons le point H au point B par la droite BH et menons du point A une droite parallèle à la droite BH, c'est IA ; je dis que le rapport de IA à IC est égal au rapport de la droite d à la droite e.

Démonstration : le rapport de la droite BG à la droite BC est égal au rapport de d à e ; BG est égale à BH, le rapport de la droite BH à la droite BC est donc égal au rapport de d à e. Mais le rapport de BH à BC est égal au rapport de IA à IC, le rapport de IA à IC est donc égal au rapport de d à e. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **9 (5)** – Si l'on a un triangle dont la base est plus longue que l'un des deux côtés, nous voulons montrer comment mener de l'angle que sous-tend la base une droite dont la longueur, avec la partie de la base qui est contiguë au côté le plus court, soit égale à la partie restante[18].

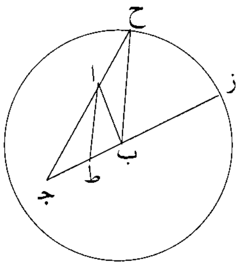
Que le triangle soit le triangle ABC et que sa base, BC, soit plus longue que le côté AC. Nous voulons mener de l'angle BAC vers BC une droite telle que sa longueur, avec la longueur de la partie de la base qui est contiguë au côté AC, soit égale à la partie restante de la base.

[16] Problème avec discussion dont Thābit n'évoque pas le diorisme, voir la note complémentaire *supra*.

[17] On trouve dans le manuscrit de Berlin de la rédaction d'al-Ṭūsī de ce traité la glose marginale suivante : « il faut que la droite AC, après avoir été prolongée du côté de A, rencontre ce cercle, soit en étant tangente soit en étant sécante ; sinon le problème est impossible » (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 151^{v}).

[18] Problème avec discussion dont une condition suffisante à l'existence de solutions ($BC > AC$) est posée dans l'énoncé, selon la formulation classique.

– ح – نريد أن نبيّن كيف نخرج في مثلّث من زاوية معلومة خطًّا مستقيمًا إلى الخطّ الذي يوتر الزاوية وتكون نسبة الخطّ المخرج إلى أحد قسمي القاعدة نسبة معلومة.



فنجعل المثلّث مثلّث ا ب جـ والنسبة المعلومة نسبة د إلى ه. ونريد أن نخرج في مثلّث ا ب جـ من زاوية ب ا جـ خطًّا مستقيمًا يقسم خطّ ب جـ بقسمين، تكون نسبة الخطّ المخرج إلى أحد قسمي القاعدة كنسبة خطّ د إلى خطّ ه. ولتكن قسمة القاعدة التي يلي ضلع ا جـ.

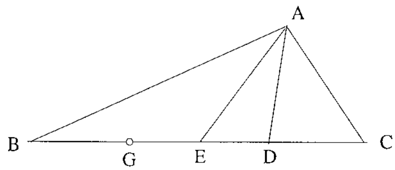
فنصل بنقطة ب خطًّا، ونجعل نسبته إلى خطّ ب جـ كنسبة خطّ د إلى خطّ ه، وهو ب ز. ونجعل نقطة ب مركزاً وندير ببعد ب ز دائرة ز ح. ونخرج خطّ جـ ا على استقامة حتى يلقى الخطّ المحيط بالدائرة، وهو خطّ جـ ا ح. ونصل نقطة ح بنقطة ب بخطّ ب ح، ونخرج من نقطة ا خطًّا موازيًا لخطّ ب ح، وهو ط ا، فأقول: إن نسبة ط ا إلى ط جـ كنسبة خطّ د إلى خطّ ه.

برهانه: أن نسبة خطّ ب ز إلى خطّ ب جـ كنسبة د إلى ه، وب ز مثل ب ح، فنسبة خطّ ب ح إلى خطّ ب جـ كنسبة د إلى ه. ونسبة ب ح إلى ب جـ كنسبة ط ا إلى ط جـ، فنسبة ط ا إلى ط جـ كنسبة د إلى ه. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– ط – نريد أن نبيّن إذا كان مثلّث قاعدته أطول من أحد ضلعيه، فكيف يخرج من الزاوية التي يوترها القاعدة خطّ طوله مع قسم القاعدة الذي يلي القسم الأقصر مساوٍ للقسم الباقي.

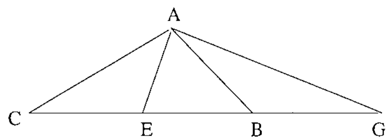
فليكن المثلّث مثلّث ا ب جـ وقاعدته، وهي ب جـ، أطول من ضلع ا جـ. ونريد أن نخرج من زاوية ب ا جـ خطًّا إلى ب جـ، يكون طوله مع طول قسم القاعدة الذي يلي ضلع ا جـ مثل القسم الباقي من القاعدة.

9 التي: وهو – 12-13 وهو خط جـ ا ح: نجد في تحرير نصير الدين الطوسي في هامش مخطوطة [ق] (ص.١٥١–ظ) هذا التحديد: «يجب أن يلاقي تلك الدائرة خط ا جـ بعد الإخراج من جانب ا إما بالتماس أو التقاطع. وإلا لكانت المسألة مستحيلة» – 25 الذي: التي.



Partageons la droite BC en deux moitiés au point E et joignons AE ; menons dans le triangle ACE la droite AD telle qu'elle soit deux fois DE[19], séparons de BE <une droite> égale à ED, c'est EG ; la droite EG est alors égale à ED et GD est le double de DE ; or AD est le double de ED, GD est donc égale à AD ; BE est égale à EC et GE est égale à ED, la droite BG est donc égale à la droite DC. On avait démontré que GD était égale à AD, les deux droites AD et DC, ajoutées, sont donc égales à BD. C'est ce que nous voulions démontrer. [36$^{\mathrm{r}}$]

– **10 (6)** – Nous voulons mener, dans un triangle, de l'un de ses angles à la base, une droite telle que la droite ainsi menée plus l'une des deux parties de la base soit égale à la partie restante de la base plus celui des côtés du triangle qui est contigu à cette partie[20].



Que le triangle soit ABC, nous voulons mener, de l'angle BAC à <la droite> BC, une droite qui la partage en deux parties telles que l'une des deux parties plus la droite ainsi menée soit égale à la partie restante plus, d'entre les côtés du triangle, la droite qui est contiguë à cette partie.

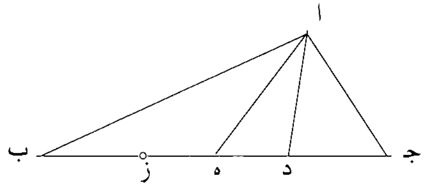
Prolongeons la droite BC et posons BG égale à BA ; menons la droite AG, la base GC est alors plus longue que AC[21] ; dans le triangle AGC, menons la droite AE qui partage la droite GC en deux parties telles que la droite ainsi menée plus la partie de la base qui est contiguë au côté AC soit égale à la partie restante[22], <la somme> des deux droites AE et EC est alors égale à la droite EG ; BG est égale à BA, <la somme> des deux droites AE et EC est donc égale à <la somme> des deux droites EB et BA. C'est ce que nous voulions démontrer.

[19] Proposition 8. Une glose marginale du manuscrit de Berlin de la rédaction d'al-Ṭūsī précise : « cette figure est possible car la droite menée du point C selon ce rapport est égale à BC ; si nous traçons, avec cette distance, un cercle, il est nécessaire que le point A tombe à l'intérieur » (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 152$^{\mathrm{r}}$).

[20] Problème avec discussion dont Thābit n'évoque pas le diorisme.

[21] Condition suffisante de la proposition 9.

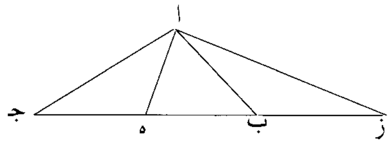
[22] Proposition 9. Il faudrait en outre vérifier que le point E appartient au segment $[BC]$; il suffit pour cela que $BA < BC$ (voir note complémentaire *supra*). Une glose marginale du manuscrit de Berlin de la rédaction d'al-Ṭūsī évoque cette condition : « il n'est pas permis que AE (AD dans le texte) s'applique sur AB ni qu'elle tombe entre B et G (E dans le texte) ; grâce à elle on achève alors la démonstration » (fol. 152$^{\mathrm{r}}$).



فنقسم خطّ ب جـ بنصفين على نقطة ه ونصل ا ه، ونخرج في مثلّث ا جـ ه خطّ ا د ويكون مثلي د ه، ونفصل من ب ه مثل ه د وهو ه ز، فخطّ ه ز مثل ه د، فـ ز د ضعف ه د؛ وا د ضعف ه د، فـ ز د مثل ا د؛ وب ه مثل ه جـ وز ه مثل ه د، فخطّ ب ز مثل خطّ د جـ. وقد كان تبين أن ز د مثل ا د، فخطّا ا د د جـ مجموعين مثل ب د. وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– يَ – نريد أن نخرج في مثلّث، من زاوية من زواياه، خطًّا إلى القاعدة، ويكون ذلك الخطّ المخرج وأحد قسمي القاعدة مثل القسم الباقي من القاعدة والضلع الذي يلي هذا القسم من أضلاع المثلّث. ٣٦ – و

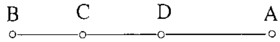
فليكن المثلّث ا ب جـ، ونريد أن نخرج من زاوية ب ا جـ خطًّا إلى ب جـ، يقسمه بقسمين يكون أحد القسمين والخطّ المخرج مثل القسم الباقي والخطّ الذي يلي هذا القسم من أضلاع المثلّث.



فنخرج خطّ ب جـ على استقامة، ونجعل ب ز مثل ب ا، ونخرج خطّ ا ز، فتكون قاعدة ز جـ أطول من ا جـ. ونخرج في مثلّث ا ز جـ خطّ ا ه يقسم خطّ ز جـ بقسمين يكون الخطّ المخرج وقسم القاعدة الذي يلي ضلع ا جـ مثل القسم الباقي، فخطّا ا ه ه جـ مثل خطّ ه ز، وب ز مثل ب ا، فخطّا ا ه ه جـ مثل خطّي ه ب ب ا. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

2 مثلي د ه: نجد في تحرير نصير الدين الطوسي في هامش مخطوطة [ق] (ص. ١٥٢–و) هذا التحديد: «هذه الصورة ممكنة لأن الخط المخرج من نقطة جـ على تلك النسبة مساوٍ لـ ب جـ، وإذا أدرنا (أردنا) ببعده دائرة، فلا محالة نقطة آ يقع داخلها» – 17 مثل القسم الباقي: نجد في تحرير نصير الدين الطوسي في هامش مخطوطة [ق] (ص. ١٥٢–و) هذا التحديد: «ا د لا يجوز أن ينطبق على ا ب ولا أن يقع بين ب ه، وبه يتمّ البرهان، فأعرفه».

– **11 (13)** – Pour toute droite que l'on partage en deux parties différentes, le produit de la droite entière par la différence entre l'une des deux parties et l'autre est égal à la différence entre le carré de l'une et le carré de l'autre[23].

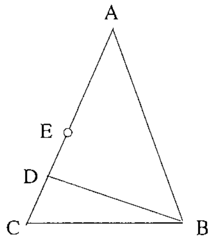


Exemple : la droite AB a été partagée au point C et la droite AC est plus longue que la droite CB ; on a séparé de AC, CD, égale à CB, la différence entre AC et CB est alors la droite AD ; la différence entre le carré de AC et le carré de CB est le carré de AD plus AD par DC deux fois. Je dis que AB par AD est égal au carré de AD plus AD par DC deux fois.

Démonstration : la droite DB a été partagée en deux moitiés au point C et on lui a ajouté AD ; la surface de BA par AD avec le carré de DC est donc égale au carré de AC[24] ; on ôte ce qui est commun, le carré de DC, il reste la surface de BA par AD égale au carré de AD plus AD par DC deux fois. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **12 (22)** – Pour tout triangle isocèle dont chacun des deux côtés est connu et dont l'aire est connue, la base est connue.

Exemple : le triangle ABC est isocèle – la droite AB est égale à la droite AC, chacune d'elles est connue – et son aire est connue, je dis que la base BC est connue.



Démonstration : menons BD, hauteur du triangle ABC relative à AC, partageons la droite AC en deux moitiés au point E. L'aire du triangle ABC est connue, la moitié de la base AC est connue, la hauteur BD est donc connue[25] ; la droite BA est connue, il reste alors la droite AD connue[26] ; mais la droite AC est connue, il reste donc la droite DC connue ; on a démontré que la droite BD est connue, l'angle BDC est droit, la droite BC est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

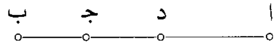
[23] Al-Ṭūsī en déduit que « si deux de ces trois <grandeurs> sont connues, l'autre est également connue » (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 153r).

[24] Euclide, *Éléments*, II.6.

[25] Euclide, *Les Données*, proposition 57.

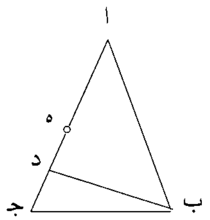
[26] Lemme 1.

– يا – كلّ خطّ يقسم بقسمين مختلفين، فإن ضرب الخطّ كلّه في فضل أحد القسمين على الآخر مثل فضل مربّع أحدهما على مربّع الآخر.



مثاله: أن خطّ ا ب قد قسم على نقطة جـ وخطّ ا جـ أطول من جـ ب، وقد فصل من ا جـ مثل جـ ب، وهو جـ د، ففضل ا جـ على جـ ب خطّ ا د؛ وفضل مربّع ا جـ على مربّع جـ ب هو مربّع ا د وا د في د جـ مرتين. فأقول: إن ا ب في ا د مثل مربّع ا د وا د في د جـ مرتين.
برهانه: أن خطّ د ب قد قسم بنصفين على نقطة جـ وزيد فيه ا د، فسطح ب ا في ا د مع مربّع د جـ مساوٍ لمربّع ا جـ؛ فيسقط المشترك، وهو مربّع د جـ، فبقي سطح ب ا في ا د مثل مربّع ا د وا د في د جـ مرتين. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

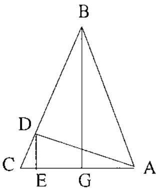
– يب – كلّ مثلّث متساوي الساقين كلّ واحد منهما معلوم، وهو معلوم التكسير، فإن قاعدته معلومة.



مثاله: مثلّث ا ب جـ متساوي الساقين، خطّ ا ب مثل خطّ ا جـ، وكلّ واحد منهما معلوم، وهو معلوم التكسير، فأقول: إن قاعدة ب جـ معلومة.
برهانه: أنا نخرج عمود مثلّث ا ب جـ على ا جـ، وهو ب د، ونقسم خطّ ا جـ بنصفين على نقطة ه؛ فتكسير مثلّث ا ب جـ معلوم ونصف قاعدة ا جـ معلوم، فعمود ب د معلوم؛ وخطّ ب ا معلوم، فبقي خطّ ا د معلومًا؛ وخطّ ا جـ معلوم، فبقي خطّ د جـ معلومًا؛ وخطّ ب د قد تبيّن أنه معلوم، وزاوية ب د جـ قائمة، فخطّ ب جـ معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

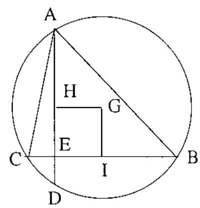
3 جـ: فوق السطر – 9 مرتين: في الهامش.

– **13 (24)** – Le triangle ADC est rectangle et de côtés connus ; on a construit au point A, à partir de la droite AC, un angle égal à l'angle DCA, on prolonge la droite CD jusqu'à ce qu'elle le rencontre <au point B. Je dis que chacune des deux droites AB et BD est connue>[27].



Menons la hauteur du triangle ABC relative à la droite AC, elle la partage en deux moitiés, la hauteur est BG ; menons la hauteur, ED, du triangle ADC ; ED est alors parallèle à la droite BG car l'angle BGC est droit et l'angle DEC est également droit ; dans le triangle BGC on a alors mené DE parallèlement à la droite BG, le rapport de BG à GC est donc égal au rapport de DE à EC ; BG est inconnue, DE est connue, EC est connue[28] et GC est connue, la droite BG est donc connue[29] ; la droite GC est connue, l'angle BGC est droit, la droite BC est donc connue ; la droite CD est connue, la droite BD est donc connue. La droite DA est connue, l'angle BDA est droit, la droite AB est donc connue[30]. On a démontré que la droite BD est connue, chacune <des droites> AB et BD est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **14 (27)** – Un triangle de côtés connus, le triangle ABC, est <inscrit> dans le cercle $ABCD$; nous voulons connaître son diamètre.



Menons la hauteur, AE, du triangle ABC et prolongeons-la jusqu'à la circonférence du cercle ; la hauteur du triangle ABC est alors connue et le pied de la hauteur est connu, puisqu'il est de côtés connus, donc AE est connue, BE est connue et EC est connue. La surface de AE par ED est égale à BE par EC ; BE par EC est connue, AE par ED est donc connue ; AE

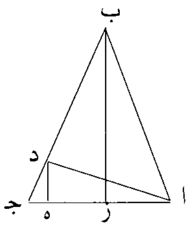
[27] L'énoncé de ce théorème manque (il en va de même des propositions 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35 et 36), seule est donnée l'ecthèse (sous une forme lacunaire). L'énoncé de ce théorème, suggéré par les notations, aurait pu être : pour tout triangle isocèle dont la base est connue, ainsi que la hauteur et le pied de la hauteur relatifs à un des côtés, les côtés sont connus. Al-Ṭūsī quant à lui, ne donne de toutes les propositions de ce traité que l'ecthèse.

[28] Lemme 2.

[29] Euclide, *Les Données*, proposition 2.

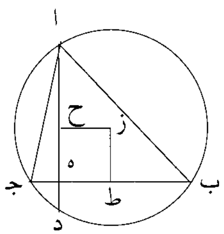
[30] Démonstration redondante puisque $BA = BC$. Cette partie de la démonstration ne figure d'ailleurs pas dans la rédaction d'al-Ṭūsī.

– يج – مثلّث ا د جـ قائم الزاوية معلوم الأضلاع، وقد عمل على نقطة ا من خطّ ا جـ زاوية مساوية لزاوية د جـ ا، ويخرج خطّ جـ د على استقامة حتى يلقاه ‹على نقطة ب›، فأقول: إن كلّ واحد من خطّي ا ب ب د معلوم›.



ونخرج عمود مثلّث ا ب جـ على خطّ ا جـ، فهو يقسمه ‹بنصفين›، والعمود ب ز؛ ونخرج عمود مثلّث ا د جـ، وهو ه د، فـ ه د موازٍ لخطّ ب ز لأن زاوية ب ز جـ قائمة وزاوية د ه جـ أيضًا قائمة، فمثلّث ب ز جـ قد خرج فيه د ه موازيًا لخطّ ب ز، فنسبة ب ز إلى ز جـ كنسبة د ه إلى ه جـ؛ وب ز مجهول ود ه معلوم وه جـ معلوم، ‹وز جـ معلوم› فخطّ ب ز معلوم. وخطّ ز جـ معلوم وزاوية ب ز جـ قائمة، فخطّ ب جـ معلوم؛ وخطّ جـ د معلوم، فخطّ ب د معلوم. وخطّ د ا معلوم وزاوية ب د ا قائمة، فخطّ ا ب معلوم. وقد تبيّن أن خطّ ب د معلوم، فكلّ واحد من ا ب ب د معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– يد – دائرة ا ب جـ د فيها مثلّث معلوم الأضلاع، وهو مثلّث ا ب جـ، نريد أن نعلم قطرها.

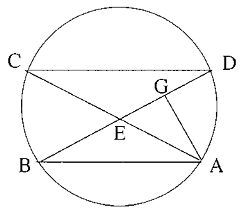


فنخرج عمود مثلّث ا ب جـ، وهو ا ه، ونخرجه على استقامة إلى الخطّ المحيط بالدائرة، فعمود مثلّث ا ب جـ معلوم ‹ومسقط حجره معلوم› لأنه معلوم الأضلاع، فـ ا ه معلوم ‹وب ه معلوم وه جـ معلوم›؛ وسطح ا ه في ه د مثل ب ه في ه جـ، وب ه في ه جـ معلوم، فـ ا ه في ه د معلوم؛ وا ه معلوم، فخطّ ه د

19 وسطح: وخط.

est connue, la droite *ED* est donc connue. Trouvons le centre du cercle, le point *G*, et menons de *G* deux perpendiculaires à *BC* et *AD*, *GI* et *GH*, elles tombent en leurs milieux, la droite *IC* est donc connue. La droite *EC* est connue puisque c'est le pied de la hauteur du triangle *ABC*, il reste la droite *IE* connue. La droite *GH* est égale à la droite *IE* et *IE* est connue, la droite *GH* est donc connue. *HA* est connue puisque c'est la moitié de *AD*, la droite *GA* est donc connue et c'est la moitié [36^{v}] du diamètre du cercle *ABCD*, le diamètre du cercle *ABCD* est donc connu. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **15 (28)** – Dans le cercle *ABCD* il y a deux cordes *AB* et *CD* parallèles et inconnues ; on a joint leurs extrémités par les deux cordes *AC* et *BD* égales et connues, telles que chacune d'elles coupe l'autre <en deux parties connues et qu'elles engendrent deux triangles d'aire connue>. Je dis que le diamètre du cercle est connu et que les deux cordes *AB* et *CD* sont également connues.

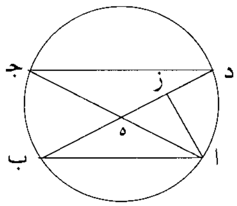


Démonstration : l'angle *BDC* est égal à l'angle *BAC* car ils sont dans le segment *BADC* ; l'angle *BAC* est égal à l'angle *ACD* car les deux cordes *AB* et *CD* sont parallèles, l'angle *BDC* est donc égal à l'angle *ACD* et la droite *ED* est égale à la droite *EC* ; le triangle *EDC* est donc isocèle, chacun de ses deux côtés est connu et son aire est connue, sa base est donc connue[31], la droite *DC* est donc connue. De même également, la droite *AB* est connue, le triangle *AEB* est donc de côtés connus, sa hauteur est donc connue et le pied de sa hauteur est connu ; menons la hauteur du triangle *AEB*, *AG*, la droite *AG* est donc connue et la droite *GE* est connue ; la droite *EB* est connue, la droite *GB* tout entière est donc connue ; mais *BD* est connue, il reste *GD* connue ; la droite *AG* est connue, la droite *AD* est donc connue car l'angle *AGD* est droit, le triangle *ABD* est donc de côtés connus ; il est dans le cercle *ABCD*, le cercle *ABCD* a donc un diamètre connu[32]. C'est ce que nous voulions démontrer.

[31] Proposition 12.
[32] Proposition 14.

معلوم. ونجد مركز الدائرة، وهو نقطة ز، ونخرج من ز عمودين إلى ب جـ ا د، وهما ز ط ز ح، فهما يقعان على نصفيهما، فخطّ ط جـ معلوم. وخطّ ه جـ معلوم لأنه مسقط الحجر لعمود مثلّث ا ب جـ، فبقي خطّ ط ه معلوماً. وخطّ ز ح مساوٍ لخطّ ط ه وط ه معلوم، فخطّ ز ح معلوم؛ وح ا معلوم لأنه نصف ا د، فخطّ ز ا معلوم، وهو نصف/ قطر دائرة ا ب جـ د، فقطر دائرة ا ب جـ د معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن. ٣٦ - ظ

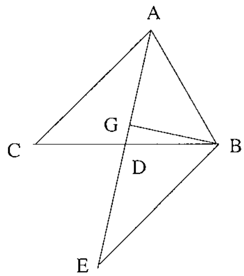
– **يه** – دائرة ا ب جـ د فيها وترا ا ب جـ د متوازيان مجهولان، وقد وصل ما بين أطرافهما بوتري ا جـ ب د متساويين معلومين يقطع كلّ واحد منهما الآخر ‹بقسمين معلومين، وأحدثا مثلّثين معلومي التكسير›. فأقول: إن قطر الدائرة معلوم وإن وتري ا ب جـ د أيضاً معلومان.



برهانه: أن زاوية ب د جـ مثل زاوية ب ا جـ لأنهما في قطعة ب ا د جـ؛ وزاوية ب ا جـ مثل زاوية ا جـ د لأن وتري ا ب جـ د متوازيان، فزاوية ب د جـ مثل زاوية ا جـ د، فخطّ ه د مثل خطّ ه جـ؛ فمثلّث ه د جـ متساوي الساقين، وكلّ واحد منهما معلوم ‹وتكسيره معلوم›، فهو معلوم القاعدة، فخطّ د جـ معلوم. وكذلك أيضاً خطّ ا ب معلوم، فمثلّث ا ه ب معلوم الأضلاع، فعموده معلوم ومسقط حجره معلوم؛ ونخرج عمود مثلّث ا ه ب، وهو ا ز، فخطّ ا ز ‹معلوم› وخطّ ز ه معلوم؛ وخطّ ه ب معلوم، فجميع ز ب معلوم؛ وب د معلوم، فبقي ز د معلوماً؛ وخطّ ا ز معلوم، فخطّ ا د معلوم لأن زاوية ا ز د قائمة، فمثلّث ا ب د معلوم الأضلاع، وهو في دائرة ا ب جـ د، فدائرة ا ب جـ د معلومة القطر. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

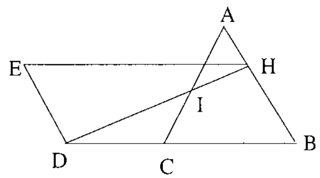
1 وهو: وهي – 2 نصفيهما: نصفهما – 9 بقسمين معلومين، وأحدثا مثلّثين معلومي التكسير: كما نجد في نصّ نصير الدين الطوسي – 14 فهو: وهو.

– **16 (25)** – Le triangle *ABD* est de côtés connus, nous avons construit au point *A*, à partir de la droite *AD*, un angle égal à l'angle *BAD*, l'angle *DAC*, nous avons prolongé la droite *BD* jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite *CA*, nous voulons montrer comment connaître chacune des deux droites *DC* et *AC*[33].



Démonstration : menons du point *B* une droite parallèle à la droite *CA*, prolongeons *AD* jusqu'à ce qu'elle la rencontre, la droite *BE* est alors parallèle à la droite *CA*, l'angle *CAE* est donc égal à l'angle *AEB* ; mais l'angle *BAD* est égal à l'angle *DAC*, l'angle *AEB* est donc égal à l'angle *BAE* et la droite *BA* est égale à la droite *BE* ; or la droite *BA* est connue, la droite *BE* est donc connue. Le triangle *ABD* est de côtés connus, sa hauteur est donc connue et le pied de sa hauteur est connu ; menons la hauteur, *BG*, du triangle *ABD*, *BG* est donc connue ; on a démontré que *BE* est connue, l'angle *BGE* est droit, la droite *GDE* est donc connue ; la droite *GD* est connue, il reste donc *DE* connue. Le triangle *BDE* est semblable au triangle *ACD*, leurs côtés sont donc proportionnels et le rapport de *BD*, connue, à *DC*, inconnue, est égal au rapport de *ED*, connue, à *DA*, connue, *DC* est donc connue. En outre, le rapport de *ED*, connue, à *DA*, connue, est égal au rapport de *BE*, connue, à *CA*, inconnue, *CA* est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **17 (7)** – Le triangle *ABC* est de côtés connus, le point *D* est connu[34] ; on a prolongé la droite *BC* jusqu'au point *D*, c'est la droite *CD*. Nous voulons mener du point *D*, vers le triangle *ABC*, une droite, la droite *DIH* par exemple, de sorte que le triangle *ICD* soit égal au triangle *AHI*[35].



Démonstration : appliquons sur la droite *BCD* un parallélogramme égal au double du triangle *ABC*, tel que son angle soit égal à l'angle *ABC*, c'est la surface *HBDE*[36]. Menons la droite *HD*, la surface *HD* est deux

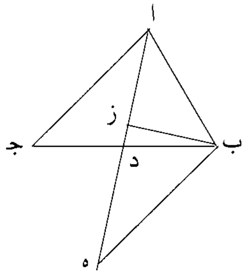
[33] On suppose implicitement que $B\hat{A}D < A\hat{D}B$. Une autre formulation de cette proposition, suggérée par les notations, aurait pu être : si dans un triangle la bissectrice d'un angle est connue ainsi que l'un des côtés de cet angle et le segment du côté que sous-tend l'angle délimité par la bissectrice et le côté adjacent connu, alors les côtés restants du triangle sont connus.

[34] Hypothèses inutilement formulées en termes de connus dans ce problème de construction, la rédaction d'al-Ṭūsī est la suivante : « on a prolongé le côté *BC* du triangle *ABC* jusqu'à un point quelconque, le point *D*. Nous voulons mener du point *D*... ».

[35] C'est-à-dire ait même surface. Dans la rédaction d'al-Ṭūsī ce sont les triangles *ABC* et *BHD* qui sont égaux. Ces deux formulations sont bien évidemment équivalentes.

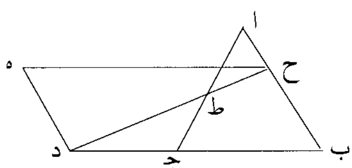
[36] Euclide, *Éléments*, I.45. Il faut en outre que *H* appartienne au segment [*AB*], ce qui est le cas puisque du fait que aire *ABC* = aire *HBD* et *BD* > *BC* on a *BH* < *BA*.

– **يو** – مثلّث ا ب د معلوم الأضلاع، وقد عملنا على نقطة آ من خطّ ا د زاوية مساوية لزاوية ب ا د، وهي زاوية د ا جـ، وأخرجنا خطّ ب د على استقامة حتى لقي خطّ جـ ا. نريد أن نبيّن كيف نعلم كلّ واحد من خطّي د جـ ا جـ.



برهانه: أن نخرج من نقطة ب خطًّا موازيًا لخطّ جـ ا، ونخرج ا د على استقامة حتى يلقاه، فخطّ ب ه مواز لخطّ جـ ا، فزاوية جـ ا ه مساوية لزاوية ا ه ب. ولكن زاوية ب ا د مساوية لزاوية د ا جـ، فزاوية ا ه ب مثل زاوية ب ا ه، فخطّ ب ا مثل خطّ ب ه؛ وخطّ ب ا معلوم، فخطّ ب ه معلوم. ومثلّث ا ب د معلوم الأضلاع، فعموده معلوم ومسقط حجره معلوم؛ ونخرج عمود مثلّث ا ب د، وهو ب ز، فـ ب ز معلوم؛ وقد تبيّن أن ب ه معلوم وزاوية ب ز ه قائمة، فخطّ ز د ه معلوم؛ وخطّ ز د معلوم، فبقي د ه معلومًا؛ ومثلّث ب د ه يشبه مثلّث ا جـ د، فأضلاعهما متناسبة، فنسبة ب د المعلوم إلى د جـ المجهول كنسبة ه د المعلوم إلى د ا المعلوم، فـ د جـ معلوم. وأيضًا، نسبة ه د المعلوم إلى د ا المعلوم كنسبة ب ه المعلوم إلى جـ ا المجهول، فـ جـ ا معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يز** – مثلّث ا ب جـ معلوم الأضلاع، ونقطة د معلومة، وقد خرج خطّ ب جـ على استقامة إلى نقطة د، فكان خطّ جـ د؛ نريد أن نخرج من نقطة د خطًّا إلى مثلّث ا ب جـ مثل خطّ د ط ح حتى يكون مثلّث ط جـ د مثل مثلّث ا ح ط.

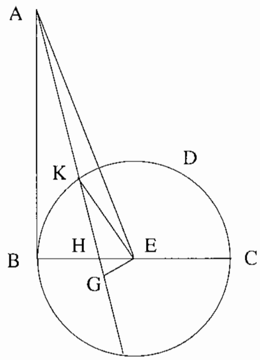


برهانه: أنا نضيف إلى خطّ ب جـ د سطحًا متوازي الأضلاع مساويًا لضعف مثلّث ا ب جـ وتكون زاويته مساوية لزاوية ا ب جـ، وهو سطح ح ب د ه. ونخرج خطّ ح د، فسطح ح د مثلا

20 د ط ح: د ح.

fois le triangle *ABC* ; la surface *HD* est également deux fois le triangle *HBD*, le triangle *ABC* est donc égal au triangle *HBD* ; ôtons ce qui leur est commun, le trapèze (sic) *ICBH*, il reste le triangle *ICD* égal au triangle *AHI*. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **18 (29)** – Le diamètre *BC* du cercle *BDC* est connu, on a mené du point *B* une droite connue, tangente au cercle *BDC*, la droite *BA* ; on a marqué sur la droite *BC* un point *H*, connu, et on a mené la droite *AKH*. Nous voulons montrer comment connaître la droite *AH* ainsi que chacune des deux droites *AK* et *KH*.



Que la droite *AH* est connue, cela est clair, car chacune des deux droites *AB* et *BH* est connue et l'angle *ABH* est droit. Il nous reste donc à connaître chacune des deux droites *AK* et *KH*.

Démonstration : trouvons le centre du cercle, le point *E* ; menons la droite *AE*, elle est connue[37] ; la droite *BE* est connue, la droite *BH* est connue, il reste *EH* connue, le triangle *AHE* est donc de côtés connus, sa hauteur est donc connue et le pied de sa hauteur est connu ; mais sa hauteur tombe à l'extérieur, car l'angle *ABH* est droit, l'angle *AHB* est donc aigu et l'angle *AHE* obtus[38], la hauteur du triangle *AHE* tombe donc à l'extérieur ; [37r] sa hauteur est *EG* et le pied de sa hauteur *HG*, chacune des deux droites *EG* et *HG* est donc connue. Menons la droite *EK*, la droite *EK* est connue, car elle est égale au demi-diamètre du cercle ; la droite *EG* est connue, l'angle *EGK* est droit, la droite *GHK* est donc connue ; la droite *GH* est connue, il reste la droite *HK* connue ; la droite *HKA* est connue, il reste la droite *KA* connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

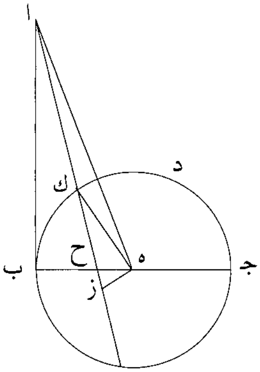
– **19 (8)** – Le triangle *ABC* est connu de côtés[39], nous voulons mener deux droites, les droites *AD* et *CD* par exemple, telles qu'elles soient égales aux deux droites *AC* et *CB* et que *DC* soit dans le prolongement de la droite *BC*.

[37] Lemme 1.

[38] À condition que *H* appartienne au segment *BE*. La proposition est cependant encore vraie si *H* appartient au segment *EC*, simplement dans ce cas $KH = GH + GK$ et non $GK - GH$.

[39] Hypothèse inutile dans ce problème de construction, absente de la rédaction d'al-Ṭūsī.

مثلّث ا ب جـ؛ وسطح ح د أيضًا مثلا مثلّث ح ب د، فمثلّث ا ب جـ مساوٍ لمثلّث ح ب د؛ فنسقط المشترك بينهما، وهو منحرف ط جـ ب ح، فيبقى مثلّث ط جـ د مساويًا لمثلّث ا ح ط. وذلك ما أردنا أن نبيّن.



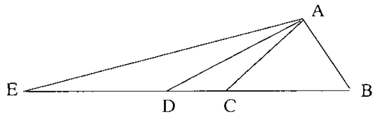
– **يح** – دائـرة ب د جـ قطرها معلوم، وهو ب جـ، وأخرج من نقطة ب خطّ معلوم فيماسّ دائرة ب د جـ، وهو خطّ ب ا، وتعلّم على خطّ ب جـ نقطة ح، وهي معلومة، وأخرج خطّ ا ك ح. نريد أن نبيّن كيف نعلم خطّ ا ح وكلّ واحد من خطّي ا ك ك ح.

أما أن يكون خطّ ا ح معلومًا، فذلك بيّنٌ لأن كلّ واحد من خطّي ا ب ب ح معلوم وزاوية ا ب ح قائمة، فيبقى أن نعلم كلّ واحد من خطّي ا ك ك ح.

برهانه: أنّا نجد مركز الدائرة، وهو نقطة ه؛ ونخرج خطّ ا ه، فهو معلوم؛ وخطّ ب ه معلوم، وخطّ ب ح معلوم، فيبقى ه ح معلومًا، فمثلّث ا ح ه معلوم الأضلاع، فعموده معلوم ومسقط حجره معلوم؛ ولكن عموده يقع خارجًا لأن زاوية ا ب ح قائمة، فزاوية ا ح ب حادّة، فزاوية ا ح ه منفرجة، فعمود مثلّث ا ح ه يقع خرجًا، / وعموده ه ز ومسقط حجره ح ز، فكلّ واحد من ٣٧ - و
خطّي ه ز ح ز معلوم. ونخرج خطّ ه ك، فخطّ ه ك معلوم لأنه مساوٍ لنصف قطر الدائرة؛ وخطّ ه ز معلوم وزاوية ه ز ك قائمة، فخطّ ز ح ك معلوم؛ وخطّ ز ح معلوم، فيبقى ح ك معلومًا. وخطّ ح ك ا معلوم، فيبقى خطّ ك ا معلومًا. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يط** – مثلّث ا ب جـ معلوم الأضلاع، نريد أن نخرج خطّين مثل خطّي ا د جـ د ويكونان مثل خطّي ا جـ جـ ب ويكون د جـ متصلاً بخطّ ب جـ على استقامة.

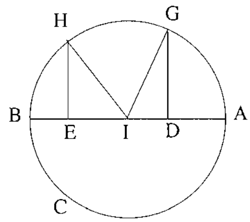
7 ا ك ح: ا ح.



Prolongeons la droite CB, posons CE égale à CB plus CA, menons AE et construisons au point A l'angle DAE égal à l'angle CEA[40]. L'angle DAE est alors égal à l'angle DEA et la droite AD est égale à la droite DE ; la droite CE est égale à <la somme> des deux droites BC et CA, <la somme> des deux droites AD et DC est donc égale à <la somme> des deux droites AC et CB. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **20 (30)** – Le cercle ABC a un diamètre inconnu, on a marqué sur son diamètre, AB, deux points, D et E, et la droite ED est connue ; on a mené des deux points D et E et à angles droits, les deux droites DG et EH, et chacune d'elles est connue. Comment connaître le diamètre du cercle ABC ?

Démonstration : trouvons le centre du cercle, le point I, menons les deux droites GI et IH, elles sont égales et chacune d'elles est connue, car chacune des droites GD, DE et EH est connue[41] ; IG est égale au demi-diamètre du cercle. C'est ce que nous voulions démontrer.



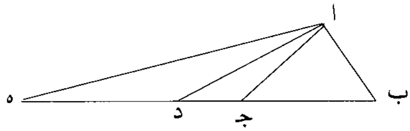
– **21 (31)** – Pour tout triangle rectangle tel que l'un des deux côtés entourant l'angle droit soit connu et que <la somme> du côté qui sous-tend l'angle droit et du second côté entourant l'angle droit soit connue, chacun de ces deux côtés est connu.

Exemple : le triangle ABC est rectangle et le côté BC en est connu ; la somme des deux côtés AC et AB est connue, je dis que chacun <des côtés> AC et AB est connu.

Démonstration : posons le point A pour centre et traçons, avec pour distance AB, le cercle BED ; prolongeons AC jusqu'à la circonférence du cercle, c'est la droite AD ; la droite AD est donc égale à la droite AB. La

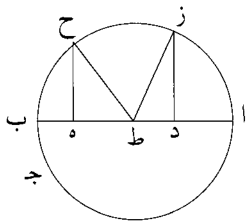
[40] $AC < CE$, donc $\widehat{EAD} < \widehat{EAC}$ et $D \in [CE]$.

[41] Proposition 31. Comme le signale une note marginale, la proposition 31 devrait donc être placée avant la proposition 20. C'est le cas dans la rédaction d'al-Ṭūsī où ces deux propositions sont respectivement les propositions 21 et 30. On suppose implicitement ici que D et E sont de part et d'autre de I. Cependant la proposition est encore vraie s'ils sont d'un même côté de I.



فنخرج خطّ جـ ب على استقامة، ونجعل جـ ه مثل جـ ب جـ ا، ونخرج ا ه ونعمل على نقطة ا زاوية د ا ه مثل زاوية جـ ه ا. فزاوية د ا ه مثل زاوية د ه ا، فخطّ ا د مثل خطّ د ه؛ وخطّ جـ ه مثل خطّي ب جـ جـ ا، فخطّا ا د د جـ مثل خطّي ا جـ جـ ب. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– ك – دائرة ا ب جـ مجهولة القطر، فقد تعلّم على قطرها، وهو ا ب، نقطتا د ه، فكان خطّ ه د معاومًا، وأخرج من نقطتي د ه خطّا د ز ه ح على زوايا قائمة، فكان كلّ واحد منهما معلومًا، فكيف نعلم قطر دائرة ا ب جـ.



برهانه: أن [نخرج خطّ ز ح، فخطّ ز ح معلوم و] نجد مركز الدائرة، وهو نقطة ط، ونخرج خطّي ز ط ط ح، فهما متساويان، وكلّ واحد منهما معلوم ⟨لأنّ كلّ واحد من خطوط ز د د ه ه ح معلوم⟩؛ وط ز مساوٍ لنصف قطر الدائرة. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

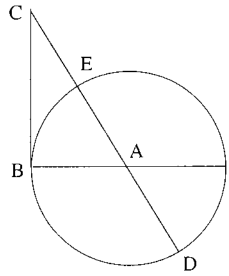
– كا – كلّ مثلّث قائم الزاوية يكون أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة معلومًا، ويكون الضلع الذي يوتر الزاوية القائمة والضلع الآخر من الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة مجموعان معلومًا، فإن كلّ واحد منهما معلوم.

مثاله: أن مثلّث ا ب جـ قائم الزاوية وضلع ب جـ منه معلوم، وضلعا ا جـ ا ب مجموعان معلوم. فأقول: إن كلّ واحد من ا جـ ا ب معلوم.

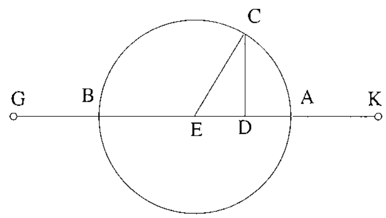
برهانه: أن نجعل نقطة ا مركزاً وندير ببعد ا ب دائرة ب ه د، ونخرج ا جـ على استقامة إلى الخطّ المحيط بالدائرة، وهو خطّ ا د، فخطّ ا د مثل خطّ

1 جـ ب: كتب أولاً جـ د ثم رجع وكتب جـ ب فوقها – 4 وذلك ما أردنا أن نبيّن: نجد بعدها في الهامش «شكل لا ينبغي أن يكون موضوعًا قبل شكل ك» – 10 ط ح: ز ح – 16 مجموعان: مجموع – 19 ا ب (الأولى): جـ ب – 18-19 وضلعا ا جـ ا ب مجموعان معلوم: في الهامش.

somme des deux droites BA et AC est connue, la droite DAC est donc connue. La surface de DC par CE est égale au carré de BC et le carré de BC est connu car la droite BC est connue, la surface de DC par CE est donc connue ; mais la droite DC est connue, la droite CE est donc connue[42] et il reste DE connue ; sa moitié, AB, est alors connue, par conséquent AC est connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

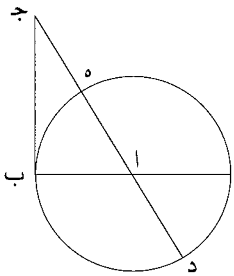


– **22 (32)** – Le diamètre AB du cercle ABC est inconnu, la droite CD s'élève sur AB à angles droits, la somme des deux droites AD et DC est connue, et la somme des deux droites BD et DC est également connue, comment connaître le diamètre ?



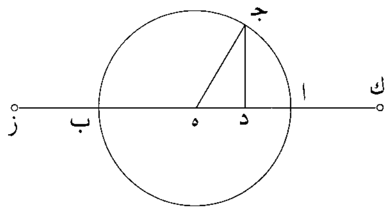
Prolongeons la droite DA et posons AK égale à CD ; prolongeons AB et posons BG égale à CD ; la droite KD est alors connue et la droite DG est connue, la droite KG tout entière est donc connue et sa moitié est connue. Partageons la droite KG en deux moitiés au point E, le point E est alors le centre du cercle, puisque la droite KA est égale à la droite BG. Menons la droite EC ; la droite DG est connue, la droite EG est connue, il reste la droite DE connue. La droite EG est connue et elle est égale à la moitié du diamètre du cercle plus la droite CD, la somme des deux droites CD et CE est donc connue ; le triangle CDE est rectangle, le côté DE est connu et la somme des deux droites CD et CE est connue, chacune d'elles est donc connue[43], la droite CE est donc connue, et c'est la moitié du diamètre du cercle, la droite AB est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

[42] Euclide, *Les Données*, proposition 57.
[43] Proposition 21.



ا ب. وخطّا ب ا ا جـ مجموعان معلوم، فخطّ د ا جـ معلوم. وسطح د جـ في جـ ه مساوٍ لمربّع ب جـ، ومربّع ب جـ معلوم، لأن خطّ ب جـ معلوم، فسطح د جـ في جـ ه معلوم؛ وخطّ د جـ معلوم، فخطّ جـ ه معلوم، فيبقى د ه معلومًا، ونصفه، وهو ا ب، معلوم، فـ ا جـ إذن معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كب** – دائرة ا ب جـ قطرها ا ب، وهو مجهول، وخطّ جـ د قائم على ا ب على زوايا قائمة، وخطّا ا د د جـ مجموعان معلوم، وخطّا ب د د جـ مجموعان أيضًا معلوم، كيف نعلم القطر.

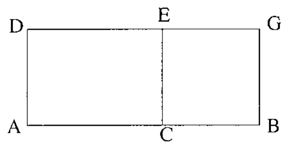


فنخرج خطّ د ا على استقامة ونجعل ا ك مثل جـ د؛ ونخرج ا ب على استقامة، ونجعل ب ز مثل جـ د، فخطّ ك د معلوم وخطّ د ز معلوم، فجميع خطّ ك ز معلوم، فنصفه معلوم؛ فنقسم خطّ ك ز على نقطة ه بنصفين، فنقطة ه هي مركز الدائرة لأن خطّ ك ا مثل خطّ ب ز. ونخرج خطّ ه جـ؛ فخطّ د ز معلوم، وخطّ ه ز معلوم، فيبقى خطّ د ه معلومًا. وخطّ ه ز معلوم، وهو مساوٍ لنصف قطر الدائرة وخطّ جـ د، فخطّا جـ د جـ ه مجموعان معلوم؛ فمثلّث جـ د ه قائم الزاوية وضلع د ه معلوم وخطّا جـ د جـ ه مجموعان معلوم، فكلّ واحد منهما معلوم، فخطّ جـ ه معلوم، وهو نصف قطر الدائرة، فخطّ ا ب معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

2 وسطح: وخط – 3 ب جـ (الثانية): ب د – 4 فسطح: فخط – 16 وخطّ: ولخطّ / مجموعان: مجموع (في الهامش) – 17 مجموعان: مجموع.

– **23 (26)** – Pour toute droite inconnue que l'on partage en deux parties telles que le produit de l'une des deux parties par l'autre soit connu et que le rapport de l'une à l'autre soit connu, chacune des deux <parties> est connue.

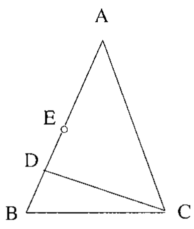
Exemple : la droite *AB* est inconnue, on l'a partagée au point *C*, le produit de *AC* par *CB* est connu et le rapport de *AC* à *CB* est connu. Je dis que chacune <des droites> *AC* et *CB* est connue.



Démonstration : construisons sur la droite *CB* un carré, le carré *CBGE*, prolongeons [37^{v}] la droite *EG* et menons du point *A* une droite, *AD*, parallèle à la droite *GB*. Le rapport de *AC* à *CB* est alors égal au rapport de la surface *AE* à la surface *CG*[44] ; mais le rapport de *AC* à *CB* est connu, le rapport de la surface *AE* à la surface *CG* est donc connu ; la surface *AE* est connue, car c'est la surface de *AC* par *CB*, la surface *CG* est donc connue[45] ; la surface *CG* est le carré de *CB*, la droite *CB* est donc connue et la droite *AC* est connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

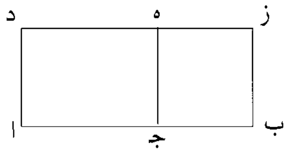
– **24 (23)** – Le côté *AB* du triangle *ABC* est égal au côté *AC*, son aire est connue et l'angle *BAC* est un tiers de droit, nous voulons connaître chacun de ses côtés.

Menons la hauteur du triangle relative à la droite *AB*, c'est *CD*, partageons la droite *AB* en deux moitiés au point *E*, la surface de *CD* par *BE* est alors connue ; *CD* est la moitié de *AC*[46], *AC* par *AE* est connue, *AC* par *AB* est donc connue ; *AC* par *AB* est le carré de *AB*, le carré de *AB* est donc connu et *AB* est connue ; *AB* est égale à *AC*, *AC* est donc connue ; la droite *CD* est connue car c'est la moitié de *AC* et *AC* est connue, il reste *AD* connue ; la droite *AB* est connue, il reste la droite *BD* connue ; la droite *CD* est connue, la droite *BC* est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.



[44] Euclide, *Éléments*, VI.1.
[45] Euclide, *Les Données*, proposition 2.
[46] Proposition 3.

– **كج** – كلّ خطّ مجهول يقسم بقسمين فيكون ضرب أحد القسمين في الآخر معلوم ونسبة أحدهما إلى الآخر معلوم، فإن كلّ واحد منهما معلوم.

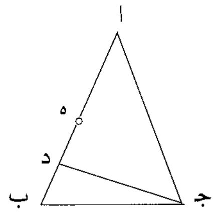


مثاله: أن خطّ ا ب مجهول، وقد قسم على نقطة جـ، فكان ضرب ا جـ في جـ ب معلومًا ونسبة ا جـ إلى جـ ب معلومة، فأقول: إن كلّ واحد من ا جـ جـ ب معلوم.

برهانه: أنا نعمل على خطّ جـ ب مربّعًا، وهو مربّع جـ ب ز ه، ونخرج / خطّ ه ز على استقامة ونخرج من نقطة ا خطًّا موازيًا لخطّ ز ب، وهو ا د. ٣٧ – ظ فنسبة ا جـ إلى جـ ب كنسبة سطح ا ه إلى سطح جـ ز؛ ولكن نسبة ا جـ إلى جـ ب معلومة، فنسبة سطح ا ه إلى سطح جـ ز معلومة، وسطح ا ه معلوم، لأنه سطح ا جـ في جـ ب، فسطح جـ ز معلوم، وسطح جـ ز هو مربّع جـ ب، فخطّ جـ ب معلوم وخطّ ا جـ معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

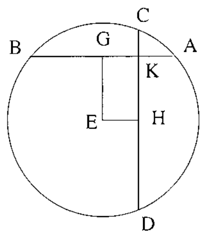
– **كد** – مثلّث ا ب جـ ضلع ا ب منه مثل ضلع ا جـ وتكسيره معلوم وزاوية ب ا جـ ثلث قائمة، نريد أن نعلم كلّ واحد من أضلاعه.

فنخرج عمود المثلّث على خطّ ا ب، وهو جـ د، ونقسم خطّ ا ب بنصفين على نقطة ه، فسطح جـ د في ب ه معلوم؛ وجـ د نصف ا جـ، وا جـ في ا ه معلوم، فـ ا جـ في ا ب معلوم؛ وا جـ في ا ب هو مربّع ا ب، فمربّع ا ب معلوم، فـ ا ب معلوم؛ وا ب مثل ا جـ، فـ ا جـ معلوم؛ وخطّ جـ د معلوم لأنه نصف ا جـ، وا جـ معلوم، فبقي ا د معلومًا؛ وخطّ ا ب معلوم، فبقي خطّ ب د معلومًا؛ وخطّ جـ د معلوم، فخطّ ب جـ معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.



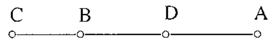
17 فسطح: فخط – 21 ب جـ: ب د.

– **25 (33)** – Le cercle *ADBC* a un diamètre connu, les deux cordes *AB* et *CD* s'y coupent à angle droit <au point *K*>, la corde *AB* est connue et le rapport de *CK* à *KD* est connu. Nous voulons connaître *CD*.



Trouvons le centre du cercle, le point *E*, menons de *E* une perpendiculaire, *EG*, à *AB*, *EG* est alors connue. Menons également du point *E* une droite, *EH*, qui soit perpendiculaire à la droite *CD*, la surface *HKGE* est alors un parallélogramme, la droite *HK* est donc égale à la droite *EG* ; *EG* est connue, *HK* est donc connue. Le rapport de *CK* à *KD* est connu, le rapport de *CD* à *DK* est donc connu[47] et le rapport de la moitié de *CD* à *DK* est connu ; la moitié de *CD* est *HD*, le rapport de *DH* à *DK* est donc connu et le rapport de *HK* à *KD* est connu[48] ; or *KH* est connue, la droite *KD* est donc connue et la droite *KC* est connue, la corde *CD* est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **26 (20)** – Pour toute droite connue à laquelle on fait un ajout tel que la droite avec l'ajout, <multipliée> par l'ajout, soit connue, alors la droite avec l'ajout est connue.

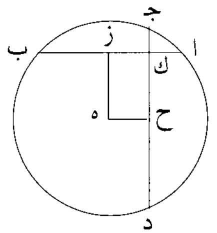


Exemple : la droite *AB* est connue, on lui ajoute la droite *BC* et *AC* par *CB* est connu. Je dis que *AC* est connue.

Démonstration : partageons la droite *AB* en deux moitiés au point *D*. La surface de *AC* par *CB* plus le carré de *BD* est égale au carré de *DC*[49], le carré de *DC* est donc connu et la droite *DC* est connue ; la droite *BD* est connue, la droite *BC* est donc connue et la droite *CA* est connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

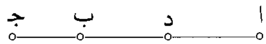
[47] Euclide, *Les Données*, proposition 6.
[48] Euclide, *Les Données*, proposition 5.
[49] Euclide, *Éléments*, II.6.

– **كه** – دائرة ا د ب جـ معلومة القطر، وفيها وترا ا ب جـ د يتقاطعان على زاوية قائمة ⟨عند نقطة ك⟩، ووتر ا ب معلوم، ونسبة جـ ك إلى ك د معلومة. نريد أن نعلم جـ د.



فنجد مركز الدائرة، وهو نقطة ه، ونخرج من ه عموداً على ا ب، وهو ه ز، فـ ه ز معلوم. ونخرج من نقطة ه أيضًا خطًا يكون عموداً على خطّ جـ د، وهو ه ح، فسطح ح ك ز ه متوازي الأضلاع، فخطّ ح ك مثل خطّ ه ز؛ وه ز معلوم، فخطّ ح ك معلوم. ونسبة جـ ك إلى ك د معلومة، فنسبة جـ د إلى د ك معلومة، فنسبة نصف جـ د إلى د ك معلومة، ونصف جـ د هو ح د، فنسبة د ح إلى د ك معلومة، فنسبة ح ك إلى ك د معلومة؛ وك ح معلوم، فخطّ ك د معلوم، وخطّ ك جـ معلوم، فوتر جـ د معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كو** – كلّ خطّ معلوم يزاد فيه زيادة، فيكون الخطّ مع الزيادة في الزيادة معلومًا، فإن الخطّ مع الزيادة معلوم.

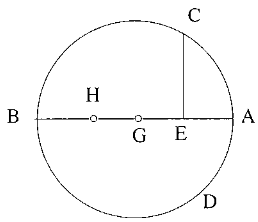


مثاله: أن خطّ ا ب معلوم، وزيد فيه خطّ ب جـ، فكان ا جـ في جـ ب معلومًا، فأقول: إن ا جـ معلوم.

برهانه: أنا نقسم خطّ ا ب بنصفين على نقطة د. فسطح ا جـ في جـ ب ومربّع ب د مساوٍ لمربّع د جـ، فمربّع د جـ معلوم، فخطّ د جـ معلوم؛ وخطّ ب د معلوم، فخطّ ب جـ معلوم وخطّ جـ ا معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

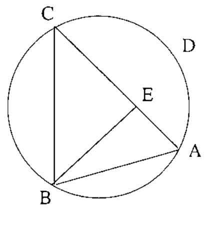
16 فسطح: فخط.

– **27 (34)** – Le cercle *ABCD* a pour diamètre *AB* et celui-ci est inconnu, la droite *CE* est perpendiculaire à la droite *AB*, la droite *EA* est connue et la différence entre *BE* et *CE* est connue[50]. Nous voulons connaître le diamètre du cercle.



Séparons de *EB*, *EH* égale à *CE*, la droite *BH* est alors connue car c'est la différence entre *BE* et *EH*. Séparons de *EH*, *EG* égale à *EA*, le rapport de *BE* à *EH* est alors égal au rapport de *EH* à *EG*. Si nous séparons, le rapport de *BH* à *EH* est égal au rapport de *HG* à *GE* et le produit de *BH* par *EG* est égal au produit de *EH* par *HG* ; *EH* par *HG* est alors connu, car chacune <des droites> *BH* et *EG* est connue ; *EG* est connue, la droite *EH* est donc connue[51] ; la droite *EG* est égale à la droite *EA*, la droite *AB* tout entière est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **28 (35)** – Le cercle *ABCD* a un diamètre connu et la corde *AB* en est connue. On construit au point *A*, à partir de la droite *AB*, deux tiers d'angle droit, l'angle *BAC* ; on mène la droite *BC*. Comment connaître chacune <des droites> *BC* et *CA* ?



Démonstration : l'angle *BAC* est deux tiers de droit, la droite *BC* est donc la corde du tiers du cercle *ABCD* ; le diamètre du cercle est connu, la corde *BC* est donc connue[52]. Menons la hauteur, *BE*, du triangle *ABC*, l'angle *BEA* est droit, l'angle *BAE* est deux tiers de droit, il reste *ABE* un tiers de droit ; la droite *AB* est connue, la droite *BE* est donc connue et la droite *AE* est connue[53] ; la droite *BC* et la droite *BE* sont connues, [38ʳ] il reste la droite *EC* connue, chacune <des droites> *BC* et *CA* est donc connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

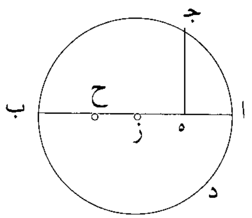
[50] On suppose implicitement que $BE > EA$.

[51] Proposition 26.

[52] Euclide, *Les Données*, proposition 88. Notons que l'utilisation de la proposition 3 du traité de Thābit permet la détermination de *BC* : en effet si *O* est le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle *ABC*, et *H* le milieu de *BC*, le triangle *OHB* satisfait aux hypothèses de la proposition 3 ($\widehat{BOH} = \frac{\pi}{3}$ et *OB* est connue), donc $BH = \frac{1}{2}BC$ est connue et *BC* est connue.

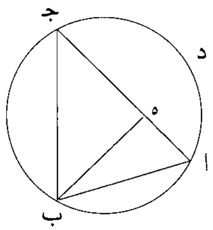
[53] Proposition 3.

– كز – دائـرة ا ب جـ د قطرها ا ب، وهو مجهول، وخطّ جـ ه عمود على خطّ ا ب، وخطّ ه ا معلوم، وفضل ب ه على جـ ه معلوم، نـريد أن نعلم قطر الدائرة.



فنفصل من ه ب مثل جـ ه، وهو ه ح، فخطّ ب ح معلوم لأنه فضل ب ه على ه ح. ونفصل من ه ح مثل ه ا، وهو ه ز، فنسبة ب ه إلى ه ح كنسبة ه ح إلى ه ز؛ وإذا فصلنا كانت نسبة ب ح إلى ه ح كنسبة ح ز إلى ز ه، فضرب ب ح في ه ز مثل ضرب ه ح في ح ز؛ فـ ه ح في ح ز معلوم لأن كلّ واحد من ب ح ه ز معلوم؛ وه ز معلوم، فخطّ ه ح معلوم؛ وخطّ ه ز مثل خطّ ه ا، فجميع خطّ ا ب معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

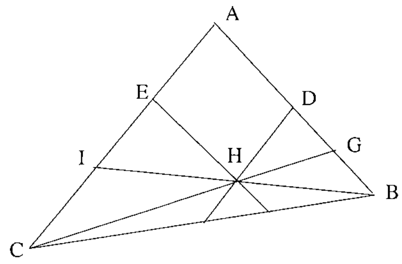
– كح – دائرة ا ب جـ د معلومة القطر وفيها وتر ا ب معلوم، وقد عمل على نقطة ا من خطّ ا ب ثلثا زاوية قائمة، وهي زاوية ب ا جـ، وأخرج خطّ ب جـ. كيف نعلم كلّ واحد من ب جـ جـ ا؟



برهانه: أن زاوية ب ا جـ ثلثا قائمة، فخطّ ب جـ وتر ثلث دائرة ا ب جـ د، وقطر الدائرة معلوم، فوتر ب جـ معلوم. ونخرج عمود مثلّث ا ب جـ، وهو ب ه، فزاوية ب ه ا قائمة، وزاوية ب ا ه ثلثا قائمة، فبقيت ا ب ه ثلث قائمة؛ وخطّ ا ب معلوم، فخطّ ب ه معلوم وخطّ ا ه معلوم؛ وخطّ ب جـ وخط ب ه معلومان،/ فبقي خطّ ه جـ معلوماً، وكلّ واحد من ب جـ جـ ا معلوم. وذلك ٣٨ – و
ما أردنا أن نبيّن.

8 ه ز (الأولى): ح ز – 15 معلوم: في الهامش.

– **29 (9)** – Nous voulons mener dans le triangle *ABC* deux droites telles que l'une d'elles coupe l'autre en deux moitiés et que la droite <ainsi> coupée coupe <l'autre> en son tiers.

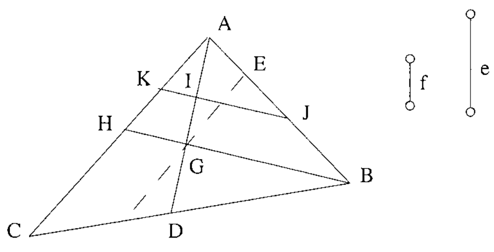


Partageons *AB* en deux moitiés en *D*, séparons de *AC* son tiers au point *E*, menons des deux points *D* et *E* deux droites, *DH* et *HE*, parallèles aux deux droites *AC* et *AB* ; menons *CH* et prolongeons-la jusqu'en *G* ; menons *BH* et prolongeons-la jusqu'en *I*.

Dans le triangle *ABI* on a mené la droite *DH* parallèlement à la droite *AI*, le rapport de *AD* à *DB* est donc égal au rapport de *IH* à *HB* ; *AD* est égale à *DB*, *IH* est donc égale à *HB*. De même le rapport de *AE* à *EC* est égal au rapport de *GH* à *HC* ; *AE* est le tiers de *AC*, *GH* est donc le tiers de *GC*.

Nous mènerions de même dans le triangle *ABC* deux droites telles que chacune d'elles coupe l'autre selon quelque rapport que nous voudrions. C'est ce que nous voulons démontrer.

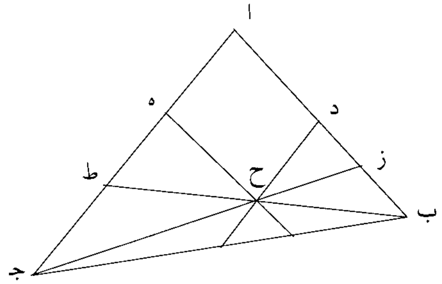
– **30 (10)** – le triangle *ABC* est de côtés connus, on mène du point *A* au point *D*, connu, une droite connue[54]. Nous voulons mener dans le triangle *ABC* une droite, la droite *JIK* par exemple, telle que *JI* soit égale à la droite *e* et que *IK* soit égale à la droite *f*[55].



[54] Hypothèses inutilement formulées en termes de données puisqu'il s'agit d'un problème de construction. La formulation d'al-Ṭūsī est la suivante : « supposons un triangle *ABC* et menons dans celui-ci *AD* quelle qu'elle soit ».

[55] Problème avec discussion dont Thābit ne précise pas le diorisme. Ce diorisme est incomplètement évoqué dans la rédaction d'al-Ṭūsī de ce traité ainsi que dans des gloses marginales du manuscrit de Berlin de cette rédaction (voir notes *infra*).

– **كط** – نريد أن نخرج في مثلّث ا ب جـ خطّين يقسم أحدهما الآخر بنصفين ويقطعه المقسوم على ثلثه.

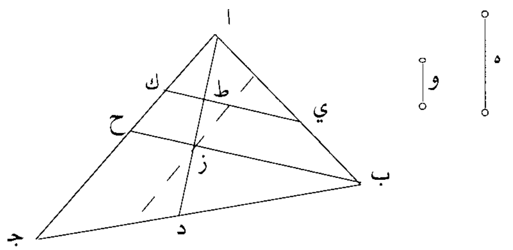


فنقسم ا ب بنصفين على د، ونفصل من ا جـ ثلثه على نقطة ه، ونخرج من نقطتي د ه خطّين موازيين لخطّي ا جـ ا ب، وهما د ح ح ه، ونخرج جـ ح ونخرجه على استقامة إلى ز، ونخرج ب ح ونخرجه على استقامة إلى ط.

فمثلّث ا ب ط قد خرج فيه خطّ د ح موازياً لخطّ ا ط، فنسبة ا د إلى د ب كنسبة ط ح إلى ح ب؛ وا د مثل د ب، فـ ط ح مثل ح ب. وكذلك نسبة ا ه إلى ه جـ كنسبة ز ح إلى ح جـ، وا ه ثلث ا جـ، فـ ز ح ثلث ز جـ.

وكذلك نخرج في مثلّث ا ب جـ خطّين يقطع كلّ واحد منهما الآخر على أي نسبة شئنا. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

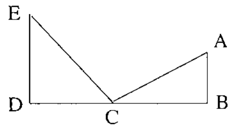
– **ل** – مثلّث ا ب جـ معلوم الأضلاع، وقد خرج من نقطة آ خطّ معلوم إلى نقطة د، وهي معلومة. نريد أن نخرج في مثلّث ا ب جـ خطّاً مثل خطّ ي ط ك، ويكون ي ط مثل خطّ ه وط ك مثل خطّ و.



9 واحد: مكررة – 11 خط معلوم: خطًا معلومًا.

Menons du point B la droite BGH telle que le rapport de BG à GH soit égal au rapport de e à f : pour la construire, partageons la droite BA en deux parties telles que le rapport de l'une à l'autre soit égal au rapport de e à f et menons de l'endroit de la section une droite parallèle à la droite CA ; si elle rencontre la droite AD[56], menons du point B une droite jusqu'à l'endroit où elle la rencontre et prolongeons-la ; que la droite menée du point B soit la droite BGH, il est clair que le rapport de BG à GH est égal au rapport de e à f[57]. Partageons ensuite la droite GA en deux parties, au point I, telles que le rapport de GA à AI soit égal au rapport de la droite BG à la droite e[58]; menons du point I une droite, JIK, parallèle à la droite BH, le rapport de GA à AI est alors égal au rapport de BG à JI ; mais le rapport de GA à AI était égal au rapport de BG à e, le rapport de BG à e et à JI est donc le même rapport, la droite JI est donc égale à la droite e. Nous montrons de même que IK est égale à f. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **31 (21)** – Chacune des deux droites AB et ED est connue, et elles s'élèvent sur BD selon deux angles droits ; BD est connue, AC est égale à CE. Nous voulons connaître chacune d'elles.



Le carré de AC est égal au carré de CE ; le carré de AC est égal à <la somme> des carrés de AB et de BC ; le carré de CE est égal à <la somme> des carrés de ED et de DC ; <la somme> des carrés de ED et de DC est donc égale à <la somme> des carrés de AB et de BC, et la différence entre le carré de ED et le carré de AB est égale à la différence entre le carré de BC et le carré de DC[59] ; la différence entre le carré de ED et le carré de AB est connue, la différence entre le carré de BC et le carré de CD est donc connue ; la droite BD est connue, elle a été partagée au point C et la

[56] *i. e.* si G est entre A et D. On trouve dans le manuscrit de Berlin de la rédaction d'al-Ṭūsī une première glose marginale : « la parallèle à AC menée du point d'intersection tombe au point G, entre A et D, de ce fait il est nécessaire que l'on ajoute également cette condition, car si la parallèle tombe au point D ou à l'extérieur, le problème est impossible » (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 152^{v}).

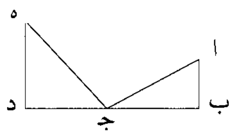
[57] On trouve à cet endroit dans la rédaction d'al-Ṭūsī une condition nécessaire d'existence de la solution : « si BH est plus longue que e et f ensemble le problème est possible, sinon non » (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 152^{v}).

[58] Deuxième glose marginale du manuscrit de Berlin : « I tombe entre G et A, car s'il tombait en G cela impliquerait que BH soit égale à e <plus> f et s'il tombait à l'extérieur de G cela impliquerait que BH soit plus courte que e <plus> f, or cela a été posé différemment » (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 152^{v}).

On vérifierait aisément qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait des solutions est que : $e + f < \inf(BH, CH')$, H' étant le point d'intersection de la parallèle à BG issue de C et de AB.

[59] On suppose implicitement $ED > AB$.

فنخرج من نقطة ب خطّ ب ز ح وتكون نسبة ب ز إلى ز ح كنسبة ه إلى و، وعمل ذلك أن نقسم خطّ ب ا بقسمين تكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ه إلى و، ونخرج من موضع القسم خطًّا موازيًا لخطّ جـ ا، فإذا لقي خطّ ا د، أخرجنا من نقطة ب خطًّا إلى الموضع الذي يلقاه فيه، وأنفذناه على استقامة، فليكن الخطّ المخرج من نقطة ب هو خطّ ب ز ح، فبيّنٌ أن نسبة ب ز إلى ز ح كنسبة ه إلى و. ثم نقسم خطّ ز ا بقسمين على نقطة ط وتكون نسبة ز ا إلى ا ط كنسبة خطّ ب ز إلى خطّ ه؛ ونخرج من نقطة ط خطًّا موازيًا لخطّ ب ح، وهو ي ط ك، فنسبة ز ا إلى ا ط كنسبة ب ز إلى ي ط، وقد كانت نسبة ز ا إلى ا ط كنسبة ب ز إلى ه، فنسبة ب ز إلى ه وإلى ي ط واحدة، فخطّ ي ط مثل خطّ ه. وكذلك نبيّن أن ط ك مثل و. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

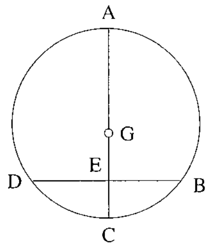


– لا – خطّا ا ب ه د كلّ واحد منهما معلوم، وهما قائمان على ب د على زاويتين قائمتين، وب د معلوم، وا جـ مثل جـ ه، نريد أن نعلم كلّ واحد منهما.

ومربّع ا جـ مثل مربّع جـ ه، ومربّع ا جـ مساوٍ لمربّعي ا ب ب جـ، ومربّع جـ ه مساوٍ لمربّعي ه د د جـ، فمربّعا ه د د جـ مساويان لمربّعي ا ب ب جـ، وفضل مربّع ه د على مربّع ا ب مثل فضل مربّع ب جـ على مربّع جـ د. وفضل مربّع ه د على مربّع ا ب معلوم، ففضل مربّع ب جـ على مربّع جـ د معلوم؛ وخطّ ب د معلوم، وقد قسم على نقطة جـ، وفضل مربّع ب جـ على مربّع جـ د

6 ز ا: د ا – 7 ز ا: د ا – 10 ه: فوق السطر – 20 وخطّ: فخطّ.

différence entre le carré de *BC* et le carré de *CD* est connue, chacune <des droites> *BC* et *CD* est donc connue[60] et chacune <des droites> *AC* et *CE* est connue[61]. C'est ce que nous voulions démontrer.



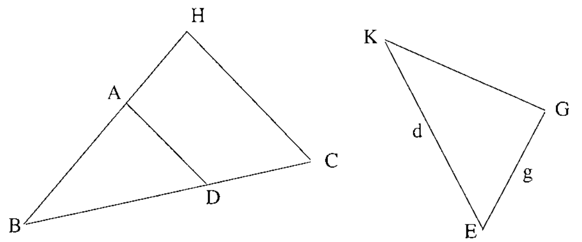
– **32 (36)** – Dans le cercle *ABCD*, la corde *BD* est connue et le diamètre *AC* est inconnu ; *AC* coupe la corde *BD* à angles droits et la différence entre *AE* et *EC* est connue. Je dis que le diamètre est connu, et que chacune <des droites> *AE* et *EC* est connue.

Démonstration : séparons de *AE* *EG* égale à *EC*. La surface de *AE* par *EC* est égale au carré de *EB*, la surface de *AE* par *EC* est donc connue ; *GA* est connue, *AE* est donc connue et *EG* est connue[62] ; *EG* est égale à *EC*, *EC* est donc connue.

En outre, la différence entre *AE* et *EC* est connue et nous séparons de *AE* *EG* égale à *EC*, *GA* est alors connue ; la surface de *AE* par *EC* est connue, *EC* est égale à *EG*, la surface de *AE* par *EG* est donc connue ; *GA* est connue et *AE* par *GE* quatre fois est connue ; *AE* par *GE* quatre fois avec le carré de *AG* est égale au carré de *AC* ; *AE* par *GE* quatre fois est connue, le carré de *AG* est connu, le carré de *AC* [38^{v}] est donc connu et *AC* est connue. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **33 (4)** – Nous voulons démontrer la proposition huit de ce livre d'une autre manière.

Soit le triangle *ABC*, nous voulons y mener une droite aboutissant sur *BC* telle que le rapport de la droite ainsi menée à l'une des deux parties de la base soit égal au rapport de *g* à *d*.

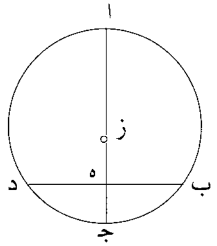


[60] Corollaire de la proposition 11 : $BC^2 - CD^2$ et $BC + CD$ connues, donc $BC - CD$ est connue, *BC* et *CD* sont donc également connues. Cette démonstration est détaillée de façon laborieuse dans une glose marginale du manuscrit de Berlin de la rédaction d'al-Ṭūsī de ce traité (ms. Berlin, Or quart 1867, fol. 154^{r}).

[61] Lemme 1.

[62] Proposition 26.

معلوم، فكلّ واحد من ب ج ج د معلوم، فكلّ واحد من ا ج جـ ه معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن.



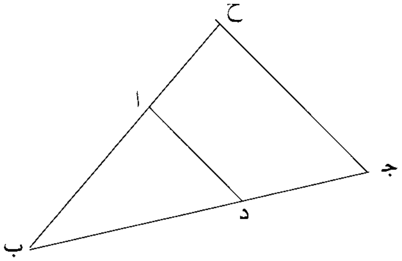
– لب – دائرة ا ب جـ د فيها وتر ب د معلوم وقطرها ا جـ مجهول، وا جـ يقطع وتر ب د على زوايا قائمة، وفضل ا ه على ه جـ معلوم، فأقول: إن القطر معلوم وكلّ واحد من ا ه ه جـ معلوم.

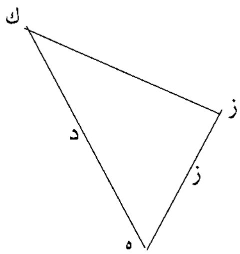
برهانه: أنا نفصل من ا ه مثل ه جـ، وهو ه ز، فسطح ا ه في ه جـ مثل مربّع ه ب، فسطح ا ه في ه جـ معلوم. وز ا معلوم، فـ ا ه معلوم وه ز معلوم؛ وه ز مثل ه جـ، فـ ه جـ معلوم.

وأيضًا، فضل ا ه على ه جـ معلوم، فنفصل من ا ه مثل ه جـ، وهو ه ز، فـ ز ا معلوم؛ وسطح ا ه في ه جـ معلوم، وه جـ مثل ه ز، فسطح ا ه في ه ز معلوم؛ وز ا معلوم، فـ ا ه في ز ه أربع مرات معلوم؛ وا ه في ز ه أربع مرات مع مربّع ا ز مثل مربّع ا جـ، وا ه في ز ه أربع مرات معلوم، ومربّع ا ز معلوم، فمربّع ا جـ / معلوم، فـ ا جـ معلوم. وذلك ما أردنا أن نبيّن. ٣٨ – ظ

– لج – نريد أن نبيّن شكل ح من هذا الكتاب على جهة أخرى.

فليكن مثلّث ا ب جـ، ونريد أن نخرج فيه خطًّا ينتهي إلى ب جـ، وتكون نسبة الخطّ المخرج إلى أحد قسمي القاعدة كنسبة ز إلى د.

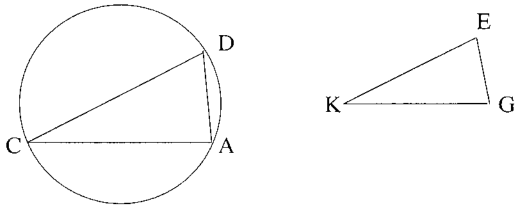




12 في ز ه (الأولى): نجد بعدها «معلوم» مشطوبة – 17 ز إلى د: د إلى ز.

Construisons au point K un angle égal à l'angle ABC, l'angle GKE ; posons KE égale à d ; menons EG égale à g et construisons sur la droite BC un triangle, BHC, dont les angles soient égaux aux angles du triangle GKE ; menons AD parallèlement à HC. Le rapport de HC à CB est égal au rapport de GE à EK, EK est égale à d et GE est égale à g, le rapport de HC à CB est donc égal au rapport de g à d. Le rapport de HC à CB est égal au rapport de AD à DB, le rapport de AD à DB est donc égal au rapport de g à d. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **34 (11)** – Le cercle $ABCD$ a un diamètre connu et la corde AC en est connue[63], nous voulons mener dans l'arc ADC deux droites telles que le rapport de l'une à l'autre soit égal au rapport de EG à HI.



Construisons au point E à partir de la droite EG un angle, KEG, égal à l'angle qui tombe dans le segment ADC, posons EK égale à HI et menons KG ; construisons au point A un angle, l'angle DAC, égal à l'angle KGE et au point C un angle égal à l'angle EKG ; les angles du triangle KEG sont alors égaux aux angles du triangle DAC et le rapport de EK à EG est égal au rapport de CD à DA.

Si les deux droites, AFS et SC, tombaient à l'extérieur du cercle, nous mènerions FC, l'angle extérieur AFC serait égal à l'angle intérieur ASC, or cela n'est pas possible. C'est ce que nous voulions démontrer.

– **35 (12)** – Le cercle ABC a un diamètre connu, le diamètre AB, et le point C est connu[64]. Nous voulons mener du point C une droite qui coupe le diamètre de telle sorte que le rapport de l'une des parties à l'autre soit égal au rapport de i à s[65].

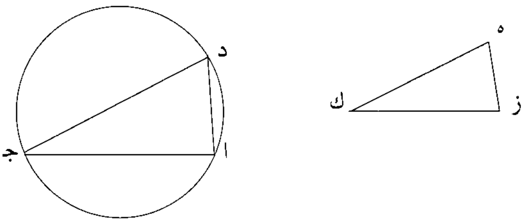
[63] Hypothèses inutilement formulées en termes de données puisqu'il s'agit d'un problème de construction. La formulation d'al-Ṭūsī est la suivante : « menons dans le cercle ABC une corde quelconque, AC ».

[64] La formulation d'al-Ṭūsī est la suivante : « le diamètre AB du cercle ABC et le point C sur sa circonférence sont donnés (*mafrūḍāni*) ».

[65] Problème avec discussion dont le diorisme est évoqué : il faut que la parallèle à (AB) issue de E coupe le cercle. Une condition nécessaire et suffisante à l'existence de solutions serait alors que : $CB \cdot \sin \widehat{CBA} \leq k \cdot R$, où $k = \frac{i}{s}$ et $R = \frac{AB}{2}$.

فنعمل على نقطة ك زاوية مساوية لزاوية ا ب جـ، وهي زاوية ز ك ه، ونجعل ك ه مثل د، ونخرج ه ز ‹مثل ز›، ونعمل على خط ب جـ مثلثًا مساوية زواياه لزوايا مثلّث ز ك ه، وهو ب ح جـ، ‹ونخرج ا د موازيًا لـ ح جـ›. فنسبة ح جـ إلى جـ ب كنسبة ز ه إلى ه ك؛ وه ك مثل د ‹وز ه مثل ز›، فنسبة ح جـ إلى جـ ب كنسبة ز إلى د. ‹ونسبة ح جـ إلى جـ ب كنسبة ا د إلى د ب، فنسبة ا د إلى د ب كنسبة ز إلى د›. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **لد** – دائرة ا ب جـ د معلومة القطر وفيها وتر ا جـ معلوم، ونريد أن نخرج في قوس ا د جـ خطّين تكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ه ز إلى ح ط.

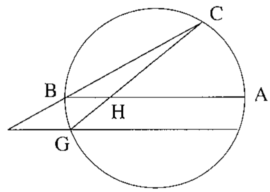


فنعمل على نقطة ه من خطّ ه ز زاوية مساوية للزاوية التي تقع في قطعة ا د جـ، وهي ك ه ز ‹ونجعل ه ك مثل ح ط› ونخرج ك ز؛ ونعمل على نقطة ا زاوية مساوية لزاوية ك ز ه، وهي زاوية د ا جـ، وعلى جـ زاوية مثل زاوية ه ك ز، فزوايا مثلّث ك ه ز مساوية لزوايا مثلّث د ا جـ، فنسبة ه ك إلى ه ز كنسبة جـ د إلى د ا.

فإن وقع الخطّان خارج الدائرة، وهما ا ف س س جـ أخرجنا ف جـ، فتكون زاوية ا ف جـ الخارجة مثل زاوية ا س جـ الداخلة، هذا لا يمكن. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **له** – دائرة ا ب جـ معلومة القطر، ‹والقطر ا ب›، ونقطة جـ معلومة، ونريد أن نخرج من نقطة جـ خطًا يقطع القطر وتكون نسبة أحد قسميه إلى الآخر كنسبة ط إلى س.

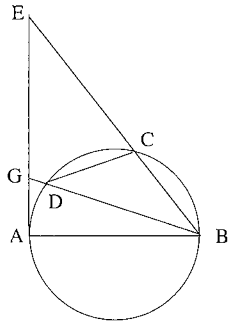
1 ك: ن (كتبها فوق السطر) / ز ك ه: ز د ه – 2 د: ه د / ه ز: ب ك – 4 ه ك: ه د (مرتين) / د: ز د – 5 ز إلى د: ه ز إلى د ه – 11 ك ه ز: د ه ز / ك ز: د ز – 12 ك ز ه: د ه ز – 13 ه ك ز: ه د ز / ك ه ز: د ه ز / ه ك: د ز.



Menons CB et prolongeons-la, posons le rapport de CB à BE égal au rapport de i à s ; menons du point E une droite parallèle au diamètre. Si elle rencontre le cercle, alors il nous est possible de mener la droite comme nous le voulons ; si elle ne rencontre pas le cercle, cela n'est pas possible.

Elle le rencontre au point G, joignons GC ; on a mené, dans le triangle CGE, HB parallèlement à GE, le rapport de CH à HG est alors égal au rapport de CB à BE, c'est-à-dire au rapport donné de i à s. C'est ce que nous voulions démontrer.

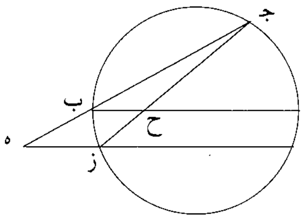
– **36 (14)** – Le cercle ABC a un diamètre connu[66], le diamètre AB, la corde CD, quelle qu'elle soit, s'y trouve, on mène du point A une droite tangente au cercle, on mène les deux droites BC et BD, et on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent la droite tangente, ce sont BCE et BDG. Je dis que le triangle BCD est semblable au triangle EBG.



Démonstration : menons DA ; les deux angles DAB et DCB sont égaux à deux droits, car pour tout quadrilatère <inscrit> dans un cercle deux angles opposés quelconques sont égaux à deux droits[67]. En outre, les angles DCB et DCE sont égaux à deux droits, les deux angles DAB et DCB sont donc égaux aux deux angles DCB et DCE ; nous ôtons l'angle commun, DCB, il reste l'angle DAB égal à l'angle DCE. L'angle GAB est égal à l'angle ADB car chacun d'eux est droit, l'angle GBA est commun aux deux triangles GAB et DAB, il reste l'angle DAB égal à l'angle AGB ; mais l'angle ECD est égal à l'angle DAB, l'angle AGB est donc égal à l'angle ECD. Les deux angles AGB et BGE sont égaux à deux droits et l'angle AGB est égal à l'angle ECD, l'angle EGB est donc égal à l'angle DCB ; l'angle CBD est commun, il reste l'angle CDB égal à l'angle

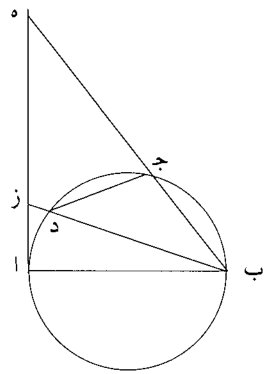
[66] Hypothèse inutile dans l'énoncé de ce théorème. La formulation d'al-Ṭūsī est la suivante : « étant donnés (*mafrūḍāni*) le diamètre AB du cercle ABC et la corde CD...».

[67] Euclide, *Éléments*, III.22. On suppose donc implicitement que C et D appartiennent au même arc AB. Le théorème est cependant encore vrai si C et D appartiennent à chacun des deux arcs AB.



فنخرج جـ ب ونخرجه على استقامة، ونجعل نسبة جـ ب إلى ب ه كنسبة ط إلى س، ونخرج من نقطة ه خطًا موازيًا للقطر. فإن لقي الدائرة فإنه يمكن أن نخرج الخطّ كما أردنا، فإن لم يلقَ الدائرة فليس يمكن ذلك. فيلقاها على نقطة ز، ونصل ز جـ، فمثلّث جـ ز ه قد خرج فيه ح ب موازيًا لـ ز ه، فنسبة جـ ح إلى ح ز كنسبة جـ ب إلى ب ه، أعني نسبة ط إلى س المفروضة. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **لو** – دائرة ا ب جـ معلومة القطر، والقطر ا ب، وقد وقع فيها وتر جـ د كيفما اتّفق، وأخرج من نقطة ا خطّ مماس للدائرة، وأخرج خطّا ب جـ ب د، فأخرجا على استقامة حتى لقيا الخطّ المماس، وهما ب جـ ه ب د ز. فأقول: إن مثلّث ب جـ د يشبه مثلّث ه ب ز.



برهانه: أنا نخرج د ا، فزاويتا د ا ب د جـ ب معادلتان لقائمتين، لأن كلّ شكل ذي أربعة أضلاع في دائرة فكلّ زاويتين مقابلتين من زواياه معادلتان لقائمتين. وأيضًا، زاويتا د جـ ب د جـ ه معادلتان لقائمتين، فزاويتا د ا ب د جـ ب مثل زاويتي د جـ ب د جـ ه، فنسقط الزاوية المشتركة، وهي د جـ ب، فيبقى زاوية د ا ب مثل زاوية د جـ ه. وزاوية ز ا ب مثل زاوية ا د ب، لأن كلّ واحدة منهما قائمة، وزاوية ز ب ا مشتركة لمثلّثي ز ا ب د ا ب، فبقيت زاوية د ا ب مثل زاوية ا ز ب؛ وزاوية ه جـ د مثل زاوية د ا ب، فزاوية ا ز ب مثل زاوية ه جـ د. وزاويتا ا ز ب ب ز ه معادلتان لقائمتين، وزاوية ا ز ب مثل زاوية ه جـ د، فزاوية ه ز ب مثل زاوية د جـ ب، وزاوية جـ ب د مشتركة، فبقيت

10 خط مماس: خطًا مماسًا – 13 د ا: ز ا – 15 مقابلتين: مقابلان – 20 ز ا ب: د ا ب – 21 ا د ب: ا ز ب – 23 ه جـ د: ه جـ ا – 24 ه جـ د: ه جـ ا – 25 ه جـ د: ه جـ ا / ه ز ب: ه د ب / د جـ ب: ز جـ ب.

GEB ; les angles du triangle *DCB* sont donc égaux aux angles du triangle *EGB*, ils sont donc semblables. C'est ce que nous voulions démontrer.

Nous démontrons cette proposition d'une autre manière[68] [39r] :

Menons *CA*, l'angle *ACB* est égal à l'angle *EAB* car chacun d'eux est droit ; l'angle *CBA* est commun, il reste l'angle *CAB* égal à l'angle *AEC*. Mais l'angle *CDB* est égal à l'angle *CAB*, l'angle *CDB* est donc égal à l'angle *BEG* ; l'angle *CBD* est commun, il reste l'angle *DCB* égal à l'angle *EGB* ; ils sont donc semblables. C'est ce que nous voulions démontrer.

Le Livre des hypothèses de Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī est achevé.

Louanges à Dieu seigneur des deux mondes ;
que la bénédiction soit sur Son envoyé Muḥammad et toute sa famille.
Dieu nous suffit qui nous garde de l'erreur.

[68] Cette seconde démonstration est valable dans tous les cas de figure, que *C* et *D* appartiennent au même arc *AB* ou pas.

زاوية جـ د ب مثل زاوية ز ه ب، فزوايا مثلّث د جـ ب مساوية لزوايا مثلّث ه ز ب، فهما متشابهان. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ونبيّن هذا الشكل على جهة أخرى./

فنخرج جـ ا، فزاوية ا جـ ب مثل زاوية ه ا ب لأن كلّ واحدة منهما ٣٩-و قائمة؛ وزاوية جـ ب ا مشتركة، فبقيت زاوية جـ ا ب مثل زاوية ا ه جـ. ولكن زاوية جـ د ب مثل زاوية جـ ا ب، فزاوية جـ د ب مثل زاوية ب ه ز؛ وزاوية جـ ب د مشتركة فبقيت زاوية د جـ ب مثل زاوية ه ز ب، فهما متشابهان. فذلك ما أردنا أن نبيّن.

تمّ كتاب المفروضات لثابت بن قرّة الحرّاني.
والحمد للّه ربّ العالمين والصلوة على رسوله محمّد وآله أجمعين
وحسبنا اللّه ويعم المعين.

1 جـ د ب : ز جـ ب / ز ه ب : ه ز ب / د جـ ب : ز جـ ب.

THĀBIT IBN QURRA : CONSTRUCTION D'UN POLYÈDRE SEMI-RÉGULIER À QUATORZE FACES, 8 TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX ET 6 CARRÉS

Katia ASSELAH

Nous proposons ici une édition, une traduction française ainsi qu'un commentaire mathématique et historique du texte de Thābit ibn Qurra : *Construction d'un polyèdre semi-régulier à quatorze faces, 8 triangles équilatéraux et 6 carrés.* La première édition de ce texte a été établie par E. Bessel-Hagen et O. Spies, elle est accompagnée d'une traduction en allemand[1].

Nous n'avons de ce texte de Thābit ibn Qurra qu'un manuscrit unique consultable à la bibliothèque Koprülü d'Istanbul sous la cote 948/3 (folios 108-115). Thābit ibn Qurra y explique comment inscrire, dans une sphère connue, un polyèdre semi-régulier à quatorze faces d'arêtes égales dont huit faces sont des triangles équilatéraux et les six autres des carrés.

Ce polyèdre semi-régulier est un des 13 polyèdres semi-réguliers d'Archimède ; en l'absence des textes d'Archimède nous n'avons connaissance de ces solides que par *La Collection mathématique* de Pappus[2]. Dans cet ouvrage, Pappus décrit les 13 polyèdres archimédiens inscriptibles dans une sphère donnée et leur attribue les noms suivants :

[1] E. Bessel-Hagen et O. Spies, « Ṯābit b. Qurra's Abhandlung über einen halbregelmässigen Vierzehnflächner », *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, v. 2B, Studien, déc. 1932, p. 186-198.

[2] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Œuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, 2 vol., Paris / Bruges, 1933 ; nouveau tirage Paris, 1982, t. I, p. 272-276.

Dénomination[3]	Nombre de Faces	Type de Faces
Octaèdre	8 faces	4 triangles, 4 hexagones
Décatétraèdre I	14 faces	8 triangles, 6 carrés
Décatétraèdre II	14 faces	6 carrés, 8 hexagones
Décatétraèdre III	14 faces	8 triangles, 6 octogones
Icohexaèdre I	26 faces	8 triangles, 18 carrés
Icohexaèdre II	26 faces	12 carrés, 8 hexagones, 6 octogones
Triacontadoèdre I	32 faces	20 triangles, 12 pentagones
Triacontadoèdre II	32 faces	12 pentagones, 20 hexagones
Triacontadoèdre III	32 faces	20 triangles, 12 décagones
Triacontaoctaèdre	38 faces	32 triangles, 6 carrés
Hexécontadoèdre I	62 faces	20 triangles, 30 carrés, 12 pentagones
Hexécontadoèdre II	62 faces	30 carrés, 20 hexagones, 12 décagones
Ennécontadoèdre	92 faces	80 triangles, 12 pentagones

Dans ces quelques pages, Pappus s'attarde sur le décompte des angles solides et des arêtes de ces figures mais ne donne aucun renseignement sur leur construction. Quelques informations relatives aux constructions des polyèdres d'Archimède nous sont parvenues par une scholie du manuscrit du Vatican *Pappus III*[4] : seule la construction des cinq premiers est évoquée, ils sont construits en tronquant certains des cinq polyèdres réguliers (platoniciens)[5] ou par troncature des nouveaux solides semi-réguliers obtenus.

Dénomination	Construction, scholie contenue dans *Pappus III*
Octaèdre	*à partir du tétraèdre régulier en divisant ses arêtes en trois parties égales, en menant des plans par les points de division et en découpant ainsi ses angles solides.*
Décatétraèdre I	*à partir du cube en divisant ses arêtes en deux parties égales, en menant des plans par les points de division et en découpant ainsi ses huit angles solides.*
Décatétraèdre II	*à partir de l'octaèdre en divisant ses arêtes en trois parties égales, en menant des plans par les points de division et en découpant ainsi les six angles solides.*
Décatétraèdre III	*à partir du cube en divisant chacune de ses arêtes en trois segments tels que le carré sur celui du milieu soit équivalent au double carré de chacun des segments extrêmes.*
Icohexaèdre I	*à partir du polyèdre de quatorze – huit triangles et six carrés* (Décatétraèdre I) *–, chacune de ses arêtes étant divisée en deux parties égales, et des plans étant menés par les points de division …*

[3] Les chiffres romains qui suivent le nom ne sont ici introduits que pour faciliter la dénomination des figures selon l'un des sept groupes auxquels elles appartiennent.

[4] Archimède, *Commentaires d'Eutocius et Fragments*, texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris, Les Belles Lettres, 1972, t. IV, p. 205.

[5] Selon une note de Héron, Platon connaissait le décatétraèdre I : *Héron, Définit. 104, Commentaires d'Eutocius et fragments*, éd. Mugler, p. 206.

Ainsi, la figure à 14 faces qui nous occupe ici, le « décatétraèdre I », aurait été construite par Archimède en tronquant le cube : en prenant le milieu de chaque arête du cube et en coupant les 8 angles solides de ce cube selon les plans que délimitent les milieux des arêtes :

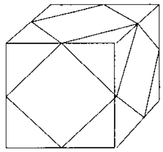


Fig. 1

Sur les polyèdres, les seuls éléments de démonstration et antérieurs au travail de Thābit ibn Qurra, concernent les cinq polyèdres réguliers : la construction, dans la sphère, des cinq solides platoniciens est l'objet du livre XIII des *Éléments* d'Euclide (plus précisément, les propositions 13 à 17). Pappus, à la section 40 du livre III (propositions 54 à 58) de *La Collection mathématique*, donne une analyse et une synthèse de la construction de chacun de ces cinq solides. Comme le souligne Ver Eecke[6] (reprenant lui-même Woepcke[7]), le point de vue des deux auteurs est radicalement différent : outre le fait que les démonstrations d'Euclide sont purement synthétiques, la construction des polyèdres est indépendante de la sphère : Euclide construit la figure et montre ensuite qu'elle est inscrite dans une sphère. Chez Pappus, la figure est construite directement dans la sphère. Autre différence qui met en relief les objectifs de chacun : chez Euclide, la figure est construite à partir du seul diamètre de la sphère, la visée semble être le rapport entre l'arête du polyèdre et le diamètre de la sphère circonscrite (proposition 18, Euclide compare les arêtes des différents polyèdres et le diamètre de la sphère). En revanche, le diamètre de la sphère n'est pas au centre des constructions de Pappus : il construit les cinq polyèdres à partir de couples de cercles égaux et parallèles, une relation métrique lie bien entendu le diamètre de ces cercles et le diamètre de la sphère, mais une fois ceux-ci construits, Pappus construit sur ces cercles les différents sommets du polyèdre. Par exemple, les deux mêmes cercles égaux et parallèles permettent à la fois la construction du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre. Ainsi, plus que le diamètre de la sphère, le positionnement des sommets des polyèdres sur la sphère semble davantage caractériser les objectifs de Pappus.

[6] *La Collection mathématique*, éd. Ver Eecke, p. XXIII.

[7] F. Woepcke, « Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafa, §4. De la construction des polyèdres », *Journal asiatique*, série 5, tome V, février-mars 1855, p. 238-240.

Près d'un siècle après Thābit ibn Qurra, Abū al-Wafā' al-Būzjānī étudiera les cinq polyèdres platoniciens et certains polyèdres semi-réguliers d'Archimède, dans son traité *Sur ce qui est indispensable aux artisans dans les constructions géométriques* (Octaèdre, décatétraèdre II, décatétraèdre III, triacontadoèdres II et III) mais le polyèdre archimédien qui nous occupe ici, le décatétraèdre I, n'est pas abordé. Woepcke situe les travaux d'Abū al-Wafā' sur les polyèdres dans la lignée de ceux de Pappus : en effet, Abū al-Wafā' s'intéresse aux polygones sphériques délimités par les sommets du polyèdre sur la sphère et par conséquent aux positions des sommets des polyèdres sur la sphère.

Le travail de Thābit ibn Qurra sur le décatétraèdre I n'est ni à mettre en filiation avec les troncatures d'Archimède, ni avec les développements de Pappus. La construction de Thābit ibn Qurra part d'un « grand cercle » de la sphère à partir duquel il construit un hexagone régulier *AEFBCG*, comme Euclide construisait à partir du diamètre de la sphère un premier polygone sur lequel il édifiait sa construction. Une fois l'hexagone construit la sphère « disparaît » : Thābit ibn Qurra construit le solide à l'aide de cet hexagone, sans allusion à la sphère ; ainsi la construction du polyèdre devient indépendante de la sphère, comme chez Euclide. La démonstration de Thābit ibn Qurra est une synthèse classique composée de deux parties : comme Euclide, il construit d'abord l'objet cherché (le décatétraèdre I) puis montre que l'objet ainsi construit répond bien aux exigences du problème. La démonstration d'Euclide visait à montrer que la figure construite était inscrite dans la sphère, l'objectif final étant les relations métriques entre l'arête du polyèdre et le diamètre de la sphère. Thābit ibn Qurra montre que la figure construite a quatorze faces d'arêtes égales et d'angles égaux, que huit de ces faces sont des triangles équilatéraux et les six autres des carrés, l'inscription du solide dans la sphère étant une conséquence immédiate de sa construction.

Construction : Soit *D* le centre de la sphère, et soit *ABC* un « grand » cercle de la sphère de centre *D*. Dans ce cercle *ABC*, on construit un hexagone régulier, soit *AEFBCG* cet hexagone. On considère les six triangles équilatéraux *ADE*, *FDB*, *CDG*, *EDF*, *BDC*, *GDA*.

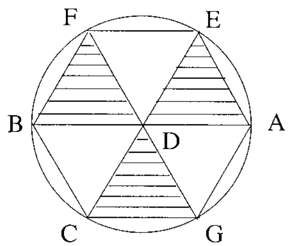


Fig. 2

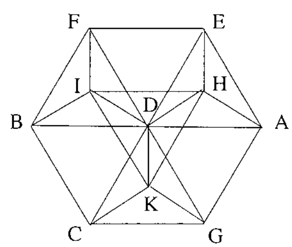


Fig. 3

À partir des triangles ADE, FDB, CDG et sur la même demi-sphère délimitée par le plan ABC, on construit les tétraèdres réguliers (ou « pyramide de feu ») de sommets respectifs H, I, K, soient $ADEH$, $FDBI$ et $CDGK$ ces tétraèdres.

De même, à partir des triangles EDF, BDC, GDA et sur l'autre demi-sphère, on construit trois autres tétraèdres réguliers.

On a ainsi construit la figure souhaitée.

Démonstration : On trace la perpendiculaire au plan ADE passant par H. Soit L le point d'intersection de cette perpendiculaire et du plan ADE.

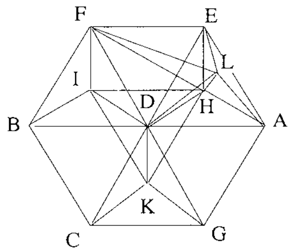


Fig. 4

HL est perpendiculaire à AL, à LE et à LD, le triangle ALH est donc rectangle en L, $LH^2 + AL^2 = AH^2$; de même, HLD est rectangle en L, $HL^2 + LD^2 = HD^2$. Mais $HD = AH$ ($ADEH$ tétraèdre régulier), donc $LH^2 + AL^2 = HL^2 + LD^2$, soit $AL = LD$.

Or $AE = ED$ (AE et ED côtés de $AEFBCG$, hexagone régulier), par conséquent, les triangles ALE et LDE sont égaux (puisque $AL = LD$, $AE = ED$ et qu'ils ont en commun le côté LE).

On a donc $E\hat{A}L = L\hat{D}E$, $A\hat{E}L = L\hat{E}D$ et $A\hat{L}E = E\hat{L}D$. Ainsi (LE) partage l'angle AED en deux angles égaux :

$$A\hat{E}L = L\hat{E}D = \frac{A\hat{E}D}{2}.$$

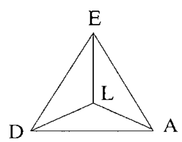


Fig. 5

Or le triangle ADE est équilatéral ; posons $\hat{d} = 90°$, on a donc

$$A\hat{E}D = \frac{2}{3}\hat{d}, \text{ et } L\hat{E}D = \frac{A\hat{E}D}{2} = \frac{1}{3}\hat{d}.$$

On a aussi $D\hat{E}F = \frac{2}{3}\hat{d}$ puisque DEF est un triangle équilatéral. Par conséquent,

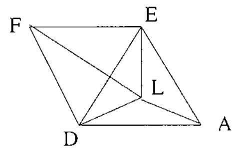


Fig. 6

$$L\hat{E}F = L\hat{E}D + D\hat{E}F = \hat{d} \;;$$

LEF est donc rectangle en E et $LE^2 + EF^2 = FL^2$.

D'où : $LE^2 + EF^2 + HL^2 = FL^2 + HL^2$.

Mais HLE est rectangle en L, $LE^2 + HL^2 = EH^2$, donc $EF^2 + EH^2 = LF^2 + HL^2$.

HL est perpendiculaire au plan ADE, et F est dans le même plan, donc HL perpendiculaire à LF et $HL^2 + LF^2 = HF^2$, ainsi $EF^2 + EH^2 = HF^2$ et le triangle FEH est donc rectangle en E.

En raisonnant de même sur la pyramide $FDBI$, l'angle EFI est droit. Ainsi les angles FEH et EFI sont droits et $FE = FI = EH = \frac{AB}{2}$ (car FE, FI, EH sont les côtés de tétraèdres réguliers de base des triangles équilatéraux, eux-mêmes égaux puisqu'ils composent l'hexagone régulier inscrit dans le cercle ABC), donc $EHIF$ est un carré.

On montre de même que $BIKC$ et $GKHA$ sont des carrés et que leurs homologues sur l'autre demi-sphère délimitée par le plan ABC sont aussi trois carrés, le côté de ces carrés étant égal au rayon de la sphère.

Les six triangles CHG, FBI, HEA et leurs homologues sur l'autre demi-sphère sont équilatéraux puisque leurs côtés sont les côtés des carrés. De même HIK et son homologue sur l'autre demi-sphère sont équilatéraux.

TEXTE ET TRADUCTION

Sur la construction d'une figure solide à quatorze faces, qu'entoure une sphère connue

Fī 'amal shakl mujassam dhī arba' 'asharat qā'ida tuḥīṭu bihi kura ma'lūma

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Traité d'Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra

que Dieu lui accorde sa miséricorde

sur la construction d'une figure solide à quatorze faces, qu'entoure une sphère connue

Nous voulons démontrer comment construire une figure solide à quatorze faces, de côtés et d'angles égaux qu'entoure une sphère connue.

Les faces de cette figure ne sont pas semblables mais huit d'entre elles sont des triangles et les six autres des carrés ; la position des unes relativement aux autres est selon un ordre semblable et l'arête de ce solide est égale au demi-diamètre de la sphère.

Que l'un des grands cercles de la sphère connue, dans laquelle nous voulons construire le solide, soit le cercle *ABC* de centre *D*. Si nous voulons construire dans cette sphère une figure solide à quatorze faces conforme à ce que nous avons décrit, construisons dans le cercle [109] *ABC* un hexagone équilatéral et équiangle, l'hexagone *AEFBCG*, et menons du centre *D* aux angles de l'hexagone, les droites *DA*, *DE*, *DF*, *DB*, *DC* et *DG*. Les triangles en lesquels ces droites divisent la figure hexagonale sont alors des triangles équilatéraux. Construisons sur les triangles *ADE*, *FDB*, *CDG*, parmi ceux-ci, des pyramides qu'entourent des triangles équilatéraux, on les appelle « figures de feu » ; que les points de leurs sommets soient les points *H*, *I*, *K*. Joignons les droites *HI*, *IK*, *KH* et construisons sur les triangles *EDF*, *BDC*, *DGA*, de l'autre côté du plan du cercle *ABC*, d'autres pyramides de feu comme nous avons construit les pyramides de feu mentionnées précédemment ; que l'on joigne les points de leurs sommets par des lignes droites. Je dis que nous avons construit, dans la sphère connue, une figure à quatorze faces, équilatérale [110] et équiangle, telle que huit de ses faces sont des triangles équilatéraux et les six restantes des quadrilatères équilatéraux et rectangles, chacun des côtés des quadrilatères étant égal à chacun des côtés des triangles ; leur composition est selon un ordre unique et le côté de ce solide est égal au demi-diamètre de la sphère.

بسم الله الرحمن الرحيم ١٠٨

‹مقالة› لأبي الحسن ثابت بن قرة

رحمه الله

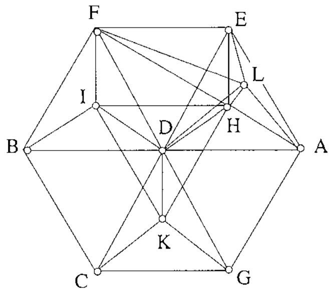
في عمل شكل مجسم ذي أربع عشرة قاعدة تحيط به كرة معلومة

نريد أن نبيّن كيف نعمل شكلاً مجسَّمًا ذا أربع عشرة قاعدة متساوي الأضلاع والزوايا تحيط به كرة معلومة.

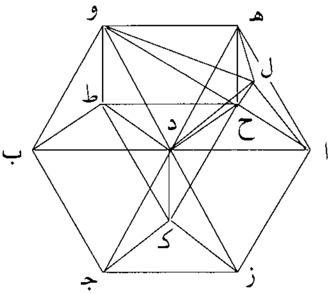
وهذا الشكل لا يكون متشابه القواعد لكن ثماني قواعد من قواعده مثلّثات وستًا منها مربّعات؛ ووضع بعضها مع بعض على نظام متشابه وضلع هذا المجسم مثل نصف قطر الكرة.

فلتكن دائرة عظمى من دوائر الكرة المعلومة التي نريد أن نعمل فيها المجسَّم دائرة ا ب جـ ومركزها د. فإذا أردنا أن نعمل في هذه الكرة شكلاً مجسَّمًا ذا أربع عشرة قاعدة على ما وصفنا، فإنا نعمل في دائرة / ١٠٩ ا ب جـ مسدَّسًا متساوي الأضلاع والزوايا، وهو مسدَّس ا هـ و ب جـ ز، ونخرج من مركز د إلى زوايا المسدَّس خطوط د ا د هـ د و د ب د جـ د ز. فتكون المثلثات التي تقسم به هذه الخطوط الشكل المسدَّس مثلثات متساوية الأضلاع. ونعمل على مثلثات ا د هـ و د ب جـ د ز منها مخروطات تحيط بها مثلثات متساوية الأضلاع وقد تسمى الأشكال النارية، ولتكن نقط رؤوسها نقط ح ط كـ. ونصل خطوط ح ط ط كـ كـ ح ونعمل على مثلثات هـ د و ب د جـ د ز ا، في الجهة الأخرى عن سطح دائرة ا ب جـ، مخروطات أخر نارية كما عملنا المخروطات النارية التي تقدَّم ذكرها؛ وتصل فيما بين نقط رؤوسها خطوط مستقيمة. فأقول: إنا قد عملنا في الكرة المعلومة شكلاً ذا أربع عشرة قاعدة متساوي الأضلاع / ١١٠ والزوايا، تكون ثماني قواعد من قواعده مثلثات متساوية الأضلاع والست الباقية مربعات متساوية الأضلاع قائمة الزوايا، وكلّ ضلع من أضلاعها مساوٍ لكل واحد من أضلاع المثلثات؛ وتركيبها على نظام واحد وضلع هذا المجسم مثل نصف قطر الكرة.

16 منها: فوق السطر.



Démonstration : nous menons du point *H*, qui est le sommet de la pyramide de feu *ADEH*, une perpendiculaire au plan de la face *ADE*, soit la perpendiculaire *HL* ; et nous menons du point *L* vers les points *A*, *E*, *F*, *D* les droites *AL*, *LE*, *LF*, *LD*. Puisque la droite *HL* est perpendiculaire au plan *ADE*, elle est perpendiculaire à toutes les droites menées de son extrémité dans ce plan, par conséquent, elle est perpendiculaire aux droites *AL* et *LD* ; donc <la somme des> carrés des droites *HL* et *AL* est égale au carré de *AH* et <la somme des> carrés des droites *HL* et *LD* est égale au carré de *DH*. Mais le carré de la droite *AH* [111] est égal au carré de la droite *DH* car le triangle *AHD* est équilatéral puisque c'est l'une des faces de la pyramide de feu. Donc <la somme des> carrés des droites *HL* et *AL* est égale à <la somme des> carrés des droites *HL* et *LD*. Si nous ôtons ce qui est commun, à savoir le carré de la droite *HL*, il reste le carré de la droite *AL* égal au carré de la droite *LD* ; les droites *AL* et *LD* des triangles *ALE* et *LDE* sont donc égales ; les droites *AE* et *ED* de ces triangles sont aussi égales car le côté de l'hexagone est égal au demi-diamètre et le côté *LE* est commun aux deux triangles, par conséquent, ces deux triangles sont égaux et leurs angles sont égaux chacun à son homologue. Donc la droite *LE* partage l'angle *AED* en deux moitiés. Mais l'angle *AED* est les deux tiers d'un angle droit puisque le triangle *AED* est équilatéral, donc l'angle *LED* est le tiers d'un angle droit. Or l'angle *DEF* est les deux tiers d'un angle droit car le triangle *EDF* est équilatéral. Donc le tout, l'angle *LEF*, est droit. Par conséquent, les carrés des droites *LE* et *EF* si on les ajoute [112] sont égaux au carré de *LF*. Nous posons le carré de *HL* commun, alors les carrés des droites *LE*, *EF*, *HL* ajoutés sont égaux aux carrés des droites *LF*, *LH* ajoutés. Quant à <la somme des> carrés des droites *LE* et *HL*, elle est égale au carré de *EH*, puisque *HL* est perpendiculaire à toutes les lignes droites qui sont menées du



برهان ذلك: أنّا نخرج من نقطة ح، التي هي رأس مخروط ا د هـ ح الناري، عموداً على سطح قاعدته التي هي ا د هـ، وهو عمود ح ل؛ ونخرج من نقطة ل إلى نقط ا هـ و د خطوط ا ل ل هـ ل و ل د. فلأنّ خط ح ل عمود على سطح ا د هـ، يكون عموداً على جميع الخطوط التي تخرج من طرفه في هذا السطح، فهو إذن عمود على خطي ا ل ل د؛ فيكون المربعان الكائنان من خطي ح ل ا ل مثل المربع الكائن من ا ح ويكون المربعان الكائنان من خطي ح ل ل د مثل المربع الكائن من د ح. ولكن مربع خط ا ح / مثل مربع خط د ح لأن مثلث ا ح د متساوي الأضلاع إذ كان إحدى ١١١ قواعد المخروط الناري. فمربعا خطي ح ل ا ل مثل مربعي خطي ح ل ل د. وإذا أسقطنا المشترك، وهو مربع خط ح ل، بقي مربع خط ا ل مثل مربع خط ل د، فخطا ا ل ل د من مثلثي ا ل هـ ل د هـ متساويان؛ وخطا ا هـ هـ د أيضاً منهما متساويان، لأن ضلع المسدَّس مساوٍ لنصف القطر؛ وضلع ل هـ مشترك للمثلثين، فهذان المثلثان إذن متساويان وزواياهما متساوية، كل واحدة لنظيرتها. فقد قسم خط ل هـ زاوية ا هـ د بنصفين. ولكن زاوية ا ه د ثلثا زاوية قائمة لأن مثلث ا هـ د متساوي الأضلاع، فزاوية ل هـ د ثلث قائمة. وزاوية د هـ و ثلثا قائمة لأن مثلث هـ د و متساوي الأضلاع. فجميع زاوية ل هـ و قائمة. فالمربعان الكائنان من خطي ل هـ هـ و، إذا جمعا، / مساويان للمربع الكائن من ل و. ونجعل المربع الكائن من ح ل مشتركًا، ١١٢ فيصير المربعات الكائنة من خطوط ل هـ هـ و ح ل مجموعة مثل المربعين الكائنين من خطي ل و ل ح مجموعين. فأما المربعان الكائنان من خطي ل هـ ح ل، فهما مثل المربع الكائن من هـ ح، لأن ح ل عمود على كل الخطوط

8 إحدى: احد – 14 لنظيرتها: ونظيرتها.

point L dans le plan ADE, qui est le plan du cercle ABC. De même également, si nous joignons la droite HF, alors les carrés des droites HL et LF si on les ajoute sont égaux au carré de la droite HF ; <la somme des> carrés des droites EH et EF devient alors égale au carré de la droite FH, par conséquent l'angle FEH est droit. En procédant de même, nous démontrons que l'angle EFI est également droit. Les côtés EH et FI du quadrilatère $HEFI$ sont alors perpendiculaires à son côté EF. Or cette figure est dans un même plan et puisque les droites EH, [113] FI, EF sont trois, que l'une d'elles est un des côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle ABC et que les deux droites restantes sont égales à deux des côtés de cet hexagone, alors trois des côtés de la surface $EHIF$ sont égaux ; or deux des angles, mentionnés précédemment, de cette figure sont droits, on montre donc ainsi que cette figure est un quadrilatère équilatéral et rectangle. De même on montre également que chacun des deux quadrilatères homologues à ce carré, à savoir les quadrilatères $BIKC$ et $GKHA$, est rectangle et équilatéral, et que les trois quadrilatères qui sont de l'autre côté et dont les bases sont les droites AE, FB et CG sont aussi rectangles et équilatéraux. Or les côtés de ces six quadrilatères sont égaux puisqu'ils sont égaux aux côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle ABC. Les côtés des six triangles qui sont entre ces carrés, les triangles AEH, FBI, CKG et leurs homologues de l'autre côté, qui sont ceux dont les bases sont les droites EF, BC, GA égales et égales aux côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle ABC, sont, par conséquent, égaux aux côtés des six carrés que nous avons mentionnés. [114] Quant au triangle HIK, chacun de ses côtés est un des côtés des carrés $EHIF$, $BIKC$, $GKHA$, qui sont égaux aux côtés de l'hexagone, par conséquent, ils sont égaux. Il en est de même également pour le triangle qui est de l'autre côté et qui est l'homologue du triangle HIK. Donc ces deux triangles sont équilatéraux et égaux aux six autres triangles mentionnés précédemment. Ainsi, quatorze faces entourent donc le solide que nous avons construit, selon ce que nous avons décrit. Et ses faces sont assemblées selon un ordre semblable, puisque autour de chacun des triangles, sur ses côtés se trouvent trois carrés, autour de chacun des carrés, sur ses côtés se trouvent quatre triangles et chacun des angles de ce solide est entouré par deux angles de

المستقيمة التي تخرج من نقطة ل في سطح ا د هـ، الذي هو سطح دائرة ا ب جـ. وبمثل ذلك أيضًا، إذا وصلنا خط ح و، يكون المربعان الكائنان من خطي ح ل ل و، إذا جمعا، مساويين للمربع الكائن من خط ح و؛ فيصير المربعان الكائنان من خطي هـ ح هـ و مثل المربع الكائن من خط و ح، فزاوية و هـ ح إذن قائمة. وبمثل هذا المسلك، نبيّن أن زاوية هـ و ط أيضًا قائمة. فشكل ح هـ و ط ذو الأربعة الأضلاع قد صار ضلعا هـ ح و ط من أضلاعه عمودين على ضلع هـ و منه. وهذا الشكل في سطح واحد، ولأن خطوط هـ ح / و ط هـ و ثلاثة وواحد منها ضلع من أضلاع المسدّس الذي في ١١٣
دائرة ا ب جـ، والخطان الباقيان مساويان لضلعين من أضلاع ذلك المسدّس، تكون ثلاثة من أضلاع سطح هـ ح ط و متساوية؛ والزاويتان اللتان ذكرنا آنفًا من زواياه قد كانتا قائمتين، فيتبيّن من ذلك أنه مربع متساوي الأضلاع قائم الزوايا. وكذلك أيضًا، يتبيّن أن كل واحد من المربعين النظيرين لهذا المربع، وهما مربعا ب ط كـ جـ ز كـ ح ا، قائم الزوايا متساوي الأضلاع، وأن الثلاثة المربعات التي في الجهة الأخرى، التي قواعدها خطوط ا هـ و ب جـ ز، هي أيضًا قائمة الزوايا متساوية الأضلاع. وأضلاع جميع هذه الستة المربعات متساوية لأنها مساوية لأضلاع المسدس الذي في دائرة ا ب جـ. وأيضًا، فإن أضلاع الستة المثلثات التي من هذه المربعات، وهي مثلثات ا هـ ح و ب ط جـ كـ ز، ونظائرها من الجهة الأخرى، وهي التي قواعدها خطوط هـ و ب جـ ز ا متساوية ومساوية لأضلاع المسدّس الذي في دائرة ا ب جـ، فهي إذن مساوية لأضلاع المربعات الستة التي ذكرنا. / وأما مثلث ١١٤
ح ط كـ، فإن كل واحد من أضلاعه هو ضلع من أضلاع مربعات هـ ح ط و ب ط كـ جـ ز كـ ح ا، التي هي مساوية لأضلاع المسدّس، فهي إذن متساوية. وكذلك أيضًا، يكون المثلث الذي في الجهة الأخرى، الذي هو نظير لمثلث ح ط كـ، فهذان المثلثان متساويا الأضلاع ومساويان لسائر الستة المثلثات التي تقدم ذكرها. فقد أحاط بالمجسم الذي عملنا أربع عشرة قاعدة على ما وصفنا. وقد ركبت قواعده على نظام متشابه، لأن حول كل مثلث منها ثلاثة مربعات على أضلاعه، وحول كل مربع منها أربعة مثلثات على أضلاعه، وكل زاوية من زوايا هذا المجسم قد أحاط بها زاويتا مربع وزاويتا

27 ثلاثة: ثلث.

carrés et entre eux deux, par deux angles de triangle ; cela survient selon la voie de l'égalité dans tous les angles ; par conséquent, tous ses angles sont égaux. Quant à la sphère connue dont nous avons voulu qu'elle entoure cette figure solide, cela est clair, du fait que le cercle *ABC* passe par les points de certains angles de cette figure et que les droites qui sont menées du centre de cette sphère vers les angles [115] restants qui sont aux points *H*, *I*, *K*, à savoir les droites *DH*, *DI*, *DK* et leurs homologues de l'autre côté, sont égales et égales au demi-diamètre de la sphère, puisque ce sont des côtés des figures pyramidales de feu que nous avons d'abord construites. La surface de la sphère passe donc par tous les angles de cette figure solide que nous avons construite et le côté de cette figure à 14 faces est égal au demi-diamètre de la sphère.

Louanges à Dieu, Seigneur des deux mondes.

Écrit par Ibrāhīm Ibn Hilāl ibn Ibrāhīm ibn Zahrūn al-Ṣābi' al-Ḥarrānī, le copiste ; au cours du mois Dhū al-Ḥijja de l'année de l'hégire 370 ; sa source provient des archives de notre grand-père Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra, que Dieu lui accorde sa miséricorde, et est écrit de sa main.

مثلث فيما بينهما، وجرى ذلك على سبيل تساوٍ في جميع زواياه، فزواياه إذن متساوية. فأما أن الكرة المعلومة التي أردنا أن تحيط بهذا الشكل المجسَّم، فهو بيّن، وذلك أن دائرة ا ب جـ تمرّ بنقط زوايا من زوايا هذا الشكل، والخطوط التي تخرج من مركز هذه الكرة إلى الزوايا / الباقية منه ١١٥ التي عند نقط ح ط ك، وهي خطوط د ح د ط د ك، ونظائرها التي في الجهة الأخرى متساوية ومساوية لنصف قطر الكرة، لأنها أضلاع للأشكال المخروطة النارية التي عملنا أولاً، فبسيط الكرة إذن يمرّ بجميع زوايا هذا الشكل المجسَّم الذي عملنا، وضلع هذا الشكل ذي الأربع عشرة قاعدة الذي ذكرنا مثل نصف قطر الكرة.

والحمد لله ربّ العالمين.

وكتب إبراهيم بن هلال بن إبراهيم بن زهرون الصابئ الحرّاني الكاتب؛ في ذي الحجة سنة سبعين وثلاثمائة؛ نسخته من دستور جدّنا أبي الحسن ثابت بن قرة، رحمه الله، الذي بخطه.

2 الشكل: في الهامش – 12 ذي: ذو.

CHAPITRE IV

LA FIGURE SECTEUR ET LA COMPOSITION DES RAPPORTS

LE TRAITÉ DE THĀBIT IBN QURRA SUR *LA FIGURE SECTEUR*[*]

Hélène BELLOSTA

Suscités par la reprise massive de la recherche en astronomie au IX^{e} siècle dans le monde islamique et essentiellement à Bagdad, laquelle nécessite des outils mathématiques nouveaux, une floraison de traités, tant astronomiques que mathématiques, voit le jour à cette époque. D'entre les traités mathématiques, un certain nombre est consacré à la « figure secteur » (*al-shakl al-qaṭṭā'*), c'est-à-dire au théorème dit « de Ménélaüs » sur la sphère, lequel généralise le théorème dit « de Ménélaüs » dans le plan. Ce théorème de Ménélaüs sur la sphère, ou règle des six quantités, est, en l'absence du théorème des sinus sur la sphère, lequel ne date que de la deuxième moitié du X^{e} siècle, le principal outil de l'astronomie sphérique. Le traité de Thābit ibn Qurra sur *La Figure secteur* est le premier de ces traités consacrés au théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère, à nous être parvenu ; point de départ de tout un courant, il influencera profondément le développement ultérieur de la géométrie sphérique. Ce traité, qui est en fait une épître adressée à un correspondant malheureusement anonyme, présente en outre l'intérêt de montrer que, dans le milieu scientifique de cette époque à Bagdad, beaucoup s'intéressaient à ce théorème, essayaient d'en énoncer d'autres cas de figure et de compléter la démonstration qu'en donne Ptolémée dans l'*Almageste*[1].

Dans son introduction, Thābit souligne l'importance de ce théorème pour l'astronomie :

> Je ne connais aucune autre proposition de géométrie, utilisée en astronomie, que les gens aient autant discutée que cette proposition, ni à laquelle ils

[*] Cet article, publié dans la revue *Arabic Sciences and Philosophy* (vol. 14, n° 1, mars 2004, Cambridge University Press), a fait l'objet d'un exposé au *Séminaire d'algèbre de l'UMR 7062* le 12 février 2004. Il a profité de quelques remarques des membres du séminaire, et en particulier d'une remarque de Christian Houzel sur le principe de Dirichlet-Schläfli utilisé dans la troisième partie.

[1] *Composition mathématique de Claude Ptolémée*, trad. M. Halma, Paris, 1813 ; fac-similé 1988, Livre I, chap. 11, p. 50-55.

aient conféré la même notoriété. La raison pour laquelle ils s'y sont attachés, c'est ce que nous savons de ses nombreuses utilités et de l'extrême besoin que l'on en a en science de la sphère ; c'est le principe sur lequel sont fondés bon nombre de procédés en astronomie. Cette proposition, même si d'autres que Ptolémée l'ont obtenue et en ont parlé, personne, parmi ceux dont nous avons entendu parler, n'a corrigé ce qui en était dit, ni n'en a rectifié ou révisé la démonstration[2].

S'il sait donc que d'autres que Ptolémée ont énoncé et démontré ce théorème[3], Thābit, à qui l'on doit en particulier d'avoir amendé la traduction de l'*Almageste* de Ptolémée faite par Isḥāq ibn Ḥunayn[4], ne mentionne nullement le nom de Ménélaüs[5] ; c'est avec la formulation de Ptolémée

[2] Voir *infra*, p. 365.

[3] Heath suggère que ce théorème figurait dans un texte antérieur aux *Sphériques* de Ménélaüs et qu'il était sans doute connu d'Hipparque (T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford 1921 ; rééd. New-York, 1981, vol. II, p. 270).

[4] Manuscrits Paris, BN, 2482, fol. 12^v-14^r ; 2483, fol. 7^r-9^r. Le manuscrit 2482 attribue explicitement cette traduction de l'*Almageste* à Isḥāq ibn Ḥunayn et l'émendation à Thābit ibn Qurra ; le manuscrit 2483, dont le début manque, semble être, contrairement à ce que suggère Sezgin (*Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. VI, Leyde, 1978, p. 89), une autre copie de cette même version (tout au moins en ce qui concerne la partie que nous avons étudiée, à savoir le chapitre 11 du livre I, qui dans ces deux manuscrits est le chapitre 12 du livre I) ; les deux manuscrits reproduisent d'ailleurs identiquement ce chapitre.

[5] Al-Bīrūnī, dans *Les Clefs de l'astronomie*, attribue en revanche la paternité de « la figure secteur » à Ménélaüs : « Exposée par Ptolémée au douzième chapitre du premier livre de l'*Almageste*, la 'figure secteur' se trouve déjà dans le livre, très antérieur, des *Sphériques* de Ménélaüs [...] Des développements ultérieurs concernant cette figure et les différents cas à envisager furent apportés par Abū al-ʿAbbās al-Faḍl ibn Ḥātim al-Nayrīzī et Abū Jaʿfar Muḥammad ibn al-Ḥusayn al-Khāzin dans leurs commentaires respectifs de l'*Almageste*. Abū Jaʿfar al-Khāzin en fit aussi une étude succincte dans le *Zīj aṣ-Ṣafā'iḥ*, ainsi qu'Abū Naṣr Manṣūr ibn ʿAlī ibn ʿIrāq dans *Tahdhīb at-ta'ālīm*. Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra consacra un livre [...] à la 'figure secteur', exposant comment en simplifier les démonstrations. Nombreux sont les auteurs modernes qui approfondirent cette question [...] » (*Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-hay'a, La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du X^e^ siècle*, éd. et trad. par M.-T. Debarnot, Damas, 1985, p. 92-94). Aucun des commentaires évoqués ici, autres que le traité de Thābit, ne nous est parvenu.

Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (XIII^e^ siècle), pourtant auteur d'une rédaction (*taḥrīr*) des *Sphériques* de Ménélaüs, n'évoque cependant ce dernier qu'une seule fois dans son *Traité du quadrilatère* (voir note 30), alors même qu'il cite de nombreuses fois Ptolémée et Théodose, et ce bien que le *Traité du quadrilatère* soit essentiellement consacré à la « figure secteur », qu'il nomme d'ailleurs, sous les deux formes de la dièrèse et de la synthèse, « rapport explicite de Ptolémée » et « rapport implicite de Ptolémée ». La célébrité de l'*Almageste*, le fait que le théorème le plus important des *Sphériques* de Ménélaüs, « la figure secteur » s'y trouve énoncé et démontré, ainsi que les problèmes qu'a posés, du fait de sa difficulté propre, la transmission de l'œuvre de Ménélaüs, (sous les deux formes de la dièrèse et de la synthèse) que Thābit cite le théorème de la « figure secteur », et c'est la démonstration qu'en donne celui-ci dans l'*Almageste* qu'il étudie. Faut-il pour autant en déduire que Thābit n'aurait pas eu connaissance des *Sphériques* de Ménélaüs[6] ? Nous savons fort peu de choses des premières traductions des *Sphériques* (celles de Isḥāq ibn Ḥunayn ou de Ḥunayn ibn Isḥāq ?). De la rédaction d'al-Māhānī (effectuée vers 864[7]) nous ne connaissons que ce qu'en dit al-Harawī qui l'a amendée à la fin du Xe siècle ; si l'on en croit al-Harawī cette rédaction était d'ailleurs incomplète :

> Lorsque, de ce livre, est parvenu aux géomètres ce dont ils n'avaient pas la pratique et dont ils ne connaissaient pas d'équivalent dans les autres parties de la géométrie, ils en éprouvèrent la difficulté et, alors que l'extrême intelligence de l'ouvrage et la difficulté de sa compréhension auraient ajouté à leur prestige, ils s'en détournèrent et n'y travaillèrent pas ; cependant, aucun d'eux ne déniait le sublime de l'ouvrage, bien au contraire, chacun d'eux voyait que ce qu'il (Ménélaüs) avait démontré par cette méthode était plus facile et plus sérieux que tout ce dont on disposait d'autre. On dit qu'un groupe de géomètres persévérèrent dans <leurs tentatives> d'émendation et, lorsqu'ils échouèrent, ils demandèrent l'aide d'al-Māhānī ; celui-ci en amenda le premier livre et quelques théorèmes du second, et s'arrêta à un théorème dont on dit que, de par l'exhaustion de

---

semblent avoir contribué à maintenir dans l'ombre la paternité de Ménélaüs. *Kitāb Mānālāws*, *Taḥrīr Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī*, Hyderabad, 1359 H ; rééd. Frankfurt, 1998 ; *Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy*, traduit par Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople, 1892 ; rééd. Frankfurt, 1998, p. 56, 57, 85, 87, 89, 91, 111, 114...

Sur les attributions postérieures de ce théorème à Ptolémée, on pourra consulter M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837 ; rééd. Paris, 1989, *Sur le théorème de Ptolémée relatif au triangle coupé par une transversale*, p. 291-294.

[6] Le texte grec des *Sphériques* est perdu et seules diverses rédactions arabes nous en ont été conservées. La plus ancienne rédaction qui nous en soit parvenue est celle d'Aḥmad ibn Abī Saʿd al-Harawī datant de la fin du Xe siècle (mss Leyde, Or. 399, fol. 82v-105v, Istanbul, Ahmet III, 3464, fol. 74v-103r). La rédaction suivante, celle d'Abū Naṣr Manṣūr ibn ʿAlī ibn ʿIrāq a été éditée par M. Krause (*Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. ʿAlī b. ʿIrāq, mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern*, Abhandlungen des Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, phil.-hist. Klasse, 3, 17, 1936).

[7] F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. V, Leyde, 1974, p. 158-164.

son désir, la démonstration lui en fut difficile [...] Et le dixième théorème de ce traité, c'est celui auquel est parvenu al-Māhānī, sans aller au-delà[8].

Si l'on se fie à ce texte, al-Māhānī, dans son édition des *Sphériques*, aurait donc traduit ce qui a trait à la « figure secteur », puisque c'est la proposition 5 du livre II dans le texte d'al-Harawī[9]. On sait cependant qu'al-Māhānī et Thābit, bien que contemporains, travaillaient au sein de groupes rivaux[10] et Thābit, selon ses propres dires, ne semble pas avoir eu une connaissance directe du travail d'al-Mahānī sur les *Sphériques* de Ménélaüs.

L'objectif de Thābit, dans le *Traité sur la figure secteur*, est double : classifier, énoncer et démontrer toutes les formes que peut prendre ce théorème (tout en signalant que tel n'était pas l'objectif de Ptolémée et qu'on ne saurait donc lui reprocher de ne pas avoir été exhaustif), en proposer une démonstration alternative, plus simple et plus élégante. Le traité de Thābit se compose ainsi de trois parties, une première partie dans laquelle il reprend, en la complétant et en la modifiant légèrement, la démonstration du théorème de Ménélaüs que donne Ptolémée dans l'*Almageste*, une deuxième partie dans laquelle il en donne une démonstration alternative, basée sur un lemme qui jouera un rôle important dans les démonstrations de ses successeurs. Une troisième partie enfin dans laquelle, dans le but de rechercher de façon exhaustive toutes les formes alternatives que peut prendre le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère, il s'intéresse à l'aspect combinatoire de la composition des rapports (pour les autres aspects du rapport composé, problème essentiel que pose aux mathématiciens l'usage du théorème de Ménélaüs, voir le commentaire de son traité *Sur la composition des rapports* par Pascal Crozet).

[8] *Kitāb Mānālāws fī al-ashkāl al-kuriyya, Iṣlāḥ Aḥmad ibn Abī Saʿd al-Harawī*, ms. Leyde, Or. 399, fol. 82v.

[9] La « figure secteur » est la proposition 1 du livre III des *Sphériques*, dans l'édition d'Ibn ʿIrāq, c'est du reste le rang que lui attribuent généralement les commentateurs, à l'exception de Sulaymān ibn ʿIṣma al-Samarqandī (seconde moitié du IXe siècle) qui reprenant l'ordre d'al-Harawī en fait également la proposition 5 du livre II. Voir Debarnot, *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd ʿilm al-hayʾa*, p. 94, note 9.

[10] En témoigne la remarque du petit-fils de Thābit, Ibrāhīm ibn Sinān, à propos de la quadrature de la parabole : « Mon grand-père avait déterminé la mesure de cette section. Certains géomètres contemporains m'ont fait savoir qu'il y a sur ce sujet une œuvre d'al-Māhānī, qu'ils m'ont présentée, plus facile que celle de mon grand-père. Je n'ai pas aimé qu'il y ait une œuvre d'al-Māhānī plus avancée que l'œuvre de mon grand-père, sans que parmi nous il y en ait un qui le surpasse dans cette œuvre » (R. Rashed & H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān, Logique et géométrie au Xe siècle*, Leyde, 2000, p. 18).

LE THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS SUR LA SPHÈRE :
DÉMONSTRATION DITE DE PTOLÉMÉE

Rappelons tout d'abord l'énoncé de ce théorème :

AEB, *AFD*, *CFE* et *CDB* étant des arcs de grands cercles d'une sphère $\mathscr{S}$ (inférieurs à un demi-cercle), on a :

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB} = \frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD} \cdot \frac{\text{Crd } 2DC}{\text{Crd } 2CB} \qquad \text{(diérèse)}$$

et

$$\frac{\text{Crd } 2AB}{\text{Crd } 2BE} = \frac{\text{Crd } 2AD}{\text{Crd } 2DF} \cdot \frac{\text{Crd } 2FC}{\text{Crd } 2CE} \qquad \text{(synthèse).}$$

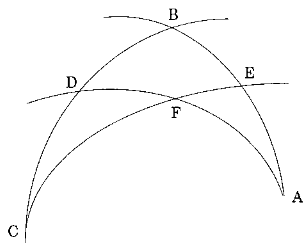


Fig. 1

La démonstration qu'en donne Ptolémée repose sur quatre lemmes (que Ptolémée énonce et démontre dans l'*Almageste*, mais que Thābit ne rappelle pas dans le *Traité sur la figure secteur*) : le théorème dit « de Ménélaüs » dans le plan[11], sous les deux formes correspondantes de la diérèse (lemme 1) et de la synthèse (lemme 2), et deux autres lemmes (lemme 3 et lemme 4).

Lemme 1 (théorème de Ménélaüs dans le plan, diérèse) :

[11] Pour Heath, le théorème de Ménélaüs dans le plan figurerait dans *La Collection mathématique* de Pappus parmi les lemmes relatifs aux porismes d'Euclide (proposition 137) ; Heath suggère ainsi que le théorème de Ménélaüs dans le plan aurait sans doute déjà été connu d'Euclide. Cependant, s'il est vrai que l'on déduit aisément le théorème de Ménélaüs (sous la forme de la diérèse) de la proposition 137 de *La Collection*, il semble néanmoins difficile d'assimiler, sans autre forme de procès, cette proposition au théorème de Ménélaüs (Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, p. 270 ; Pappus, *La Collection mathématique*, trad. P. Ver Eecke, 2 vol., Liège, 1932 ; rééd. Paris, 1982, vol. II, proposition 137, p. 684-685).

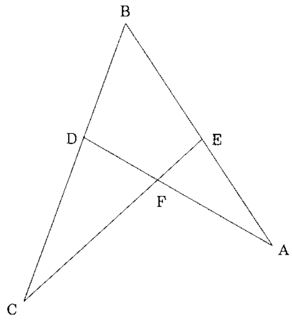


Fig. 2

Soient BA, BC, AD et CE quatre droites deux à deux sécantes (quadrilatère complet), AD et CE se coupant en F, alors

$$\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FD}\cdot\frac{CD}{CB}.$$

Dans ce cas, la droite EFC (points communs aux divers segments intervenant dans les rapports) coupe les trois droites AB, BD et DA, deux des points d'intersection, E et F étant sur les côtés du triangle ABD, le troisième, C dans le prolongement du côté BD (EFC est dite sécante intérieure).

Lemme 2 (théorème de Ménélaüs dans le plan, synthèse) : avec la même configuration

$$\frac{BA}{BE}=\frac{DA}{DF}\cdot\frac{CF}{CE}.$$

Dans ce cas, la droite BDC coupe les trois droites AE, EF et FA, et les trois points d'intersection sont à l'extérieur des côtés du triangle AEF (BDC est alors dite sécante extérieure, d'où le nom de « figure secteur » ou « figure sécante » donné à ce théorème sous l'une ou l'autre forme). Notons qu'en vertu de l'axiome de Pasch (si une droite coupe un côté d'un triangle elle coupe un autre côté) une droite coupant les trois droites formant les côtés d'un triangle ne peut être que de l'un où l'autre type.

La réciproque du théorème de Ménélaüs dans le plan, sous l'une ou l'autre forme, est vraie : si $\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FD}\cdot\frac{CD}{CB}$ (resp. $\frac{BA}{BE}=\frac{DA}{DF}\cdot\frac{CF}{CE}$), alors les trois points E, F, C (resp. B, D, C) sont alignés.

Lemmes 3 et 4 :

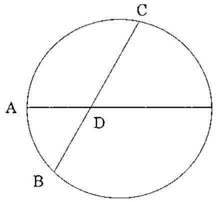


Fig. 3a

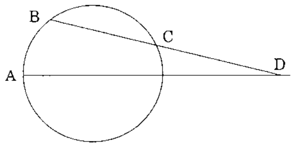


Fig. 3b

AB et *AC* étant deux arcs d'un cercle *ABC*, inférieurs à un demi-cercle, situés de part et d'autre de *A* (lemme 3, Fig. 3a) ou d'un même côté de *A* (lemme 4, Fig. 3b), si la corde *BC* coupe le diamètre issu de *A* en *D*, alors

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\text{Crd } 2AB}{\text{Crd } 2AC}.$$

Remarque : Une propriété, non énoncée et *a fortiori* non démontrée, sous-tend les démonstrations de ces deux lemmes et celles du théorème de Ménélaüs sur la sphère ; elle rend compte des divers cas de figure qui vont suivre et de la nécessité de préciser que certains arcs doivent être inférieurs à un demi-cercle ; elle peut être formulée ainsi : soient B et C deux points d'un cercle $\mathscr{C}$, B' et C' les symétriques orthogonaux de B et C par rapport au diamètre parallèle à (BC), et soit A un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$, alors si A appartient au petit arc BC ou au petit arc $B'C'$, le diamètre issu de A coupe le segment $[BC]$, sinon ce diamètre, ou bien est parallèle à la droite (BC), ou bien coupe (BC) à l'extérieur du segment $[BC]$.

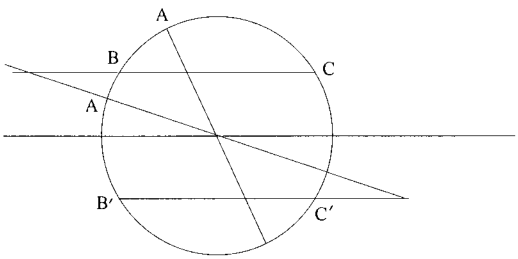


Fig. 3c

Ces deux lemmes, d'où Ptolémée déduit que si la somme (respectivement la différence) de deux arcs est donnée ainsi que le rapport des cordes de leurs doubles, chacun des deux arcs est donné – propriétés indispensables à nombre de calculs astronomiques –, se retrouvent dans plusieurs traités postérieurs, tant l'*Almageste* d'Abū al-Wafā' al-Būzjānī[12], en préambule à sa démonstration du théorème des sinus sur la sphère, que le *Traité du quadrilatère* de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī[13], en préambule à la « figure secteur ».

Thābit va, dans un premier temps, compléter, en la modifiant légèrement, la démonstration de Ptolémée (qui ne détaille que la dièrèse, et seulement dans le cas a. *infra*).

Démonstration de la dièrèse

Soient G le centre de la sphère, H et I les points d'intersection respectifs de (AB) et (GE), de (AD) et (GF) ; les droites (BD) et (GC) ou bien se coupent du côté de D, ou bien se coupent du côté de B, ou bien sont parallèles. Ce sont là les trois parties en lesquelles se décompose la dièrèse auxquelles fait allusion Thābit dans son texte.

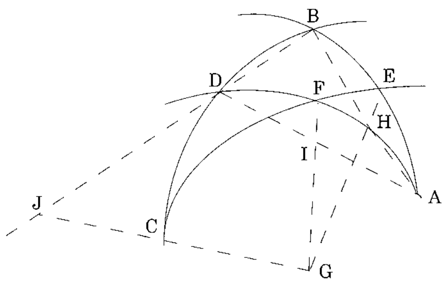


Fig. 4a

a. Si les deux droites (BD) et (GC) se coupent du côté de D, qu'elles se coupent en J ; alors, d'après la démonstration de Ptolémée, que Thābit ne reprend pas, mais qui est la suivante :

[12] *Almageste* d'Abū al-Wafā' al-Būzjānī, Livre II, chap. 1, ms. Paris, BN, 2494, fol. 17. Cf. Ali Moussa, *L'Almageste d'Abū al-Wafā' al-Būzjānī,* Thèse de doctorat, Paris 7, 2005.

[13] Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī propose dans le livre III de son *Traité du quadrilatère* de réunir ces deux lemmes en un seul : « On peut d'ailleurs réunir les deux propositions et les deux démonstrations en une seule [...] apprenez aussi que la condition que chaque arc soit moindre qu'une demi-circonférence n'est pas absolument nécessaire. Notre énoncé est vrai d'une manière absolue pourvu que les deux arcs aient des sinus. » Il discute également du lieu d'intersection du diamètre issu de A et de la corde BC (dans le cas où A n'appartient ni au petit arc BC ni au petit arc $B'C'$) en fonction des valeurs relatives de $\mathrm{Sin}\,AB$ et de $\mathrm{Sin}\,AC$: si $\mathrm{Sin}\,AB = \mathrm{Sin}\,AC$, les deux droites sont parallèles, si $\mathrm{Sin}\,AB > \mathrm{Sin}\,AC$, l'intersection a lieu du côté de C et si $\mathrm{Sin}\,AB < \mathrm{Sin}\,AC$, elle a lieu du côté de B (*Traité du quadrilatère*, livre IV, p. 64, 93).

HIJ sont alignés (droite d'intersection des plans (*ABD*) et (*CFE*)), donc d'après le lemme 1 (théorème de Ménélaüs dans le plan sous la forme de la dièrèse), on a dans le plan *ABD* :

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AI}{ID} \cdot \frac{DJ}{JB} \ ;$$

d'après les lemmes 3 et 4 on a alors

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB} = \frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD} \cdot \frac{\text{Crd } 2DC}{\text{Crd } 2CB}.$$

Thābit détaille en revanche les deux points suivants que n'évoquait pas Ptolémée :

b. Si les deux droites (*BD*) et (*GC*) se coupent du côté de *B*, soit *K* le second point d'intersection des arcs *CB* et *CE*, alors d'après la première partie de la démonstration (les points *ABCDEF* étant remplacés par les points *ADKBFE*) on a

$$\frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD} = \frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB} \cdot \frac{\text{Crd } 2BK}{\text{Crd } 2KD},$$

d'où

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB} = \frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD} \cdot \frac{\text{Crd } 2KD}{\text{Crd } 2BK}$$ [14]

et, du fait que $\text{Crd}\, 2KD = \text{Crd}\, 2DC$, et $\text{Crd}\, 2BK = \text{Crd}\, 2BC$ (cordes des doubles d'arcs supplémentaires), on obtient

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB} = \frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD} \cdot \frac{\text{Crd } 2DC}{\text{Crd } 2CB}.$$

c. Si les deux droites (*BD*) et (*GC*) sont parallèles, alors (*HI*) // (*BD*) ; en effet, s'il n'en était pas ainsi, (*HI*) et (*BD*) étant coplanaires seraient sécantes, ainsi que (*HI*) et (*GC*), les trois droites (*HI*), (*BD*) et (*GC*) seraient alors coplanaires et les plans des cercles (*BDC*) et (*CFE*) seraient confondus, ce qui est faux ; donc (*HI*) // (*BD*), d'où

[14] C'est la proposition 171 du livre VII de *La Collection mathématique* de Pappus ; cette propriété est énoncée et démontrée par Thābit dans la troisième partie de son traité (formule 7 *infra*), ainsi que dans son traité sur *La Composition des rapports* ; la démonstration qu'il en donne dans les deux cas est d'ailleurs identique à la démonstration de Pappus (*La Collection mathématique*, vol. II, p. 724).

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AI}{ID} ;$$

du lemme 3 et du fait que, puisque $(BD) \parallel (GC)$, $\mathrm{Crd}\,2CD = \mathrm{Crd}\,2BC$, on déduit

$$\frac{\mathrm{Crd}\ 2AE}{\mathrm{Crd}\ 2EB} = \frac{\mathrm{Crd}\ 2AF}{\mathrm{Crd}\ 2FD} \cdot \frac{\mathrm{Crd}\ 2DC}{\mathrm{Crd}\ 2CB}.$$

Démonstration de la synthèse

Soit N le second point d'intersection des arcs AB et AD, alors d'après la démonstration de la diérèse – a. *supra* – (les points $ABCDEF$ étant remplacés par les points $NECFBD$), on a

$$\frac{\mathrm{Crd}\ 2NB}{\mathrm{Crd}\ 2BE} = \frac{\mathrm{Crd}\ 2ND}{\mathrm{Crd}\ 2DF} \cdot \frac{\mathrm{Crd}\ 2FC}{\mathrm{Crd}\ 2CE} ;$$

or $\mathrm{Crd}\,2NB = \mathrm{Crd}\,2AB$ et $\mathrm{Crd}\,2ND = \mathrm{Crd}\,2AD$, donc

$$\frac{\mathrm{Crd}\ 2AB}{\mathrm{Crd}\ 2BE} = \frac{\mathrm{Crd}\ 2AD}{\mathrm{Crd}\ 2DF} \cdot \frac{\mathrm{Crd}\ 2FC}{\mathrm{Crd}\ 2CE}.$$

Cette première démonstration de Thābit est évoquée par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī dans le livre IV du *Traité du quadrilatère* mais attribuée à Ptolémée :

> Pour ce qui est du rapport implicite (synthèse) et de sa démonstration, Ptolémée se borne à prolonger deux des colonnes du quadrilatère qu'il s'est proposé, jusqu'à compléter deux demi-circonférences. De la sorte il forme un nouveau quadrilatère au moyen duquel et de la démonstration du rapport explicite (diérèse), il prouve ensuite la proposition concernant le rapport implicite (synthèse)[15].

Ptolémée, dans les textes que nous avons de l'*Almageste*, y compris dans la traduction arabe revue par Thābit, n'évoque pas le cas où les droites (BD) et (GC) sont parallèles, ni le cas où elles se coupent du côté de B, et se contente d'affirmer que l'on démontrerait de la même façon, à partir du théorème de Ménélaüs dans le plan, le cas de la synthèse :

> on démontre aussi (la synthèse) par de semblables raisons et par le moyen de pareilles droites, construites de même sur une surface plane [...][16].

[15] *Traité du quadrilatère*, p. 91.
[16] *Almageste*, p. 55.

Thābit le confirme d'ailleurs, dans le *Traité sur la figure secteur*, après avoir exposé cette première démonstration[17]. L'astronome andalous Maslama ibn Aḥmad al-Majrīṭī (XIe siècle), dans une glose qui lui est explicitement attribuée à la fin du manuscrit de l'Escorial, tente de combler cette lacune et de retrouver la démonstration de Ptolémée :

> une des choses qu'il aurait été nécessaire à Ptolémée d'indiquer au sujet de la figure secteur est la démonstration du rapport de la synthèse. Mais puisqu'il ne l'a pas indiquée et que je n'ai vu personne l'indiquer je l'ai rédigée.

Voici, en gardant les notations de Thābit, la démonstration de Maslama :

Soit G le centre de la sphère, I le point d'intersection s'il existe des droites EF et GC, K le point d'intersection s'il existe de AF et GD et L le point d'intersection s'il existe de AE et GB. On montre comme précédemment que les points I, K, L, lorsqu'ils existent, sont alignés (intersection des plans AEF et CDB). Dans le plan du triangle AEF le théorème de Ménélaüs sous la forme de la synthèse permet d'écrire

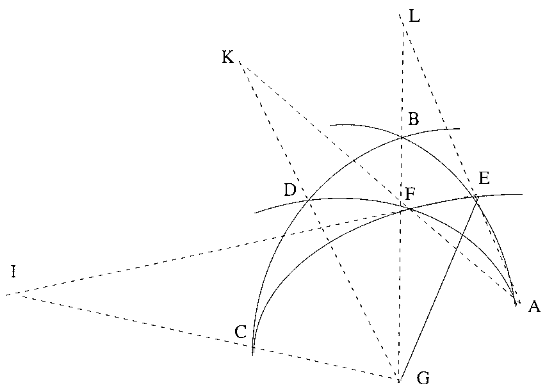


Fig. 4b

$$\frac{LA}{LE} = \frac{KA}{KF} \cdot \frac{IF}{IE},$$

or d'après le lemme 4 de Ptolémée

[17] La méthode de Thābit – prolonger les arcs AB et AD jusqu'à leur second point d'intersection N afin de ramener la démonstration de la synthèse à celle de la diérèse – se trouvait en revanche déjà dans le commentaire de Théon d'Alexandrie à l'*Almageste* de Ptolémée (*Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la « composition mathématique » de Ptolémée*, trad. M. Halma, Paris, 1821 ; rééd. 1993, p. 245).

$$\frac{LA}{LE}=\frac{\text{crd}\,2BA}{\text{crd}\,2BE},\ \frac{KA}{KF}=\frac{\text{crd}\,2DA}{\text{crd}\,2DF},\ \frac{IF}{IE}=\frac{\text{crd}\,2CF}{\text{crd}\,2CE},$$

d'où

$$\frac{\text{Crd}\,2AB}{\text{Crd}\,2BE}=\frac{\text{Crd}\,2AD}{\text{Crd}\,2DF}\cdot\frac{\text{Crd}\,2FC}{\text{Crd}\,2CE}.$$

Notons cependant que si l'on veut entrer dans le détail des cas particuliers, comme Thābit l'a fait dans le cas de la dièrèse, on est amené (ce que ne fait pas Maslama) à étudier les différentes positions relatives des droites (GC) et (EF), (GD) et (AF), (GB) et (AE) (voir la remarque *supra* p. 341), on a alors :

(EF) // (GC), ou I du côté de F, ou I du côté de E,

(AF) // (GD), ou K du côté de F, ou K du côté de A,

(EA) // (GB), ou L du côté de A, ou L du côté de E.

On retrouve ainsi les 27 ($3 \times 3 \times 3$) parties évoquées par Thābit en lesquelles se décompose la synthèse[18]. Comme un certain nombre de ces cas sont incompatibles (on ne peut par exemple avoir simultanément (EF) // (GC) et (AF) // (GD) et (EA) non// (GB), ou (EF) // (GC) et K du côté de F et L du côté de A, ou encore I du côté de F et K du côté de A et L du côté de E (toujours en vertu de l'axiome de Pasch), on dénombre 14 cas impossibles et il reste 13 cas possibles.

Il peut être intéressant de comparer cette première démonstration de Thābit avec les rédactions du théorème de la « figure secteur » que l'on trouve dans les éditions des *Sphériques* de Ménélaüs postérieures au texte de Thābit. Étudions donc les démonstrations du théorème de la « figure secteur » des rédactions d'al-Harawī et d'Ibn ʿIrāq des *Sphériques* de Ménélaüs.

Al-Harawī, à qui l'on doit la première version qui nous soit parvenue des *Sphériques* de Ménélaüs[19], donne de ce théorème (livre II, proposition 5) une démonstration extrêmement concise : il en ramène la démonstration, comme le font Ptolémée et Thābit, à celle du théorème de Ménélaüs dans le plan, et n'évoque comme cas particulier, outre le cas a. *supra*, que le cas où les deux droites (BD) et (CG) sont parallèles (cas c. *supra*, non traité par Ptolémée), sans donner, contrairement à Ptolémée, le théorème sous la forme de la synthèse. Al-Harawī fait précéder cette démonstration de pré-

[18] Théon évoque dans son commentaire quelques-uns de ces cas sans toutefois les dénombrer : « ce théorème ayant plusieurs cas comme nous l'avons dit, nous en exposerons un ou deux par le moyen desquels tous les autres deviendront aisés à comprendre » (*Commentaire de Théon d'Alexandrie*, p. 243).

[19] Voir note 6.

misses qui lui semblent nécessaires et qui ne figuraient pas, comme il s'en explique à la fin du livre I[20], dans le texte de Ménélaüs qu'il édite : le théorème de Ménélaüs dans le plan[21] (sous 6 formes) – mais pas les lemmes 3 et 4 de Ptolémée – ainsi que deux propositions sur la composition des rapports, qui n'interviennent du reste pas dans sa démonstration du théorème de la « figure secteur » mais dans les propositions qui suivent ; ces deux propositions sont les suivantes :

(1) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ et $c = a$, alors $\frac{d}{b} = \frac{e}{f}$[22] ;

(2) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{d}$, sans démonstration[23].

La démonstration que donne Ibn ʿIrāq du théorème de la « figure secteur » dans son édition des *Sphériques* de Ménélaüs (livre III, proposition 1), est en revanche très proche de celle de Thābit, avec la nuance que le théorème de la « figure secteur » y est exprimé en termes de sinus et que les démonstrations y sont fort détaillées. Comme al-Harawī, Ibn ʿIrāq fait précéder cette démonstration de prémisses qu'il ajoute à la fin du livre II : le théorème de Ménélaüs dans le plan (sous la seule forme de la diérèse, seule utilisée dans sa démonstration de la « figure secteur »), les lemmes 3 et 4 de

[20] Nous trouvons en effet à la fin du livre I le passage suivant : « Aḥmad ibn Abī Saʿd al-Harawī a dit : Ménélaüs a supprimé, du fait de la difficulté de cette science, des choses qui, pour tout autre que lui, ne sont pas faciles et, de par sa maîtrise de celles-ci et la sublimité de ce qu'il a régi, il a écarté de nombreuses prémisses nécessaires, pour qui n'a pas atteint le niveau de Ménélaüs, à l'étude de cet ouvrage [...] Il a démontré dans cet ouvrage le théorème que Ptolémée a nommé "figure secteur" et sur lequel il a construit de nombreux théorèmes [...] Les prémisses nécessaires pour ce faire sont celles introduites par Ptolémée, dont l'une concerne l'intersection de deux droites entre deux droites avec une troisième, et les rapports qui en découlent. Nous estimons que Ménélaüs a peut-être, dans ce traité, procédé en ce qui concerne "la figure secteur" à une suppression qui n'est pas digne de sa méthode, n'y posant ni prémisse, ni épître, ni ne faisant <de cette figure> la base d'un traité, que les prémisses de ce théorème aient été connues et universellement acceptées d'eux ou qu'elles aient été omises du traité » (*Kitāb Mānālāws fī al-ashkāl al-kuriyya*, ms. Leyde, Or. 399, fol. 97v-98r).

[21] Le fait que le théorème dit « de Ménélaüs » dans le plan ne figurait apparemment pas dans le texte grec traduit en arabe par al-Harawī pourrait confirmer l'hypothèse de Heath, à savoir que ce théorème était sans doute déjà connu d'Euclide. Voir note 11.

[22] Thābit, dans le *Traité sur la composition des rapports*, énonce une proposition équivalente dans le cas où $a = b$. La démonstration qu'il en donne est différente de celle d'al-Harawī.

[23] Cette proposition est démontrée par Thābit dans la troisième partie du *Traité sur la figure secteur*, voir *infra* : *La recherche exhaustive de toutes les formes alternatives du théorème de Ménélaüs*, formule (2).

Ptolémée (exprimés en termes de sinus) et la proposition suivante sur la composition des rapports :

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, alors $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}$ (voir note 14) dont il donne la même démonstration que Thābit[24].

Si l'idée de base de toutes ces démonstrations (Ménélaüs dans la version d'al-Harawī, Ménélaüs dans la version d'Ibn ʿIrāq, Ptolémée, Thābit) est la même – se ramener, dans un plan passant par trois sommets du quadrilatère complet sur la sphère, au théorème de Ménélaüs dans ce plan – et était selon toute vraisemblance celle même de Ménélaüs, les façons de la mettre en œuvre diffèrent, du fait de la nécessité de prendre en compte les divers cas de figure : on peut ramener chacun de ces cas de figure au cas correspondant du théorème de Ménélaüs dans le plan (méthode évoquée par Ptolémée), on peut aussi ramener, par des permutations de points et des manipulations de rapports, chacun de ces cas de figure au premier cas traité (méthode de Thābit) ; on peut également passer sous silence certains de ces cas de figure (ce que font, mais en omettant des cas différents, Ptolémée et al-Harawī) ou traiter de façon détaillée tous les cas (ce que font Thābit et Ibn ʿIrāq) ; on peut également faire précéder ce théorème de lemmes (ce que font tant Ptolémée qu'al-Harawī et Ibn ʿIrāq) qui, si l'on en croit al-Harawī, ne figuraient pas dans le texte de Ménélaüs.

Le fait que, d'une part, les démonstrations que donnent al-Harawī et Ibn ʿIrāq de ce théorème soient assez différentes et que, d'autre part, Ibn ʿIrāq exprime tant l'énoncé du théorème de la figure secteur que sa démonstration en termes de sinus[25], laisse penser que, au moins le texte d'Ibn ʿIrāq et peut-être également celui d'al-Harawī, ne sont pas des traductions littérales de ce passage du texte de Ménélaüs, mais plutôt des réécritures (*taḥrīr*). En effet si l'on se fie au témoignage d'al-Harawī, la traduction des *Sphériques* a posé quelques problèmes aux divers traducteurs, et l'on peut imaginer que, peut-être al-Harawī, et plus certainement Ibn ʿIrāq, auraient pu s'inspirer, pour leurs rédactions du texte de Ménélaüs sur la « figure secteur », de la démonstration de Thābit telle qu'elle figure dans la

[24] Krause, *Die Sphärik von Menelaos*, p. 59-61 du texte arabe, p. 192-194 de la traduction allemande.

[25] Sinus et sinus verse, absents des mathématiques grecques, sont deux apports fondamentaux de l'astronomie indienne. Le sinus est défini comme une grandeur (longueur) et non comme un rapport : c'est la demi-corde de l'arc double dans un cercle de référence dont le rayon est généralement fixé à 60. Al-Bīrūnī, dans le *Qānūn al-masʿūdī*, précédé par Abū al-Wafāʾ al-Būzjānī, définira le sinus en posant R = 1, mais ceci ne deviendra la norme qu'au XIXᵉ siècle, après Gauss. Le fait de poser R = 60 facilite d'ailleurs les calculs nécessaires à l'établissement de tables, lesquels sont le plus souvent effectués en fractions sexagésimales.

première partie du *Traité sur la figure secteur*, traité dont ils avaient très vraisemblablement connaissance[26].

LE THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS SUR LA SPHÈRE : DEUXIÈME DÉMONSTRATION

Thābit propose ensuite une démonstration alternative de ce théorème, plus élégante et plus concise, qui présente en outre l'avantage de dispenser de l'étude des cas particuliers précédents. Pour ce faire, il commence par établir un lemme qui jouera un rôle fondamental dans les démonstrations de ses successeurs.

Lemme : soient $AEGC$ et $ABCD$ deux grands cercles de la sphère, K et L les projetés orthogonaux respectifs de E et G sur le plan ABC, alors

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2AG} = \frac{EK}{GL}.$$

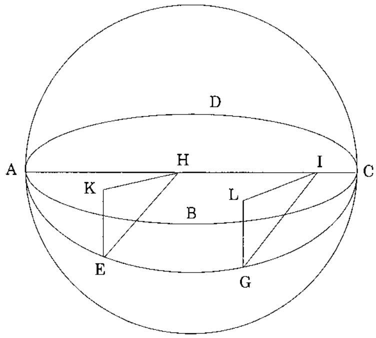


Fig. 5

[26] Aḥmad ibn Abī Sa'd al-Harawī rappelle, dans la préface de son édition des *Sphériques* de Ménélaüs, que Thābit a amendé une partie de l'*Almageste* de Ptolémée : « Quant à la "figure secteur", qui est ce sur quoi se fonde l'ouvrage l'*Almageste*, on lui (Ptolémée) doit d'avoir introduit une prémisse à nombre de figures dont se compose le théorème et en lesquelles il se décompose, et nous constatons qu'il a démontré deux parties de ce théorème : celle dans laquelle les droites se rencontrent et celle dans laquelle elles ne se rencontrent pas, comme cela se trouve dans la partie de l'*Almageste* que Thābit ibn Qurra a restituée. Nous démontrerons les diverses configurations de ce théorème lorsque nous en serons au deuxième livre » (*Kitāb Mānālāws fī al-ashkāl al-kuriyya*, ms. Leyde, Or. 399, fol. 82^v). Al-Harawī semble d'ailleurs, dans ce passage, confondre la traduction de l'*Almageste* révisée par Thābit, dans laquelle le cas particulier où les deux droites sont parallèles n'est pas traité, et le traité de Thābit sur *La Figure secteur* dans lequel il est étudié.

Soient H et I les projetés orthogonaux de E et G sur la droite (AC), EKH et GLI sont des triangles semblables (triangles à côtés parallèles, *Éléments* XI.10, et VI.4 extrapolée au cas de triangles non coplanaires), donc

$$\frac{EK}{GL} = \frac{EH}{GI} = \frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2AG}$$

(quel que soit le cas de figure, que E et G soient d'un même côté de A ou de part et d'autre de A, et même si les points K et H, L et I sont confondus).

Thābit en déduit alors la démonstration du théorème de Ménélaüs sous ses deux formes :

$$\frac{\text{Crd } 2AB}{\text{Crd } 2BE} = \frac{\text{Crd } 2AD}{\text{Crd } 2DF} \cdot \frac{\text{Crd } 2FC}{\text{Crd } 2CE} \quad \text{(synthèse)}$$

et

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB} = \frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD} \cdot \frac{\text{Crd } 2DC}{\text{Crd } 2CB} \quad \text{(diérèse).}$$

Démonstration :

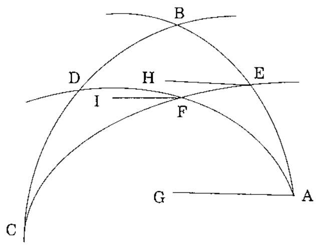


Fig. 6

Soient G, H et I les projetés orthogonaux respectifs de A, E et F sur le plan (BCD),

$$\frac{AG}{EH} = \frac{AG}{FI} \cdot \frac{FI}{EH},$$

or d'après le lemme,

$$\frac{AG}{EH} = \frac{\text{Crd } 2AB}{\text{Crd } 2BE}, \ \frac{AG}{FI} = \frac{\text{Crd } 2AD}{\text{Crd } 2DF}, \ \frac{FI}{EH} = \frac{\text{Crd } 2CF}{\text{Crd } 2CE},$$

d'où

$$\frac{\text{Crd } 2AB}{\text{Crd } 2BE} = \frac{\text{Crd } 2AD}{\text{Crd } 2DF} \cdot \frac{\text{Crd } 2FC}{\text{Crd } 2CE}.$$

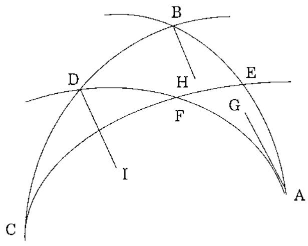


Fig. 7

Soient G, H et I les projetés orthogonaux respectifs de A, B et D sur le plan (CFE),

$$\frac{AG}{BH}=\frac{AG}{DI}\cdot\frac{DI}{BH},$$

$$\frac{AG}{BH}=\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB},\quad \frac{AG}{DI}=\frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD},\quad \frac{DI}{BH}=\frac{\text{Crd } 2DC}{\text{Crd } 2CB},$$

d'où

$$\frac{\text{Crd } 2AE}{\text{Crd } 2EB}=\frac{\text{Crd } 2AF}{\text{Crd } 2FD}\cdot\frac{\text{Crd } 2DC}{\text{Crd } 2CB}.$$

L'idée maîtresse du lemme de Thābit – projeter orthogonalement deux points de l'arc d'un grand cercle sur le plan d'un autre grand cercle puis sur la droite d'intersection de ces deux grands cercles, de façon à obtenir deux triangles rectangles semblables dans des plans parallèles – interviendra à de nombreuses reprises dans les démonstrations que donneront ses successeurs de certaines des formules qui, au cours du X^{e} siècle, vont progressivement remplacer le théorème de Ménélaüs sur la sphère[27]. C'est ainsi par exemple que, dans son *Almageste*, Abū al-Wafā' al-Būzjānī démontre la règle dite « des quatre quantités »[28].

Règle des quatre quantités :

Soient ADB et AEC deux grands cercles de la sphère, tels que BC et DE soient deux arcs de grands cercles orthogonaux à AEC (c'est-à-dire

[27] Il faut noter que, dans le traité sur *La Figure secteur*, Thābit utilise encore la corde de l'arc double et ne fait intervenir le sinus que deux fois ; cette formulation archaïque, en termes de cordes, sera abandonnée par ses successeurs au profit de la formulation en termes de sinus (ces formulations sont strictement équivalentes). Sur le lemme de Thābit, voir aussi Debarnot, *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-hay'a*, p. 6, note 11, et p. 14-15.

[28] Ms. Paris, BN, 2494, fol. 16^{v}-17^{r}.

passant par les pôles du cercle *AEC*) ; *DE* et *BC* sont dits « inclinaisons premières » des arcs *AD* et *AB* sur l'arc *AC* ; on a

$$\frac{\text{Sin}\,AD}{\text{Sin}\,AB}=\frac{\text{Sin}\,DE}{\text{Sin}\,BC},$$

ou comme l'énonce Abū al-Wafā' : le rapport des sinus des arcs est égal au rapport des sinus de leurs inclinaisons premières.

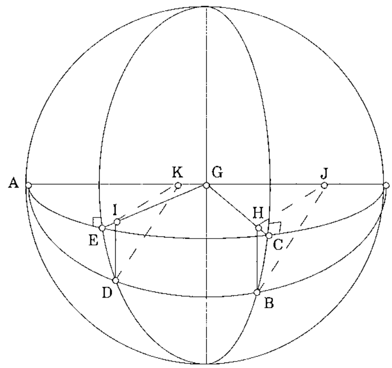


Fig. 8

Démonstration :

H et *I* étant les projetés orthogonaux respectifs de *B* et *D* sur le plan du cercle *ACE*, *J* et *K* et leurs projetés orthogonaux respectifs sur le diamètre (*AG*), intersection des plans *ADB* et *AEC*, les triangles *DIK* et *BHJ* étant semblables, on a

$$\frac{\text{Sin}\,AD}{\text{Sin}\,AB}=\frac{DK}{BJ}=\frac{DI}{BH}=\frac{\text{Sin}\,DE}{\text{Sin}\,BC}.$$

C'est de cette règle ne faisant plus intervenir que des arcs de grands cercles de la sphère et leurs sinus – mais qui n'est qu'une façon différente de formuler le lemme de Thābit, plus conforme à la terminologie des astronomes et mieux adaptée sans doute aux calculs astronomiques – qu'Abū al-Wafā' déduit le théorème général des sinus sur la sphère[29].

[29] Cette règle des quatre quantités, de même que la règle dite « des tangentes » démontrée également par Abū al-Wafā' dans son *Almageste*, pourrait certes, comme le suggère Heath (*A History of Greek Mathematics*, vol. II, p. 270), être aisément déduite des propositions III.2 et III.3 (II.6 et II.8 avec la numérotation d'al-Harawī) des *Sphériques* de Ménélaüs. Cependant les démonstrations qu'en donne Abū al-Wafā' ne reprennent en rien celles de Ménélaüs, faites à l'aide de la « figure secteur », mais reposent toutes deux, comme le lemme de Thābit, sur la similitude de triangles rectangles situés dans des plans parallèles.

LA RECHERCHE EXHAUSTIVE DE TOUTES LES FORMES ALTERNATIVES DU THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS

Le problème essentiel que pose aux mathématiciens le théorème de Ménélaüs – tant dans le plan que sur la sphère – est qu'il fait intervenir des rapports composés ; le désir d'éviter leur emploi sera, entre autres, une raison de préférer à la « figure secteur » une des nombreuses formules équivalentes au théorème des sinus sur la sphère qui voient le jour dans la seconde moitié du X^e^ siècle[30].

Si Thābit consacre en propre à ce problème le traité sur *La Composition des rapports*, il aborde néanmoins dans la dernière partie du traité sur *La Figure secteur*, l'aspect purement combinatoire de la composition des rapports de 6 grandeurs données, dans le but d'inventorier de manière exhaustive toutes les formes alternatives que peut prendre le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère. Dans la mouvance des travaux des lexicographes des écoles rivales de Bassorah et de Kufa, désireux d'explorer et de dénombrer toutes les ressources possibles de la langue arabe, se fait jour en effet au IX^e^ siècle, chez les mathématiciens également, un intérêt certain pour les procédures combinatoires[31]. C'est une des manifestations de cet intérêt, absent des préoccupations des mathématiciens grecs et en particulier, comme l'a souligné Thābit, de celles de Ptolémée en ce qui concerne le théorème de la « figure secteur », que l'on va voir à l'œuvre ici.

[30] Voir ce qu'en dit al-Bīrūnī dans *Les Clefs de l'astronomie* : « [...] un traité en tête duquel venait cette même figure [...] sous le nom de "celle qui dispense", car elle dispense de la "figure secteur". Il l'avait utilisée dans ce traité, pour démontrer plus simplement la plupart des formules du second livre de l'*Almageste*. Cette figure, en effet, n'introduit qu'un rapport simple, non composé, avec, au plus, quatre quantités. Or il est plus facile, on le sait, d'imaginer un rapport simple qu'un rapport composé et les démonstrations s'en trouvent considérablement allégées » (Debarnot, *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-hay'a*, p. 100). Ce que confirme Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, à la fin du livre IV du *Traité du quadrilatère* : « [...] ce qui rend la figure du quadrilatère [*i. e.* la « figure secteur »] très utile. Les anciens n'ont pas manqué de l'utiliser dans ce but et de s'en servir avec confiance ainsi que cela se voit dans le Livre de Ménélas (*sic*) [seule occurrence du nom de Ménélaüs dans ce traité] sur *La Sphère* et dans le commencement de l'*Almageste* de Ptolémée. Mais les modernes, soit par crainte de s'engager dans l'examen des différents rapports et de leurs variétés, soit pour éviter les longueurs que l'usage des rapports composés entraîne dans la pratique, ont imaginé et étudié d'autres figures destinées à tenir la place du quadrilatère et à procurer l'utilité qu'on en retire, sans qu'on ait besoin de recourir à de nombreuses distinctions et aux rapports composés » (Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, *Le Traité du quadrilatère*, p. 114).

[31] R. Rashed, « Algèbre et linguistique : l'analyse combinatoire dans la science arabe », dans *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, 1984, p. 245-257.

Thābit est ainsi conduit à rechercher systématiquement quelles sont toutes les relations analogues entre 6 grandeurs homogènes distinctes que l'on peut déduire de la relation ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$).

Pour ce faire, Thābit, tout au moins dans le traité sur *La Figure secteur*, ne s'intéresse qu'aux propriétés algébriques de la composition des rapports, sans tenter de définir cette opération, pas plus que de définir le rapport : seuls interviennent dans ses démonstrations la propriété, communément admise, que le rapport composé du rapport de a à b et du rapport de b à c est le rapport de a à c et le fait, implicitement admis, que dans un rapport composé on peut remplacer l'un ou l'autre des rapports par un rapport égal. La composition des rapports est alors une opération interne sur les rapports, possédant un élément neutre ($\frac{a}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ est élément neutre), telle que tout rapport possède un inverse ($\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$), la commutativité et l'associativité de cette opération étant implicitement admises ; Thābit utilise en outre, sans le démontrer, le fait que : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, et si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ alors $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \cdot \frac{f}{e}$ (il démontre cette dernière propriété dans le traité sur *La Composition des rapports*).

Soient a, b, c, d, e et f six grandeurs homogènes, telles que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ (1). Thābit en déduit, en utilisant implicitement les propriétés que nous avons mentionnées, 17 autres expressions :

(2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{d}$,	(3) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \cdot \frac{e}{f}$,	(4) $\frac{a}{c} = \frac{b}{f} \cdot \frac{e}{d}$,	(5) $\frac{a}{e} = \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{d}$,
(6) $\frac{a}{e} = \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{f}$,	(7) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e}$,	(8) $\frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$,	(9) $\frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{f}{e}$,
(10) $\frac{b}{d} = \frac{a}{e} \cdot \frac{f}{c}$,	(11) $\frac{b}{f} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{e}$,	(12) $\frac{b}{f} = \frac{a}{e} \cdot \frac{d}{c}$,	
(13) $\frac{c}{d} = \frac{a}{e} \cdot \frac{f}{b}$,	(14) $\frac{c}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{e}$,	(15) $\frac{c}{f} = \frac{a}{e} \cdot \frac{d}{b}$,	
(16) $\frac{d}{e} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{f}$,	(17) $\frac{d}{e} = \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{a}$,	(18) $\frac{e}{f} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$	

ainsi que, par inversion, 18 autres relations.

Cette partie se retrouve, sous une forme quasiment identique, dans le *Traité sur la composition des rapports* ; nous n'en détaillerons donc pas les démonstrations.

Thābit montre ensuite, et ce uniquement dans le *Traité sur la figure secteur*, que, si six grandeurs homogènes distinctes vérifient la relation (1), il n'existe pas, entre ces six grandeurs, d'autre relation que les 36 que nous venons d'indiquer.

On peut former à partir de ces 6 grandeurs 15 rapports (et leurs inverses) ; on a montré que, quel que soit le sextuplé de grandeurs homogènes (a, b, c, d, e, f), 9 de ces rapports $(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{f}, \frac{c}{d}, \frac{c}{f}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f})$ – et leurs inverses – peuvent s'écrire comme composés de deux rapports des quatre grandeurs restantes ; Thābit montre alors qu'il n'en va pas de même pour les 6 autres $(\frac{a}{d}, \frac{a}{f}, \frac{b}{c}, \frac{b}{e}, \frac{c}{e}, \frac{d}{f})$ – et leurs inverses.

Voici l'étonnante démonstration par laquelle Thābit démontre que, si a, b, c, d, e et f sont six grandeurs homogènes distinctes vérifiant la relation (1), $\frac{a}{d}$ n'est pas composé, de quelque manière que ce soit, de deux rapports quelconques des quatre grandeurs restantes $\{b, c, e, f\}$; cette démonstration se fait en deux temps :

Premier temps : Soient a, b, c, d, e et f six grandeurs homogènes distinctes vérifiant la relation (1) et soit g une grandeur quelconque, de même nature, telle que $g \neq a$; soient h et i deux grandeurs telles que $\frac{h}{i} = \frac{g}{d}$ et $\frac{h}{a} = \frac{d}{i}$ (ou plutôt telles que $h \cdot i = a \cdot d$ et $\frac{h}{i} = \frac{g}{d}$; Thābit suppose donc implicitement ici que ces grandeurs sont des longueurs ; ce problème : trouver deux droites telles que le produit de l'une par l'autre soit connu (égal à $a \cdot d$) et que le rapport de l'une à l'autre soit connu (égal à $\frac{g}{d}$), est résolu par Thābit dans *Le Livre des hypothèses*[32]).

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, alors $\frac{h}{b} = \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{d}{i} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{i} \cdot \frac{e}{f}$ (par commutativité, associativité et en remplaçant un rapport par un rapport égal) ; les deux sextuplés de

[32] C'est la proposition 23 de ce traité : « Pour toute droite inconnue que l'on partage en deux parties telles que le produit de l'une des deux parties par l'autre soit connu ainsi que le rapport de l'une à l'autre, chacune des deux <parties> est connue ». Sur la résolution de ce système, voir également Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān, Logique et géométrie au Xᵉ siècle*, p. 57-58, 446.

grandeurs homogènes, (a, b, c, d, e, f), et (h, b, c, i, e, f) sont alors liés par la même relation : « le rapport de la première à la seconde est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième », donc si, quel que soit (a, b, c, d, e, f), la relation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ impliquait que l'on puisse écrire $\frac{a}{d}$ en fonction de (b, c, e, f), cela impliquerait que l'on puisse aussi écrire $\frac{h}{i}$ comme la même fonction de (b, c, e, f), on aurait alors $\frac{a}{d} = \frac{h}{i} = \frac{g}{d}$, d'où $a = g$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En d'autres termes, Thābit a montré que, s'il existait une permutation p du groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments telle que :

quel que soit le sextuplé de grandeurs homogènes (a, b, c, d, e, f)

$$\left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right] \Rightarrow \left[\frac{a}{d} = \frac{\mathrm{p}(b)}{\mathrm{p}(c)} \cdot \frac{\mathrm{p}(e)}{\mathrm{p}(f)}\right],$$

alors

$$\left[\frac{h}{b} = \frac{c}{i} \cdot \frac{e}{f}\right] \Rightarrow \left[\frac{g}{d} = \frac{h}{i} = \frac{\mathrm{p}(b)}{\mathrm{p}(c)} \cdot \frac{\mathrm{p}(e)}{\mathrm{p}(f)} = \frac{a}{d}\right] \Rightarrow [a = g],$$

ce qui est faux ; donc quelle que soit la permutation p, il existe un sextuplé (a, b, c, d, e, f) tel que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . \frac{e}{f} \text{ et } \frac{a}{d} \neq \frac{\mathrm{p}(b)}{\mathrm{p}(c)} . \frac{\mathrm{p}(e)}{\mathrm{p}(f)}.$$

Deuxième temps : Thābit montre que, si pour tout sextuplé de grandeurs homogènes distinctes (a, b, c, d, e, f), il existait une permutation p du groupe des permutations de l'ensemble $\{b, c, e, f\}$, dépendant du sextuplé (a, b, c, d, e, f), telle que $\frac{a}{d} = \frac{\mathrm{p}(b)}{\mathrm{p}(c)} \cdot \frac{\mathrm{p}(e)}{\mathrm{p}(f)}$, on aboutirait également à une contradiction ; en effet, comme il n'existe que 24 de ces permutations, soit, du fait de la commutativité de la composition des rapports, 12 façons distinctes d'écrire, avec les 4 grandeurs b, c, e et f, un rapport composé de deux rapports, la démonstration précédente, appliquée à n grandeurs distinctes de même nature $g_1, g_2, \ldots g_n$ $(n > 12)$ impliquerait l'égalité de deux de ces grandeurs.

Conclusion : dans cette démonstration fort subtile, Thābit a montré, en utilisant le principe de Dirichlet-Schläfli, ou principe des tiroirs[33], que, quel que soit le sextuplé de grandeurs distinctes (a, b, c, d, e, f) vérifiant la relation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ et quelle que soit la permutation p du groupe des permutations de l'ensemble $\{b, c, e, f\}$, $\frac{a}{d} \neq \frac{p(b)}{p(c)} \cdot \frac{p(e)}{p(f)}$.

On déduit ensuite facilement du résultat précédent et des relations (4), (2) inversée, (10), (13) et (17), qu'aucun des 5 autres rapports ($\frac{a}{f}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$, $\frac{d}{f}$) n'est également susceptible d'être composé de deux rapports des quatre grandeurs restantes.

Thābit démontre ensuite en utilisant, outre la commutativité, l'associativité de la composition des rapports et le fait que $\frac{a}{a}$ est élément neutre pour la composition des rapports, la propriété implicitement admise $[\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = b]$, qu'il n'y a pas d'autre façon de décomposer, dans tous les cas, les neuf rapports ($\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{c}{f}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{e}{f}$) que les 36 déjà trouvées.

Entre six grandeurs différentes liées par la relation (1) on donc a 36 relations et 36 relations seulement. C'est sur cette constatation que s'achève quelque peu abruptement le traité sur *La Figure secteur.*

Après Thābit, un certain nombre de mathématiciens vont s'attacher à explorer systématiquement tous les cas de figure et toutes les permutations possibles des rapports pour le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère. C'est le cas, semble-t-il, d'al-Sijzī[34] (seconde moitié du X^e siècle), et surtout de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī dont le *Traité du quadrilatère* peut se lire comme un jeu combinatoire sur le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère. Après avoir rappelé et démontré dans le Livre I de ce traité, les 36 relations entre 6 grandeurs homogènes distinctes que l'on peut déduire de la relation $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f})$, al-Ṭūsī dénombre systématiquement dans le Livre II toutes les formes que peut prendre le théorème de Ménélaüs dans le plan : les quatre droites qui forment un quadrilatère complet génèrent 4 triangles coupés par une transversale ; à chaque

[33] Principe qui intervient, entre autres, dans la démonstration du fait que, si f est une application de E dans F et si card$E$ > card$F$ alors f n'est pas injective.

[34] R. Rashed et P. Crozet, *Al-Sijzī, Œuvres mathématiques*, vol. II, à paraître.

transversale, du fait des 18 formes (si l'on ne tient pas compte de leurs inverses) que peut prendre le rapport composé de 6 grandeurs différentes, correspondent 18 cas, chaque configuration géométrique éclate donc en quelque sorte en 18 cas ; on obtient alors $4 \times 18 = 72$ formes possibles pour ce théorème dans le plan. Al-Ṭūsī ramène ensuite, dans le livre IV, par la méthode que nous avons vue en œuvre dans la première démonstration du théorème de la « figure secteur » (cas a. *supra*), chaque cas de figure pour le théorème de Ménélaüs sur la sphère au cas correspondant pour le théorème de Ménélaüs dans le plan[35].

CONCLUSION

Premier traité consacré au théorème de Ménélaüs sur la sphère qui nous soit parvenu, le traité de Thābit sur *La Figure secteur* a eu une influence profonde sur le développement ultérieur de la géométrie sphérique et son importance sera reconnue par ses successeurs ; la première des deux démonstrations que donne Thābit de ce théorème en deviendra d'ailleurs en quelque sorte la démonstration canonique, au point d'être parfois attribuée à Ptolémée. De plus, lorsqu'à partir de la fin du Xe siècle le théorème de la « figure secteur » cesse d'être le théorème fondamental de l'astronomie et est supplanté dans les calculs des astronomes par l'une ou l'autre des diverses formules – d'usage plus simple, car elles ne font plus appel au rapport composé et substituent le triangle sphérique au quadrilatère complet comme figure de base – qui voient le jour à cette époque[36], c'est encore l'idée maîtresse du lemme de Thābit – projeter orthogonalement deux points de l'arc d'un grand cercle sur le plan d'un autre grand cercle puis sur la droite d'intersection de ces deux grands cercles, de façon à obtenir deux triangles rectangles semblables dans des plans parallèles – qui sous-tend une partie des démonstrations de ces formules. Enfin, toutes les formules que Thābit établit, dans la troisième partie de son traité, concernant la composition des rapports, permettent de trouver, de façon exhaustive, toutes les formes alternatives que peut prendre le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère, sous les deux formes de la diérèse et de la synthèse.

[35] Al-Ṭūsī ne reprend toutefois pas la démonstration par laquelle Thābit montre que $\forall\ (a, b, c, d, e, f)$ sextuplé de grandeurs homogènes distinctes telles que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.\frac{e}{f}$ et $\forall\ p$ permutation de $\{b, c, e, f\}$, $\frac{a}{d} \neq \frac{\mathrm{p}(b)}{\mathrm{p}(c)}.\frac{\mathrm{p}(e)}{\mathrm{p}(f)}$.

[36] Debarnot, *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-hay'a.*

HISTOIRE DU TEXTE

On connaît du traité de Thābit ibn Qurra sur *La Figure secteur* neuf manuscrits. Ce traité a également été traduit en latin par Gérard de Crémone (*Liber Thebit filii Chore de figura sectore*) ; cette traduction latine a fait l'objet d'une édition critique et d'une traduction allemande par A. Björnbo[37]. Nous possédons également deux autres versions latines de ce texte récemment éditées par R. Lorch[38]. Il a enfin été traduit en hébreu par Qalonymos ben Qalonymos (1312)[39]. On retrouve des échos du texte de Thābit chez Jordanus de Nemore et Campanus de Novarre[40].

Nous venions à peine d'achever l'édition critique du texte arabe du traité sur *La figure secteur* en juin 2002, lorsque nous avons appris l'existence de l'édition critique faite par R. Lorch. Dans la mesure où notre édition ne diffère de la sienne que sur quelques points, il ne nous a pas semblé nécessaire de reprendre ici cette édition, nous nous sommes donc bornés à indiquer en notes, dans la traduction de ce texte, les passages pour lesquels notre lecture diffère de la sienne. Nous allons cependant rappeler brièvement ici quelles étaient les bases de notre édition critique.

L'ÉTABLISSEMENT DU TEXTE

Nous avons consulté 8 manuscrits du traité de Thābit ibn Qurra sur *La Figure secteur*[41] :

1. Paris, Bibliothèque Nationale, collection 2457, fol. 164^r-170^v, noté B.

La collection 2457 du fond arabe est bien connue des historiens des mathématiques et a été de nombreuses fois étudiée[42]. Outre le traité sur *La Figure secteur*, elle contient quelques autres traités de Thābit :

[37] A. Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz*, édité par H. Bürger et K. Kohl, Erlangen, 1924.

[38] R. Lorch, *Thābit ibn Qurra, On the Sector-Figure and Related Texts*, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Frankfurt am Main, 2001.

[39] Nous avons de cette traduction deux manuscrits : Oxford, Bodleian Library, heb. Hunt. 96 (Catalogue Neubauer, n° 2008), fol. 43^r-46^v ; heb. d4 (Catalogue Neubauer, n° 2773), fol. 156^v-165^r. Je remercie mon collègue et ami Tony Lévy de son concours pour la lecture de ces manuscrits.

[40] *Ibid.*, p. 427-433.

[41] R. Lorch a utilisé, outre ces 8 manuscrits, un manuscrit que je n'ai pu consulter, appartenant à une collection privée (Lorch, *On the Sector-Figure*, p. 21) ; ce manuscrit reproduit également, à la fin du texte de Thābit, le complément de démonstration dû à Maslama ibn Aḥmad qui se trouve à la fin du texte du manuscrit *Escorial* 972, et ce quasiment dans les mêmes termes.

[42] F. Woepcke, « Essai d'une reconstitution des travaux perdus d'Apollonius », *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, vol. XIV,

- le *Traité sur le Ralentissement et l'accélération du mouvement sur l'écliptique*, fol. 56^{v}-59^{r}, daté de mars 970[43] ;
- le *Traité sur la composition des rapports*, fol. 60^{v}-75^{v}[44] ;
- le *Traité sur la mesure du paraboloïde*, fol. 95^{v}-122^{r} ;
- le *Traité sur la mesure de la parabole*, fol. 122^{v}-134^{v}[45] ;
- le *Traité sur le fait que si on mène deux droites suivant des angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent*, fol. 156^{v}-160^{r} (daté de mars 970, collationné avec le Manuscrit Autographe)
- le *Traité sur les nombres amiables*, fol. 170^{v}-180^{v} qui fait suite au traité sur *La Section de rapport* (copié à Shīrāz, daté de juin 969)[46].
- la *Lettre à Ibn Wahb sur le moyen de parvenir à déterminer la construction des problèmes géométriques*, fol. 188^{v}-191^{r} (collationné avec le Manuscrit Autographe)[47].
- le *Traité sur la trisection de l'angle*, fol. 192^{v}-195^{r}[48].

Le texte du traité sur *La Figure secteur* est, comme la majorité des textes de cette collection, de la main du mathématicien al-Sijzī. Il porte en marge la mention : « Révisé sur une copie de la main de Sulaymān ibn ʿIṣma. » Il n'est pas daté, mais les autres textes de la collection qui sont de la main d'al-Sijzī et sont datés ont été écrits entre 358 H et 359 H (ou 338 et

p. 662-671 ; rééd. F. Woepcke, *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*, 2 vol., Frankfurt am Main, 1986, vol. I, p. 653-661. De Slane, *Catalogue des manuscrits arabes*, B.N., Paris, 1883-1895, p. 430-434. G. Vajda, « Quelques notes sur le fond de manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale de Paris », dans *Rivista degli Studi Orientali*, 25, 1950, 1 à 10. Également *Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque Nationale de Paris*, publication de l'Institut de Recherche et d'Histoire des Textes IV, Paris, 1953, p. 481. P. Kunitzsch & R. Lorch, « A Note on Codex Paris B.N. ar. 2457 », *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, vol. 8, 1993, p. 235-240. H. Bellosta, « The Specific Case of Geometrical Manuscripts Using the Example of Manuscript B.N. 2457 (Paris) », dans Yusuf Ibish (éd.), *Editing Islamic Manuscripts on Sciences*, Proceedings of the fourth conference of Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, London 29th-30th November 1997, Londres, 1999, version anglaise vol. I, p. 181-191, version arabe vol. II, p. 263-281.

[43] Ce traité a été édité par R. Morelon, *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*, Paris, les Belles Lettres, 1987, p. 68-82.

[44] Voir *infra*.

[45] Ces deux traités, *Sur la mesure du paraboloïde* et *Sur la mesure de la parabole*, ont été édités par R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs*, Londres, al-Furqān, 1996, p. 319-457, 187-271.

[46] Voir *supra*, chap. II.

[47] Ce traité a été édité par R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, Furqān, 2002, p. 742-765.

[48] Ce traité a été édité par R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, Londres, al-Furqān, 2005, p. 564-573.

340 de l'ère de Yazdegird) soit 969-970 de l'ère commune, on peut donc avec une quasi-certitude dater cette copie de 969-970, ce qui en fait le témoin le plus ancien du texte. Les figures sont soigneusement tracées à l'encre rouge, les lettres désignant les points sont en noir. Certaines de ces figures, comme l'indiquent des notes marginales, ne se trouvent pas à l'endroit qui leur correspondrait dans le texte. Les points diacritiques à l'initiale des verbes sont le plus souvent absents.

2. Istanbul, Topkapı Saray, Ahmet III 3464, fol. 189ᵛ-198ᵛ, noté T.

La collection Ahmet III 3464 est datée par Sezgin[49] de 625 H/ 1227-1228 AD.

Cette collection, outre la traduction Isḥāq/Thābit d'un certain nombre de traités d'astronomie ou de géométrie sphérique (*La Sphère en mouvement* d'Autolycos, *Les Sphériques*, le *Kitāb al-Masākin* et *Les Jours et les Nuits* de Théodose), la traduction de quelques traités d'Euclide (*Les Données*, *Fī Ikhtilāf al-manāẓir*, *Kitāb al-Ẓāhirāt*) ainsi que *Les Sphériques* de Ménélaüs dans la traduction d'al-Harawī, contient également le traité de Thābit sur *Le Rapport composé*.

Le texte du traité écrit d'une jolie écriture très lisible comporte de nombreux ajouts en marge, souvent d'une autre main (d'une autre encre). On note de fréquentes césures de fin de ligne en milieu de mots. S'il n'a pas B pour seule source (deux omissions de plus de trois mots qui figurent dans B ne se retrouvent pas dans T) T reprend cependant le plus souvent les leçons de B.

3. Istanbul, Topkapı Saray, Hazine 455, fol. 59ᵛ-70ʳ, noté H.

La collection Hazine 455 contient également le traité de Thābit ibn Qurra sur *Le Rapport composé* (fol. 1ᵛ-28ʳ), un commentaire anonyme de *La Figure secteur* daté de 877 H (1472-1473) (fol. 29ʳ-58ʳ), un traité sur les carrés magiques (fol. 70ᵛ-78ᵛ), ainsi que divers traités d'astronomie dont le traité de Thābit sur le mouvement des deux luminaires (Xᵉ/XVIᵉ, fol. 74ʳ-78ᵛ)[50].

Le texte du traité est écrit d'une minuscule écriture très soignée sur des feuillets de dimensions 11,5 sur 18,5 ; les lettres désignant les points des droites ou les grandeurs sont en rouge, on note quelques ajouts marginaux. Le texte ne comporte pas de points diacritiques à l'initiale des verbes. Ce manuscrit qui nous a servi à confirmer certaines hypothèses de lecture, n'avait pas été, malgré sa qualité, conservé pour l'édition critique : c'est en effet une copie de T et de lui seul : tous les ajouts qui figurent dans T figu-

[49] F. Sezgin, *Geschichte der arabischen Schrifftums*, vol. V, Leyde, 1974, p. 268.

[50] Édité par R. Morelon, *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*, p. 83-92.

rent également dans H ; celui-ci comporte également en propre 7 omissions de un ou deux mots, un ajout de plus de deux mots et quatre ajouts de un ou deux mots.

4. Istanbul, Suleymaniye, Aya Sofya 4832, fol. 44r-45v, 47r-49v noté S.

La collection Aya Sofya 4832, décrite par R. Rashed[51], antérieure au VIe/XIIe siècle, date vraisemblablement du XIe siècle, ce qui en fait, après le manuscrit B dont il ne dépend pas directement, le témoin le plus ancien de ce texte ; les folios sont de dimensions 27,6 × 12 cm. Elle contient, outre le traité sur *La Figure secteur* divers autres traités de Thābit[52].

Le texte du traité est écrit d'une écriture très lisible en *naskhī* souvent dépourvue de points diacritiques.

5. Le Caire, Dār al-Kutub, Riyāḍa 40m, fol. 191v-199r, noté Q.

Cette collection datée 1159 H (1746-1747 AD) est de la main d'un copiste célèbre Muṣṭafā Ṣidqī ; elle a été décrite par R. Rashed[53]. Elle contient divers autres traités de Thābit ibn Qurra dont *La Mesure de la parabole* (fol. 165v-181r), *Comment on doit rechercher le demandé dans les notions de géométrie* (fol. 155v-159r), *Épître sur la preuve attribuée à Socrate concernant le carré et sa diagonale* (fol. 161v-164v), *Sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide* (fol. 200v-202r), ainsi que les traités d'Ibn Sinān sur *La Mesure de la parabole* (première version) et sur *L'Analyse et la Synthèse* et le traité d'al-Qūhī sur *La Mesure du paraboloïde*[54].

Ce manuscrit qui nous avait servi à confirmer certaines hypothèses de lecture, n'avait pas été, malgré sa qualité, conservé pour l'édition critique : c'est une copie de S et de lui seul : tous les ajouts et omissions de S figurent dans Q, à l'exception de (قوس) omis 3 fois dans S seul et de (لو) omis une fois dans S seul, omissions qui ont pu être aisément comblées par Q, copiste soigneux et attentif. La copie en a été achevée comme nous l'apprend un colophon à la fin du texte le 17 de Dhū al-qaʿda de l'année 1159 (1er décembre 1746).

[51] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 147.

[52] Voir *supra*, p. 267.

[53] R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au Xe siècle : Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Paris, 1993, p. CXXXXVI.

[54] Les traités d'Ibn Sinān sur *La Mesure de la parabole* et d'al-Qūhī sur *La mesure du paraboloïde* ont été édités par R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 835-883. Le traité d'Ibn Sinān sur *L'Analyse et la synthèse* a été édité par R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān, Logique et géométrie au Xe siècle*.

6. Damas, 5648, fol. 172v-184v, noté D.

Ce texte, daté de 1305 H (1887-1888 AD), n'avait pas non plus été retenu pour l'édition critique : c'est une copie de Q et de lui seul, comme bon nombre des autres traités que contient ce recueil (les traités de Thābit Ibn Qurra sur *La Mesure de la parabole*, d'Ibn Sinān sur *La Mesure de la parabole* – dans sa première version – et sur *L'Analyse et la Synthèse* ainsi que le traité d'al-Qūhī sur *La Mesure du paraboloïde* tous également copiés sur Q). Cette collection contient également les trois traités suivants de Thābit : *Épître sur la preuve attribuée à Socrate concernant le carré et sa diagonale* (fol. 120v-124v), *Comment on doit rechercher le demandé dans les notions de géométrie* (fol. 114v-119r), *Sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide* (fol. 185v-187v).

Comme c'était le cas pour le traité d'Ibn Sinān sur *L'Analyse et la Synthèse*, on est ici encore en présence d'une bonne copie de Q et de lui seul : tous les ajouts et omissions de Q figurent également dans D, D comporte en outre en propre deux grandes omissions (plus de 3 mots) et 5 petites (un ou deux mots).

7. Alger, 1446, fol. 83v-94r, noté A.

Nous n'avons pu consulter qu'un microfilm de ce manuscrit.

8. Escurial 972, fol. 16v-28, noté E.

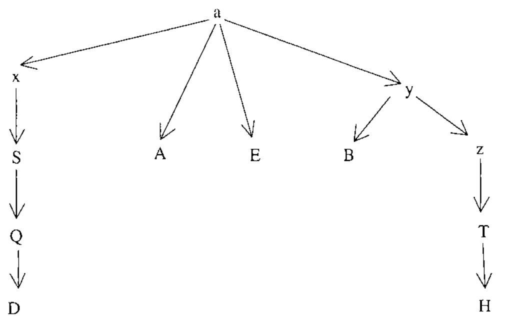
La collection Escorial 972, non datée, est un petit recueil de 67 folios sur papier, de format 14 × 19, écrits d'une écriture maghrébine très lisible, comportant pratiquement tous les points diacritiques (tout au moins en ce qui concerne le texte de Thābit)[55]. Malheureusement, les feuillets ont par endroits été détrempés, ce qui a fait disparaître l'encre et rend certains passages illisibles ; il a en outre été quelque peu dévoré par les vers, d'où la présence de nombreux trous ; sur les pages les plus détériorées ont été collées des bandes de papier recouvrant partiellement le texte. Ce recueil comporte, outre le traité de Thābit, quelques opuscules anonymes sur l'astrolabe et l'astronomie, ainsi qu'un extrait du *Kitāb fī al-'amal bi-al-asṭurlāb* d'Ibn al-Samḥ (fol. 28-29). Cette version du texte ne se rattache directement à aucune des versions précédentes. Elle comporte un appendice restituant une partie de la démonstration de Ptolémée, dû à Maslama ibn Aḥmad ; cet appendice se retrouve tant dans la version hébraïque que dans la traduction latine de Gérard de Crémone, il figure également dans la version latine d'un manuscrit de la British Library éditée par R. Lorch[56] ; ne

[55] H. P. J. Rénaud, *Les Manuscrits arabes de l'Escorial, décrits d'après les notes de Hartwig Derenbourg, revues et complétées par H. P. J. Rénaud*, 3 vol., Paris 1941, tome II fasc. 3 : *Les Sciences exactes et les sciences occultes*, p. 121-122.

[56] Lorch, *On the Sector-Figure*, p. 152-153.

figurent cependant pas dans la traduction de Gérard la plupart des nombreux ajouts ou omissions que l'on trouve dans le manuscrit E ; celui-ci ne peut donc être la seule source de cette version du texte.

L'étude des variantes de ces manuscrits, ou de leurs accidents (ajouts et omissions), nous avait permis de proposer le stemma suivant :



Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Épître d'Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra sur la figure secteur

J'ai compris, que Dieu t'accorde le bonheur, ce que tu as dit de la figure dite « secteur » et ce que tu as demandé à son sujet. Je ne connais aucune autre proposition de géométrie, utilisée en astronomie, que les gens aient autant discutée que cette proposition, ni à laquelle ils aient conféré la même notoriété. La raison pour laquelle ils s'y sont attachés, c'est ce que nous savons de ses nombreuses utilités et de l'extrême besoin que l'on en a en science de la sphère ; c'est le principe sur lequel sont fondés bon nombre de procédés en astronomie.

Cette proposition, même si d'autres que Ptolémée l'ont obtenue et en ont parlé, personne, parmi ceux dont nous avons entendu parler, n'a corrigé ce qui en était dit, ni n'en a rectifié ou révisé la démonstration, si ce n'est que <Ptolémée> a seulement donné deux des notions que l'on peut en trouver à partir de la composition du rapport et qui sont que :

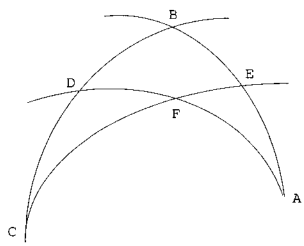


Fig. 1

si deux arcs AD et CE se coupent en un point F entre deux arcs AB et BC, si ces arcs sont <des arcs> de grands cercles situés sur la sphère et si chacun de ces arcs est moindre qu'un demi-cercle, le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc EB est composé du rapport de la corde du double de l'arc AF à la corde du double de l'arc FD et du rapport de la corde du double de l'arc DC à la corde du double de l'arc CB ; en outre, le rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE est composé du rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc DF et du rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc CE.

Il y a là d'autres notions que ces deux-là, qui s'imposent et sont nécessaires pour composer, de nombreuses autres manières, les rapports des cordes des doubles des arcs de cette figure : il n'y a pas, parmi ces arcs, d'arc dont le rapport de la corde de son double à la corde du double de celui qui lui est associé – même s'il en est éloigné[1] – ne se compose de deux des rapports des cordes des doubles des arcs restants, à l'exception d'un petit nombre d'entre eux[2] : le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *DC*, pour prendre cet exemple entre autres, est composé de deux des rapports des cordes des doubles des arcs restants ; et parmi ces rapports, tout rapport qui est composé d'une certaine manière, est lui-même également composé d'une autre manière[3]. Le but que je vise ici est de classer cela et de le démontrer de manières qui englobent cela et ce qui est semblable concernant la composition du rapport, et qui conviennent pour acquérir une maîtrise en cet art. Classer et dénombrer ces choses n'était pas nécessaire à Ptolémée, ni à qui se tenait à son argument, étant donné que ces choses n'incluaient pas cela. Mais expliciter ce dont on a besoin pour démontrer les deux notions qu'il entendait expliciter s'impose à qui veut en établir la preuve. Quant à lui (Ptolémée) il avait seulement donné une seule des parties de la démonstration de ces deux notions et avait laissé les autres, confiant dans le fait que, qui lirait cela, serait capable de procéder à son exemple pour les parties restantes et d'en achever alors pour lui-même la démonstration, mais c'est une chose qui s'impose aux commentateurs de son livre.

[1] En ne reprenant pas la lecture de Lorch qui corrige le texte en « ولو عـدت منـهـا », mais en lisant, avec l'ensemble des manuscrits, à l'exception de E, « ولو بعدت عنها ». La traduction latine de Gérard de Crémone a « et si ab eis elongentur » (Björnbo, p. 7).

On lit dans le manuscrit E « عنها (mot illisible) ولو » (fol. 17r).

En effet, si a, b, c, d, e et f sont six grandeurs homogènes distinctes telles que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\frac{e}{f}$, on a également $\frac{a}{e}=\frac{b}{d}.\frac{c}{f}$ (voir la relation 6 *infra*).

[2] Voir à la fin du texte le passage dans lequel Thābit démontre que si a, b, c, d, e et f sont six grandeurs homogènes distinctes telles que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\frac{e}{f}$, alors aucun des six rapports $\frac{a}{d}$, $\frac{a}{f}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$ et $\frac{d}{f}$ ne peut s'exprimer comme composé de deux rapports des quatre grandeurs restantes.

[3] Si a, b, c, d, e et f sont six grandeurs homogènes distinctes telles que :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\frac{e}{f}$, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{f}.\frac{e}{d}$ (relation 2).

Quant à moi, il m'était arrivé d'expliquer cela oralement à qui m'avait demandé de l'expliquer, sans l'avoir inscrit ni en avoir démontré les parties dans un livre. Mais un de nos amis, lorsqu'il a eu connaissance de cela et l'a compris, l'a établi pour lui-même, puis il a dénombré[4] toutes les formes que peut prendre cette proposition ainsi que les parties en lesquelles elle se subdivise, selon les deux manières de la diérèse et de la synthèse qui sont celles qu'entendait démontrer Ptolémée. Il a ainsi su que, selon la diérèse, il obtenait trois parties et, selon la synthèse, vingt-sept parties, dont quatorze étaient impossibles et fausses et les autres vraies[5]. La démonstration de Ptolémée – démonstration de ce qu'il entendait démontrer de cette proposition – n'est pas complète sans une connaissance exhaustive de ces parties, et sans avoir établi une démonstration de chacune d'elles.

J'étais tombé d'accord avec toi[6], que Dieu t'accorde son soutien, au sujet de ces parties ; j'en avais eu connaissance et je les avais comprises[7], et je t'avais fait savoir qu'il y a là des chemins et des méthodes autres, générales, regroupant ces nombreuses parties – faute desquelles la démonstration de la proposition n'est pas achevée – et les réduisant à un petit nombre de choses ; c'est grâce à elles que je l'avais le plus souvent démontrée[8]. Tu m'as ensuite fait voir un procédé au moyen duquel cela était fait et tu as alors aimé savoir si cela était comme l'un des procédés au moyen desquels je l'avais fait ou pas et si je croyais que Ptolémée avait eu recours à ce même procédé, ou à un autre[9], dans ce qu'il a laissé sans démonstration dans les parties précédemment mentionnées de ces deux notions de cette proposition. Quant au procédé, c'est l'un des procédés au moyen desquels je l'avais fait ; je ne pense cependant pas que Ptolémée ait

[4] En suivant la leçon des manuscrits B, T, A et E : « فأحصى ».

[5] Voir p. 346 le détail de ces cas.

[6] En ne reprenant pas la lecture de Lorch qui corrige le texte en « وقد كنت أريت », mais en lisant « وقد كنت جاريتك ... في », là où les manuscrits ont « وقد كنت جاريتك » (B, A) « وقد كنت جاربتك » (S, T) « وقد كنت جاريتك ... في » (E) (corrigé en marge en حاوبتك في ...). Le latin a « feci te videre » (Björnbo, p. 8).

[7] En lisant « ووقفتُ عليها وفهمتُها » plutôت que « ووقفتَ عليها وفهمتَها ». Le latin a « et scivisti eas et intellexisti » (Björnbo, p. 8).

[8] En lisant « أبينه » plutôt que « أثبته ». Le latin a « et ego multociens eas ostendi » (Björnbo, p. 8).

[9] En suivant la leçon des manuscrits B, T, A et E : « أم إلى غيره » et non comme Lorch celle de S « إلى غيره ». Le latin a « an non » (Björnbo, p. 8).

suivi cette voie dans ce qu'il a laissé sans le mentionner dans la démonstration de la proposition ; mais il aurait plutôt suivi la première voie, celle qui se subdivise, selon les deux manières de la diérèse et de la synthèse, en trente parties, dont seize se trouvent être vraies ; en effet cette voie qui réunit ces parties en une chose simple, est telle que je la décris :

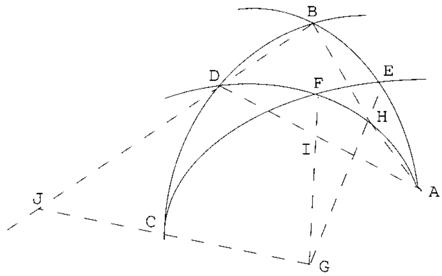


Fig. 2

si deux arcs *AD* et *CE* se coupent en un point *F* entre deux arcs *AB* et *BC*, si ces arcs sont <des arcs> de grands cercles situés sur la sphère et si chacun de ces arcs est moindre qu'un demi-cercle, le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*.

Démonstration : posons le centre de la sphère le point *G*, menons les droites *GC*, *GF* et *GE* et les deux droites *AB* et *AD* ; qu'elles coupent les deux droites *GE* et *FG* aux deux points *H* et *I*. Menons la droite *HI* et la droite *BD*. La droite *BD* ou bien rencontre la droite *GC*[10] – lorsqu'elles sont prolongées en ligne droite – du côté de *DC*, ou bien de l'autre côté, qui lui est opposé, ou bien elles sont parallèles[11] :

- Si elle la rencontre du côté de *DC*, il a été démontré – par la démonstration décrite par Ptolémée – que le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*.

- Mais si *GC* rencontre *DB* du côté opposé à ce côté, nous prolongeons les deux arcs *CB* et *CE*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point *K*. *CBK* et *CEK* sont alors deux demi-cercles, puisque ces arcs sont <des arcs> de grands cercles de la sphère. Les deux droites *GK* et *DB*, si on les prolonge

[10] En suivant la leçon des manuscrits S et A : « خط زج ».

[11] Ce sont là les trois parties précédemment évoquées en lesquelles se décompose la diérèse (voir démonstration de la diérèse, p. 342).

du côté de *BK*, se rencontrent. Les deux arcs *AB* et *KF* se coupaient au point *E* entre les deux arcs *AD* et *DK* ; ce cas se ramène alors à la démonstration décrite par Ptolémée : de ce fait le rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* devient alors composé du rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* et du rapport de la corde du double de l'arc *BK* à la corde du double de l'arc *KD*.

Pour six grandeurs quelconques, telles que le rapport de la première d'entre elles à la deuxième soit composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième, le rapport de la troisième à la quatrième est composé du rapport de la première à la deuxième et du rapport de la sixième à la cinquième, comme nous allons le démontrer dans ce qui suit[12].

Par conséquent, le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *DK* à la corde du double de l'arc *KB*. Quant à la corde du double de l'arc *DK*, c'est la corde du double de l'arc *DC*, et quant à la corde du double de l'arc *KB* c'est la corde du double de l'arc *CB*. Le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*[13].

- Mais si la droite *BD* est parallèle à la droite *GC*, la droite *HI* est parallèle à la droite *BD* car, si elle ne lui était pas parallèle, elle ne serait pas parallèle à *GC*, attendu que *GC* est parallèle à *BD*. Si la droite *HI* n'était pas parallèle aux deux droites *DB* et *GC*, elle les rencontrerait ; or elles sont parallèles, <la droite *HI*> serait donc avec elles dans un même plan[14] ; or il n'en est pas ainsi[15], les deux droites *HI* et *BD* sont donc

[12] Voir la relation 7 *infra*. On trouve en marge dans le manuscrit E : « septième manière de ce traité ».

[13] On trouve à la suite dans le manuscrit A : « car si on mène de *D* une perpendiculaire à *KC* c'est la moitié de la corde du double de l'arc [...] ».

[14] En lisant « فكان يكون معهما في سطح واحد » plutôt que « فكأن يكون معهما في سطح واحد ».

[15] On trouve à la suite dans le manuscrit A : « De par ce qui a été démontré dans le livre XI de l'ouvrage d'Euclide » (Euclide, *Éléments*, XI.7).

On trouve dans le manuscrit E : « Maslama ibn Aḥmad a dit : car la droite *IH* est, avec la droite *CG*, dans le plan de l'arc *EFC*, elle la rencontre donc dans ce plan ; or les droites *CG* et *DB* sont dans le plan de l'arc *BDC*, la droite *IH* serait donc dans le plan de l'arc *EFC* et elle les rencontrerait dans un autre plan, ceci est une contradiction, ce n'est parallèles et, de ce fait, le rapport de *AH* à *HB* est égal au rapport de *AI* à *ID*. Quant au rapport de *AH* à *HB* il est égal au rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* ; quant au rapport de la droite *AI* à la droite *ID*, il est égal au rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD*[16] ; la corde du double de l'arc *CD* est égale à la corde du double de l'arc *BC*, car la droite *BD* est parallèle à la droite *CGK*, le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*.

Ceci ayant été démontré, on démontre, à partir de ce que nous avons dit, que, selon la synthèse, le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *DF* et du rapport de la corde du double de l'arc *FC* à la corde du double de l'arc *CE*.

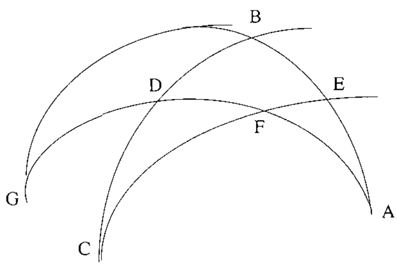


Fig. 1bis

pas possible, elle lui est par conséquent parallèle. L'auteur Thābit ibn Qurra a dit … ».
« قال مسلمة بن أحمد : لأن خط ط ح هو مع خط جـ ز في سطح قوس ه و جـ، فكان يلتقي معه في ذلك السطح ؛ وخطا جـ ز د ب هما (لا يمكن أن تقرأ هذه الكلمة) في سطح قوس ب د جـ، فخط ط ح في سطح قوس ه و جـ ويلتقي مع (لا يمكن أن تقرأ هذه الكلمة) هما في سطح آخر، هذا خلف لا يمكن، فهو إذن موازٍ له. قال المؤلف ثابت بن قرة. …».

Cette glose se retrouve sous une forme semblable dans les deux manuscrits hébreux que nous possédons de ce texte : N 2773, fol. 158ᵛ, l. 15-18 et N 2008, fol. 43ᵛ, l. 32-34 (Lorch, p. 37). Elle ne figure pas dans le texte latin édité par Björnbo (Björnbo, p. 10).

Elle figure en revanche dans le manuscrit latin de la London British Library édité par Lorch, mais comporte une phrase de plus : « Inquit mithlem quoniam linea *HT* cum *ZG* in superficie arcus *EVG* consistit, eam profecto in eamdem superficie continget. *Ipse tamen cum linea BD in superficie trianguli ADB collocatur et in hac ipsam continget* ; atqui *ZG* et *BD* in superficie arcus *BDG* consistunt […] » (Lorch, p. 145).

[16] D'après le lemme 3 de la démonstration de Ptolémée (voir commentaire, p. 341).

Démonstration : prolongeons les deux arcs AB et AD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point G ; ABG et ADG sont donc deux demi-cercles ; les deux arcs GF et CB se coupent au point D entre les deux arcs GE et EC, le rapport de la corde du double de l'arc GB à la corde du double de l'arc BE est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc GD à la corde du double de l'arc DF et du rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc CE, de par ce qui a été démontré selon la diérèse. Quant à la corde du double de l'arc GB, c'est la corde du double de l'arc BA, et quant à la corde du double de l'arc GD, c'est la corde du double de l'arc AD, le rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc DF et du rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc CE. C'est ce que nous voulions démontrer.

Cette voie a donc réuni ces nombreuses parties en des choses simples et a dispensé de l'une des quatre prémisses dont Ptolémée avait fait précéder cette proposition[17], même si ce procédé nécessite qu'ait été établie auparavant – d'entre les démonstrations des parties de cette proposition – la démonstration donnée par Ptolémée, ainsi que les prémisses introduites dans ce but. Je ne crois cependant pas que Ptolémée ait eu recours à cette voie dans la partie de démonstration qu'il a laissée, mais plutôt de la première voie, celle aux nombreuses parties. Il y a deux indices de ce que j'en dis : l'un est qu'il a dit[18] – après en avoir terminé avec ce qu'il avait énoncé selon la diérèse – que l'on démontrerait également ce qui a trait à la synthèse pour la figure secteur, sur ce même modèle par lequel cela a été démontré <pour la diérèse>, en traçant les lignes droites qui sont dans le plan[19] ; l'autre indice est que, s'il avait voulu le démontrer par ce chemin qui réunit les parties, il n'aurait pas eu besoin de le faire précéder de la prémisse dans laquelle on démontre comment sont les rapports selon la synthèse pour des droites sécantes dans un plan – étant donné qu'il ne l'aurait utilisée absolument en rien dans son ouvrage : si l'on ne procède pas selon la première voie que

[17] Elle dispense du théorème de Ménélaüs dans le plan, sous la forme de la synthèse.

[18] En suivant la leçon du manuscrit B : « أحدهما أنه قد قال ».

[19] On trouve à la suite dans le manuscrit E : « Maslama ibn Aḥmad a dit : je le pense. » Cette remarque, qui ne se trouve pas dans la traduction latine de Gérard de Crémone (Björnbo, p. 11) figure en revanche dans les deux manuscrits hébreux (N 2773, fol. 159^{r}, l. 17 et N 2008, fol. 44^{r}, l. 12). Elle est cohérente avec la glose à la fin du manuscrit E dans laquelle Maslama tente de reconstituer cette partie de la démonstration de Ptolémée.

nous avons mentionnée pour démontrer la <figure> secteur, on en a besoin. Même si cette dernière voie que nous avons mentionnée réunit ces nombreuses parties et les réduit à quatre parties seulement, lorsque nous visions à commenter les notions du propos de cet homme, il ne nous était pas loisible de délaisser la démonstration qu'il avait conduite et de nous en écarter pour en donner une autre.

Mais si nous sommes libres de donner à notre gré une démonstration de ce que Ptolémée voulait démontrer au sujet de cette proposition[20], alors nous en avons déterminé une démonstration plus accessible et plus facile que la démonstration de Ptolémée, ne nécessitant ni ses démonstrations ni aucune des quatre prémisses dont il l'a, pour ce faire, fait précéder ; cette démonstration réunit de façon générale toutes les parties en une seule pour ce qui est de la synthèse, et une <autre> seulement pour ce qui est de la dièrèse ; c'est celle que je décris.

Faisons-la précéder d'abord de cette prémisse :

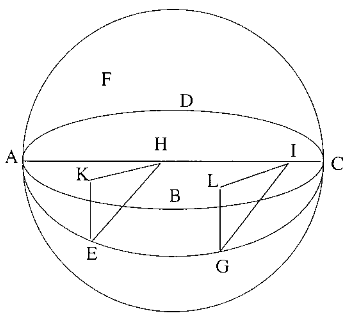


Fig. 3

Pour tout couple de cercles, parmi les grands cercles qui se trouvent à la surface de la sphère, on sépare de l'un d'eux, à partir de l'un de leurs deux points d'intersection, deux arcs moindres que deux demi-cercles[21] ; on mène depuis les deux extrémités des deux arcs deux perpendiculaires à la surface de l'autre cercle ; le rapport de la corde du double de l'un des deux arcs à la corde du double de l'autre arc est alors égal au rapport de la perpendiculaire issue de son extrémité à la perpendiculaire issue de l'extrémité de l'autre arc, que les deux arcs soient tous deux d'un même côté ou qu'ils soient de deux côtés différents.

[20] En suivant la leçon du manuscrit S : «من أمر».

[21] L'hypothèse « moindres que deux demi-cercles » est superflue, puisque les points *E* et *G* peuvent être de part et d'autre de *A* ou d'un même côté de *A*.

Exemple : les deux cercles *ABCD* et *AECF*, qui sont parmi les grands cercles situés à la surface de la sphère, se coupent aux points *A* et *C*[22]. On sépare de l'un d'eux, le cercle *AECF*, deux arcs, *AE* et *AG*, tels que chacun d'eux soit moindre qu'un demi-cercle. On mène des deux points *E* et *G* deux perpendiculaires au plan du cercle *ABCD*. Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *AG* est égal au rapport de la perpendiculaire issue du point *E* à la perpendiculaire issue du point *G*.

Démonstration : la section commune aux deux cercles *ABCD* et *AECF* est pour eux un diamètre, que ce soit le diamètre *AC*. Menons des deux points *E* et *G* deux perpendiculaires à *AC*, *EH* et *GI*.

- Si elles sont également perpendiculaires au plan du cercle *ABCD*, ce que nous voulions est démontré, car ce sont les deux sinus des arcs *AE* et *AG*.

- S'il n'en est pas ainsi, menons des deux points *E* et *G* deux perpendiculaires, *EK* et *GL*, au plan du cercle *ABCD*, elles sont parallèles et les droites *EH* et *GI* sont également parallèles. Si deux droites qui entourent un angle sont parallèles à deux autres droites qui entourent un autre angle, les deux angles sont égaux[23] ; l'angle *HEK* est donc égal à l'angle *IGL* ; les deux angles *EKH* et *GLI* sont droits, les triangles *EHK* et *GIL* sont donc semblables et le rapport de *EH* à *GI* est égal au rapport de *EK* à *GL*. Mais le rapport de *EH* à *GI* est égal au rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *AG*, car ces droites sont leurs sinus. Le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *AG* est donc égal au rapport de la perpendiculaire *EK* à la perpendiculaire *GL*. On démontre de même également ce que nous avons dit, même si l'un des deux arcs *AE* ou *AG* est du côté de *AF*. C'est ce que nous voulions démontrer.

Ayant introduit cette prémisse, que les arcs *AD* et *CE* se coupent au point *F* entre les arcs *AB* et *BC*. Que ces arcs soient <des arcs> de grands cercles situés sur la sphère, et que chacun d'eux soit moindre qu'un demi-cercle. Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *DF* et du rapport de la corde du double de l'arc *FC* à la corde du double de l'arc *CE*.

[22] En suivant la leçon du manuscrit E : « على نقطتي آ جـ ».

[23] On trouve à la suite dans le manuscrit A : « de par ce qui a été démontré dans le livre onze d'Euclide » (Euclide, *Éléments*, XI.10).

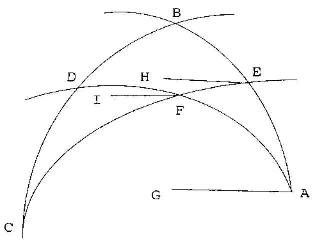


Fig. 4

Démonstration : menons des points A, E et F des perpendiculaires au plan du cercle de l'arc BC, ce sont les perpendiculaires AG, EH et FI. Posons la perpendiculaire FI intermédiaire pour ce qui est du rapport entre les perpendiculaires AG et EH : le rapport de AG à EH est alors composé du rapport de AG à FI et du rapport de FI à EH. Quant au rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire EH, nous avons démontré par la prémisse que nous avons introduite précédemment qu'il est égal au rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE ; quant au rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire FI, nous montrons également grâce à elle[24] qu'il est égal au rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc DF ; quant au rapport de la perpendiculaire FI à la perpendiculaire EH, nous montrons également grâce à elle[25] qu'il est égal au rapport de la corde du double de l'arc CF à la corde du double de l'arc CE. Le rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc DF et du rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc CE.

Je dis en outre que, selon la diérèse, le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc EB est composé du rapport de la corde du double de l'arc AF à la corde du double de l'arc FD et du rapport de la corde du double de l'arc DC à la corde du double de l'arc CB.

[24] En suivant la leçon de tous les manuscrits : « فنبين بها أيضاً » .

[25] En lisant « فنبين بها أيضاً », là où les manuscrits ont : « فنبين بها » (B), « فنبين أيضاً » (T), « فيتبين أيضاً » (S), « فيتبين بها أيضاً » (A), « فبين أيضاً » (E).

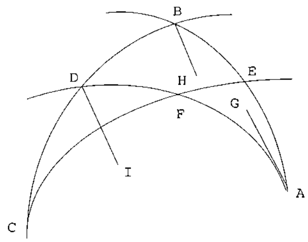


Fig. 5

La voie pour démontrer cela est semblable à la voie pour ce qui précède, car si nous menons des points *A*, *B* et *D* trois perpendiculaires, *AG*, *BH* et *DI*, au plan du cercle de l'arc *CFE* et si nous posons la perpendiculaire *DI* intermédiaire entre les deux autres perpendiculaires pour ce qui est du rapport, le rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *BH* est composé du rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *DI* et du rapport de la perpendiculaire *DI* à la perpendiculaire *BH* ; quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *BH*, il est égal au rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* ; quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *DI*, il est égal au rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *DF* ; quant au rapport de la perpendiculaire *DI* à la perpendiculaire *BH*, il est égal au rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*, tout cela de par ce qui a été démontré dans la prémisse que nous avons introduite précédemment. Le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *DF* et du rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*. C'est ce que nous voulions démontrer.

La démonstration des deux notions que Ptolémée voulait démontrer, concernant la <figure> secteur, est achevée. On peut trouver, à partir de la composition des rapports pour la <figure> secteur, d'autres cas non mentionnés par Ptolémée : il n'en a pas eu besoin, comme il avait eu besoin des parties précédemment mentionnées, pour achever la démonstration de ce qu'il désirait de ces deux notions. Mais puisque ces cas sont du même genre et que l'on en a besoin pour d'autres choses, j'ai été d'avis d'en établir des principes qui englobent et réunissent toutes les permutations que peut présenter le rapport pour tout sextuplet de grandeurs telles que le rapport de deux d'entre elles soit composé de deux des rapports des quatre restantes, afin que si quelqu'un trouve six grandeurs ayant cette propriété pour la composition du rapport, il soit capable de les permuter et d'engendrer à partir d'elles tout ce qu'il est possible d'engendrer, que cette relation se trouve être entre des arcs sur une sphère comme dans <la figure> secteur ou entre des lignes droites dans un plan, que ce soit selon la diérèse ou selon la synthèse, ou de quelque façon que ce soit.

Ce que l'on engendre à partir de six grandeurs quelconques ayant cette propriété, ce sont dix-sept manières de composer le rapport, ce qui, avec la relation initiale d'où elles procèdent, fait dix-huit manières.

1. Que la relation initiale, qui est la première des dix-huit, soit : le rapport de la première de six grandeurs à la deuxième d'entre elles est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième.

2. La deuxième manière qui en procède est que le rapport de la première à la deuxième est également composé du rapport de la troisième à la sixième et du rapport de la cinquième à la quatrième.

Exemple[26] : soient six grandeurs a, b, c, d, e et f, le rapport de la première, a, à la deuxième, b, est composé du rapport de la troisième, c, à la quatrième, d, et du rapport de la cinquième, e, à la sixième, f. Je dis que le rapport de la première, a, à la deuxième, b, est également composé du rapport de la troisième, c, à la sixième, f, et du rapport de la cinquième, e, à la quatrième, d.

Démonstration : posons d et e intermédiaires entre c et f : le rapport de c à f est composé du rapport de c à d, du rapport de d à e et du rapport de e à f et le rapport composé du rapport de c à f et du rapport de e à d est composé du rapport de c à d, du rapport de d à e, du rapport de e à f et du rapport de e à d. Mais le rapport composé du rapport de c à d, du rapport de d à e et du rapport de e à d est le rapport de c à d[27], le rapport composé du rapport de c à f et du rapport de e à d est donc égal au rapport composé du rapport de c à d et du rapport de e à f. Mais le rapport de a à b était composé du rapport de c à d et du rapport de e à f, le rapport de a à b est donc composé du rapport de c à f et du rapport de e à d.

3. La troisième manière est que le rapport de la première, a, à la troisième, c, est composé du rapport de la deuxième, b, à la quatrième, d, et du rapport de la cinquième, e, à la sixième, f.

[26] En suivant la leçon du manuscrit S : « مثال ذلك أن ».

[27] Associativité et commutativité de la composition des rapports.

Démonstration : nous posons b intermédiaire entre a et c : le rapport de a à c est composé du rapport de a à b et du rapport de b à c. Le rapport de a à b est composé du rapport de c à d et du rapport de e à f, le rapport de a à c est donc composé du rapport de b à c et des rapports de c à d et de e à f. Mais le rapport de b à d est composé du rapport de b à c et du rapport de c à d, le rapport de a à c est donc composé du rapport de b à d et du rapport de e à f.

4. La quatrième manière est que le rapport de la première, a, à la troisième, c, est également composé du rapport de la deuxième, b, à la sixième, f, et du rapport de la cinquième, e, à la quatrième, d.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la troisième manière, le rapport de a à c est composé du rapport de b à d et du rapport de e à f ; la première devient donc a, la deuxième c, la troisième b, la quatrième d, la cinquième e et la sixième f, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la deuxième manière, le rapport de a à c est composé du rapport de b à f et du rapport de e à d.

5. La cinquième manière est que le rapport de la première, a, à la cinquième, e, est composé du rapport de la deuxième, b, à la sixième, f, et du rapport de la troisième, c, à la quatrième, d.

Démonstration : le rapport de a à b est également composé du rapport de e à f et du rapport de c à d[28] ; la première devient donc a, la deuxième b, la troisième e, la quatrième f, la cinquième c et la sixième d, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la troisième manière, le rapport de a à e est composé du rapport de b à f et du rapport de c à d[29].

6. La sixième manière est que le rapport de la première, a, à la cinquième, e, est également composé[30] du rapport de la deuxième, b, à la quatrième, d, et du rapport de la troisième, c, à la sixième, f.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la cinquième manière, le rapport de a à e est composé du rapport de b à f et du rapport de c à d ; la première devient donc a, la deuxième e, la troisième b, la quatrième f, la cinquième c et la sixième d, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi,

[28] Commutativité de la composition des rapports.

[29] On trouve dans le traité *Sur la composition des rapports* une démonstration différente de cette propriété, n'utilisant, outre la relation (1), que la définition de la composition des rapports ainsi que la commutativité et l'associativité de cette opération : $\frac{a}{e}=\frac{a}{b}.\frac{b}{d}.\frac{d}{e}=\frac{c}{d}.\frac{e}{f}.\frac{b}{d}.\frac{d}{e}=\frac{c}{f}.\frac{b}{d}$.

[30] En suivant la leçon du manuscrit A : « تكون مؤلفة أيضاً ».

alors, selon la deuxième manière, le rapport de a à e est composé du rapport de b à d et du rapport de c à f.

Nous posons la septième et la huitième manière, deux manières dont on a besoin pour démontrer ce qui les suit[31].

7. Quant à la septième, c'est que le rapport de la troisième, c, à la quatrième, d, est composé du rapport de la première, a, à la deuxième, b, et du rapport de la sixième, f, à la cinquième, e[32].

Démonstration : nous posons le rapport de d à g égal au rapport de e à f[33] ; le rapport de a à b est alors composé du rapport de c à d et du rapport de d à g ; le rapport de c à g est également composé du rapport de c à d et du rapport de d à g, le rapport de a à b est donc égal au rapport de c à g. Le rapport de c à d est composé du rapport de c à g et du rapport de g à d, or on a démontré que le rapport de c à g est égal au rapport de a à b ; le rapport de g à d était égal au rapport de f à e[34], le rapport de c à d est donc composé du rapport de a à b et du rapport de f à e[35].

8. La huitième manière est que le rapport de la cinquième, e, à la sixième, f, est composé du rapport de la première, a, à la deuxième, b, et du rapport de la quatrième, d, à la troisième, c.

Démonstration : le rapport de a à b est également composé du rapport de e à f et du rapport de c à d ; la première devient donc a, la deuxième b, la troisième e, la quatrième f, la cinquième c et la sixième d, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la septième manière, le rapport de e à f est composé du rapport de a à b et du rapport de d à c[36].

[31] Thābit abandonne l'ordre lexicographique suivi jusqu'ici, qui imposerait d'étudier maintenant $\frac{b}{d}$ et $\frac{b}{f}$; il y revient dans les relations 9 et 10.

[32] C'est la propriété utilisée dans la première démonstration du théorème de la « figure secteur » , voir note 12.

[33] g est la quatrième proportionnelle à e, f et d.

[34] En inversant les rapports : $\frac{d}{g}=\frac{e}{f}$ donc $\frac{g}{d}=\frac{f}{e}$.

[35] Thābit en déduit, dans le traité *Sur la composition des rapports*, qu'inversement $\frac{b}{a}=\frac{f}{e}.\frac{d}{c}$; en effet, puisque $\frac{a}{b}=\frac{c}{g}$, $\frac{b}{a}=\frac{g}{c}=\frac{g}{d}.\frac{d}{c}=\frac{f}{e}.\frac{d}{c}$.

[36] On trouve dans le traité *Sur la composition des rapports* une démonstration différente de cette propriété : $\frac{e}{f}=\frac{d}{g}=\frac{d}{c}.\frac{c}{g}=\frac{d}{c}.\frac{a}{b}$.

9. Revenons donc maintenant à l'ordre dont nous avons besoin[37] et posons que la neuvième manière est que le rapport de la deuxième, *b*, à la quatrième, *d*, est composé du rapport de la première, *a*, à la troisième, *c*, et du rapport de la sixième, *f*, à la cinquième, *e*.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la troisième manière, le rapport de *a* à *c* est composé du rapport de *b* à *d* et du rapport de *e* à *f* ; la première devient donc *a*, la deuxième *c*, la troisième *b*, la quatrième *d*, la cinquième *e* et la sixième *f*, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la septième manière, le rapport de *b* à *d* est composé du rapport de *a* à *c* et du rapport de *f* à *e*.

10. La dixième manière est que le rapport de la deuxième, *b*, à la quatrième, *d*, est également composé du rapport de la première, *a*, à la cinquième, *e*, et du rapport de la sixième, *f*, à la troisième, *c*.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la neuvième manière, le rapport de *b* à *d* est composé du rapport de *a* à *c* et du rapport de *f* à *e* ; la première devient donc *b*, la deuxième *d*, la troisième *a*, la quatrième *c*, la cinquième *f* et la sixième *e*, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la deuxième manière, le rapport de *b* à *d* est composé du rapport de *a* à *e* et du rapport de *f* à *c*.

11. La onzième manière est que le rapport de la deuxième, *b*, à la sixième, *f*, est composé du rapport de la première, *a*, à la troisième, *c*, et du rapport de la quatrième, *d*, à la cinquième, *e*.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la quatrième manière, le rapport de *a* à *c* est composé du rapport de *b* à *f* et du rapport de *e* à *d* ; la première devient donc *a*, la deuxième *c*, la troisième *b*, la quatrième *f*, la cinquième *e* et la sixième *d*, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la septième manière, le rapport de *b* à *f* est composé du rapport de *a* à *c* et du rapport de *d* à *e*.

12. La douzième manière est que le rapport de la deuxième, *b*, à la sixième, *f*, est également composé du rapport de la première, *a*, à la cinquième, *e*, et du rapport de la quatrième, *d*, à la troisième, *c*.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la onzième manière, le rapport de *b* à *f* est composé du rapport de *a* à *c* et du rapport de *d* à *e* ; la première devient donc *b*, la deuxième *f*, la troisième *a*, la quatrième *c*, la cinquième *d* et la sixième *e*, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la deuxième manière, le rapport de *b* à *f* est composé du rapport de *a* à *e* et du rapport de *d* à *c*.

[37] Retour à l'ordre lexicographique.

13. La treizième manière est que le rapport de la troisième, c, à la quatrième, d, est composé du rapport de la première, a, à la cinquième, e, et du rapport de la sixième, f, à la deuxième, b.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la septième manière, le rapport de c à d est composé du rapport de a à b et du rapport de f à e ; la première devient donc c, la deuxième d, la troisième a, la quatrième b, la cinquième f et la sixième e, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la deuxième manière, le rapport de c à d est composé du rapport de a à e et du rapport de f à b.

14. La quatorzième manière est que le rapport de la troisième, c, à la sixième, f, est composé du rapport de la première, a, à la deuxième, b, et du rapport de la quatrième, d, à la cinquième, e.

Démonstration : le rapport de c à f est composé du rapport de c à d, du rapport de d à e et du rapport de e à f, mais le rapport de a à b, lui[38], est composé du rapport de c à d et du rapport de e à f, le rapport de c à f est donc composé du rapport de a à b et du rapport de d à e [39].

15. La quinzième manière est que le rapport de la troisième, c, à la sixième, f, est composé du rapport de la première, a, à la cinquième, e, et du rapport de la quatrième, d, à la deuxième, b.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la quatorzième manière, le rapport de c à f est composé du rapport de a à b et du rapport de d à e ; la première devient donc c, la deuxième f, la troisième a, la quatrième b, la cinquième d et la sixième e, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la deuxième manière, le rapport de c à f est composé du rapport de a à e et du rapport de d à b.

[38] En suivant la leçon des manuscrits B, S et A : «...ولكن نسبة آ إلى بَ هي مؤلفة».

[39] On trouve dans le manuscrit S, en fin de texte, la démonstration alternative suivante :

« Une autre démonstration de la quatorzième manière est que nous avons démontré dans la neuvième (*sic*) que le rapport de a à c est composé des rapports de b à d et de e à f. Posons a première, c deuxième, b troisième, d quatrième, e cinquième et f sixième ; selon la onzième manière le rapport de c à f est alors composé des rapports de a à b et de d à e. »

Cette démonstration se retrouve, à quelques détails près dans l'expression, dans le corps du texte des manuscrits Q et D :

« Une autre démonstration, c'est que l'on a démontré que, selon la troisième, le rapport de a à c est composé du rapport de b à d et du rapport de e à f. Posons la première a, la deuxième c, la troisième b, la quatrième d, la cinquième e, la sixième f, selon la onzième manière, le rapport de c à f est alors composé des rapports de a à b et de d à e. »

16. La seizième manière est que le rapport de la quatrième, d, à la cinquième, e, est composé du rapport de la deuxième, b, à la première, a, et du rapport de la troisième, c, à la sixième, f.

Démonstration : le rapport de d à e est composé du rapport de d à c, du rapport de c à f et du rapport de f à e ; quant au rapport composé du rapport de d à c et du rapport de f à e, il est égal au rapport de b à a[40], le rapport de d à e est donc composé du rapport de b à a et du rapport de c à f[41].

17. La dix-septième manière est que le rapport de la quatrième, d, à la cinquième, e, est également composé du rapport de la deuxième, b, à la sixième, f, et du rapport de la troisième, c, à la première, a.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la seizième manière, le rapport de d à e est composé du rapport de b à a et du rapport de c à f ; la première devient donc d, la deuxième e, la troisième b, la quatrième a, la cinquième c et la sixième f, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la deuxième manière, le rapport de d à e est composé du rapport de b à f et du rapport de c à a.

18. La dix-huitième manière est que le rapport de la cinquième, e, à la sixième, f, est composé du rapport de la première, a, à la troisième, c, et du rapport de la quatrième, d, à la deuxième, b.

Démonstration : nous avons démontré que, selon la huitième manière, le rapport de e à f est composé du rapport de a à b et du rapport de d à c ; la première devient donc e, la deuxième f, la troisième a, la quatrième b, la cinquième d et la sixième c, et nous avons démontré que, s'il en est ainsi,

[40] En inversant les rapports dans le rapport composé, ce que Thābit a démontré dans le traité sur *La Composition des rapports* (voir note 35) mais pas dans le traité sur *La Figure secteur*.

[41] On trouve dans le manuscrit S, en fin de texte, la démonstration alternative suivante, qui évite le recours à la relation non démontrée $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} . \frac{f}{e}$:

« Une autre démonstration de la seizième manière est que nous avons démontré que, selon la septième manière, le rapport de c à d est composé des rapports de a à b et de f à e ; la première est alors c, f la deuxième, a la troisième, b la quatrième, f la cinquième et e la sixième, et on a démontré que, s'il en est ainsi, alors, selon la douzième manière, le rapport de d à e est composé des rapports de b à a et de c à f. »

Cette démonstration se retrouve, à quelques détails près dans l'expression, dans le corps du texte des manuscrits Q et D :

« Une autre démonstration, c'est que l'on a démontré que, selon la septième manière, le rapport de c à d est composé des rapports de a à b et de f à c ; la première est alors c, la deuxième d, la troisième a, la quatrième b, la cinquième f, la sixième e, et on a démontré que, s'il en est ainsi, alors selon la douzième manière, le rapport de d à e est composé des rapports de b à a et de c à f. »

alors, selon la deuxième manière, le rapport de e à f est composé du rapport de a à c et du rapport de d à b.

Cela fait dix-huit manières <de composer les rapports>, et il est clair que, nous pouvons, pour chacune de ces manières, inverser les rapports et poser, dans chacun de ces rapports, le conséquent antécédent et l'antécédent conséquent, on engendre ainsi dix-huit manières inverses de celles-la, chaque manière inverse de son homologue, la composition des rapports s'y faisant à l'inverse[42]. Et on ne peut trouver, pour ces six grandeurs, de manière <de composer les rapports> autre que celles que nous avons mentionnées, selon laquelle le rapport de deux de ces grandeurs serait composé de deux des rapports des quatre restantes. J'ai dressé un tableau pour exposer cela, afin que, qui l'étudie, trouve facilement ce qu'il veut. J'ai posé le rapport de ce qui est dans sa première ligne, prise en longueur (*i. e.* la colonne)[43], à ce qui est vis-à-vis de lui dans la deuxième colonne, composé du rapport de ce qui est vis-à-vis de lui dans la troisième colonne à ce qui est vis-à-vis de lui dans la quatrième colonne et du rapport de ce qui est vis-à-vis de lui dans la cinquième colonne à ce qui est vis-à-vis de lui dans la sixième colonne. Et à l'inverse de cela, le rapport de ce qui est dans la deuxième colonne[44] à ce qui est vis-à-vis de lui dans la première colonne est composé des rapports restants inversés. Mais si vis-à-vis de deux grandeurs il y a zéro, alors il n'est pas nécessaire que le rapport de l'une à l'autre soit composé de deux des rapports des <quatre grandeurs> restantes. Quant à ce qui est vis-à-vis de cela dans la septième colonne, c'est le numéro des manières <de composer les rapports> telles que je les ai rangées dans ce qui précède, afin que, qui veut revenir à la démonstration de quelqu'une de ces choses, la trouve facilement.

Voici la représentation de ce tableau[45] :

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	1
a	*b*	*c*	*f*	*e*	*d*	2
a	*c*	*b*	*d*	*e*	*f*	3

[42] Propriété démontrée dans le traité sur *La Composition des rapports* et utilisée dans la démonstration de la relation 16 (voir note 35).

[43] Il s'agit donc dans tout ce paragraphe des colonnes et non des lignes, comme on peut le voir dans les tableaux qui figurent dans les divers manuscrits. Nous traduirons donc dans tout ce paragraphe *saṭr* par *colonne*.

[44] En suivant la leçon du manuscrit B (en marge) :

« وعلى عكس ذلك تكون نسبة ما في السطر الثاني...».

[45] En suivant la leçon du manuscrit A : « وهذه صورة الجدول ».

a c	*b*	*f*	*e*	*d*	4
a d	0				
a e	*b*	*f*	*c*	*d*	5
a e	*b*	*d*	*c*	*f*	6
a f	0				
b c	0				
b d	*a*	*c*	*f*	*e*	9
b d	*a*	*e*	*f*	*c*	10
b e	0				
b f	*a*	*c*	*d*	*e*	11
b f	*a*	*e*	*d*	*c*	12
c d	*a*	*b*	*f*	*e*	7
c d	*a*	*e*	*f*	*b*	13
c e	0				
c f	*a*	*b*	*d*	*e*	14
c f	*a*	*e*	*d*	*b*	15
d e	*b*	*a*	*c*	*f*	16
d e	*b*	*f*	*c*	*a*	17
d f	0				
e f	*a*	*b*	*d*	*c*	8
e f	*a*	*c*	*d*	*b*	18

Nous avons démontré ce qui a trait aux dix-huit manières et à leurs inverses. Mais qu'il n'y ait pas là d'autre manière que celles-ci – pour laquelle le rapport de deux des six grandeurs indiquées précédemment serait nécessairement composé de deux rapports entre les quatre restantes – cela se démontre[46] au moyen de ce que je vais décrire : si nous apparions chacune des six grandeurs avec chacune des grandeurs restantes et que nous prenions son rapport à elle, et que nous dénombrions cela entièrement, cela fait quinze appariements[47]. Nous avons montré de quels couples de rapports sont composés neuf d'entre eux, il ne reste après cela que six appariements, qui sont : la première avec la quatrième, la première avec la sixième, la deuxième avec la troisième, la deuxième avec la cinquième, la troisième avec la cinquième et la quatrième avec la sixième[48]. Pour ces appariements, rien n'implique que leur rapport soit composé de deux rapports entre les quatre grandeurs restantes.

[46] En suivant la leçon du manuscrit A : « فيتبين مما ».

[47] Nombre de combinaisons deux à deux de 6 éléments.

[48] Tous les couples suivis de 0 dans le tableau.

Posons les droites *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f*, qui sont les grandeurs qui restent et qui sont celles que nous avions posées en premier lieu, ou qui sont selon leurs rapports[49]. Je dis tout d'abord qu'il n'est pas nécessaire[50] que le rapport de la première, *a*, à la quatrième, *d*, soit composé de deux rapports entre les quatre grandeurs *b*, *c*, *e* et *f*, de quelque façon que soient pris deux de leurs rapports ou qu'ils soient inversés.

Démonstration : posons la droite *g* soit plus grande soit plus petite que *a* et construisons une surface rectangulaire égale à *a* par *d*, telle que le rapport de l'un de ses côtés à l'autre soit égal au rapport de *g* à *d* ; que ses deux côtés soient *h* et *i* : le rapport de l'un, *h*, à *i* est égal au rapport de *g* à *d* ; le produit de *h* par *i* est égal au produit de *a* par *d*, le rapport de *h* à *a* est donc égal au rapport de *d* à *i* ; le rapport de *a* à *b* est composé du rapport de *c* à *d* et du rapport de *e* à *f* ; le rapport composé du rapport de *h* à *a* et du rapport de *a* à *b* – qui est égal au rapport de *h* à *b* – est égal au rapport composé du rapport de *d* à *i*, du rapport de *c* à *d* et du rapport de *e* à *f* ; de ce fait le rapport de *h* à *b* est égal au rapport composé du rapport de *c* à *i* et du rapport de *e* à *f*. Ces six grandeurs sont telles que quatre d'entre elles, *b*, *c*, *e* et *f*, sont quatre des six premières ; elles n'en diffèrent que de la première et de la quatrième d'entre elles. S'il y avait là une règle unique, nécessaire, concernant le rapport de la première à la quatrième de six grandeurs quelconques, du fait de laquelle son rapport à celle-ci[51] serait composé de deux mêmes rapports entre les quatre restantes, quels qu'ils soient, les quatre restantes des six premières grandeurs étant les quatre restantes des six autres, le rapport de la première des six premières, *a*, à la quatrième

[49] C'est-à-dire telles que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . \frac{e}{f}$.

Ce passage est relativement corrompu dans l'ensemble des manuscrits. Contrairement à Lorch qui corrige le texte en « هي المقادير التي تقترن », nous avons choisi de lire, en nous rapprochant de la leçon de T :

« هي المقادير التي تبقى وهي المقادير التي فرضناها آنفًا أو على نسبها »

alors même que l'on lit dans les manuscrits :

هي المقادير التي تبقى وذلك آنفًا أو على نسبها (B)

هي المقادير التي تبقى وذلك آنفًا وهي مقادير التي فرضناها آنفًا أو على نسبها (T)

وهي المقادير التي تبقى (S)

هي المقادير التي تبقى وذلك أنها على نسبها (A)

(ce passage manque dans E). Le latin a « nos ponemus lineas *a b g d e u* secundum modum primum » (Björnbo, p. 19).

[50] En suivant la leçon des manuscrits S, A et E : « ليس بواجب ».

[51] C'est-à-dire le rapport de la première à la quatrième.

d'entre elles, d, serait alors égal au rapport de la première des six autres, h, à la quatrième d'entre elles, i. Mais le rapport de h à i était égal au rapport de g à d, le rapport de a à d serait donc égal au rapport de g à d et g serait égale à a ; mais l'une des deux était plus longue que l'autre, cela est absurde, il n'y a donc pas là de règle unique concernant la première et la quatrième impliquant que son rapport à celle-ci soit composé de deux mêmes rapports entre les quatre restantes.

Je dis également qu'il n'y a pas là de règles différentes du fait desquelles le rapport de la première à la quatrième serait tantôt, pour certaines grandeurs, composé de deux rapports entre les quatre restantes et pour d'autres, de deux rapports différents, car il est clair que si l'on réunit tous les couples de rapports que l'on peut trouver entre quatre grandeurs, ils sont en nombre délimité et dénombrable[52], au nombre de douze[53]. Quant aux droites, il nous faut poser – comme nous avons posé la droite g – des droites, autant que nous en voulons, en nombre plus grand que ce nombre[54], et qu'elles soient toutes de grandeurs différentes ; nous montrons[55] alors pour elles toutes, comme nous l'avons montré en premier lieu, que le rapport de chacune d'elles à d est composé de deux rapports entre les quatre qui sont b, c, e et f ; même s'il n'en allait pas comme nous l'avons dit[56], du fait que nous avons mené des droites homologues à g[57] en nombre plus grand que le nombre de manières dont on peut apparier tous les couples de rapports entre les quatre grandeurs[58], il serait inévitable que le rapport de quelques-unes des droites ainsi menées – qui sont les homologues de la droite g[59] – à la droite d soit égal au rapport d'une autre de ces droites à la droite d également, car il serait composé, d'entre les rapports des quatre grandeurs, de ces mêmes rapports répétés ; deux de ces droites, ou plus de deux droites, seraient alors égales ; or nous les avions posées toutes différentes, ceci est

[52] En suivant la leçon du manuscrit S : « فبعدد ما ».

[53] Il y a 24 permutations de l'ensemble à 4 éléments $\{b, c, e, f\}$, soit, compte tenu de la commutativité de la composition des rapports 12 façons d'écrire, avec les quatre grandeurs $\{b, c, e, f\}$, un rapport composé de deux rapports.

[54] C'est-à-dire en nombre plus grand que 12.

[55] En suivant la leçon du manuscrit S : « فنبين ».

[56] C'est-à-dire même s'il n'y avait pas une règle unique concernant le rapport de la première à la quatrième de six grandeurs quelconques, du fait de laquelle ce rapport serait toujours composé des deux mêmes rapports entre les quatre grandeurs restantes.

[57] En suivant la leçon des manuscrits S, T, A et E : « نظائر ز ».

[58] En suivant la leçon du manuscrit S : « الأربعة المقادير ».

[59] En suivant la leçon des manuscrits T et A : « التي هي نظائر خط ز ».

absurde, par conséquent il n'est pas nécessaire que le rapport de a à d soit composé de deux rapports entre les quatre <grandeurs> restantes : ni <toujours> des deux mêmes rapports, ni tantôt de deux rapports et tantôt de deux autres rapports, pas plus que le rapport de d à a, car, si cela était nécessaire, cela impliquerait l'inverse[60]. Ce que nous voulions au sujet de cet appariement a donc été démontré.

Il nous est alors possible de démontrer ce qui a trait aux cinq appariements restants[61], à savoir qu'il n'y a nécessairement pas pour eux de composition de rapports, comme nous l'avons mentionné pour le cas semblable, du fait également de ce qui a été démontré pour la première et la quatrième, a et d :

- Car s'il était nécessaire pour a et f que leur rapport soit composé de deux rapports quelconques entre les quatre <grandeurs> restantes, cela l'impliquerait pour a et d, car nous pourrions poser a première, b deuxième, e troisième, f quatrième, c cinquième et d sixième[62] ; a et d seraient alors à la place de la première et de la sixième, or nous avons démontré que cela n'est pas nécessaire pour a et d, par conséquent ce n'est pas nécessaire pour a et f.
- Nous montrons[63] à l'exemple de cela ce qui a trait à la deuxième et à la troisième, b et c, car nous pouvons poser b première, a deuxième, d troisième, c quatrième, f cinquième et e sixième[64] ; a et d sont alors à la place de la deuxième et de la troisième.
- Nous montrons[65] de même également ce qui a trait à la deuxième et à la cinquième, b et e, car nous pouvons poser b première, a deuxième, f troisième, e quatrième, d cinquième et c sixième[66] ; a et d sont alors à la place de la deuxième et de la cinquième.

[60] Cette partie de la démonstration, que l'on retrouve en partie chez Campanus fait dire à Lorch : « Some of the following argument is obscure. It is not clear why this and the similar passage in Thābit is included, for if $a : d$ is deductible, the two ratios which form it must be definite, as in the modes » (Lorch, p. 431, n. 14). Voir commentaire, p. 356.

[61] C'est-à-dire $\frac{a}{f}, \frac{b}{c}, \frac{b}{e}, \frac{c}{e}$ et $\frac{d}{f}$.

[62] Du fait de la commutativité de la composition des rapports, on a également $\frac{a}{b} = \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d}$ (relation 1*bis*).

[63] En suivant la leçon des manuscrits S et E : « نبين ».

[64] En inversant la relation (1).

[65] En suivant la leçon des manuscrits S, T et E : « نبين ».

[66] En inversant la relation (1*bis*).

- Nous montrons de même également[67] ce qui a trait à la troisième et à la cinquième, c et e, car nous pouvons poser e première, f deuxième, a troisième, b quatrième, d cinquième et c sixième[68] ; a et d sont alors à la place de la troisième et de la cinquième[69].

- Nous montrons de même également[70] ce qui a trait à la quatrième et à la sixième, car nous pouvons poser f première, e deuxième, b troisième, a quatrième, c cinquième et d sixième[71] ; a et d sont alors à la place de la quatrième et de la sixième[72].

Par conséquent, pour ce qui est de la composition du rapport, il n'en va nécessairement pas pour ces six appariements comme il en allait nécessairement pour les neuf autres.

Quant à ceux-ci[73], nous avons montré pour chacun d'eux qu'il y a nécessairement deux manières de les composer ; je dis que pour aucun d'eux il n'est nécessaire qu'il y en ait une troisième.

Prenons comme exemple de cela l'exemple qui précède : le rapport de a à b est composé du rapport de c à d et du rapport de e à f. Nous avons montré que cela implique que le rapport de a à b est également composé du rapport de c à f et du rapport de e à d. Je dis que cela n'implique pas une troisième manière. On pourrait dire en effet que ce rapport ou bien est composé de rapports entre c e et d f, ou entre c d et e f, ou entre c f et d e :

- s'il était nécessaire qu'il soit composé de rapports entre c e et d f, alors chacun des deux rapports de c à e et de d à f serait également composé

[67] En lisant : « وكذلك أيضا نبين » là où les manuscrits ont : « وكذلك أيضا يتبين » (B, A), « وكذلك نبين » (T, E).

[68] Relation (8).

[69] On lit dans ce cas dans le manuscrit S :
« وأما الثالث والخامس من الوجه الثالث عشر أن نجعل جـ أولاً و د ثانيًا و ا ثالثًا و ه رابعًا و و خامسًا و ب سادسًا ، فيكونان قد قام مقام الثالث والخامس »
soit variante de démonstration (incorrecte), soit tentative malheureuse pour corriger l'erreur de lecture qui fait lire 4 fois à S « فيكونان » à la place de « فيكون ا د » (dans les deux passages précédents, dans celui-ci et dans le suivant).

[70] En suivant la leçon des manuscrits B, T et E : « وكذلك أيضًا نبين ».

[71] En inversant la relation (8).

[72] On trouve encore dans S la variante suivante (voir note 69) :
وكذلك نبيّن أمر الرابع والسادس لأن لنا أن نجعل د أولاً و ه ثانيًا و ب ثالثًا و و رابعًا و جـ خامسًا و ا سادسًا ، فيكونان قد قاما مقام الرابع والسادس.

[73] C'est-à-dire $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{c}{f}$, $\frac{d}{e}$ et $\frac{e}{f}$.

de deux rapports entre les quatre <grandeurs> restantes[74] – or nous avons démontré que cela n'était pas nécessaire ;

- quant à < être composé de deux rapports> entre $c\ d$ et $e\ f$ ou entre $c\ f$ et $d\ e$, nous avons dit qu'il se composait d'une manière pour chacun d'eux ; je dis qu'il n'est pas nécessaire qu'il se compose d'une autre manière que celles qu'il y a <déjà> entre ces grandeurs en fait de rapports[75] ; il se peut en effet que les deux grandeurs a et b ne soient pas égales, de même que les grandeurs c et d ou e et f ; qu'il en soit ainsi et que, si cela est possible, le rapport de a à b soit tout d'abord composé[76] de deux rapports quelconques entre $c\ d$ et $e\ f$, d'une autre manière que celle que nous avons indiquée ; s'il se composait du rapport de c à d et du rapport de f à e, comme il était également composé du rapport de c à d et du rapport de e à f, alors le rapport de f à e serait égal au rapport de e à f, et l'une des deux droites e et f ne serait pas plus grande que l'autre, or nous les avions posées différentes, cela est absurde ; si le rapport de a à b se composait du rapport de d à c et du rapport de e à f, on montrerait[77] par la même voie que d et c sont égales, or il n'en était pas ainsi ; si le rapport de a à b se composait du rapport de d à c et du rapport de f à e, le rapport de b à a étant lui aussi composé de ces deux rapports, a et b seraient alors égales, or elles n'étaient pas ainsi ; par conséquent le rapport de a à b n'est composé de rapports quelconques entre $c\ d$ et $e\ f$ d'aucune autre manière que la manière unique que nous avons indiquée.

- On montrerait de même également qu'il n'est pas composé de rapports quelconques entre $c\ f$ et $d\ e$, sinon de la manière unique que nous avons indiquée, car si cela se produisait d'une autre manière, les grandeurs c et f, ou les grandeurs d et e, ou les grandeurs a et b seraient égales, or il n'en est pas ainsi.

Par conséquent il n'y a pas là de troisième manière de composer le rapport de a à b, autre que les deux manières que nous avons indiquées.

Il n'y a de même également, pour aucun des appariements restants parmi les neuf, que deux manières <de composer le rapport>. L'ensemble des manières est donc seulement de dix-huit, plus leurs inverses, ni plus ni moins, car les six appariements restants ont été écartés, comme nous l'avons démontré dans ce qui précède.

[74] Relations (7) et (8).

[75] En suivant la leçon des manuscrits B, T, A et E : « من النسب ».

[76] En suivant la leçon des manuscrits S et A : « ولتكن نسبة ا إلى ب أولاً مؤلفة ».

[77] En suivant la leçon des manuscrits A et E : « تبين ».

Appendice figurant dans le manuscrit E[78] :

Maslama ibn Aḥmad a dit : une des choses qu'il aurait été nécessaire à Ptolémée d'indiquer au sujet de la figure secteur est la démonstration du rapport de la synthèse[79]. Mais puisqu'il ne l'a pas indiquée et que je n'ai vu personne l'indiquer je l'ai rédigée. Traçons la figure de la proposition, qui est :

Les deux arcs *CFD* et *EFB* se coupent au point *F* entre les arcs *CEA* et *BDA* ; établissons la démonstration du fait que le rapport de la corde du double de l'arc *CA* à la corde du double de l'arc *EA* est composé de deux rapports : le rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *BF* à la corde du double de l'arc *BE*.

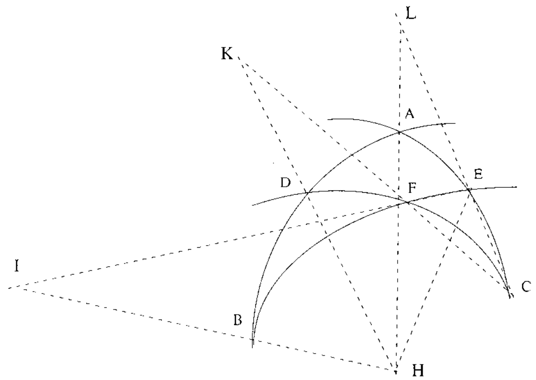


Fig. 6

Démonstration : le centre de la sphère est le point *H*, joignons ensuite le point *H* au point *A* et le point *C* au point *E*, étirons-la (*i. e.* la droite *CE*)

[78] Cette glose figure sous des formes semblables tant dans la traduction latine de Gérard de Crémone (Björnbo, p. 23-24) que dans les deux manuscrits hébreux (N 2773, fol. 164v-165r, N 2008, fol. 46v). Elle figure également dans le manuscrit latin de la London British Library (Lorch, p. 152-153).

On trouve dans N 2773 : « L'épître de Thābit ibn Qurra sur la figure secteur est achevée. Elle a été traduite par le Prince ben Qalonymos fils du Prince Me'ir. Sa traduction a été réalisée le neuvième jour du mois de Kislev 5072 (1312). Que celui qui nous vient en aide soit loué. Amen. Et il a trouvé le propos suivant à la suite, à la fin du livre et il l'a traduit. Maslama ibn Aḥmad a dit : ».

Dans N 2008, il y a « j'ai terminé la copie le vendredi 17 du mois de Tevet 368 (1508)... » ; la glose figure en marge : « Maslama a dit : ».

[79] Nous choisissons ici de traduire « النسبة المركبة » par le rapport de la synthèse (c'est-à-dire le théorème de la « figure secteur » sous la forme de la synthèse), afin de distinguer nettement cette expression du rapport composé « النسبة المؤلفة ».

jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite *HA* au point *L*. Joignons ensuite le point *C* à *F* et *H* à *D* et prolongeons-les jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point *K* ; joignons *EF* et *HB* et prolongeons-les jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point *I*. Je dis que les trois points *L*, *K* et *I* sont sur une même ligne droite : ils sont tous dans le plan de l'arc *ADB* ; les points *L* et *K* eux, sont dans le plan du triangle *CLK*, la droite *EFI* est également dans le plan de ce triangle, le point *I* lui, est donc dans le plan de ce triangle ; les trois points sont donc également dans le plan du triangle *CLK*, ils sont donc dans la section commune selon laquelle se coupent le plan du triangle *CLK* et le plan de l'arc *ADB*, la section commune est une ligne droite unique, c'est la droite *LKI*. Les deux droites *CK* et *EI* se coupent au point *F* entre les droites *CL* et *IL*, le rapport de *CL* à *LE* est donc composé de deux rapports : du rapport de *CK* à *KF* et du rapport de *IF* à *IE* [80] ; le rapport de *CL* à *LE* est égal au rapport de la corde du double de l'arc *CA* à la corde du double de l'arc *EA*, le rapport de la droite *CK* à la droite *KF* est égal au rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *DF*, le rapport de la droite *FI* à la droite *EI* est égal au rapport de la corde du double de l'arc *FB* à la corde du double de l'arc *EB*, <le rapport de la corde du double de l'arc *CA* à la corde du double de l'arc *EA* est donc composé du rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *BF* à la corde du double de l'arc *BE*[81].> C'est ce que nous voulions démontrer.

Ceci est la figure de la proposition.

[80] Théorème de Ménélaüs dans le plan sous la forme de la synthèse.

[81] Cette conclusion, absente du manuscrit E, ainsi que du manuscrit latin de la London British Library, figure en revanche dans la traduction de Gérard de Crémone : « ergo proportio cordæ dupli arcus *ga* ad cordam dupli arcus *ea* est composita ex proportione cordæ dupli arcus *gd* ad cordam dupli arcus *du* et ex proportione cordæ dupli arcus *ub* ad cordam dupli arcus *eb* » (Björnbo, p. 23-24).

THĀBIT IBN QURRA ET LA COMPOSITION DES RAPPORTS

Pascal CROZET

Dans l'introduction à un texte majeur consacré à la composition des rapports et dans lequel on s'accorde à voir un pas important dans l'élaboration de la notion de nombre irrationnel, al-Khayyām remarque :

> Quant à la composition du rapport dans l'ouvrage de Ptolémée connu sous le nom d'*Almageste*, c'est une chose très importante, très utile, et dont on fait très souvent usage. Sauf que Ptolémée a lui aussi [*i. e.* à l'instar d'Euclide] postulé cette prémisse sans démonstration. Et il a basé sur elle la figure sécante, et sur la figure sécante il a basé la plupart de la science de l'astronomie ; notamment ce qui a lieu en fait d'états, de lois et de figures dans la sphère céleste et l'équateur. L'utilité de cela, je veux dire de la composition des rapports, n'est donc pas des moindres ! Et de même l'ouvrage *Les Coniques* d'Apollonius qui est un préliminaire important à la plupart des sciences géométriques, notamment les solides. En général, beaucoup de choses très difficiles et très importantes dans la science de l'astronomie et la science de la géométrie sont basées sur la composition du rapport[1].

Dans la façon dont al-Khayyām attire l'attention de son lecteur sur l'importance du sujet dont il entend traiter, en la mettant en regard de ce qu'il considère comme une lacune dans l'héritage de ses prédécesseurs grecs et hellénistiques – à savoir au bout du compte l'absence d'une définition consistante de la composition des rapports – on pourrait ne voir qu'un procédé rhétorique habile. En réalité, ce passage témoigne bien, nous semble-t-il, de la distance prise depuis les conceptions de ses devanciers, en même temps qu'elle annonce la nature même de son projet.

Pour mieux en comprendre les enjeux, il faut rappeler que la composition des rapports ne fait l'objet d'aucune définition explicite dans les *Éléments*[2], mais qu'une définition implicite se dégage de l'utilisation que fait de la notion Euclide dans la proposition VI.23 (*les parallélogrammes*

[1] Roshdi Rashed et Bijan Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999, p. 374.

[2] La définition VI.5, que nous commentons brièvement plus loin, est généralement considérée comme interpolée.

équiangles ont entre eux un rapport composé des rapports de leurs côtés) : le rapport *A/B* entre deux grandeurs *A* et *B* est dit composé des rapports *A/C* et *C/B* par l'introduction d'un moyen terme *C* :

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\otimes\frac{C}{B}\ ;$$

A/C et *C/B* pouvant être égaux à d'autres rapports r_1 et r_2, on pourra avoir également :

$$\frac{A}{B}=r_1\otimes r_2.$$

Cette définition implicite semble avoir été partagée par les successeurs d'Euclide, qui font de la composition des rapports le même usage : on retrouve ainsi une présentation similaire chez Archimède (par exemple dans la proposition II.4 de la *Sphère et du Cylindre*) ou chez Apollonius (par exemple dans les propositions III.53-56 des *Coniques*). Les rapports composés apparaissent encore dans la proposition VIII.5 des *Éléments* (*les nombres plans ont entre eux un rapport composé des rapports de leurs côtés*), qui est en quelque sorte le pendant numérique de la proposition VI.23 et assure donc que :

$$\frac{m_1}{n_1}\otimes\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\times m_2}{n_1\times n_2}.$$

L'abord calculatoire de la composition des rapports dans des ouvrages comme l'*Almageste* de Ptolémée, où l'application du théorème de Ménélaüs – autrement dit l'utilisation de la « figure-secteur » – se traduit par l'assimilation des grandeurs à des nombres et, partant, à l'utilisation de la proposition VIII.5, n'est sans doute pas étranger à l'insertion, à l'époque hellénistique, d'une définition VI.5 qui apparaît comme radicalement non-euclidienne dans son esprit : *un rapport est dit être composé de rapports quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent quelque chose.*

En citant ici dans un même élan les noms de Ptolémée et d'Apollonius, al-Khayyām ne se propose pas simplement de réduire la distance entre des traditions qui pourraient paraître inconciliables. C'est aussi la conception même que l'on a des rapports et de la façon dont ils peuvent être manipulés qui sont alors revisitées à la lumière des dernières avancées de la recherche mathématique : développement de l'algèbre, en particulier application de la géométrie à l'algèbre grâce au choix préalable d'une unité de mesure, extension de la notion de nombre, etc.

Loin d'être isolée, la contribution d'al-Khayyām prend place dans une histoire d'une étude de la composition des rapports qui demeure souvent liée à l'examen de la figure-secteur – ou du moins reste le plus souvent suscitée par lui – mais dont on pressent qu'elle en dépasse le simple cadre en touchant aux fondements mêmes des mathématiques classiques. De cette histoire qui compte encore parmi ses acteurs des mathématiciens comme al-Sijzī, Aḥmad ibn Yūsuf, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, mais aussi des auteurs latins comme Campanus, Cardan et Maurolico, le traité que Thābit ibn Qurra consacre au sujet constitue l'un des premiers jalons et peut être considéré comme le point de départ de toute une tradition.

En dépit du fait que certains historiens ont tenté d'attirer l'attention sur ce livre en en soulignant l'importance « in preparing the extension of the concept of number to positive real numbers »[3], songeant alors surtout, nous semble-t-il, à sa descendance chez al-Khayyām, le texte de Thābit est resté longtemps méconnu et peu analysé. D'une portée historique indéniable, il soulève pourtant des questions particulièrement riches, sur le concept de rapport, sur les relations entre nombres et grandeurs, sur l'influence de l'algèbre naissante, ou encore sur les procédés combinatoires qui y sont à l'œuvre.

DÉFINITIONS, EUCLIDIENNES ET NON-EUCLIDIENNES

Le livre de Thābit comprend trois chapitres d'inégales longueurs qui sont ainsi résumés par l'auteur :

1. Le premier chapitre : sur les rapports composés les uns aux autres.

2. Le second chapitre : sur la connaissance des grandeurs dont les rapports sont composés les uns aux autres.

3. Le troisième chapitre : sur les problèmes résolus à l'aide de la composition des rapports.

Le premier chapitre, le plus court, est ainsi destiné à expliciter les notions auxquelles Thābit va recourir par la suite : rapport, composition et séparation des rapports, multiplication des grandeurs.

Le concept de rapport

Estimant que « c'est la plus générale des choses dont l'utilisation m'est nécessaire et que l'explication de sa notion que j'ai vue ailleurs n'était pas claire », Thābit commence son ouvrage en rappelant la définition du

[3] B. A. Rosenfeld et A. T. Grigorian, « Thābit ibn Qurra », *Dictionary of Scientific Biography*, New York, 1976, vol. XIII, p. 293.

concept de rapport. Mais, d'emblée, se pose un problème textuel qui n'est sans doute pas anodin compte tenu de l'importance du sujet. La traduction arabe qu'il propose de la définition V.3 des *Éléments* est en effet la suivante :

فالنسبة هي قياسٌ ما لمقدارين متجانسين أحدهما إلى الآخر في المساحة.

> Le rapport est une certaine raison (*qiyās*) de deux grandeurs homogènes, de l'une à l'autre, selon la mesure (*misāḥa*)[4].

Or, dans sa propre édition du traité euclidien, celle que l'on désigne aujourd'hui sous le nom d'Isḥāq-Thābit, on trouve :

النسبة هي إضافة ما لمقدارين متجانسين أحدهما إلى الآخر في المقدار.

> Le rapport est une certaine relation (*iḍāfa*) de deux grandeurs homogènes, de l'une à l'autre, selon la grandeur (*miqdār*)[5].

Une même structure grammaticale est donc utilisée dans les deux cas pour rendre la phrase grecque (Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις), la seule différence résidant dans le double remplacement de *iḍāfa* par *qiyās* et de *miqdār* par *misāḥa*. La substitution de *iḍāfa* par *qiyās*, que nous traduisons ici par *raison*, n'a du reste pas manqué d'être relevée par des lecteurs attentifs du traité de Thābit, comme en témoigne l'inscription de la phrase suivante dans la marge de l'un des trois manuscrits disponibles, de la main même d'al-Sijzī :

> La relation (*iḍāfa*) est une notion qui existe pour deux choses [au-dessus de la ligne : des choses] dont les quiddités sont en raison (*bi-al-qiyās*) d'autres (choses)[6].

Pour mieux juger de l'inflexion apportée ici par Thābit à la définition euclidienne, citons le commentaire que celui-ci en donne lui-même :

> Ce qu'il [Euclide] a voulu dire par *une certaine raison* est la raison des parties entre elles. Il a voulu dire, par *homogènes*, que les deux grandeurs sont d'un même genre, n'étant pas, par exemple, l'une une droite et l'autre un plan, ou l'une un plan et l'autre un solide. Il a voulu dire, par *selon la*

[4] Voir *infra*, p. 428.

[5] Voir l'édition du livre V par John William Engroff Jr., *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements *: Book V*, PhD Dissertation, Harvard University, 1980, p. 60. Richard Lorch rend compte de quelques variations mineures observées sur des manuscrits autres que les dix examinés par Engroff, mais elles ne portent pas sur les points dont il va être question ici (*On the Sector-Figure and Related Texts*, Edited with Translation and Commentary by Richard Lorch, Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University, Frankfurt am Main, 2001, p. 11-13).

[6] Ms. Paris, BN 2457, fol. 60v.

mesure, que la raison des deux grandeurs, de l'une à l'autre, est selon leur mesure et non selon aucun autre de leurs états[7].

Il poursuit en commentant ce qu'il en entend par « raison des parties entre elles », ce qui éclaire d'une certaine manière, on le verra, le choix du mot *mesure* (*misāḥa*) dans sa traduction :

> Cet énoncé, selon l'explication et la clarification, devient donc ainsi : le rapport est une raison des parties entre elles, pour deux grandeurs d'un même genre, de l'une à l'autre, selon leurs mesures. Il est nécessaire en effet, dans cet énoncé, de faire en sorte que la raison soit entre les parties, car si l'on ne faisait pas cela, il y entrerait quelque chose qui n'est pas un rapport, à savoir des raisons générales qui englobent d'autres raisons, comme la raison d'une droite à une droite en ce que l'une serait plus grande ou plus petite que l'autre. Il s'agit donc d'une raison de deux grandeurs d'un même genre, de l'une à l'autre, selon leurs mesures, sauf qu'elle englobe de nombreuses raisons entre les parties, à savoir le double, le triple, la moitié, le tiers et ce qui est similaire à cela. Quant au double, au triple, à la moitié, au tiers et à ce qui leur est semblable parmi les rapports, il s'agit d'une raison entre des parties spécifiques qui n'englobe pas d'autres raisons[8].

Thābit n'évoque pas dans son traité la définition V.5 des *Éléments*, qui fournit un critère d'égalité des rapports à l'aide des équimultiples des grandeurs qui les déterminent. On sait que cette dernière définition a été à l'origine d'importants commentaires de la part de mathématiciens comme al-Māhānī, al-Nayrīzī, Ibn al-Haytham ou al-Khayyām, qui lui ont souvent préféré la définition anthyphérétique du rapport, à savoir sa caractérisation par la suite des quotients obtenus grâce à l'algorithme d'Euclide tel qu'il est exposé dans les propositions 2 à 4 du livre X des *Éléments*. Comme plusieurs historiens l'ont déjà souligné[9] la définition anthyphérétique présente l'avantage de caractériser de façon indépendante chacun des rapports d'une proportion – ce que ne peut faire à l'évidence la définition V.5 – et ainsi de « donner un sens déterminé au concept de rapport en soi, tel qu'il est défini en Euclide, Déf. V.3 »[10]. Or en insistant sur les parties des grandeurs, qui sont, rappelons-le, d'après la définition V.1, des grandeurs plus petites qui les *mesurent*, et en suggérant dès lors que le rapport constitue une sorte de généralisation des notions de double, de triple, de moitié et de tiers, Thābit nous semble précisément donner à la définition

[7] Voir *infra*, p. 428.
[8] Voir *infra*, p. 428-430.
[9] Voir Bijan Vahabzadeh, *Trois commentaires arabes sur les concepts de rapport & de proportionnalité*, thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot, 1998, p. xix.
[10] *Ibid.*

V.3 un contenu effectif qui reste absent en tant que tel de l'énoncé euclidien. Dans ce sens, il annonce les travaux de ses successeurs sur la définition anthyphérétique : le recours aux parties des grandeurs pour expliciter la définition V.3 n'oriente-t-il pas du reste les recherches dans cette direction puisque l'algorithme d'Euclide traite précisément de la *mesure* commune éventuelle de deux grandeurs, autrement dit d'une troisième grandeur qui est une *partie* de l'une comme de l'autre ? Le témoignage d'al-Māhānī lui-même semble aller dans le sens d'une telle interprétation. Celui-ci écrit en effet au début de son traité *Sur la difficulté relative à la question du rapport* :

> Je me suis efforcé à ce sujet de démontrer les multiples qu'Euclide a produits au début du cinquième Livre à propos des grandeurs dont le rapport est le même, ainsi qu'à propos du rapport plus grand, selon ce qu'en avait prescrit Thābit ibn Qurra ; à savoir que la perception du rapport des grandeurs et de leur proportionnalité suivant les préceptes est une chose que l'on pourra saisir en reconnaissant le rapport d'une manière numérique et en partant des propositions qui se trouvent au début du dixième Livre[11].

S'il est pour l'heure difficile de savoir à quel texte précis de Thābit pourrait se référer ici al-Māhānī, il nous faut examiner en quoi les « prescriptions » rapportées par ce dernier s'accordent avec le commentaire qui nous occupe. Puisqu'il est clair que « les propositions qui se trouvent au début du dixième Livre » désignent ici l'algorithme d'Euclide, il nous reste donc à comprendre plus précisément ce qu'al-Māhānī entend par « manière numérique ». Or la définition que celui-ci donne du rapport, qui indique comment « percevoir » cette notion, est la suivante :

> Le rapport entre deux grandeurs homogènes quelconques – ainsi qu'entre deux nombres quelconques – est l'état qui a lieu pour chacune d'elles lorsqu'elle mesure son conjoint ou que son conjoint la mesure.

Cette définition, pour n'être pas identique à la définition V.3 des *Éléments*, semble bien destinée à s'y substituer, à ceci près qu'elle contient à l'opposé de celle-ci une détermination de la notion de rapport, à l'instar de l'interprétation de Thābit qui identifiait « une certaine raison » et « une raison selon les parties ». Ainsi, pour al-Māhānī, comme le remarque Bijan Vahabzadeh, « le rapport exprime la mesure de l'une des deux grandeurs par l'autre »[12]. Si l'on s'en tient à une stricte interprétation du mot *mesure* (ici *taqdīr*), il s'agit donc de l'état qui a lieu pour chacune d'elles lorsqu'elle est une partie de son conjoint ou que son conjoint est une partie d'elle, ce qui, ainsi formulé, ne peut que souligner une identité de vues entre les deux mathématiciens. Mais al-Māhānī développe ensuite ce qu'il

[11] *Ibid.*, p. 3.
[12] *Ibid.*, p. xxv.

entend par mesure de l'une par l'autre d'une façon qui n'est pas aussi restrictive et correspond sans aucun doute, selon nous, à ce qu'entend Thābit par « selon les parties ». En effet, selon al-Māhānī, cette mesure « a lieu selon trois espèces » :

- soit « la plus petite, lorsqu'elle mesure la plus grande, l'épuise complètement par la mesure de sorte que rien n'en reste » ;
- soit les deux grandeurs sont commensurables, ce que l'auteur, sans utiliser ce dernier terme, traduit en décrivant un algorithme d'Euclide qui aboutit à l'évanouissement du dernier reste ;
- soit l'algorithme continue indéfiniment, les deux grandeurs étant dès lors incommensurables (le terme n'est pas non plus utilisé).

Et, ajoute al-Māhānī, « les deux premières espèces de la mesure ont lieu dans les nombres ainsi que dans les grandeurs, mais la troisième uniquement dans les grandeurs ». La « manière numérique » évoquée par le mathématicien ne semble donc pas tant renvoyer ici à la notion de rapport elle-même qu'à la façon d'appréhender les grandeurs pour définir le rapport : par l'introduction d'une troisième espèce, on généralise les résultats que l'on obtient sur les nombres, en suggérant que les rapports quelconques ne sont qu'une extension des rapports exprimables numériquement et que l'on peut user du mot *mesure* même si cette mesure fait apparaître un processus infini.

L'idée qu'il y a bien là un même concept qui ne fait que s'étendre des nombres aux grandeurs nous semble précisément soulignée par Thābit dans la dernière partie de son commentaire sur la notion de rapport. Celui-ci écrit en effet :

> Dans cette définition, par laquelle Euclide a défini le rapport, n'entrent pas les rapports de nombres, puisqu'il a établi le rapport pour deux grandeurs, que le terme de grandeur, pour lui, ne se dit pas pour le nombre, et qu'il a établi la raison de l'une à l'autre selon la mesure alors que les nombres ne sont pas munis de mesure[13]. Or nous n'avons pas trouvé, là où il a utilisé ce terme dans ses livres, qu'il s'est restreint à cette signification, mais qu'il l'a également utilisé pour les rapports d'angles, de nombres, de mouvements et d'autres choses selon ce qui est habituel. Quant à nous, nous ne voulons traiter ici que des rapports de grandeurs même si, pour tout ce que nous décrivons se rapportant aux grandeurs, quelque chose de semblable peut en résulter nécessairement pour les nombres. Si tu veux connaître cela, à chaque fois que nous disons *grandeur*, il faut donc que tu comprennes en plus de cela *ou nombre*[14].

[13] Comme dans la définition du rapport, Thābit utilise ici le mot *misāḥa*, qui se rapporte à la mesure des étendues et correspond donc à une longueur, une aire ou un volume.

[14] Voir *infra*, p. 430.

Mais le texte de Thābit donne à la « manière numérique » de traiter les grandeurs, évoquée par son contemporain, une dimension supplémentaire sur deux plans qui, nous le verrons, sont liés. Le premier a trait à l'introduction du mot *mesure* (*misāḥa*) dans la définition. Pour Thābit en effet, comme il l'expliquera à propos de la multiplication des grandeurs, on connaît la mesure d'une grandeur par la médiation d'une unité de mesure dont l'assemblage un certain « nombre » (*'adad*) de fois constitue cette grandeur (voir plus loin la citation complète). Une telle formulation suggère que ce nombre est un nombre entier et donc que l'unité de mesure est une partie de la grandeur. Mais on ne peut que penser qu'il s'agit là d'une formulation analogue à celle dont use al-Māhānī lorsqu'il définit le rapport comme l'état de deux grandeurs lorsque l'une mesure l'autre, à savoir que l'idée introduite dépasse le cadre strict de son énonciation : Thābit semble ici donner à *nombre* un sens plus étendu que celui de nombre entier, de la même manière qu'al-Māhānī donne à *mesure* un sens plus étendu que le simple fait pour une grandeur d'être une partie d'une autre (l'idée générale est au demeurant la même chez les deux auteurs). Dans ce contexte, l'emploi du mot *misāḥa* dans la définition du rapport laisse entendre que la médiation d'une unité de grandeur permet d'y envisager les grandeurs comme si elles étaient caractérisées par des nombres. Ce qui nous amène au second aspect de cette « manière numérique » de traiter les grandeurs : dès lors qu'il était notamment question de composition de rapports, agir sur les rapports de grandeurs comme s'il s'agissait de rapports numériques ne pouvait que conduire Thābit à substituer à la proposition VI.23 des *Éléments* un équivalent de la proposition VIII.5, et par conséquent à définir une multiplication des grandeurs qui renforcera l'analogie avec les nombres ; nous y reviendrons.

Pour conclure sur la notion de rapport telle qu'explicitée par le mathématicien, il faut relever que, comme il l'explique lui-même en affirmant qu'il ne veut traiter que du rapport des grandeurs, Thābit tient ici à rester dans un cadre euclidien. Mais ce cadre est surtout formel et, s'il semble respecter la lettre de la définition de son prédécesseur malgré quelques inflexions, son commentaire n'en respecte guère l'esprit et annonce les développements ultérieurs.

La composition des rapports

La situation est inverse pour la composition des rapports, dont Thābit donne une définition explicite parfaitement en accord avec l'usage qu'en fait Euclide dans la proposition VI.23. Contrairement à al-Khayyām, il ne fait en particulier aucune référence à la définition apocryphe VI.5 : s'il y a bien chez lui une « manière numérique » de traiter les grandeurs pour définir les rapports et si la composition de ceux-ci constitue bien une opération, les rapports n'en sont pas pour autant des nombres, pas plus que la composition des rapports n'est une multiplication.

Dans un style qui demeure donc tout à fait euclidien, Thābit commence par ajouter au livre V quelques définitions : tout d'abord l'antécédente et la conséquente dans un rapport, termes utilisés dans les *Éléments* mais dépourvus dans cet ouvrage de définition quoique d'un usage dénué d'ambiguïté, puis, surtout, la liaison de deux rapports :

- deux rapports sont dits *liés* (*muttaṣilān*) s'ils ont une grandeur en commun ;
- ils sont liés *successivement* (*'alā al-wilā'*) si *l'antécédente de l'un est la conséquente de l'autre* ;
- ils sont liés *non successivement* (*'alā ghayr al-wilā'*) dans le cas contraire (identité des deux antécédentes ou des deux conséquentes).

La *composition de deux rapports* consiste alors en leur liaison successivement, le rapport composé étant celui que l'on obtient entre les extrémités une fois éliminée la grandeur commune.

Thābit n'explique pas comment on lie deux rapports successivement, c'est-à-dire, étant donné deux rapports, comment on peut trouver deux autres rapports qui leur soient égaux et qui soient liés successivement. Il est clair cependant, parce qu'il utilise par la suite abondamment le procédé, qu'il pense à l'usage d'une quatrième proportionnelle. On retrouve donc là, comme chez Euclide, un même postulat implicite d'existence (l'existence d'une quatrième proportionnelle est démontrée pour les seuls segments de droites dans *Éléments* VI.12, mais est utilisée par Euclide dès le livre V). En outre, pour que la définition soit consistante, il faudrait s'assurer, ce que Thābit n'évoque pas non plus, que tous les procédés utilisés pour lier les rapports donnent bien le même rapport composé : soit à composer $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$, posons par exemple $\frac{A}{B}=\frac{D}{E}$ et $\frac{C}{D}=\frac{B}{F}$; le rapport composé $\frac{A}{B}\otimes\frac{C}{D}$, tel que défini par Thābit, peut en effet être aussi bien $\frac{A}{F}$ que $\frac{C}{E}$ [15]. Enfin, seront

[15] La proposition V.22 permet de s'assurer de façon immédiate qu'on obtient bien le même résultat avec différents représentants des rapports, mais dans la seule mesure où l'on élimine une grandeur qui est toujours de même rang (par exemple la conséquente du premier rapport), ce qui n'est pas le cas dans notre exemple. Supposons en effet que $A/B = X/Y$ et $C/D = Y/Z$ et que d'autre part $A/B = X'/Y'$ et $C/D = Y'/Z'$; la proposition V.22 assure bien que $X/Z = X'/Z'$; tous les procédés où l'on élimine la conséquente du premier rapport fournissent donc le même résultat ; de même, tous les procédés où l'on élimine l'antécédente fournissent le même résultat. La généralité introduite par Thābit, pour qui la grandeur en commun n'est pas forcément la conséquente du premier rapport, empêche une telle application immédiate. On peut

postulées implicitement aussi bien l'associativité que la commutativité de ce qui est conçu comme une opération sur les objets mathématiques dont il vient de commenter la définition. L'opération inverse est du reste également définie et présentée comme telle : la *séparation* d'un rapport d'un autre rapport sera ainsi leur liaison non successivement. Un vocabulaire spécifique est enfin introduit : la composition des rapports met en relation un *composé* et des *composantes*.

Il s'agit ainsi surtout, pour le mathématicien, de préciser et de mettre des mots sur une conception de la composition des rapports qui, pour le moment tout du moins, reste fondamentalement euclidienne.

La multiplication des grandeurs

L'utilisation du terme *ḍarb* (*multiplier*) pour désigner une opération sur des grandeurs est chose courante chez les mathématiciens arabes puisqu'on la rencontre aussi bien chez les maîtres de Thābit, les Banū Mūsā[16], que chez ses successeurs géomètres. Dans le cas de deux droites par exemple, le mot *ḍarb* a le même sens que le mot *saṭḥ* (littéralement : *plan*), qui vient rappeler une certaine orthodoxie euclidienne selon laquelle le « produit » d'une grandeur par une autre grandeur est constitué du rectangle qu'elles entourent ; l'équivalence des deux termes et l'absence usuelle d'un tel rectangle, tant dans le texte que dans les figures, montrent sans aucun doute une tendance à l'arithmétisation du traitement des grandeurs.

Plus rares sont les tentatives de définir plus précisément ce que pourrait être, dans un cas général, la multiplication de grandeurs, ce qui est tout l'intérêt du passage que Thābit consacre à ce sujet et que nous avons évoqué plus haut. Celui-ci écrit en effet :

> Ce que j'entends en disant *multiplier une grandeur par une grandeur* est prendre cette grandeur un nombre de fois <égal> au nombre des grandeurs dont est composée l'autre grandeur, et par lesquelles on connaît sa mesure[17].

Si A et B sont de même genre, ce qui nous semble être la situation privilégiée ici par le mathématicien (toutes les grandeurs dont il est

---

néanmoins, en reprenant notre exemple, démontrer que $A/F = C/E$ de la façon suivante : on pose G telle que $A/B = G/C$; puisque $B/F = C/D$, on aura donc $A/F = G/D$ par application de la proposition V.22 ; d'autre part, puisque $A/B = D/E$, on aura $D/E = G/C$; en appliquant la proposition V.16, on aura donc $C/E = G/D$; et puisque les rapports A/F et C/E sont égaux au même rapport G/D, ils sont égaux entre eux.

[16] Voir Roshdi Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. Vol. I : *Fondateurs et commentateurs*, Londres, 1996.

[17] Voir *infra*, p. 432.

question dans le traité sont du reste, comme il est d'usage, représentées par des segments de droite et on peut ramener tout rapport à un rapport de tels objets), on pourra se donner une unité de grandeur U et poser $A = aU$ et $B = bU$. On aura alors, en respectant la règle d'homogénéité[18], $A \times B = B \times A = ab(U \times U)$. Mieux encore, on peut définir la division comme opération inverse, ce que Thābit fait implicitement puisqu'il utilise plus loin la division d'une grandeur par une autre.

Pour mieux apprécier le sens de cette définition aussi bien que son rôle dans le traité de Thābit, il nous faut relever l'usage que fera plus loin le mathématicien de la multiplication des grandeurs. Celle-ci interviendra dans le troisième chapitre exclusivement, dans la formulation de deux résultats non démontrés en tant que tels par l'auteur mais issus directement des *Éléments* : en premier lieu le fait que le rapport composé de deux rapports est égal au rapport du produit des antécédentes au produit des conséquentes, à savoir

$$\frac{A}{B} \otimes \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D},$$

et en second lieu l'équivalence

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C.$$

Thābit aurait pu se satisfaire, comme avant lui les Banū Mūsā ou après lui bien de ses successeurs géomètres, d'utiliser le mot *produit* sans l'expliciter, dans un sens qui lui aurait permis de rattacher ces deux résultats respectivement aux propositions euclidiennes VI.23 et VI.16, où ils sont exprimés en termes de rectangles entourés par des droites : rien en effet n'eût été changé dans ce chapitre, pas même son caractère algébrique. Si Thābit prend soin de définir ainsi la multiplication des grandeurs, ce ne peut donc être qu'en relation avec la façon qu'il a eu de traiter les grandeurs pour définir les rapports. Or l'emploi du mot *misāḥa* dans la définition du rapport laisse penser que la « dimension » des grandeurs (droite, plan ou solide) n'est pas ici en jeu puisque, une fois posée une unité de grandeur U, on pourra avoir :

$$\frac{A}{B} = \frac{aU}{bU} = \frac{a}{b}.$$

[18] Il nous semble que, par « prendre b fois la grandeur A », on doit comprendre : prendre b fois l'aire $A \times U$.

Ainsi nous semble s'éclairer, et de façon beaucoup plus précise, à la fois la « manière numérique » de considérer les rapports de grandeurs évoquée par al-Māhānī à propos de Thābit, et la façon qu'aura celui-ci de traiter les grandeurs comme des nombres[19].

UNE ÉTUDE COMBINATOIRE

Une fois posées ces définitions, le mathématicien va pouvoir engager l'étude proprement dite de la composition des rapports. Cette étude est tout entière contenue dans son second chapitre, le troisième, d'égale importance, étant consacré aux applications des résultats qui y seront dégagés. Contrairement à ce dernier chapitre, dans lequel l'utilisation massive de la multiplication et de la division des grandeurs distinguera de façon nette la manière de Thābit du style de son prédécesseur grec, le mathématicien va s'en tenir ici à une stricte orthodoxie euclidienne, tant pour ce qui touche à la définition de la composition des rapports, ce que nous avons déjà évoqué, que pour ce qui relève des moyens utilisés pour mener son étude ; ce qui n'empêchera pas, on le verra, une originalité certaine dans la façon d'appréhender le sujet.

Il faut remarquer à cet égard que la rédaction d'un tel traité ne peut avoir été suscitée par une quelconque insatisfaction quant à la manière dont les prédécesseurs du mathématicien ont pu définir et appréhender la composition des rapports : contrairement à al-Khayyām, Thābit met bien ici ses pas dans ceux de ses devanciers grecs sans remettre en question la légitimité de leur démarche. Il nous semble plutôt qu'il faille rechercher les raisons d'une telle rédaction du côté de l'étude de la figure-secteur, elle-même suscitée par le développement de l'astronomie. Le traité sur la composition des rapports nous semble, de ce point de vue, postérieur à celui sur la figure-secteur ; nous verrons en outre qu'il en reprend certains résultats.

Mais rester dans le cadre légué par Euclide pour étudier la composition des rapports ne pouvait qu'orienter l'examen d'une telle notion vers la question suivante : que nous apprend sur les grandeurs mises en jeu une relation de composition de rapports? On comprend mieux dès lors le titre même de ce chapitre : *Sur la connaissance des grandeurs dont les rapports sont composés les uns avec les autres.* Si une telle relation de composition met en jeu six grandeurs différentes A, B, C, D, E, F :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F},$$

[19] Dans un passage du traité, Thābit utilise en outre subrepticement le mot *nombre* en lieu et place du mot *grandeur* (voir note 24).

ses conséquences ne pourront qu'être des relations du même type ; et si certaines de ces grandeurs sont égales entre elles, on pourra dans certains cas en déduire des relations d'un autre genre (proportionnalité, égalité d'autres grandeurs, etc.). Le projet de Thābit va donc être d'explorer de façon méthodique et exhaustive toutes ces conséquences et, puisque l'on peut de façon évidente interchanger des grandeurs dans la relation, son travail va revêtir un aspect combinatoire qui constituera tout l'intérêt de ce chapitre.

Le mathématicien va traiter successivement les sept cas possibles où au moins trois grandeurs parmi les six sont *a priori* différentes :

1) les six grandeurs sont différentes ;
2) il y a cinq grandeurs différentes, l'une d'entre elles apparaissant deux fois ;
3) il y a quatre grandeurs différentes, l'une d'entre elles apparaissant trois fois ;
4) il y a quatre grandeurs différentes, deux d'entre elles apparaissant deux fois ;
5) il y a trois grandeurs différentes, l'une d'entre elles apparaissant quatre fois ;
6) il y a trois grandeurs différentes, l'une d'entre elles apparaissant trois fois et une autre deux fois ;
7) il y a trois grandeurs différentes, chacune d'elles apparaissant deux fois.

Qu'il ne s'intéresse pas au cas où il y a seulement deux grandeurs différentes (ou une seule) semble justifié par la première phrase du chapitre : « étant donné trois rapports, ils se trouvent soit dans six grandeurs, soit dans cinq, soit dans quatre, soit dans trois »[20]. Or à l'aide de deux grandeurs A et B, on ne peut en effet envisager que deux rapports différents autres que le rapport d'identité et non trois, à savoir A/B et B/A ; il est facile de voir en outre qu'une relation de composition débouche alors soit sur une tautologie, soit sur l'égalité de A et de B.

L'exploration de la première configuration, où les six grandeurs sont quelconques, avait déjà été réalisée dans son traité sur la figure-secteur puisqu'elle permet de donner toutes les formulations possibles du théorème de Ménélaüs. Thābit en reprend ici l'analyse et la plupart des démonstrations, en annonçant d'emblée qu'en partant de la relation

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F},$$

[20] Voir *infra*, p. 432.

on peut énoncer dix-sept autres relations de composition. On voit que ces relations sont obtenues par permutation du sextuplet (A, B, C, D, E, F), mais toutes les permutations ne sont pas admissibles puisque le rapport A/D, par exemple, ne peut être composé de deux autres rapports où interviendraient les quatre autres grandeurs. Les dix-sept relations valides qui sont exposées sont toutes celles que l'on obtient en prenant comme rapport composé (*i. e.* résultant de l'opération de composition) le rapport de deux des six grandeurs de sorte que l'antécédente soit d'un rang initial inférieur à celui de la conséquente, ce qui permettra ensuite au mathématicien d'ajouter les dix-huit relations obtenues en prenant les rapports inverses.

Pour démontrer successivement la validité des dix-sept relations, Thābit utilise l'associativité et la commutativité de l'opération de composition, mais aussi, nous verrons plus loin de quelle manière, les relations démontrées antérieurement et, pour deux cas des dix-sept cas, il introduit une quatrième proportionnelle. L'ordre dans lequel il aborde ces dix-sept relations est l'ordre lexicographique, selon les rangs initiaux des grandeurs, interrompu une fois, comme il l'explique lui-même, pour des raisons internes aux démonstrations.

Bien que Thābit n'explique pas dans ce traité comment il parvient à ce nombre de dix-sept (dix-huit avec la relation de départ) et qu'il ne fasse apparaître aucune opération de dénombrement autre que l'énumération ordonnée des relations qu'il se propose de démontrer, il nous semble que son analyse est bien d'ordre combinatoire dans la mesure où ce qu'il démontre n'est pas tant une relation particulière qu'une possibilité de permutation entre les grandeurs. Expliquons-nous en reprenant la démonstration de la cinquième relation. Il s'agit de démontrer que si

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F},$$

alors

$$\frac{A}{E}=\frac{B}{F}\otimes\frac{C}{D}.$$

Or il a déjà démontré (il s'agit respectivement de la quatrième et de la première relation) que

$$\frac{A}{E}=\frac{B}{D}\otimes\frac{C}{F}.$$

et que

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{F}\otimes\frac{E}{D}.$$

Il suffit alors, dans cette dernière relation, de remplacer A par A, B par E, C par B, D par D, E par C et F par F, autrement dit substituer aux grandeurs de la relation d'origine les grandeurs qui occupent le même rang dans la quatrième relation, pour obtenir le résultat recherché, à savoir

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} \otimes \frac{C}{D},$$

cette substitution étant simplement exprimée par Thābit de la façon suivante :

> La première devient alors A, la deuxième E, la troisième B, la quatrième D, la cinquième C et la sixième F[21].

Autrement dit, en partant des permutations admissibles σ_1 et σ_4, il démontre que la permutation σ_5 est également admissible en démontrant que

$$\sigma_5 = \sigma_1 \circ \sigma_4.$$

On peut alors résumer ainsi la tâche que se propose le mathématicien dans cette première partie du second chapitre : dresser la liste, dans la mesure du possible en suivant l'ordre lexicographique, des images du sextuplet (A, B, C, D, E, F) par toutes les permutations admissibles, l'admissibilité étant démontrée, lorsque c'est possible, en composant des permutations admissibles[22].

À l'issue de ces démonstrations et après avoir remarqué, au moyen d'un corollaire obtenu en cours de route (« pour tout rapport composé de deux rapports, l'inverse de ce rapport-ci est composé de l'inverse de ces deux rapports-là »), que dix-huit autres relations peuvent être obtenues par passage à l'inverse, il résume l'ensemble de ses résultats dans un premier tableau :

[21] Voir *infra*, p. 438.

[22] En s'appuyant sur une interprétation similaire mettant en évidence la composition des permutations, Sabine Rommevaux a donné le détail des dix-sept démonstrations de Thābit telles qu'elles sont exposées non pas dans ce traité, mais dans le traité connexe sur la figure-secteur (Sabine Koelblen, « Une pratique de la composition des raisons dans un exercice de combinatoire », *Revue d'histoire des sciences*, XLVII, 2, 1994, p. 209-247 ; voir en particulier p. 222-226).

septième	sixième	cinquième	quatrième	troisième	deuxième	première
origine	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
1	*D*	*E*	*F*	*C*	*B*	*A*
2	*F*	*E*	*D*	*B*	*C*	*A*
3	*D*	*E*	*F*	*B*	*C*	*A*
0	0	0	0	0	*D*	*A*
4	*F*	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
5	*D*	*C*	*F*	*B*	*E*	*A*
0	0	0	0	0	*F*	*A*
0	0	0	0	0	*C*	*B*
8	*E*	*F*	*C*	*A*	*D*	*B*
9	*C*	*F*	*E*	*A*	*D*	*B*
0	0	0	0	0	*E*	*B*
10	*E*	*D*	*C*	*A*	*F*	*B*
11	*C*	*D*	*E*	*A*	*F*	*B*
6	*E*	*F*	*B*	*A*	*D*	*C*
12	*B*	*F*	*E*	*A*	*D*	*C*
0	0	0	0	0	*E*	*C*
13	*E*	*D*	*B*	*A*	*F*	*C*
14	*B*	*D*	*E*	*A*	*F*	*C*
15	*F*	*C*	*A*	*B*	*E*	*D*
16	*A*	*C*	*F*	*B*	*E*	*D*
0	0	0	0	0	*F*	*D*
7	*C*	*D*	*B*	*A*	*F*	*E*
17	*B*	*D*	*C*	*A*	*F*	*E*

En transposant le commentaire qu'en donne le mathématicien, si l'on note [1], [2], [3], [4], [5] et [6] les contenus respectifs des six colonnes de droite pour une ligne donnée, on aura :

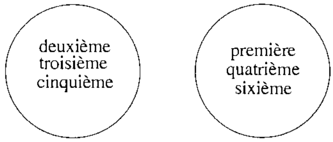
$$\frac{[1]}{[2]} = \frac{[3]}{[4]} \otimes \frac{[5]}{[6]}.$$

Il est remarquable que, par souci d'exhaustivité, Thābit tienne à faire apparaître dans son tableau les rapports pour lesquels on ne peut déduire aucune composition, comme par exemple le rapport de *A* à *D*, le mathématicien plaçant alors un zéro dans les colonnes adjacentes. Quant à la septième colonne, elle indique le numéro de la démonstration.

Thābit introduit ensuite la notion la plus originale de son étude, la notion de *domaine* (*ḥayyiz*) :

Il apparaît là clairement que, si nous partageons les six grandeurs en deux groupes, que nous posons la première d'entre elles, la quatrième et la sixième dans un groupe, et que nous posons les <grandeurs> restantes, soit la deuxième, la troisième et la cinquième, dans un autre groupe, alors le rapport de toute grandeur se trouvant dans l'un des deux groupes à une grandeur de l'autre groupe, quelle qu'elle soit, est composé des rapports des grandeurs restantes. Quant à son rapport à ce qui se trouve dans son groupe, il n'est pas composé des rapports restants[23]. Que chacun des groupes soit appelé un *domaine*, que le groupe dans lequel se trouve le premier nombre[24] soit appelé le *premier domaine*, et que l'autre groupe soit appelé le *deuxième domaine*[25].

Et, pour mieux marquer l'imagination de son lecteur, il propose en outre le schéma suivant :



Il s'agit ainsi d'une notion ensembliste avant la lettre, tant dans sa définition que dans sa représentation, destinée avant tout à assurer une certaine interchangeabilité des grandeurs dans la relation de composition. On en trouvera une utilité majeure dans le troisième chapitre lorsque, précisément, il s'agira de se soustraire à l'aspect énumératif qui empreint celui qui nous occupe pour donner des résultats qui fassent abstraction de la place des grandeurs. Mieux encore, cette notion permettra de penser la relation de composition comme une relation entre deux ensembles (par exemple $\{A, D, F\}$ et $\{B, C, E\}$) et ainsi de formuler des conclusions empreintes de la plus grande généralité. Le résultat fondamental sur lequel le mathématicien s'appuiera alors dans ses démonstrations, est que si

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F},$$

alors

$$A \times D \times F = B \times C \times E,$$

[23] Thābit ne démontre pas ce résultat dans ce traité. Mais, formulé autrement, il avait fait l'objet d'une démonstration remarquable dans son traité sur la figure-secteur.

[24] Remarquons l'usage subreptice du mot *nombre* pour désigner une grandeur, qui s'accorde avec le traitement numérique des grandeurs déjà évoqué.

[25] Voir *infra*, p. 452.

autrement dit le produit des grandeurs du premier domaine est égal au produit des grandeurs du second, ce qu'il exprimera dans ce troisième chapitre dans des termes voisins :

> Le produit d'une des grandeurs qui sont dans le premier domaine par une autre grandeur parmi elles, et de ce que l'on a obtenu par la troisième, est égal au produit d'une des grandeurs qui sont dans le deuxième domaine, quelle qu'elle soit, par une autre grandeur parmi elles, et de ce que l'on a obtenu par la troisième[26].

L'interchangeabilité des grandeurs au sein d'un même domaine (et donc la notion même de domaine) est alors le pendant de la commutativité et de l'associativité de la multiplication des grandeurs. Comme nous le verrons, le concept de domaine permettra en outre au mathématicien de distinguer facilement entre les différents cas rencontrés, selon que les grandeurs considérées dans ses problèmes appartiennent ou non au même domaine. Cette notion est bien ici le résultat d'une méthode proprement combinatoire ; elle ouvre la voie en particulier à un dénombrement de toutes les relations de composition possibles en utilisant un produit d'arrangements, ce qui sera la voie explorée plus tard par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī[27] : on a bien en effet $36 = A_3^3 \times A_3^3$.

Avant d'arriver au troisième chapitre, il reste cependant à Thābit à poursuivre sa tâche pour épuiser toutes les conséquences d'une composition des rapports, à savoir envisager les cas où deux grandeurs au moins parmi les six sont égales.

Si deux grandeurs parmi les six sont égales et si ces deux grandeurs ne sont pas dans le même domaine, il résultera de la composition des rapports

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F},$$

une relation de proportionnalité entre les quatre grandeurs restantes : si par exemple $A = C$, les grandeurs D et B sont proportionnelles aux grandeurs E et F. Il suffira alors pour Thābit de faire la démonstration pour un cas puis, en s'appuyant sur le tableau précédent, de fournir un deuxième tableau exhaustif recensant tous les cas possibles.

[26] Voir *infra*, p. 490.

[27] Alexandre Pacha Caratheodory, *Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy*, Constantinople, 1891, p. 12-14 du texte arabe, p. 13-16 de la traduction française.

Les cas et les items par lesquels cela est démontré	Ce qui résulte, de l'égalité, de la proportion ou du doublement du rapport	Les deux grandeurs restantes		Les deux autres grandeurs égales entre elles		Les deux premières grandeurs égales entre elles	
huitième	septième	sixième	cinquième	quatrième	troisième	deuxième	première
1	égalité	F	E	D	C	B	A
1	proportion aux deux autres	F	D	E	C	B	A
1	égalité	E	D	F	C	B	A
1	égalité	F	C	E	D	B	A
1	proportion aux deux autres	E	C	F	D	B	A
1	égalité	D	C	F	E	B	A
2	égalité	F	E	D	B	C	A
2	proportion aux deux autres	F	D	E	B	C	A
2	égalité	E	D	F	B	C	A
2	égalité	F	B	E	D	C	A
2	proportion aux deux autres	E	B	F	D	C	A
2	égalité	D	B	F	E	C	A
7	doublé par répétition	F	E	C	B	D	A
13	doublé par répétition	F	C	E	B	D	A
5	proportion aux deux premières	E	C	F	B	D	A
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)

Les autres configurations sont traitées de manière similaire, s'appuyant sur les précédentes pour aboutir à un tableau exhaustif. Reproduisons à titre d'exemple le début du tableau consacré au cas où deux grandeurs parmi les six sont égales entre elles (nommées la première et la deuxième dans ce qui suit), ainsi que deux autres parmi les quatre restantes (la troisième et la quatrième). Plusieurs conclusions peuvent alors être tirées de la composition des rapports

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F}\ :$$

- soit les deux dernières grandeurs (la cinquième et la sixième) sont égales (mention *égalité* dans la septième colonne) ; par exemple si $A = B$ et $C = D$, alors $E = F$;

- soit le rapport de la cinquième grandeur à la troisième est égal au rapport de la troisième à la sixième (mention *proportion aux deux autres grandeurs*) ; par exemple si $A = B$ et $C = E$, alors $\frac{D}{E} = \frac{E}{F}$;
- soit le rapport de la cinquième à la première est égal au rapport de la première à la sixième (mention *proportion aux deux premières grandeurs*) ; par exemple si $A = D$ et $B = F$, alors $\frac{E}{A} = \frac{A}{C}$;
- soit le rapport de la cinquième à la sixième est égal au rapport doublé de la première à la troisième (mention : *doublé par répétition*) ; par exemple si $A = D$ et $B = C$, alors $\frac{E}{F} = \frac{A}{B} \otimes \frac{A}{B}$.

Quant à la huitième colonne du tableau, elle est destinée à des renvois aux tableaux précédents selon les différents types de conclusion.

L'étude s'achève une fois transcrit le dernier tableau : avec exhaustivité, Thābit a ainsi passé en revue toutes les configurations possibles, et toutes les situations sont consignées dans des tableaux auxquels on peut se référer. Seule la notion de domaine va toutefois lui être utile lorsqu'il s'agira d'envisager la relation de composition dans le contexte de la résolution de problèmes.

LES RAPPORTS COMPOSÉS, L'ALGÈBRE ET LES *DONNÉES*

Comme nous l'avons suggéré, le style du troisième chapitre tranche profondément avec celui qui le précède même s'il en constitue la suite naturelle. Annoncé comme traitant des problèmes résolus à l'aide de la composition des rapports, il se présente en réalité comme une succession de propositions bâties selon un même modèle, si l'on excepte quelques-unes d'entre elles qui constituent avant tout des lemmes pour les suivantes : on suppose que certaines des grandeurs intervenant dans une relation de composition de rapports sont connues ainsi qu'éventuellement des produits, des sommes, des différences ou des rapports de grandeurs, et il s'agit de montrer que d'autres objets (d'autres grandeurs, des produits ou des rapports de grandeurs, etc.) sont eux aussi connus. La forme prise par ces propositions fait ainsi de ce chapitre une sorte d'extension du livre des *Données* d'Euclide qui serait entièrement consacrée à la composition des rapports. Du reste, comme nous allons le voir, un certain nombre de résultats utilisés par le mathématicien sont directement issus de l'ouvrage de son prédécesseur, même si, nous le verrons également, il peut en reprendre la justification pour l'occasion.

Le chapitre comprend vingt-deux propositions numérotées, précédées d'une proposition préliminaire elle-même accompagnée de corollaires ; nous en dressons la liste dans notre Annexe. Sur les trois manuscrits disponibles, le traité s'achève brutalement au milieu de la proposition 22, qui nous semble constituer un lemme pour une vingt-troisième proposition que nous énonçons également. Le fait que la voie dans laquelle s'engage cette démonstration ne semble pas pouvoir aboutir pourrait bien être relié à l'inachèvement du traité, tel du moins qu'il nous est parvenu.

La proposition préliminaire, dans son traitement, fait le lien entre le style du second chapitre et celui du troisième : elle comporte encore un aspect énumératif absent des propositions suivantes et ouvre sur le résultat fondamental cité plus haut concernant l'égalité du produit des grandeurs du premier domaine et du produit des grandeurs du second ; elle débouche en outre sur le dernier tableau récapitulatif du traité.

> Proposition préliminaire : si, dans une relation de composition de rapports, cinq grandeurs sur les six sont connues, alors la sixième est connue.

Reprenons-en la démonstration, qui illustre sur un cas simple (les autres propositions pourront faire preuve de beaucoup plus de technicité) à la fois la manière algébrique de Thābit et le rapport au livre des *Données* qui lui est lié. Le mathématicien pose

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F}$$

et suppose dans un premier temps que A, B, C, D et E sont connues ; il s'agit donc de montrer que F est connue. Il définit la grandeur G en posant

$$\frac{D}{G}=\frac{E}{F}\ ;$$

on a alors

$$\frac{C}{G}=\frac{C}{D}\otimes\frac{D}{G}=\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F}$$

et par conséquent

$$\frac{C}{G}=\frac{A}{B}.$$

Il conclut alors que, puisque A, B et C sont connues, G est aussi connue. Ce résultat pouvait être assuré par l'application des propositions 1 et 2 des *Données* (*le rapport qu'ont entre elles des grandeurs données est donné* ; et : *si une grandeur donnée a un rapport donné avec une autre grandeur, celle-ci est donnée de grandeur*). Thābit, néanmoins, ne recourt pas à l'ouvrage de son prédécesseur grec et justifie sa conclusion en traitant G à la manière d'une inconnue dont il s'agit de découvrir la valeur. Il écrit en effet :

si nous multiplions B par C et que nous divisons ce que l'on a obtenu par A, le quotient est connu, et c'est la grandeur G, car les grandeurs A, B, C et G sont proportionnelles[28].

Autrement dit, G est connue puisque

$$G = (B \times C) \div A.$$

Dès lors, puisque pour Thābit le résultat d'opérations sur des grandeurs connues est toujours connu, le traitement arithmétique des grandeurs ne pouvait que vouer à l'inutilité des pans entiers de l'ouvrage euclidien. De ce point de vue, peu de textes soulignent avec autant de force que ce passage de Thābit combien la démarche algébrique recouvre la démarche analytique qui est le propre des *Données* ; cette démarche algébrique, que nous illustrerons sur un autre exemple, constitue en outre l'un des caractères les plus marqués de ce traité.

À titre de comparaison et pour apprécier la distance prise par le mathématicien arabe, reprenons la démonstration euclidienne de la proposition 2 des *Données*. Supposons que A soit donnée et que le rapport A/B soit donné. Euclide assure qu'on peut trouver une grandeur C égale à A et un rapport C/D égal au rapport A/B. Par permutation, on aura alors A/C égal à B/D et donc B égal à D ; la grandeur B est donc donnée puisqu'on a trouvé son égale (par définition, une grandeur est dite donnée de grandeur lorsqu'on peut trouver des grandeurs qui lui sont égales). Si la démonstration euclidienne est bien valide puisque s'accordant à la définition même d'une grandeur donnée, on constate qu'elle est surtout très formelle et notamment que, contrairement à la solution de Thābit, elle n'apprend rien sur la grandeur B et n'offre pas de voie vers sa détermination. On comprend dès lors que celui-ci ait pu la considérer comme insatisfaisante et qu'il ait opté délibérément pour une voie algébrique.

Mais revenons à la démonstration de la proposition préliminaire de Thābit. Une fois assuré que G est connue, le mathématicien écrit de même que

$$F = (G \times E) \div D,$$

et donc F est connue. Il passe ensuite, avec les mêmes moyens, à la démonstration des cinq autres cas (selon les cinq grandeurs connues parmi les six) et, après avoir remarqué que la séparation et la composition de deux rapports connus forment dès lors des rapports connus, il résume ses résultats en présentant le tableau suivant :

[28] Voir *infra*, p. 484.

La sixième grandeur recherchée	Les cinq grandeurs connues				
sixième	cinquième	quatrième	troisième	deuxième	première
F	D	E	A	C	B
E	C	F	B	D	A
D	F	C	A	E	B
C	E	D	B	F	A
B	C	A	E	F	D
A	D	B	F	E	C

Si l'on note comme précédemment [1], [2], [3], [4], [5] et [6] les contenus respectifs des six colonnes pour une ligne donnée, le commentaire récapitulatif du mathématicien tient en la formule[29] :

$$[6]=\frac{\left(\frac{[1]\times[2]}{[3]}\right)\times[4]}{[5]}.$$

Il donne ensuite une démonstration alternative fondée sur l'égalité

$$\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F}=\frac{C\times E}{D\times F}$$

(trois des termes de la proportion $\frac{A}{B}=\frac{C\times E}{D\times F}$ étant connus, le quatrième l'est aussi, ce qui, moyennant discussion, permet d'aboutir au résultat), puis il conclut ses préliminaires en formulant l'égalité des produits des grandeurs des deux domaines.

Les vingt-deux propositions qui suivent, d'une complexité croissante mais s'appuyant sur celles qui les précèdent, vont présenter les mêmes caractéristiques : formulation bien souvent non explicitée de la relation de composition (cette relation est avant tout pensée comme une relation entre deux ensembles, à savoir les deux domaines, et non comme la composition de deux rapports déterminés) et donc souci de la plus grande généralité possible ; influence des techniques algébriques ; utilisation de la notion de domaine pour distinguer au besoin les différents cas possibles en se soustrayant à une énumération fastidieuse. Pour illustrer la façon dont ces trois éléments peuvent s'articuler, nous allons prendre plusieurs exemples. Il faut noter au préalable que, parmi les vingt-deux propositions, certaines sont des lemmes techniques qui ne mettent pas en œuvre des rapports composés et sortent donc d'une certaine façon du cadre strict de cette étude : il

[29] Contrairement au reste de notre commentaire, la barre horizontale indique ici une division et non un rapport.

s'agit pour l'essentiel (voir le cas des propositions 11, 13, 18, 20 et 22) de propositions de nature algébrique mettant en jeu des segments sur une même ligne droite.

Notre premier exemple, composé des propositions 1 et 2, illustre à la fois l'usage de la notion de domaine et le souci de généralité manifesté par l'auteur.

Proposition 1 : Si, pour six grandeurs, le rapport de deux d'entre elles est composé de deux des rapports des grandeurs restantes et si quatre d'entre elles sont connues, alors soit le produit soit le rapport des deux grandeurs restantes est connu.

Supposons que les six grandeurs A, B, C, D, E et F soient toutes liées par une relation de composition de rapports (quelle qu'elle soit), et supposons que A, B, C et D soient connues. Les grandeurs E et F sont soit dans deux domaines différents, soit dans le même domaine.

Si elles sont dans deux domaines différents, alors le rapport de E à F est composé de deux des rapports des grandeurs A, B, C et D. Ces deux rapports étant connus puisque ces quatre grandeurs sont connues, le rapport de E à F est donc connu.

Si elles sont dans le même domaine, alors les grandeurs qui sont dans l'autre domaine sont toutes connues, et la troisième grandeur qui est dans le même domaine que E et F est connue. Puisque le produit $E \times F$ est égal au produit des trois grandeurs de l'autre domaine divisé par cette troisième grandeur, ce produit est connu.

Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 2 : Si, pour six grandeurs, le rapport de deux d'entre elles est composé de deux des rapports des grandeurs restantes, si quatre d'entre elles sont connues et si la somme des deux grandeurs restantes est connue, alors ces deux grandeurs restantes sont connues.

Supposons que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F}$$

et que quatre grandeurs parmi les six soient connues. Les deux grandeurs restantes sont soit issues de deux domaines différents, soit d'un même domaine.

Si elles sont issues de domaines différents, considérons qu'il s'agit de A et B, ce qui ne nuit pas à la généralité. Alors, d'après la proposition précédente, $\frac{A}{B}$ est connu et donc les deux rapports $\frac{A+B}{B}$ et $\frac{A+B}{A}$ sont connus ; et puisque $A + B$ est connu, A et B sont connus.

Si elles sont issues du même domaine, considérons qu'il s'agit de A et D. D'après la proposition précédente, le produit $A \times D$ est connu, et puisque $A + D$ est connu, A et D sont connus[30].

Ce qu'il fallait démontrer.

Bien qu'il ait fallu en cours de route distinguer deux cas en faisant intervenir la notion de domaine, la proposition 2 propose donc un énoncé général qui n'en distingue aucun. On comprend alors l'intérêt pour Thābit de ne pas faire disparaître la forme d'énoncé proposée par les *Données* et d'en utiliser au contraire le modèle pour concevoir son troisième chapitre : si l'algèbre peut permettre, dans le cas de cette proposition, de donner les expressions des deux grandeurs recherchées (ce que Thābit ne fait pas du reste), ces expressions ne seraient pas uniques et amèneraient à distinguer deux cas en nuisant à la simplicité et à la généralité de l'énoncé. Autrement dit, la volonté de faire apparaître la plus grande généralité possible, notamment en n'explicitant pas la relation de composition, est ici plus forte que celle qui conduirait à la détermination effective des objets recherchés.

Il reste cependant que l'influence de l'algèbre demeure dans ce traité particulièrement prégnante. Reprenons par exemple, pour conclure, la proposition 15.

Proposition 15 : Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, que le rapport de deux grandeurs parmi les trois restantes, de l'une à l'autre, est connu, et que le carré de l'une de ces deux grandeurs et le carré de la troisième grandeur restante sont de somme connue, alors chacune des trois grandeurs est connue.

Supposons donc le rapport $\frac{A}{B}$ connu et composé de deux rapports construits à l'aide des grandeurs C, D, E et G, quels que soient ces rapports ; supposons en outre la grandeur C connue, le rapport $\frac{D}{E}$ connu, et la somme $D^2 + G^2$ connue[31]. Il s'agit de montrer que D, E et G sont toutes trois connues.

[30] Remarquons que Thābit ne justifie pas sa dernière assertion, qui s'appuie sur un résultat bien connu. Celui-ci peut être tiré de la proposition 85 des *Données* (*si deux droites comprennent un espace donné dans un angle donné et si leur somme est donnée, chacune d'elles sera donnée*). Mais on peut aussi en donner une interprétation algébrique puisque A et D sont alors les solutions d'une équation du second degré.

[31] Thābit fait une partie de sa démonstration en indiquant que soit $D^2 + G^2$, soit $E^2 + G^2$ est connu ; par souci de simplicité, nous n'envisagerons que le premier cas, ce qui ne nuit pas à la généralité.

Le mathématicien remarque pour commencer que, puisque la grandeur C et le rapport $\frac{D}{E}$ sont connus, alors soit G est connue, soit le rapport $\frac{C \times G}{D^2}$ est connu (par application de sa proposition 10 ; voir notre Annexe).

Si la grandeur G est connue, alors D et E sont connus puisque $D^2 + G^2$ et $\frac{D}{E}$ sont connus.

Si le rapport $\frac{C \times G}{D^2}$ est connu, on pose la grandeur H telle que $\frac{C}{H} = \frac{C \times G}{D^2}$. Puisque ce dernier rapport est connu et que C est connue, H est donc connue. Or on a $\frac{C}{H} = \frac{C \times G}{H \times G}$, donc $\frac{C \times G}{D^2} = \frac{C \times G}{H \times G}$ et par conséquent $D^2 = H \times G$. Mais puisque $D^2 + G^2$ est connue, on a donc $(H \times G) + G^2$ connue. Et, conclut le mathématicien sans autre justification, puisque H est connue, G est connue, d'où l'on déduit facilement que D et E sont connues.

Ce qu'il fallait démontrer.

On a donc vu apparaître, au cours de la démonstration, une équation du second degré dont les coefficients sont connus, et dont Thābit assure dès lors en substance que la racine est connue. Qu'un tel résultat puisse être obtenu par des voies géométriques est une chose[32] ; il est certain cependant qu'une appréhension algébrique du problème n'a pu que traverser la pensée du mathématicien : outre le traitement arithmétique des grandeurs qui est ici mis en œuvre, Thābit a traité et enseigné cette même équation en soulignant l'équivalence entre voie algébrique et voie géométrique[33].

CONCLUSION

Le traité que Thābit ibn Qurra consacre aux rapports composés se révèle donc particulièrement riche sur plusieurs plans, dépassant largement le cadre de la figure-secteur qui l'a fait naître. Des thèmes très divers s'y entrecroisent en effet : concepts de nombre et de grandeur, concept de rapport, traitement arithmétique des grandeurs, combinatoire et conception ensembliste, volonté de donner des outils à l'analyse géométrique et pour cela étendre les *Données* d'Euclide, mais en même temps donner à l'algèbre une place de choix dans cette analyse, ce qui conduira, d'une certaine façon, à sceller le destin de l'ouvrage euclidien. Sans que soit fait

[32] Le résultat peut être obtenu par exemple par application de la proposition 84 des *Données*.

[33] Voir l'opuscule de Thābit sur cette question dans ce volume.

état d'une critique explicite quelconque tant des *Éléments* que des *Données*, les inflexions apportées par Thābit aux conceptions de son prédécesseur grec, tout autant que la manière par laquelle il appréhende des objets anciens d'une manière nouvelle nous semblent le signe d'une rationalité mathématique renouvelée. Rassemblés en un seul traité, se trouvent là bien des germes qui seront exploités par ses successeurs.

HISTOIRE DU TEXTE

Le traité de Thābit ibn Qurra sur la composition des rapports existe dans trois manuscrits :

- Paris, Bibliothèque nationale, 2457, fol. 60^{v}-75^{v}, noté *B* ; le colophon indique que la copie en a été réalisée à Chiraz par Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbd al-Jalīl (al-Sijzī) à la fin de Jumādā II 359 (soit en mai 970), à partir de l'exemplaire de Naẓīf ibn Yumn al-Naṣrānī al-Mutaṭabbib.
- Istanbul, Saray, Ahmet III, 3464, fol. 171^{v}-188^{r}, noté *A* ; le colophon indique qu'il a été copié par Muḥammad ibn Abī Bakr ibn Muḥammad ibn Abī Naṣr, qui a achevé son travail le 28 ramaḍān 625, soit le 30 août 1228.
- Istanbul, Saray, Hazine, 455, fol. 1^{v}-28^{r}, noté *H* ; le manuscrit fait partie d'un recueil qui a probablement été copié au XVI^{e} siècle.

La comparaison méticuleuse des manuscrits montrent que *H* est une copie de *A* et de *A* seul. Nous n'avons donc pas tenu compte de ce manuscrit dans notre édition. En outre, *B* et *A* sont de toute évidence apparentés. Le fait qu'ils s'achèvent tous deux et de la même façon au milieu d'une démonstration laissée inachevée, le fait que cette démonstration porte sur ce qui est manifestement un lemme destiné à une proposition qui est absente, le fait enfin que le texte se termine dans les deux cas par une formule signalant que la copie porte sur « ce qui a été trouvé sous la plume de Thābit ibn Qurra », tout indique en effet que les deux manuscrits ont un ancêtre commun[34].

Jusqu'à très récemment, il n'existait de ce traité de Thābit aucune édition, seule étant disponible une traduction en russe par Rosenfeld et Karpova précédée d'un bref commentaire[35]. Richard Lorch en a fourni il y a peu une première édition critique, agrémentée d'une traduction en

[34] Cet ancêtre commun pourrait bien avoir été l'exemplaire de Naẓīf ibn Yumn lui-même. Outre que celui-ci était l'un des correspondants du copiste de *B*, le mathématicien al-Sijzī, il était aussi celui du bio-bibliographe Ibn al-Nadīm, et l'on sait par ailleurs qu'il était à l'affut de textes mathématiques de diverses origines.

[35] L. M. Karpova et B. A. Rosenfeld, « Traktat Sabita ibn Korry o sostavnykh otnosheniyakh », *Fiziko-matematicheskie nauki v stranakh Vostoka,* Moscou, 1966, p. 5-41 ; voir également le commentaire des traducteurs dans *Istoriya i metodologiya estestvennykh nauk*, 5, 1966, p. 126-130. Je remercie Irina Luther de m'avoir permis de franchir la barrière de la langue et de prendre connaissance de cet article.

anglais[36]. Quoique cette édition soit assez convenable, elle comporte quelques erreurs (voir plus loin), ne fait pas apparaître les figures de façon systématique comme sur les manuscrits, relègue les tableaux à la fin du texte, et n'est pas ponctuée. C'est pourquoi nous proposons ici une nouvelle édition, réalisée à l'occasion du colloque consacré à Thābit ibn Qurra qui s'est tenu à l'Institut du Monde Arabe à Paris en 2001.

Voici les différences notables que présente notre édition par rapport à celle de Richard Lorch, en nous référant aux numéros de ligne de celle-ci, réinitialisés à chaque début de chapitre :

Introduction et chapitre I :

	Édition de Richard Lorch	Notre édition
l.3	المؤلفة	المؤلف
l.5	المؤلفة	المؤلف
l.12 (marge de *B*, apparat)	ما هناهّا	(quiddité) ماهياهّا
l.39	أسميتهما	أسمّيهما
l.51	تؤلف	يؤلف

Chapitre II :

	Édition de Richard Lorch	Notre édition
l.28	ونسبة	ولكن نسبة
l.45	نسبة	نسب
l.158	نسب	النسب
l.167	فليكن	وليكن
l.181	متساوين	متساويان
l.186 (*et passim*)	يتكرر	يُكرر
l.190 (*et passim*)	تكرر	كُرر
l.190	بعدد	بعد
l.205	<...> إلى قدرين	أي قدرين
l.225	وإما	إما
l.244	البقيين	الباقيين
l.269 (*et passim*)	مناسبة القدرين	مناسبة للقدرين
l.277	أما	إما

[36] Thābit ibn Qurra, *On the Sector-Figure and Related Texts*, Edited with Translation and Commentary by Richard Lorch, Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University, Frankfurt am Main, 2001, p. 167-326

l.279	وأما	وإما
l.283	ثلثة	ثلاث
l.287	مناسبة الأقدار	مناسبة للأقدار
l.288	ذلك بمثل ذلك الذي	ذلك بمثل الذي

Chapitre III :

	Édition de Richard Lorch	Notre édition
l.4-5	أبين <فيها> كيف	أبين كيف
l.23	كانت كالقصة	كالقصة <التي> كانت
l.23	فإن	وإن
l.38	الأسهل أن يعلم أن	الأسهل أن يعلم لأن
l.109	معلومتان	معلومتين
l.150	الأكثر	الأكبر (comme opposé de الأصغر)
l.202	أحدها	أحدهما
l.241	ضرب د̄ في ه̄ نسبة معلومة	ضرب د̄ في <نفسه، وإلى المجتمع من ضرب> ه <في> نفسه، معلومة
l.294	معلوم	معلوماً
l.418 et 419	نسب	نسبة

ANNEXE

Propositions du troisième chapitre

Pour tenter de donner de ces propositions une présentation synthétique tout en gardant la généralité souhaitée par l'auteur, nous emploierons les notations suivantes :

– $\mathscr{R}(A, B, C, D, E, F)$ indique que les grandeurs A, B, C, D, E, F sont toutes liées par une relation de composition de rapport, quelle qu'elle soit (par exemple $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F}$ ou $\frac{D}{F} = \frac{E}{A} \otimes \frac{C}{B}$).

– L'égalité $\frac{A}{B} = (C, D, E, F)$ indique que le rapport $\frac{A}{B}$ est composé de deux rapports des quatre grandeurs C, D, E et F, quels qu'ils soient (par exemple $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F}$ ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{E} \otimes \frac{F}{D}$).

– Pour simplifier et dans les énoncés uniquement, l'expression $E - F$ désignera la différence entre les grandeurs E et F, qu'il s'agisse effectivement de $E - F$ si $E > F$ ou qu'il s'agisse de $F - E$ si $F > E$ (nous préférons éviter le recours au concept de valeur absolue, trop éloigné des mathématiques de l'époque).

PROPOSITION 1 : Si $\mathscr{R}(A, B, C, D, E, F)$ et si A, B, C et D sont connues, alors ou bien le produit $E \times F$ est connu, ou bien le rapport $\frac{E}{F}$ est connu.

PROPOSITION 2 : Si $\mathscr{R}(A, B, C, D, E, F)$, si A, B, C et D sont connues et si $E + F$ est connue, alors E et F sont connues.

PROPOSITION 3 (LEMME) : Si le produit $A \times B$ et les rapports $\frac{C}{A}$ et $\frac{D}{B}$ sont connus, alors le produit $C \times D$ est connu.

PROPOSITION 4 : Si $\mathscr{R}(A, B, C, D, E, F)$, si A, B, C et D sont connues, si les rapports $\frac{E}{G}$ et $\frac{F}{H}$ sont connus et si la somme $G + H$ est connue, alors E et F sont connues.

PROPOSITION 5 : Si $\mathscr{R}(A, B, C, D, E, F)$, si A, B, C et D sont connues et si la différence $E - F$ (ou $F - E$) est connue, alors E et F sont connues.

PROPOSITION 6 : Si $\mathscr{R}(A, B, C, D, E, F)$, si A, B, C et D sont connues, si les rapports $\frac{E}{G}$ et $\frac{F}{H}$ sont connus et si la différence $G - H$ est connue, alors E et F sont connues.

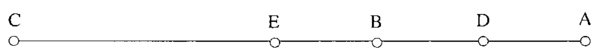
PROPOSITION 7 : Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F}$, alors $\frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2} \otimes \frac{E^2}{F^2}$.

PROPOSITION 8 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, F)$ est un rapport connu, si C est connue et si les rapports $\frac{D}{E}$, $\frac{E}{F}$ et $\frac{D}{F}$ sont connus, alors D, E et F sont connues.

PROPOSITION 9 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, G)$ est un rapport connu, si C est connue et si les rapports $\frac{C}{H}$, $\frac{D}{I}$, $\frac{E}{K}$ et $\frac{G}{L}$ d'une part et $\frac{I}{K}$, $\frac{I}{L}$ et $\frac{K}{L}$ d'autre part sont connus, alors D, E et G sont connues.

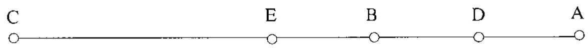
PROPOSITION 10 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, F)$ est un rapport connu, si C est connue et si le rapport $\frac{D}{E}$ est connu, alors ou bien F est connue, ou bien le rapport $\frac{C \times F}{D^2}$ est connu.

PROPOSITION 11 (LEMME) : Si les deux grandeurs AB et BC sont connues, si l'on partage AB en deux parties selon D, et si le rapport $\frac{CB \times AD}{BD^2}$ est connu, alors chacune des deux parties AD et DB est connue.



PROPOSITION 12 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, G)$ est un rapport connu, si C est connue, si le rapport $\frac{D}{E}$ est connu et si $D + G$ est connue, alors D, E et G sont connues.

PROPOSITION 13 (LEMME) : Si la grandeur AB est connue, si la différence entre les grandeurs BC et CD est connue et si le rapport $\frac{AB \times CD}{BC^2}$ est connu, alors les grandeurs BC et CD sont connues.

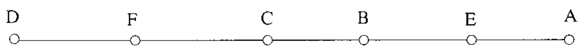


PROPOSITION 14 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, G)$ est un rapport connu, si C est connue, si le rapport $\frac{D}{E}$ est connu et si $D - G$ est connue, alors D, E et G sont connues.

PROPOSITION 15 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, G)$ est un rapport connu, si C est connue, si le rapport $\frac{D}{E}$ est connu et si $D^2 + G^2$ est connue, alors D, E et G sont connues.

PROPOSITION 16 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, G)$ est un rapport connu, si C est connue, si le rapport $\frac{D}{E}$ est connu et si $D^2 - G^2$ est connue, alors D, E et G sont connues.

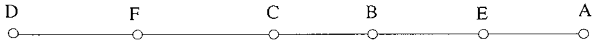
PROPOSITION 17 (LEMME) : En s'appuyant sur le schéma suivant, si les grandeurs AB, BC et CD sont connues, et si le rapport $\frac{AE \times CD}{BE \times EC}$ est connu, alors AE et BE sont connues[37].



PROPOSITION 18 (LEMME) : En s'appuyant sur le schéma suivant, si les grandeurs AB, BC et CD sont connues, et si le rapport $\frac{AE \times CD}{BE \times EC}$ est connu, alors AE et BE sont connues[38].

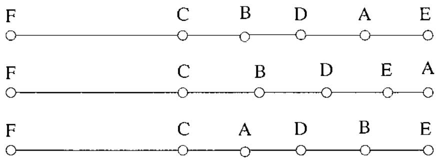
[37] Le point E est ici entre A et B. On peut alors démontrer que, quels que soient CD et le rapport connu, le point E existe.

[38] Les conditions sont les mêmes que précédemment, sauf pour le point E, qui doit être entre B et C. On peut démontrer alors que, pour que le point E existe, il faut que le rapport connu soit plus grand que le rapport de CD à $(AB + AC - 2AG)$, où G est le point tel que AG soit la moyenne géométrique de AB et AC ; dans ce cas, il y a deux solutions pour E : l'une entre B et G, l'autre entre G et C.



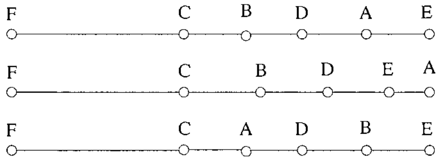
PROPOSITION 19 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, F)$ est un rapport connu, si C est connue, si $D + E$ est connue et si $D - F$ est connue, alors D, E et F sont connues.

PROPOSITION 20 (LEMME) : Si les grandeurs AB, BC et CD sont connues (en s'appuyant sur l'un des schémas suivants), si on leur ajoute la grandeur DE, et si le rapport $\frac{AB \times BE}{CE \times ED}$ est connu, alors AE, BE, CE et DE sont connues.



PROPOSITION 21 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, F)$ est un rapport connu, si C est connue, et si les trois différences $D - E$, $D - F$ et $E - F$ sont connues, alors D, E et F sont connues.

PROPOSITION 22 (LEMME) : Si les grandeurs AB, BC et AC sont connues (en s'appuyant sur l'un des trois schémas suivants), si l'on partage AB selon D, et si le rapport de $\frac{CD \times DB}{AD^2}$ est connu, alors AD, DB et DC sont connues.



La proposition 22 semble avoir été conçue pour servir de lemme à la proposition suivante, absente du traité de Thābit.

PSEUDO-PROPOSITION 23 : Si $\frac{A}{B} = (C, D, E, F)$ est un rapport connu, si $C = D$, si $D + E$ est connue, et si l'une des différences $E - F$, $D - F$ ou $E - D$ est connue, alors D, E et F sont connues[39].

[39] Notons que si C et D sont de deux domaines différents, on a une proportionnalité entre les grandeurs restantes qui avait été relevée dans le deuxième chapitre, ce qui permet facilement de conclure puisque le rapport $\frac{E}{F}$ est alors connu.

La proposition 22 permet de traiter le cas où C et D sont dans le même domaine, cas qui, lui, ne pouvait apparaître dans le deuxième chapitre. La relation de composition débouche alors en effet sur le fait que le rapport $\frac{E \times F}{D^2}$ est connu.

Si c'est la différence entre E et D qui est connue, on voit immédiatement que E et D sont connues puisque $D + E$ est connue, et donc F est également connue.

Si c'est la différence entre E et F qui est connue, on peut supposer que $F > E$; en effet, que $D + E$ soit connue entraîne ici que $D + F$ est connue et donc les rôles de E et F sont interchangeables dans l'énoncé. Posons dans ce cas $A'D' = D$, $D'B' = E$ et $D'C' = F$ en plaçant les points A', B', C', D' comme les points A, B, C, D des deux premiers cas de la proposition 22. On a alors $A'B' = D + E$ et $B'C' = F - E$ et donc $A'B'$ et $B'C'$ sont connus ; d'autre part le rapport $\frac{C'D' \times D'B'}{A'D'^2}$ est connu ; on peut donc appliquer la proposition 22 : $A'D'$, $D'B'$ et $D'C'$ sont ainsi connues et par conséquent D, E et F sont connues.

Si c'est la différence entre D et F qui est connue, supposons dans un premier temps que $F > D$. Posons alors $A'D' = D$, $D'B' = E$ et $D'C' = F$ en plaçant les points A', B', C', D' comme les points A, B, C, D du troisième cas de la proposition 22. On a alors $A'B' = D + E$ et $A'C' = F - D$ et donc $A'B'$ et $A'C'$ sont connus ; d'autre part le rapport $\frac{C'D' \times D'B'}{A'D'^2}$ est connu ; on peut donc appliquer la proposition 22 : $A'D'$, $D'B'$ et $D'C'$ sont donc connues et par conséquent D, E et F sont connues. Si $D > F$, il faudrait utiliser un quatrième cas qui n'apparaît pas dans la proposition 22, où le point C serait entre B et D et donc le point D défini comme partageant la droite connue BC. Si notre hypothèse concernant la pseudo-proposition 23 est bonne, cette absence suggère que non seulement la démonstration de la proposition 22 est incomplète dans le texte qui nous est parvenu, mais encore que son énoncé lui-même est incomplet.

TEXTE ET TRADUCTION

Sur la composition des rapports

Fī ta'līf al-nisab

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

Livre d'Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra le sabéen sur la composition des rapports

1. Le premier chapitre : sur les rapports composés les uns aux autres.
2. Le second chapitre : sur la connaissance des grandeurs dont les rapports sont composés les uns aux autres.
3. Le troisième chapitre : sur les problèmes résolus à l'aide de la composition des rapports.

Premier chapitre
Sur les rapports composés les uns aux autres

Lorsque j'ai voulu exposer le rapport composé, j'ai pensé qu'il convenait de commencer par expliquer la notion de rapport – étant donné que c'est la plus générale des choses dont l'utilisation m'est nécessaire et que l'explication de sa notion que j'ai vue ailleurs n'était pas claire – et de faire suivre cela de l'explication de la signification des termes qui interviennent dans ce traité et qu'il m'est nécessaire d'expliquer.

Le rapport, selon ce qu'a dit Euclide, est une certaine raison[1] de deux grandeurs homogènes, de l'une à l'autre, selon la mesure[2]. Ce qu'il a voulu dire par *une certaine raison* est la raison des parties entre elles[3]. Il a voulu dire, par *homogènes*, que les deux grandeurs sont d'un même genre, n'étant pas, par exemple, l'une une droite et l'autre un plan, ou l'une un plan et l'autre un solide. Il a voulu dire, par *selon la mesure*, que la raison des deux grandeurs, de l'une à l'autre, est selon leur mesure et non selon aucun autre de leurs états. Cet énoncé, selon l'explication et la clarification, devient

[1] Ici et dans ce qui suit, le mot *raison* traduit le mot *qiyās*.

[2] Le mot *misāha*, que nous traduisons ici et dans ce qui suit par *mesure*, désigne la mesure d'une étendue, c'est-à-dire, dans son sens le plus commun, une longueur, une aire ou un volume.

[3] Littéralement : la raison « partielle ». Thābit sous-entend évidemment la raison entre les parties des grandeurs. Nous traduirons désormais *qiyās juz'ī*, littéralement « raison partielle », par « raison des parties entre elles ».

ب-٦٠-ظ
ا-١٧١-ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب أبي الحسن ثابت بن قرة الصابئ في تأليف النسب

اَ. الباب الأول : في النسب، المؤلف بعضها من بعض.

بَ. الباب الثاني : في معرفة المقادير التي نسبها مؤلفة بعضها من بعض.

جَ. الباب الثالث : في مسائل مستخرجة من تأليف النسب.

الباب الأول
في النسب المؤلف بعضها من بعض

إني عندما أردت ذكر النسبة المؤلفة، رأيت أن من الصواب أن ابتدئ أولاً بشرح معنى النسبة – إذ كانت أعم الأشياء التي أحتاج إلى استعمالها، وكان ما رأيته في غير هذا الموضع من شرح معناها غير بيّن – وأن أتبع ذلك بشرح معاني الأسماء التي تجرى في هذا القول مما أحتاج إلى شرحه.

فالنسبة، على ما قال أقليدس، هي قياسٌ ما لمقدارين متجانسين أحدهما إلى الآخر في المساحة. والذي أراد بقوله *قياس ما* هو القياس الجزئي. وأراد بقوله *متجانسين* أن يكون المقداران من جنس واحد، لا يكون أحدهما في المثل خطاً والآخر سطحاً أو أحدهما سطحاً والآخر جسماً. وأراد بقوله *في المساحة* أن يكون قياس المقدارين أحدهما إلى الآخر في مساحتهما، لا في غير ذلك من أحوالهما. فيصير هذا القول على

1 الرحيم : نجد بعدها "وبه نستعين" [ا] — 2 كتاب (...) في تأليف النسب : كتاب أبي الحسن ثابت بن قرة الحراني إلى المتعلمين في النسب المؤلفة [ا] — 3 اَ. : ناقصة [ا] / المؤلف : هذا صواب محض — 4 بَ. : ناقصة [ا] — 5 جَ. : ناقصة [ا] — 7 في النسب المؤلف بعضها من بعض : ناقصة [ب] — 8 أولاً : فوق السطر [ا] — 10 معناها : معالها [ا] — 13 كتب السجزي في الهامش : الإضافة هي معنى يوجد لأشياء (كتب "لشيئين" ثم صححها فوقها) ماهياتها بالقياس إلى غيرها [ب] / الجزئي : الجزوي [ا].

donc ainsi : le rapport est une raison des parties entre elles, pour deux grandeurs d'un même genre, de l'une à l'autre, selon leurs mesures. Il est nécessaire en effet, dans cet énoncé, de faire en sorte que la raison soit entre les parties, car si l'on ne faisait pas cela, il y entrerait quelque chose qui n'est pas un rapport, à savoir des raisons générales qui englobent d'autres raisons, comme la raison d'une droite à une droite en ce que l'une serait plus grande ou plus petite que l'autre. Il s'agit donc d'une raison de deux grandeurs d'un même genre, de l'une à l'autre, selon leurs mesures, sauf qu'elle englobe de nombreuses raisons entre les parties, à savoir le double, le triple, la moitié, le tiers et ce qui est similaire à cela. Quant au double, au triple, à la moitié, au tiers et à ce qui leur est semblable parmi les rapports, il s'agit d'une raison entre des parties spécifiques qui n'englobe pas d'autres raisons. Dans cette définition, par laquelle Euclide a défini le rapport, n'entrent pas les rapports de nombres, puisqu'il a établi le rapport pour deux grandeurs, que le terme de grandeur, pour lui, ne se dit pas pour le nombre, et qu'il a établi la raison de l'une à l'autre selon la mesure alors que les nombres ne sont pas munis de mesure. Or nous n'avons pas trouvé, là où il a utilisé ce terme dans ses livres, qu'il s'est restreint à cette signification, mais qu'il l'a également utilisé pour les rapports d'angles, de nombres, de mouvements et d'autres choses selon ce qui est habituel. Quant à nous, nous ne voulons traiter ici que des rapports de grandeurs même si, pour tout ce que nous décrivons se rapportant aux grandeurs, quelque chose de semblable peut en résulter nécessairement pour les nombres. Si tu veux connaître cela, à chaque fois que nous disons *grandeur*, il faut donc que tu comprennes en plus de cela *ou nombre*.

Entreprenons maintenant d'évoquer les termes restants. La grandeur qu'on rapporte à une autre grandeur est appelée l'antécédente, et la grandeur à laquelle est rapportée une autre grandeur est appelée la conséquente. Le rapport dit lié à un autre [A-172^r] rapport est celui dont l'une des deux grandeurs est commune à lui et à l'autre. La grandeur qu'ils ont en commun est soit une antécédente dans l'un des deux rapports et une conséquente dans l'autre, soit [B-61^r] une antécédente dans les deux rapports, soit une conséquente dans les deux. Si elle est une antécédente dans l'un des deux rapports et une conséquente dans l'autre, on dit alors de ces deux rapports qu'ils sont liés successivement. Et si leur liaison n'est pas selon ce que nous avons mentionné, alors je les nomme liés non successivement. La

الشرح والبيان هكذا : النسبة هي قياس جزئي لمقدارين من جنس واحد، أحدهما إلى الآخر، في مساحتهما. وإنما احتيج في هذا القول إلى أن جعل القياس جزئياً، لأنه لو لم يفعل ذلك لدخل في هذا القول ما ليس بنسبة وهو القياسات الكلية التي تعم قياسات أُخر مثل قياس خط إلى خط في أنه أعظم منه أو أصغر منه. فإن ذلك هو قياس مقدارين من جنس واحد، أحدهما إلى الآخر في مساحتهما إلا أنه يعم قياسات كثيرة جزئية وهي المثلان والثلاثة الأمثال والنصف والثلث وما شاكل ذلك. فأما المثلان والثلاثة الأمثال والنصف والثلث وما أشبهها مما هو نسبة، فإنه قياس جزئي خاص لا يعم قياسات أُخر. وهذا الحد الذي حدّ به أقليدس النسبة، لا يدخل فيه نسب الأعداد لأنه جعل النسبة في مقدارين واسم المقدار عنده لا يقال على العدد وجعل قياس أحدهما إلى الآخر في المساحة والأعداد ليست ذات مساحة. و لم نجده، حيث استعمل هذا الاسم في كتبه، اقتصر به على هذا المعنى، لكنه قد استعمله أيضاً في نسب الزوايا والأعداد والحركات وغير ذلك على ما جرت به العادة. فأما نحن، فإنما نريد هاهنا ذكر نسب المقادير وإن كان جميع ما نصف من أمر المقادير قد يلزم مثله في الأعداد. فإن أردت عَلم ذلك، فينبغي كلما قلنا *مقدار* أن تفهم مع ذلك *أو عدد*.

فلنأخذ الآن في ذكر الأسماء الباقية. المقدار الذي ينسب إلى مقدار آخر يقال له المقدم والمقدار الذي ينسب إليه مقدار آخر يقال له التالي. والنسبة التي تسمى المتصلة
بنسبة / أخرى هي التي أحد مقداريها مشترك لها وللأخرى. والمقدار الذي تشتركان ا-١٧٢-و
فيه إما أن يكون مقدماً في إحدى النسبتين تالياً في النسبة الأخرى، وإما / أن يكون ب-٦١-و
مقدماً في النسبتين جميعاً، وإما أن يكون تالياً فيهما جميعاً. فإن كان مقدماً في إحدى النسبتين تالياً في النسبة الأخرى، فإن تينك النسبتين يقال لهما المتصلتين على الولاء. وإذا كان اتصالهما على غير ما ذكرنا، فإني أسمّيهما متصلتين على غير الولاء. وتأليف

1 والبيان : كتب "البياني" وصححها في الهامش [ب] / جزئي : جزوي [ب، ا] — 2 جزئياً : جزوياً [ب، ا] / لأنه : فوق السطر [ا] — 5 أحدهما : كتب "هما" ثم أضاف "احد" في الهامش مع بيان موضعها [ب] — 6 جزئية : جزوية [ا] / والنصف : او النصف [ا] — 7 والنصف : او النصف [ا] / جزئي : جزوي [ا] — 8 أقليدس : أوقليدس [ا] / فيه : قيه [ب] — 12 فإنما : وإنما [ا] — 13 نسب : نسبة [ا] / يلزم : كتب "يلزم قي"، ثم صححها [ا] — 14 كلما : كما [ا] — 15 الأسماء : الشياء [ب] — 16 والنسبة : والنسب [ا] — 17 وللأخرى : في الأخرى [ا] — 21 أسمّيهما : أسميها [ا].

composition des rapports est leur liaison les uns aux autres successivement. Le rapport composé de rapports est celui tel que, si ces rapports sont liés les uns aux autres successivement, ils engendrent aux extrémités un rapport qui lui est égal, l'antécédente dans le rapport engendré étant une antécédente dans les rapports qui l'engendrent et la conséquente une conséquente. La séparation d'un rapport d'un <autre> rapport est la liaison de l'un à l'autre non successivement. Le rapport restant après séparation d'un rapport d'un autre est celui tel que, si l'on compose avec lui le rapport séparé, on retrouve le rapport dont il est séparé ; il est également celui qui, si ces deux rapports se lient l'un à l'autre successivement[4], engendre aux extrémités un rapport qui lui est égal. L'antécédente dans le rapport engendré est soit une conséquente dans le rapport qui est séparé, soit une antécédente dans le rapport dont on sépare. Ce que j'entends en disant *multiplier une grandeur par une grandeur* est prendre cette grandeur un nombre de fois <égal> au nombre des grandeurs dont est composée l'autre grandeur, et par lesquelles on connaît sa mesure. C'est à partir de deux rapports au moins que se compose un rapport, et il y a alors trois rapports, un composé et deux composantes.

Deuxième chapitre
Sur la connaissance des grandeurs dont les rapports sont composés les uns aux autres

Étant donnés trois rapports, ils se trouvent soit dans six grandeurs, soit dans cinq, soit dans quatre, soit dans trois. Par conséquent, si un rapport est composé de deux rapports, ils se trouvent soit dans six grandeurs, soit dans cinq, soit dans quatre, soit dans trois.

S'ils se trouvent dans six grandeurs, le rapport de la première à la deuxième est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième. À partir de ces grandeurs, nous trouvons un rapport de deux d'entre elles, composé de deux rapports à partir des quatre grandeurs restantes, selon dix-sept cas autres que celui que nous avons mentionné.

[4] Ce qui revient à inverser l'un des rapports.

النسب هو اتصالها بعضها ببعض على الولاء. والنسبة المؤلفة من نسب هي التي إذا اتصلت تلك النسب بعضها ببعض اتصالاً على الولاء، أحدثت في الأطراف نسبة مساوية لها، وكان المقدم في النسبة الحادثة مقدماً في النسب التي أحدثتها والتالي تالياً. وتفصيل نسبة من نسبة هو اتصالها بها على غير الولاء. والنسبة الباقية من بعد تفصيل نسبة من نسبة هي التي إذا ألفت معها النسبة المفصولة عادت النسبة التي منها فصلت؛ وهي أيضاً التي إذا اتصلت تانك النسبتان إحداهما بالأخرى اتصالاً على الولاء، أحدثت في الأطراف نسبة مساوية لها. وكان المقدم في النسبة الحادثة إما تالياً في النسبة التي فصلت وإما مقدماً في النسبة التي منها فصل. والذي أعني بقولي ضرب مقدار في مقدار هو تضعيف ذلك المقدار بعدد المقادير التي تركب منها المقدار الآخر التي بها علمت مساحته. وأقل ما يؤلف النسبة من نسبتين، وإذا كانت نسبة مؤلفة من نسبتين، فإن النسب تكون عند ذلك ثلاثاً، واحدة مؤلفة واثنتان مؤلف منهما.

الباب الثاني

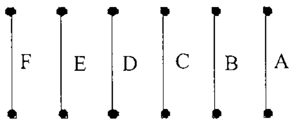
في معرفة المقادير التي نسبها مؤلفة بعضها من بعض

وكل ثلاث نسب، فهي إما في ستة أقدار وإما في خمسة وإما في أربعة وإما في ثلاثة. فإذا كانت إذاً نسبة مؤلفة من نسبتين، فإن النسب إما أن تكون في ستة أقدار وإما في خمسة وإما في أربعة وإما في ثلاثة.

فإن كانت في ستة أقدار، نسبة الأول منها إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس. فإنا نجد فيها نسبة قدرين منها مؤلفة من نسبتين من نسب الأربعة الأقدار الباقية على سبعة عشر وجهاً سوى هذا الوجه الذي ذكرنا.

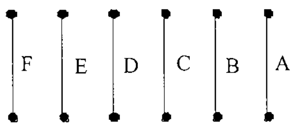
4-5 هو اتصالها (...) نسبة من نسبة : في الهامش مع بيان موضعها، إلا أن نجد "ولى" بدلاً من "الولاء" [ب] — 6 تانك النسبتان : تينك النسبتين [ب] بتينك النسبتين [ا] / على الولاء : على غير الولاء [ا] — 7 أحدثت : أحدث [ب] / نسبة : بنسبة [ا] — 10 نسبتين : كتب "النسبتين" ثم صححها [ب] — 11 مؤلفة : فوق السطر [ا] / مؤلف : مؤلفة [ا] / نجد بعدها "والله أعلم بالصواب" [ا] — 12 نجد بَ في الهامش [ب] — 18 نسبة (الأولى) : ناقصة [ب] / فيها نسبة : نسبة فيها [ب].

1) Premier cas : le rapport de la première à la deuxième est également composé du rapport de la troisième à la sixième et du rapport de la cinquième à la quatrième. Exemple : <soit> six grandeurs A, B, C, D, E, F, telles que le rapport de la première, soit A, à la deuxième, soit B, soit composé du rapport de la troisième, soit C, à la quatrième, soit D, et du rapport de la cinquième, soit E à la sixième, soit F. Je dis que le rapport de la première, soit A, à la deuxième, soit B, est composé du rapport de la troisième, soit C, à la sixième, soit F, et du rapport de la cinquième, soit E, à la quatrième, soit D.

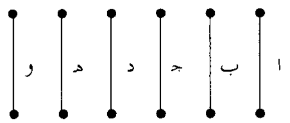


Démonstration. Posons D et E intermédiaires entre C et F. Alors le rapport de C à F est composé du rapport de C à D, du rapport de D à E, et du rapport de E à F. Donc le rapport composé du [A-172^{v}] rapport de C à F et du rapport de E à D est composé du rapport de C à D, du rapport de D à E, du rapport de E à F, et du rapport de E à D. Mais le rapport composé du rapport de C à D, du [B-61^{v}] rapport de D à E et du rapport de E à D est le rapport de C à D. Donc le rapport composé du rapport de C à F et du rapport de E à D est égal au rapport composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Mais on avait le rapport de A à B composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Donc le rapport de A à B est composé du rapport de C à F et du rapport de E à D.

2) Deuxième cas : le rapport de la première, soit A, à la troisième, soit C, est composé du rapport de la deuxième, soit B, à la quatrième, soit D, et du rapport de la cinquième, soit E, à la sixième, soit F.

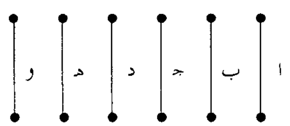


آ. الوجه الأول منها : أن نسبة الأول إلى الثاني تكون أيضاً مؤلفة من نسبة الثالث إلى السادس ومن نسبة الخامس إلى الرابع. مثال ذلك : ستة أقدار، عليها آ ب ج د ه و، ونسبة الأول، وهو آ، إلى الثاني، وهو ب، مؤلفة من نسبة الثالث، وهو ج، إلى الرابع، وهو د، ومن نسبة الخامس، وهو ه، إلى السادس، وهو و. فأقول إن نسبة الأول، وهو آ، إلى الثاني، وهو ب، مؤلفة من نسبة الثالث، وهو ج، إلى السادس، وهو و، ومن نسبة الخامس، وهو ه، إلى الرابع، وهو د.



برهان ذلك : أنا نجعل د ه متوسطين فيما بين ج و. فتكون نسبة ج إلى و مؤلفة من نسبة ج إلى د ومن نسبة د إلى ه ومن نسبة ه إلى و. فالنسبة المؤلفة من / نسبة ج ا-١٧٢-ظ
إلى و ومن نسبة ه إلى د هي مؤلفة من نسبة ج إلى د ومن نسبة د إلى ه ومن نسبة ه إلى و ومن نسبة ه إلى د. ولكن النسبة المؤلفة من نسبة ج إلى د ومن / نسبة د إلى ه ب-٦١-ظ
ومن نسبة ه إلى د هي نسبة ج إلى د. فالنسبة المؤلفة من نسبة ج إلى و ومن نسبة ه إلى د هي مثل النسبة المؤلفة من نسبة ج إلى د ومن نسبة ه إلى و. ولكن نسبة آ إلى ب قد كانت مؤلفة من نسبة ج إلى د ومن نسبة ه إلى و. فنسبة آ إلى ب مؤلفة من نسبة ج إلى و ومن نسبة ه إلى د.

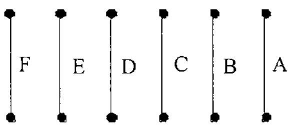
ب. والوجه الثاني : أن نسبة الأول، وهو آ، إلى الثالث، وهو ج، هي مؤلفة من نسبة الثاني، وهو ب، إلى الرابع، وهو د، ومن نسبة الخامس، وهو ه، إلى السادس، وهو و.



1 آ : كتب ناسخ مخطوطة ب نمرة الوجه في الهامش و لم يعمل ذلك ناسخ مخطوطة ا ولن نشير إليها فيما بعد / الوجه الأول : الأول [ب] — 2-3 آ ب ج د ه و : ابجدهو [ب] — 7 ج و : جو [ب] ج و و [ا] — 9-10 ومن نسبة ه إلى و ومن نسبة ه إلى د : في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 15 والوجه : الوجه [ا].

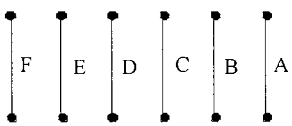
Démonstration. Posons B intermédiaire entre A et C. Alors le rapport de A à C est composé du rapport de A à B et du rapport de B à C. Mais le rapport de A à B est composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Donc le rapport de A à C est composé du rapport de B à C et des deux rapports de C à D et de E à F. Mais le rapport de B à D est composé du rapport de B à C et du rapport de C à D. Donc le rapport de A à C est composé du rapport de B à D et du rapport de E à F. Ce qu'il fallait démontrer.

3) Troisième cas : le rapport de la première, soit A, à la troisième, soit C, est également composé du rapport de la deuxième, soit B, à la sixième, soit F, et du rapport de la cinquième, soit E, à la quatrième, soit D.



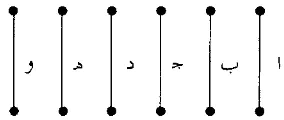
Démonstration. Nous avons démontré, dans le deuxième cas, que le rapport de A à C est composé du rapport de B à D et du rapport de E à F. La première devient alors A, la deuxième C, la troisième B, la quatrième D, la cinquième E et la sixième F. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de A à C est composé du rapport de B à F et du rapport de E à D.

4) Quatrième cas : le rapport de la première, soit A, à la cinquième, soit E, est composé du rapport de la deuxième, soit B, à la quatrième, soit D, et du rapport de la troisième, soit C, à la sixième, soit F.



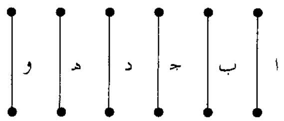
برهان ذلك : أنا نجعل ب وسطاً فيما بين ا جـ. فيكون نسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ. ولكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. فنسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ب إلى جـ ومن نسبتي جـ إلى د وهـ إلى و. ولكن نسبة ب إلى د هي مؤلفة من نسبة ب إلى جـ ومن نسبة جـ إلى د. فنسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ب إلى د ومن نسبة هـ إلى و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

جـ. والوجه الثالث : أن نسبة الأول، وهو ا، إلى الثالث، وهو جـ، مؤلفة أيضاً من نسبة الثاني، وهو ب، إلى السادس، وهو و، ومن نسبة الخامس، وهو هـ، إلى الرابع، وهو د.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه الثاني أن نسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ب إلى د ومن نسبة هـ إلى و. فيصير الأول ا والثاني جـ والثالث ب والرابع د والخامس هـ والسادس و. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة ا إلى جـ تكون مؤلفة من نسبة ب إلى و ومن نسبة هـ إلى د.

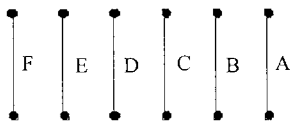
د. والوجه الرابع : أن نسبة الأول، وهو ا، إلى الخامس، وهو هـ، مؤلفة من نسبة الثاني، وهو ب، إلى الرابع، وهو د، ومن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى السادس، وهو و.



2 ولكن نسبة : ونسبة [ب] — 3 نسبتي : نسبة [ا] — 4 ب إلى د هي مؤلفة من نسبة : في الهامش [ا] — 5 وذلك ما أردنا أن نبيّن : ناقصة [ا] — 6 والوجه : الوجه [ا] / مؤلفة : هي مؤلفة [ا] — 13 والوجه : الوجه [ا] / مؤلفة : هي مؤلفة [ا].

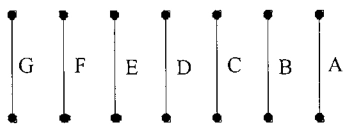
Démonstration. Posons B et D intermédiaires entre A et E. Alors le rapport de A à E est composé des rapports de A à B, de B à D, et de D à E. Mais le rapport de A à B est composé [A-173r] des deux rapports de C à D et de E à F. Donc le rapport de A à E est composé des rapports de B à D, de D à E, de C à D, et de E à F. Mais le rapport composé des rapports de C à D, de D à E, et de E à F est le rapport de C à F. Donc le rapport de A à E est composé du rapport de B à D et du rapport de C à F[5].

5) Cinquième cas : le rapport de la première, soit A, à la cinquième, soit E, est composé du rapport de la deuxième, soit B, à la sixième, soit F, et du rapport de la troisième, soit C, à la quatrième, soit D.[B-62r]



Démonstration. Nous avons démontré, dans le quatrième cas, que le rapport de A à E est composé du rapport de B à D et du rapport de C à F. La première devient alors A, la deuxième E, la troisième B, la quatrième D, la cinquième C et la sixième F. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de A à E est composé du rapport de B à F et du rapport de C à D.

6) Interrompons ici cet agencement. Posons les sixième et septième cas, deux cas dont nous avons besoin dans la démonstration de ce qui les suit[6]. Le sixième cas : le rapport de la troisième, soit C, à la quatrième, soit D, est composé du rapport de la première, soit A, à la deuxième, soit B, et du rapport de la sixième, soit F, à la cinquième, soit E.

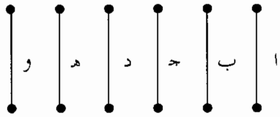


[5] La démonstration présente sur le manuscrit A constitue une variante de celle du manuscrit B, que nous venons de reproduire. On y prend B et C (au lieu de B et D) comme intermédiaires entre A et E. Le rapport de A à E est alors composé des rapports de A à B, de B à C et de C à E, et donc des rapports de B à C, de C à E, de C à D et de E à F. Mais le rapport composé des rapports de B à C et de C à D est le rapport de B à D et le rapport composé des rapports de C à E et de E à F est le rapport de C à F. D'où le résultat.

[6] Littéralement : de ce qui est après eux.

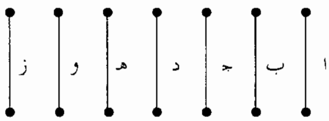
برهان ذلك : أنا نجعل ب د متوسطين فيما بين ا ه. فيكون نسبة ا إلى ه مؤلفة من نسب ا إلى ب وب إلى د ود إلى ه. ولكن نسبة ا إلى ب مؤلفة / من نسبتي جـ إلى ١-١٧٣-و د وه إلى و. فنسبة ا إلى ه مؤلفة من نسب ب إلى د ود إلى ه وجـ إلى د وه إلى و. ولكن النسبة المؤلفة من نسب جـ إلى د ود إلى ه وه إلى و هي نسبة جـ إلى و. فنسبة ا إلى ه مؤلفة من نسبة ب إلى د ومن نسبة جـ إلى و.

ه. والوجه الخامس : أن نسبة الأول، وهو ا، إلى الخامس، وهو ه، مؤلفة من نسبة الثاني، وهو ب، إلى السادس، وهو و، ومن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى الرابع، وهو د./



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه الرابع أن نسبة ا إلى ه مؤلفة من نسبة ب إلى ب-٦٢-و د ومن نسبة جـ إلى و. فيصير الأول ا والثاني ه والثالث ب والرابع د والخامس جـ والسادس و. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة ا إلى ه تكون مؤلفة من نسبة ب إلى و ومن نسبة جـ إلى د.

و. ونقطع هذا النظام هاهنا. فنجعل الوجه السادس والسابع وجهين نحتاج إليهما في برهان ما بعدهما. أما السادس، فهو أن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى الرابع، وهو د، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الثاني، وهو ب، ومن نسبة السادس، وهو و، إلى الخامس ، وهو ه.

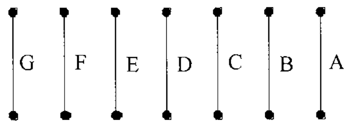


1 ب د : بد [ب] ب جـ [ا] – 2 نسب : نسبة [ب، ا] / إلى د ود إلى : إلى جـ وجـ إلى [ا] – 3 نسب : نسبة [ب، ا] / د ود إلى ه : جـ وجـ إلى ه [ا] – 4 ولكن النسبة المؤلفة من نسب (...) هي نسبة جـ إلى و : ولكن النسبة المؤلفة من ب إلى جـ ومن جـ إلى د هي نسبة ب إلى د والنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى ه ومن ه إلى و هي نسبة جـ إلى و [ا] / نسب : نسبة [ب] – 6 والوجه : الوجه [ا] – 12 تكون : ناقصة [ب] / نسبة (الثانية) : ناقصة [ب] – 13 هاهنا : ههنا [ا].

Démonstration. Posons le rapport de D à G égal au rapport de E à F. Alors le rapport de A à B est composé du rapport de C à D et du rapport de D à G. Or le rapport de C à G est également composé du rapport de C à D et du rapport de D à G, donc le rapport de A à B est égal au rapport de C à G. Le rapport de C à D est composé du rapport de C à G et du rapport de G à D. Mais nous avons démontré que le rapport de C à G était égal au rapport de A à B, et on avait le rapport de G à D égal au rapport de F à E. Donc le rapport de C à D est composé du rapport de A à B et du rapport de F à E.

À partir de là, il est clair que, pour tout rapport composé de deux rapports, l'inverse de ce rapport-ci est composé de l'inverse de ces deux rapports-là. En effet, nous avons démontré que le rapport de A à B était égal au rapport de C à G. Donc si nous inversons, on a le rapport de B à A égal au rapport de G à C. Or le rapport de G à C est composé du rapport de G à D et du rapport de D à C, et le rapport de G à D est égal au rapport de F à E. Donc le rapport de B à A est composé du rapport de F à E et du rapport de D à C. Ce qu'il fallait démontrer.

7) Septième cas : le rapport de la cinquième, soit E, à la sixième, soit F, est composé du rapport de la première, soit A, à la deuxième, soit B, et du rapport de la quatrième, soit D, à la troisième, soit C.

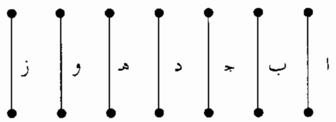


Démonstration. Le rapport de E à F est égal au rapport de D à G. Posons C intermédiaire entre D et G. Alors le rapport [A-173v] de D à G est composé du rapport de D à C et du rapport de C à G. Or nous avons démontré que le rapport de C à G était égal au rapport de A à B. Donc le rapport de E à F est composé du rapport de A à B et du rapport de D à C.

برهان ذلك : أنا نجعل نسبة د إلى ز كنسبة ه إلى و. فنسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ز. ونسبة جـ إلى ز هي أيضاً مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ز. فنسبة ا إلى ب كنسبة جـ إلى ز. ونسبة جـ إلى د هي مؤلفة من نسبة جـ إلى ز ومن نسبة ز إلى د. ولكن نسبة جـ إلى ز قد بيّنا أنها كنسبة ا إلى ب ونسبة ز إلى د قد كانت كنسبة و إلى ه. فنسبة جـ إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة و إلى ه.

ومن هذا يتبيّن أن كل نسبة مؤلفة من نسبتين، فإن خلاف تلك النسبة مؤلفة من خلاف تينك النسبتين. وذلك أنا قد بيّنا أن نسبة ا إلى ب كنستة جـ إلى ز. فإذا خالفنا، كانت نسبة ب إلى ا كنسبة ز إلى جـ. ونسبة ز إلى جـ مؤلفة من نسبة ز إلى د ومن نسبة د إلى جـ ونسبة ز إلى د كنسبة و إلى ه. فنسبة ب إلى ا مؤلفة من نسبة و إلى ه ومن نسبة د إلى جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

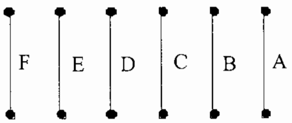
ز. والوجه السابع : أن نسبة الخامس، وهو ه، إلى السادس، وهو و، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الثاني، وهو ب، ومن نسبة الرابع، وهو د، إلى الثالث، وهو جـ.



برهان ذلك : أن نسبة ه إلى و كنسبة د إلى ز. ونجعل جـ وسطاً فيما بين د ز. فيكون نسبة / د إلى ز مؤلفة من نسبة د إلى جـ ومن نسبة جـ إلى ز. وقد كنا بيّنا أن نسبة جـ إلى ز كنسبة ا إلى ب. فنسبة ه إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى جـ. ا-١٧٣-ظ

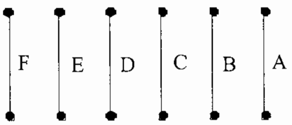
2 هي : ناقصة [ا] — 7 تلك : ذلك [ا] — 10 د (الثانية) : جـ [ا] — 11 وذلك ما أردنا أن نبيّن : ناقصة [ا] — 16 د (الثانية) : جـ [ا] — 17 كنسبة : كتب "مؤلفة من" ثم شطبها [ب].

8) Revenons maintenant là où nous avons interrompu cet agencement. Posons le huitième cas : le rapport de la deuxième, soit B, à la quatrième, soit D, est composé du rapport de la première, soit A, à la troisième, soit C, et du rapport de la sixième, soit F, à la cinquième, soit E.



Démonstration. Nous avons démontré, dans le deuxième [B-62v] cas, que le rapport de A à C est composé du rapport de B à D et du rapport de E à F. La première devient alors A, la deuxième C, la troisième B, la quatrième D, la cinquième E et la sixième F. Or nous avons démontré, dans le sixième cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de B à D est composé du rapport de A à C et du rapport de F à E.

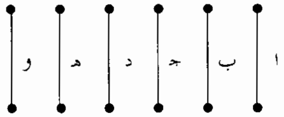
9) Neuvième cas : le rapport de la deuxième, soit B, à la quatrième, soit D, est composé du rapport de la première, soit A, à la cinquième, soit E, et du rapport de la sixième, soit F, à la troisième, soit C.



Démonstration. Nous avons démontré, dans le huitième cas, que le rapport de B à D est composé du rapport de A à C et du rapport de F à E. La première devient alors B, la deuxième D, la troisième A, la quatrième C, la cinquième F et la sixième E. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de B à D est composé du rapport de A à E et du rapport de F à C.

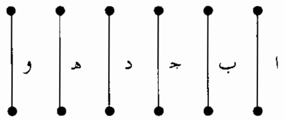
10) Dixième cas : le rapport de la deuxième, soit B, à la sixième, soit F, est composé du rapport de la première, soit A, à la troisième, soit C, et du rapport de la quatrième, soit D, à la cinquième, soit E.

ح. فلنرجع الآن إلى حيث كنا قطعنا هذا النظام. ونجعل الوجه الثامن : أن نسبة الثاني، وهو ب، إلى الرابع، وهو د، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الثالث، وهو جـ، ومن نسبة السادس، وهو و، إلى الخامس، وهو هـ.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه / الثاني أن نسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ب إلى ب-٦٢-ظ
د ومن نسبة هـ إلى و. فيصير الأول ا والثاني جـ والثالث ب والرابع د والخامس هـ والسادس و. وقد كنا بيّنا في الوجه السادس أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة ب إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى جـ ومن نسبة و إلى هـ.

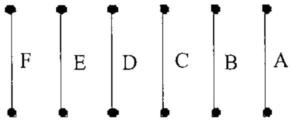
ط. والوجه التاسع : أن نسبة الثاني، وهو ب، إلى الرابع، وهو د، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الخامس، وهو هـ، ومن نسبة السادس، وهو و، إلى الثالث، وهو جـ.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه الثامن أن نسبة ب إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى جـ ومن نسبة و إلى هـ. فيصير الأول ب والثاني د والثالث ا والرابع جـ والخامس و والسادس هـ. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة ب إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى هـ ومن نسبة و إلى جـ.

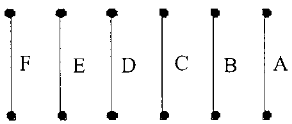
ي. والوجه العاشر : أن نسبة الثاني، وهو ب، إلى السادس، وهو و، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الثالث، وهو جـ، ومن نسبة الرابع، وهو د، إلى الخامس، وهو هـ.

6 وقد كنا بيّنا : وقد بيّنا [ا] — 8 والوجه : الوجه [ا] — 12 د : كتب جـ ثم صححها [ب] — 15 والوجه : الوجه [ا].



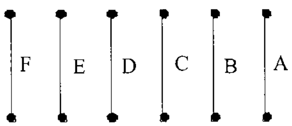
Démonstration. Nous avons démontré, dans le troisième cas, que le rapport de *A* à *C* est composé du rapport de *B* à *F* et du rapport de *E* à *D*. La première devient alors *A*, la deuxième *C*, la troisième *B*, la quatrième *F*, la cinquième *E* et la sixième *D*. Or nous avons démontré, dans le sixième cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de *B* à *F* est composé du rapport de *A* à *C* et du rapport de *D* à *E*.

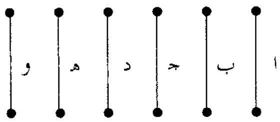
11) Onzième cas : le rapport de la deuxième, soit *B*, à la sixième, soit *F*, est composé du rapport de la première, soit *A*, à la cinquième, soit *E*, et du rapport de la quatrième, soit *D*, à la troisième, soit *C*.



Démonstration. Nous avons démontré, dans le dixième cas, que le rapport de *B* à *F* est composé du rapport de *A* à *C* [A-174^r] et du rapport de *D* à *E*. La première devient alors *B*, la deuxième *F*, la troisième *A*, la quatrième *C*, la cinquième *D* et la sixième *E*. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de *B* à *F* est composé du rapport de *A* à *E* et du rapport de *D* à *C*.

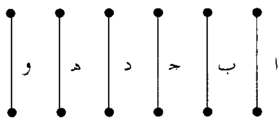
12) Douzième cas : le rapport de la troisième, soit *C*, à la quatrième, soit *D*, est composé du rapport de la première, soit *A*, à la cinquième, soit *E*, et du rapport de la sixième, soit *F*, à la deuxième, soit *B*.





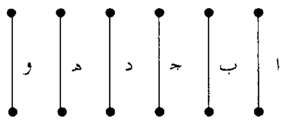
برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه الثالث أن نسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ب إلى و ومن نسبة هـ إلى د. فيصير الأول ا والثاني جـ والثالث ب والرابع و والخامس هـ والسادس د. وقد بيّنا في الوجه السادس أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة ب إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى جـ ومن نسبة د إلى هـ.

يا. والوجه الحادي عشر : أن نسبة الثاني، وهو ب، إلى السادس، وهو و، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الخامس، وهو هـ، ومن نسبة الرابع، وهو د، إلى الثالث، وهو جـ.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه العاشر أن نسبة ب إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى جـ / ومن نسبة د إلى هـ. فيصير الأول ب والثاني و والثالث ا والرابع جـ والخامس د ا-١٧٤-و والسادس هـ. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة ب إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى هـ ومن نسبة د إلى جـ.

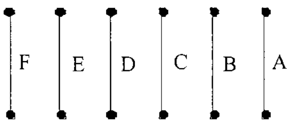
يب. والوجه الثاني عشر : أن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى الرابع، وهو د، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الخامس، وهو هـ، ومن نسبة السادس، وهو و، إلى الثاني، وهو ب.



5 والوجه : الوجه [ا] — 12 والوجه : الوجه [ا].

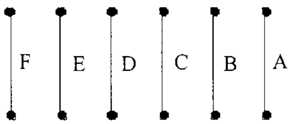
Démonstration. Nous avons démontré, dans le sixième cas, que le rapport de C à D est composé du rapport de A à B et du rapport de F à E. La première devient alors C, la deuxième D, la troisième A, la quatrième B, la cinquième F et la sixième E. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors [B-63r] le rapport de C à D est composé du rapport de A à E et du rapport de F à B.

13) Treizième cas : le rapport de la troisième, soit C, à la sixième, soit F, est composé du rapport de la première, soit A, à la deuxième, soit B, et du rapport de la quatrième, soit D, à la cinquième, soit E.



Démonstration. Le rapport de C à F est composé du rapport de C à D, du rapport de D à E, et du rapport de E à F. Mais le rapport de A à B est composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Donc le rapport de C à F est composé du rapport de A à B et du rapport de D à E.

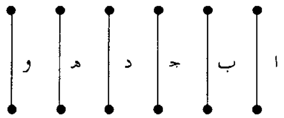
14) Quatorzième cas : le rapport de la troisième, soit C, à la sixième, soit F, est composé du rapport de la première, soit A, à la cinquième, soit E, et du rapport de la quatrième, soit D, à la deuxième, soit B.



Démonstration. Nous avons démontré, dans le treizième cas, que le rapport de C à F est composé du rapport de A à B et du rapport de D à E. La première devient alors C, la deuxième F, la troisième A, la quatrième B, la cinquième D et la sixième E. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de C à F est composé du rapport de A à E et du rapport de D à B.

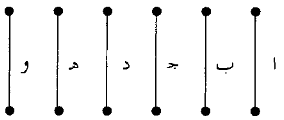
برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه السادس أن نسبة جـ إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة و إلى هـ. فيصير الأول جـ والثاني د والثالث ا والرابع ب والخامس و والسادس هـ. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن / نسبة جـ إلى د ب-٦٣-و مؤلفة من نسبة ا إلى هـ ومن نسبة و إلى ب.

يج. والوجه الثالث عشر : أن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى السادس، وهو و، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الثاني، وهو ب، ومن نسبة الرابع، وهو د، إلى الخامس، وهو هـ.



برهان ذلك : أن نسبة جـ إلى و مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى هـ ومن نسبة هـ إلى و. ولكن نسبة ا إلى ب هي مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. فنسبة جـ إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى هـ.

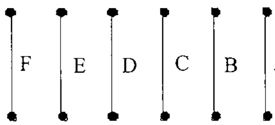
يد. والوجه الرابع عشر : أن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى السادس، وهو و، مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الخامس، وهو هـ، ومن نسبة الرابع، وهو د، إلى الثاني، وهو ب.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه الثالث عشر أن نسبة جـ إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى هـ. فيصير الأول جـ والثاني و والثالث ا والرابع ب والخامس د والسادس هـ. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة جـ إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى هـ ومن نسبة د إلى ب.

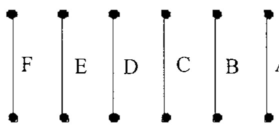
1 السادس : كتب "الأول" ثم شطبها [ب] – 5 والوجه : الوجه [ا] – 8-9 ومن نسبة هـ : ونسبة د [ب] ونسبة هـ [ا] – 9 هي : ناقصة [ب] / ومن نسبة هـ : ونسبة هـ [ا] – 11 والوجه : الوجه [ا].

15) Quinzième cas : le rapport de la quatrième, soit D, à la cinquième, soit E, est composé du rapport de la deuxième, soit B, à la première, soit A, et du rapport de la troisième, soit C, à la sixième, [A-174v] soit F.



Démonstration. Le rapport de E à D est composé du rapport de E à F, du rapport de F à C, et du rapport de C à D. Or le rapport de A à B est composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Donc le rapport de E à D est composé du rapport de A à B et du rapport de F à C. Donc l'inverse de ce rapport, soit le rapport de D à E, est composé du rapport de B à A et du rapport de C à F, comme il apparaît clairement de la démonstration du sixième cas.

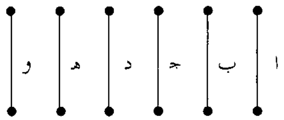
16) Seizième cas : le rapport de la quatrième, soit D, à la cinquième, soit E, est composé du rapport de la deuxième, soit B, à la sixième, soit F, et du rapport de la troisième, soit C, à la première, soit A.



Démonstration. Nous avons démontré, dans le quinzième cas, que le rapport de D à E est composé du rapport de B à A et du rapport de C à F. La première devient alors D, la deuxième E, la troisième B, la quatrième A, la cinquième C et la sixième F. Or nous avons démontré, dans [B-63v] le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de D à E est composé du rapport de B à F et du rapport de C à A.

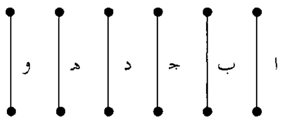
17) Dix-septième cas : le rapport de la cinquième, soit E, à la sixième, soit F, est composé du rapport de la première, soit A, à la troisième, soit C, et du rapport de la quatrième, soit D, à la deuxième, soit B.

يه. والوجه الخامس عشر : أن نسبة الرابع، وهو د، إلى الخامس، وهو ه، مؤلفة من نسبة الثاني، وهو ب، إلى الأول، وهو ا، ومن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى السادس، / وهو و. ا-١٧٤-ظ



برهان ذلك : أن نسبة ه إلى د مؤلفة من نسبة ه إلى و ومن نسبة و إلى جـ ومن نسبة جـ إلى د. ونسبة ا إلى ب هي مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة ه إلى و. فنسبة ه إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة و إلى جـ. فعكس هذه النسبة، وهو نسبة د إلى ه، مؤلفة من نسبة ب إلى ا ومن نسبة جـ إلى و، كما تبيّن من برهان الوجه السادس.

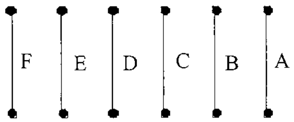
يو. والوجه السادس عشر : أن نسبة الرابع، وهو د، إلى الخامس، وهو ه، مؤلفة من نسبة الثاني، وهو ب، إلى السادس، وهو و، ومن نسبة الثالث، وهو جـ، إلى الأول، وهو ا.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه الخامس عشر أن نسبة د إلى ه مؤلفة من نسبة ب إلى ا ومن نسبة جـ إلى و. فيصير الأول د والثاني ه والثالث ب والرابع ا والخامس جـ والسادس و. وقد بيّنا في / الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة د إلى ب-٦٣-ظ ه مؤلفة من نسبة ب إلى و ومن نسبة جـ إلى ا.

يز. والوجه السابع عشر : أن نسبة الخامس، وهو ه، إلى السادس، وهو و، تكون مؤلفة من نسبة الأول، وهو ا، إلى الثالث، وهو جـ، ومن نسبة الرابع، وهو د، إلى الثاني، وهو ب.

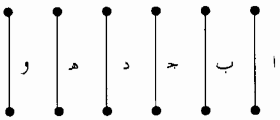
1 والوجه : الوجه [ا] – 6 هذه : هذا [ا] – 7 كما : وكما [ا] – 9 والوجه : الوجه [ا] – 16 والوجه : الوجه [ا].



Démonstration. Nous avons démontré, dans le septième cas, que le rapport de E à F est composé du rapport de A à B et du rapport de D à C. La première devient alors E, la deuxième F, la troisième A, la quatrième B, la cinquième D et la sixième C. Or nous avons démontré, dans le premier cas, que si cela est ainsi, alors le rapport de E à F est composé du rapport de A à C et du rapport de D à B.

Nous avons démontré, dans ce qui précède dans ce traité, que si le rapport de la première à la deuxième est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième, alors, si l'on inverse le rapport, on obtient le rapport de la deuxième à la première composé du rapport de la quatrième à la troisième et du rapport de la sixième à la cinquième. Donc on obtient, pour ces dix-sept cas que nous avons mentionnés, dix-sept <cas> inverses dans lesquels est mise en évidence la composition du rapport selon l'inverse. Il est clair qu'il n'existe pas, pour ces six grandeurs, de cas autre que ce que nous avons mentionné. J'ai établi pour cela un tableau[7], afin qu'il soit facile à celui qui le souhaite de trouver ce qu'il cherche. Le rapport de ce qui est dans la première colonne à ce qui est vis-à-vis de lui dans la deuxième colonne est composé du rapport de ce qui est vis-à-vis de lui dans la troisième colonne à ce qui est vis-à-vis de lui dans la quatrième colonne et du rapport de ce qui est vis-à-vis de lui dans la cinquième [A-175r] colonne à ce qui est vis-à-vis de lui dans la sixième colonne. Et le rapport de ce qui est dans la deuxième à ce qui est dans la première est composé du rapport des restantes selon l'inverse, c'est-à-dire du rapport de ce qui est dans la quatrième à ce qui est dans la troisième et du rapport de ce qui est dans la sixième à ce qui est dans la cinquième. Dans le cas où deux grandeurs sont vis-à-vis d'un zéro, alors le rapport de l'une des deux à l'autre n'est pas composé de deux des rapports des grandeurs restantes. Quant à ce qui est vis-à-vis d'elles [B-64r] dans la septième colonne, il s'agit du numéro des cas, afin que si quelqu'un veut revenir à la démonstration d'une chose de cela, il le trouve facilement. Suit le tracé de la table.

[7] Nous traduisons, ici et dans ce qui suit, le mot *jadwal* par *colonne*, et son pluriel, *jadāwil*, par tableau ; dans le cas, plus rare, où *jadwal* désigne le tableau tout entier, nous le traduisons par *table*.



برهان ذلك : أنا قد بيّنا في الوجه السابع أن نسبة هـ إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى جـ. فيصير الأول هـ والثاني و والثالث ا والرابع ب والخامس د والسادس جـ. وقد بيّنا في الوجه الأول أن ذلك إذا كان كذلك، فإن نسبة هـ إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى جـ ومن نسبة د إلى ب.

وقد بيّنا فيما تقدّم من القول أنه إذا كانت نسبة الأول إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس، فإن النسبة إذا خولفت صارت نسبة الثاني الى الأول مؤلفة من نسبة الرابع إلى الثالث ومن نسبة السادس إلى الخامس. فيصير لهذه السبعة عشر وجهاً التي ذكرنا سبعة عشر خلافاً يُبيّن فيها تأليف النسبة على الخلاف. وهو بيّن أنه لا يوجد في هذه الستة الأقدار وجه غير الذي ذكرنا. وقد وضعت لذلك جداول ليكون وجود ما يريده الطالب منها سهلاً. ونسبة ما في الجدول الأول إلى ما بحياله في الجدول الثاني مؤلفة من نسبة ما بحياله في الجدول الثالث إلى ما بحياله في الجدول الرابع، ومن نسبة ما بحياله في الجدول / الخامس إلى ما ا-١٧٥-و
بحياله في الجدول السادس. ونسبة ما في الثاني إلى ما في الأول مؤلفة من نسبة الباقية على الخلاف، أعني من نسبة ما في الرابع إلى ما في الثالث ومن نسبة ما في السادس إلى ما في الخامس. وأما إذا كان قدران بحيالهما صفر فليس نسبة أحدهما إلى الآخر بمؤلفة من نسبتين من نسب الأقدار الباقية. وأما ما بحيالها / في الجدول السابع، فهو ب-٦٤-و
عدد الوجوه حتى إذا أراد مُريد الرجوع إلى برهان شيء من ذلك، وجده بسهولة.

1 هـ : فوق السطر [ا] — 7 السادس : كتب "الخامس إلى" ثم شطبها [ب] — 8 التي ذكرنا : التي ذكرنا أيضاً [ا] — 10 جداول : كتب "جدولاً" ثم شطبها [ب] — 11 الأول : الأولى [ا] — 14 الخلاف : اخلاف [ا] — 16 من (الثانية) : فوق السطر [ا] — 17 بسهولة : ونجد بعدها "يتلوه رسم الجدول" [ا].

Table relative à ce qui résulte de la composition du rapport s'il traite de six grandeurs

première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	origine
A	*B*	*C*	*F*	*E*	*D*	1
A	*C*	*B*	*D*	*E*	*F*	2
A	*C*	*B*	*F*	*E*	*D*	3
A	*D*	0	0	0	0	0
A	*E*	*B*	*D*	*C*	*F*	4
A	*E*	*B*	*F*	*C*	*D*	5
A	*F*	0	0	0	0	0
B	*C*	0	0	0	0	0
B	*D*	*A*	*C*	*F*	*E*	8
B	*D*	*A*	*E*	*F*	*C*	9
B	*E*	0	0	0	0	0
B	*F*	*A*	*C*	*D*	*E*	10
B	*F*	*A*	*E*	*D*	*C*	11
C	*D*	*A*	*B*	*F*	*E*	6
C	*D*	*A*	*E*	*F*	*B*	12
C	*E*	0	0	0	0	0
C	*F*	*A*	*B*	*D*	*E*	13
C	*F*	*A*	*E*	*D*	*B*	14
D	*E*	*B*	*A*	*C*	*F*	15
D	*E*	*B*	*F*	*C*	*A*	16
D	*F*	0	0	0	0	0
E	*F*	*A*	*B*	*D*	*C*	7
E	*F*	*A*	*C*	*D*	*B*	17

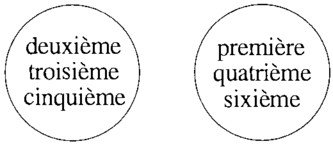
Il apparaît là clairement que, si nous partageons les six grandeurs en deux groupes, que nous posons la première d'entre elles, la quatrième et la sixième dans un groupe, et que nous posons les <grandeurs> restantes, soit la deuxième, la troisième et la cinquième, dans un autre groupe, alors le rapport de toute grandeur se trouvant dans l'un des deux groupes à une grandeur de l'autre groupe, quelle qu'elle soit, est composé des rapports des grandeurs restantes. Quant à son rapport à ce qui se trouve dans son groupe, il n'est pas composé des rapports restants. Que chacun des groupes soit appelé un domaine, que le groupe dans lequel se trouve le premier nombre soit appelé le premier domaine, et que l'autre groupe soit appelé le deuxième domaine.

جدول لما يجب من تأليف النسبة إذا كانت في ستة أقدار

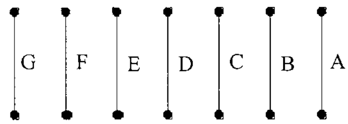
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
ا	ب	جـ	د	هـ	و	الأصل
ا	ب	جـ	و	هـ	د	ا
ا	جـ	ب	د	هـ	و	ب
ا	جـ	ب	و	هـ	د	جـ
ا	د	ة	ة	ة	ة	ة
ا	هـ	ب	د	جـ	و	د
ا	هـ	ب	و	جـ	د	هـ
ا	و	ة	ة	ة	ة	ة
ب	جـ	ة	ة	ة	ة	ة
ب	د	ا	جـ	و	هـ	ح
ب	د	ا	هـ	و	جـ	ط
ب	هـ	ة	ة	ة	ة	ة
ب	و	ا	جـ	د	هـ	ي
ب	و	ا	هـ	د	جـ	يا
جـ	د	ا	ب	و	هـ	و
جـ	د	ا	هـ	و	ب	يب
جـ	هـ	ة	ة	ة	ة	ة
جـ	و	ا	ب	د	هـ	يج
جـ	و	ا	هـ	د	ب	يد
د	هـ	ب	ا	جـ	و	يه
د	هـ	ب	و	جـ	ا	يو
د	و	ة	ة	ة	ة	ة
هـ	و	ا	ب	د	جـ	ز
هـ	و	ا	جـ	د	ب	بز

وهنالك استبان أنا إن قسمنا الستة الأقدار فرقتين، فجعلنا الأول منها والرابع والسادس في فرقة واحدة وجعلنا الباقية، وهي الثاني والثالث والخامس، في فرقة أخرى، كانت نسبة كل واحد من الأقدار التي في إحدى الفرقتين إلى قدرٍ من الفرقة الأخرى، أي قدر كان، مؤلفة من نسب الأقدار الباقية. وأما نسبته إلى ما في فرقته، فليست بمؤلفة من النسب الباقية. فلتسم كل واحدة من الفرقتين حيزاً ولتسم الفرقة التي فيها العدد الأول الحيز الأول ولتسمّ الفرقة الأخرى الحيز الثاني.

1 لما يجب من : ناقصة [ب] — 5 الأخرى : الأخر [ا] / نسب : النسب [ا] / الأقدار : فوق السطر [ا] — 5-6 وأما نسبته إلى (...) الباقية : في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 6 واحدة : واحد [ا].

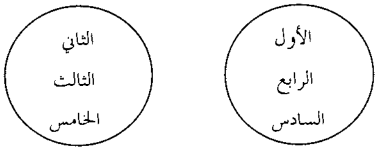


Si les trois rapports dont l'un est composé des deux restants sont dans cinq grandeurs, il faut alors que l'une des grandeurs se répète lorsque nous prenons les rapports. Les cinq grandeurs sont ainsi dans la position de six grandeurs dont deux sont égales entre elles. Or si deux des six grandeurs sont égales, alors il peut arriver que les quatre grandeurs restantes soient proportionnelles, et cela se produit lorsque les deux grandeurs appartiennent à deux domaines différents. [A-175$^{\mathrm{v}}$] Que les deux grandeurs qui appartiennent deux domaines différents soient A et B. Alors le rapport de A à B est composé des rapports des grandeurs restantes. Qu'il soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à F, et que A soit égale à B. Je dis que le rapport de C à D est égal au rapport de F à E.

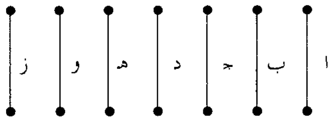


Démonstration. Posons le rapport de D à G égal au rapport de E à F. On obtient le rapport de A à B égal au rapport de C à G. Mais A est égale à B, donc C et G sont égales entre elles. Leur rapport à D est donc le même. Mais le rapport de G à D est égal au rapport de F à E, donc le rapport de C à D est égal au rapport de F à E. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si le rapport de C à D est égal au rapport de F à E, alors A est égal à B. Or nous avons montré dans les cas précédents les grandeurs qui sont dans un domaine, et celles qui sont dans deux domaines. Il en ressort donc clairement quels sont les <couples de> deux grandeurs parmi les six telles que, si elles sont égales entre elles, les quatre grandeurs restantes sont proportionnelles, et inversement. Nous les mettons en évidence grâce au tableau qui se trouve ci-après. En effet, si la grandeur qui est dans la première colonne est égale à la grandeur qui est vis-à-vis d'elle dans la deuxième colonne, alors le rapport de ce qui est vis-à-vis



وإن كانت النسب الثلاث اللواتي إحداهن مؤلفة من الاثنتين الباقيتين في خمسة أقدار، فلا بد لأحد الأقدار من أن يتكرر إذا نسبنا. فيكون الخمسة أقدار لذلك بمنزلة ستة أقدار يكون قدران منها متساويين. وإن استوى قدران من الستة الأقدار، فربما عرض أن يكون الأربعة الأقدار الباقية متناسبة، وذلك يعرض متى كان القدران من حيزين مختلفين. / فليكن القدران اللذان هما من حيزين مختلفين ا ب. فيكون نسبة ا ا-١٧٥-ظ
إلى ب مؤلفة من نسب الأقدار الباقية. فلتكن مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و، وليكن ا مثل ب. فأقول: إن نسبة جـ إلى د كنسبة و إلى هـ.



برهان ذلك: أنا نجعل نسبة د إلى ز كنسبة هـ إلى و. فيصير نسبة ا إلى ب كنسبة جـ إلى ز. ولكن ا مثل ب. فـ جـ ز متساويان. فتصير نسبتهما إلى د واحدة. ولكن نسبة ز إلى د كنسبة و إلى هـ. فنسبة جـ إلى د كنسبة و إلى هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كانت نسبة جـ إلى د كنسبة و إلى هـ، فإن ا مثل ب. وقد بيّنا في الوجوه المتقدمة الأقدار التي في حيز واحد والتي في حيزين. فقد تبيّن من ذلك <أن> أي قدرين من الستة الأقدار إذا استويا تناسبت الأربعة الأقدار الباقية وعكس ذلك. وهذه الجداول التي من بعد نستدل بها عليها. وذلك أنه إذا كان القدر الذي في الجدول <الأول> مساوياً للقدر الذي بحياله في الجدول الثاني، فإن نسبة ما بحيالهما

1 وإن: فإن [ا] / إحداهن: احدهن [ب، ا] — 3 يكون: أن يكون [ا] / وإن: فإن [ا] — 4-5 القدران من حيزين: القدران اللذان هما من حيزين [ا] — 6 نسب: نسبة [ا] / فلتكن: فليكن [ب، ا] — 8-9 نسبة ا إلى ب (...) فتصير: في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 9 فـ جـ ز: فجز [ب] — 13 في الوجوه المتقدمة: في الوجه المتقدم [ا] — 14 الستة: النسبة [ا].

d'elles dans la troisième colonne à ce qui est vis-à-vis d'elles dans la quatrième est égal au rapport de ce qui est vis-à-vis d'elles dans la cinquième à ce qui est vis-à-vis d'elles dans la sixième. Et si un zéro se trouve vis-à-vis d'elles, alors aucune proportionnalité ne résulte de leur égalité. Si le rapport de ce qui est dans la troisième à ce qui est dans la quatrième est égal au rapport de ce qui est dans la cinquième à ce qui est dans la sixième, alors les deux grandeurs qui sont dans la première et dans la deuxième sont égales. Pour ce qui est de la septième [B-64v] colonne, le numéro qui s'y trouve est le numéro des cas à partir desquels cela a été démontré. Quant à la huitième colonne, elle contient le numéro des entrées qui sont ici démontrées. Suit le tracé de la table.

Tableau relatif à ce qui résulte de la composition du rapport, s'il traite de six grandeurs dont deux sont égales

Les deux grandeurs égales		Ce qui résulte de l'égalité des deux grandeurs				Cas à partir desquels cela est démontré	Numéro des entrées qui sont dans cette table
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième	huitième
A	*B*	*C*	*D*	*F*	*E*	origine	1
A	*C*	*B*	*D*	*F*	*E*	2	2
A	*D*	0	0	0	0	0	0
A	*E*	*B*	*D*	*F*	*C*	4	3
A	*F*	0	0	0	0	0	0
B	*C*	0	0	0	0	0	0
B	*D*	*A*	*C*	*E*	*F*	8	4
B	*E*	0	0	0	0	0	0
B	*F*	*A*	*C*	*E*	*D*	10	5
C	*D*	*A*	*B*	*E*	*F*	6	6
C	*E*	0	0	0	0	0	0
C	*F*	*A*	*B*	*E*	*D*	13	7
D	*E*	*A*	*B*	*C*	*F*	15	8
D	*F*	0	0	0	0	0	0
E	*F*	*A*	*B*	*C*	*D*	7	9

في الجدول الثالث إلى ما بحيالهما في الرابع كنسبة ما بحيالهما في الخامس إلى ما بحيالهما في السادس. وإن كان بحيالهما صفر، فليس يجب من تساويهما تناسب. وإذا كانت نسبة ما في الثالث إلى ما في الرابع كنسبة ما في الخامس إلى ما في السادس، فإن القدرين اللذين في الأول وفي الثاني متساويان. وأما الجدول / السابع، فإن العدد الذي ب-٦٤-ظ فيه هو عدد الوجوه التي تبيّن ذلك منها. وأما الجدول الثامن، فإن فيه عدد الأبواب التي تبينت هاهنا.

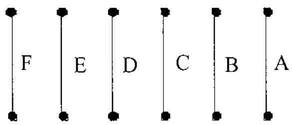
جداول لما يجب من تأليف النسبة إذا كانت في ستة أقدار وكان اثنان منها متساويين (+)

القدران المتساويان		ما يجب من تساوي القدرين				الوجوه التي منها تبيّن ذلك	عدد الأبواب التي في هذا الجدول
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع	الثامن
ا	ب	جـ	د	و	هـ	الأصل	ا
ا	جـ	ب	د	و	هـ	ب	ب
ا	د	ة	ة	ة	ة	ة	ة
ا	هـ	ب	د	و	جـ	د	جـ
ا	و	ة	ة	ة	ة	ة	ة
ب	جـ	ة	ة	ة	ة	ة	ة
ب	د	ا	جـ	هـ	و	ح	د
ب	هـ	ة	ة	ة	ة	ة	ة
ب	و	ا	جـ	هـ	د	ي	هـ
جـ	د	ا	ب	هـ	و	و	و
جـ	هـ	ة	ة	ة	ة	ة	ة
جـ	و	ا	ب	هـ	د	يج	ز
د	هـ	ا	ب	جـ	و	يه	ح
د	و	ة	ة	ة	ة	ة	ة
هـ	و	ا	ب	جـ	د	ز	ط

2 وإن : فإن [ب، ا] / كان بحيالهما : كان ما بحيالهما [ب] – 4 متساويان : متساويين [ب، ا] / وأما : فأما [ب] – 5 تبيّن : يتبين [ب] / وأما الجدول : أما الجداول [ا] – 6 هاهنا : ونجد بعدها "يتلو رسم الجدول" [ا] – 7 جداول : جدول [ا] / وكان : ناقصة [ب] / منها : منهما [ا].

(+) كتب ناسخ ا في العمود السابع الياء باءاً والزاي ياءاً؛ وفي العمود الثامن الجداول عوضاً عن الجدول.

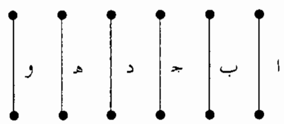
[A-176^{r}] On peut facilement connaître, d'après ce que nous avons mentionné, des situations autres qui surviennent de l'égalité de plus de deux grandeurs. Si les trois rapports dont l'un est composé des deux restants sont dans quatre grandeurs, il faut alors que l'une des grandeurs soit répétée trois fois dans le rapport, ou que deux d'entre elles soit répétées deux fois. Elles sont ainsi dans la position de six grandeurs dont trois sont égales ou dont deux sont telles que l'une est égale à l'autre et deux autres telles que l'une est égale à l'autre. Ce qui était nécessaire dans <le cas> des cinq grandeurs est pareillement nécessaire dans ce cas, c'est-à-dire que la grandeur qui est répétée tient lieu de trois grandeurs après sa répétition. Donc, si la même grandeur a été répétée trois fois, elle tient lieu de trois grandeurs, et si deux grandeurs ont été répétées deux fois, elles tiennent lieu de quatre grandeurs parmi les six grandeurs. Si trois grandeurs parmi les six sont égales et si ces trois <grandeurs> égales sont la première, la deuxième et la troisième, alors le rapport de chacune des grandeurs égales à la quatrième grandeur est égal au rapport de la sixième à la cinquième. Que les six grandeurs soient successivement A, B, C, D, E et F, selon l'exemple que nous avons pris précédemment, et que les trois d'entre elles égales soient A, B et C. Je dis que le rapport de chacune d'elles à D est égal au rapport de F à E.



Démonstration. Il a été démontré, dans la première entrée du tableau relatif à ce qui résulte de la composition du rapport si deux des six grandeurs sont égales, que si les deux grandeurs A et B sont égales, alors le rapport de C à D est égal au rapport de F à E. Mais C est égal à chacune de A et de B, donc le rapport de chacune de A, de B et de C à D est égal au rapport de F à E.

Il apparaît là clairement que, lorsque [B-65^{r}] trois des six grandeurs que nous avons mentionnées sont égales et que l'égalité de deux d'entre elles entraîne la proportionnalité des quatre restantes, alors, parmi les grandeurs restantes, il y a une grandeur telle que le rapport de chacune des trois grandeurs égales à celle-ci est égal au rapport de l'une des deux autres grandeurs restantes à l'autre. Or on a montré, dans le tableau relatif à ce qui

/ وقد يمكن للإنسان أن يعلم مما ذكرنا أعراضاً أخر تعرض من استواء أكثر من قدرين بسهولة. فإن كانت النسب الثلاث اللواتي إحداهن مؤلفة من الباقيتين في أربعة أقدار، فلا بد لأحد الأقدار من أن يُكرر في النسبة ثلاث مرات أو أن يُكرر اثنان منها مرتين. فتصير بمنزلة ستة أقدار يكون ثلاثة منها متساوية، أو اثنان مساوٍ أحدهما للآخر واثنان آخران مساوٍ أحدهما للآخر. ويلزم فيها مثل الذي لزم في الخمسة الأقدار، أعني أن يقوم القدر الذي يُكرر مقام ثلاثة أقدار بعد تكراره. فإن كان القدر الواحد قد كُرر ثلاث مرات، قام مقام ثلاثة أقدار وإن كان قدران قد كررا مرتين قاما مقام أربعة أقدار من الأقدار الستة. وإذا كانت ثلاثة أقدار من الستة متساوية وكانت تلك الثلاثة المتساوية هي الأول والثاني والثالث، فإن نسبة كل واحد من الأقدار المتساوية إلى القدر الرابع كنسبة السادس إلى الخامس. فلتكن أيضاً الأقدار الستة على الولاء ا ب جـ د هـ و على ما مثلنا آنفاً، وليكن الثلاثة المتساوية منها ا ب جـ. فأقول إن نسبة كل واحد منها إلى د كنسبة و إلى هـ.



برهان ذلك : أنه قد تبيّن، في الباب الأول من الجداول التي لما يجب من تأليف النسبة إذا كان قدران من الستة متساويين، أنه إذا كان قدرا ا ب متساويين، فإن نسبة جـ إلى د كنسبة و إلى هـ. ولكن جـ مثل كل واحد من ا ب. فنسبة كل واحد من ا ب جـ إلى د كنسبة و إلى هـ.

وهنالك استبان أنه متى تساوت / ثلاثة أقدار من الستة الأقدار التي ذكرنا، وكان ب-٦٥-و تساوي اثنين منها يوجب تناسب الأربعة الباقية، فإن في الأقدار الباقية قدراً يكون نسبة كل واحد من الأقدار الثلاثة المتساوية إليه كنسبة أحد القدرين الآخرين الباقيين

1 للإنسان : الإنسان [ب] — 2 إحداهن : احدهن [ب] — 3 أن (الأولى) : ناقصة [ب] / يُكرر (الأولى) : يكون [ا] — 5 للآخر (الأولى) : الآخر [ب] — 6 ثلاثة : ناقصة [ا] / بعد : بعدد [ا] — 8 قاما : قام [ا] / وإذا : فاما [ا] — 9 فإن نسبة كل واحد : فإن كان نسبة كل واحد [ا] — 11 ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] — 11-12 ا ب جـ : ابج [ب] — 13 برهان ذلك : برهانه [ا] — 14 قدران : مقدران [ا] / الستة : النسبة [ا] / ا : ناقصة [ا] — 16 ا ب جـ : ابج [ب] — 17 وكان : ولان [ب] — 18 قدراً : قدر [ب، ا] — 19 القدرين الآخرين الباقيين : القدرين من الباقيين [ا].

résulte de la composition du rapport si deux des six grandeurs sont égales, quelles <sont> les deux grandeurs dont l'égalité entraîne la proportionnalité des grandeurs restantes. On montre donc, à partir de cela, ce qui résulte de l'égalité de trois grandeurs. J'ai placé dans un tableau ce par quoi on connaît ce qui résulte de cela. Si les grandeurs qui sont dans la première, la deuxième et la troisième colonnes de ce tableau[8] sont égales, alors les rapports de chacune d'elles à ce qui est vis-à-vis d'elle dans la quatrième est égal au rapport de ce qui est vis-à-vis d'elles dans la cinquième à ce qui est vis-à-vis d'elles dans la sixième. Pour ce qui est de celles vis-à-vis desquelles se trouve un zéro, il ne résulte de leur égalité aucune proportionnalité. On connaît, à partir de la septième colonne, quelle entrée, parmi celles sont dans le tableau relatif aux six grandeurs [A-176^v] si deux d'entre elles sont égales, est celle par laquelle cela est démontré : si un quelconque numéro se trouve dans la septième colonne, alors que l'on cherche ce numéro dans la huitième colonne du tableau relatif à l'égalité de deux grandeurs ; cela est alors démontré à partir de ce qui est vis-à-vis de ce que nous avons trouvé.

Table relative à ce qui résulte de la composition du rapport, s'il traite de six grandeurs et si trois d'entre elles sont égales

Les trois grandeurs égales			Ce qui résulte de l'égalité des trois <grandeurs>			À partir de quelles entrées on démontre cela
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième
A	*B*	*C*	*D*	*F*	*E*	1
A	*B*	*D*	*C*	*E*	*F*	4
A	*B*	*E*	*F*	*D*	*C*	3
A	*B*	*F*	*E*	*C*	*D*	1
A	*C*	*D*	*B*	*E*	*F*	6
A	*C*	*E*	*F*	*D*	*B*	2
A	*C*	*F*	*E*	*B*	*D*	2
A	*D*	*E*	*B*	*C*	*F*	8
A	*D*	*F*	0	0	0	0

[8] Littéralement : la première colonne d'entre elles, la deuxième et la troisième (le tableau étant l'ensemble des colonnes).

إلى الآخر. وقد تبيّن، في الجداول التي "لما يجب من تأليف النسبة إذا كان قدران من الستة متساويين"، أيُّ قدرين يوجب تساويهُما تناسبَ الأقدار الباقية. فيتبين من هذا ما يجب من تساوي ثلاثة أقدار. وقد وضعتُ ما يعرف به ما يجب من ذلك في جداول. فإذا استوت الأقدار التي في الجدول الأول منها والثاني والثالث، فإن نسب كل واحد منها إلى ما بحياله في الرابع كنسبة ما بحياله في الخامس إلى ما بحياله في السادس. وأما التي بحيالها صفر، فليس يجب من تساويها تناسب. ويعرف من الجدول السابع الباب الذي به يتبين ذلك من الأبواب التي في الجداول التي للستة / الأقدار إذا ا-١٧٦-ظ كان قدران منها متساويين : فإذا كان في الجدول السابع عدد ما، فليطلب ذلك العدد في الجدول الثامن من الجداول التي لتساوي قدرين. فحيث ما وجدنا، فإن ذلك يتبين من الباب الذي بحياله.

جدول لما يجب من تأليف النسبة إذا كانت في ستة أقدار وكانت ثلاثة أقدار منها متساوية (+)

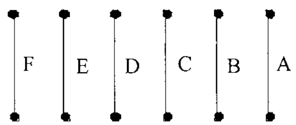
الثلاثة الأقدر المتساوية			ما يجب من تساوي الثلاثة			من أي الأبواب يبين ذلك
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
ا	ب	جـ	د	و	هـ	ا
ا	ب	د	جـ	هـ	و	د
ا	ب	هـ	و	د	جـ	جـ
ا	ب	و	هـ	جـ	د	ا
ا	جـ	د	ب	هـ	و	و
ا	جـ	هـ	و	د	ب	ب
ا	جـ	و	هـ	ب	د	ب
ا	د	هـ	ب	جـ	و	ح
ا	د	و	ة	ة	ة	ة

1 إذا كان قدران : كتب أولاً "أن الأقدار" ثم شطبها [ب] — 2 الستة : النسبة [ا] / أي : الى [ب] — 3 تساوي : تساو [ا] — 6 بحيالها : بحياله [ا] — 7 للستة : كنسبة [ا] — 8 فليطلب : كتب أولاً "فطلب" ثم شطبها [ب] — 10 بحياله : ونجد بعدها "يتلو رسم الجدول" [ا].

(+) نجد في مخطوطة ا : "ب" بدلاً من "د" في السطر الرابع والعمود السابع؛ و"ح" بدلاً من "هـ" في السطر الثالث عشر والعمود السادس؛ و"ز" بدلاً من "د" في السطر الثالث عشر والعمود السابع؛ و"ح" بدلاً من "د" في السطر الخامس عشر والعمود السابع؛ و"ة" بدلاً من "ح" في السطر السادس عشر والعمود السابع؛ و"و" بدلاً من "د" في السطر الثاني والعشرين والعمود الأول.

A	E	F	B	C	D	9
B	C	D	A	F	E	4
B	C	E	0	0	0	0
B	C	F	D	A	E	5
B	D	E	A	F	C	8
B	D	F	E	C	A	4
B	D	F	E	C	A	4
B	E	F	D	A	C	5
C	D	E	F	A	B	6
C	D	F	E	B	A	7
C	E	F	D	A	B	7
D	E	F	C	B	A	8

Si deux des six grandeurs sont égales, que deux autres grandeurs parmi les grandeurs restantes sont égales, et que les deux premières grandeurs égales sont la première et la deuxième et les deux autres grandeurs égales la troisième et la quatrième, alors la cinquième est égale à la sixième. Que les six grandeurs soient encore A, B, C, D, E et F, selon l'exemple précédent. Que A soit égale à B et que C soit égale à D. Je dis que E est égale à F.

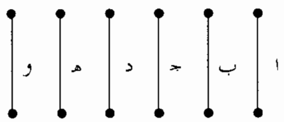


Démonstration. Il a été démontré, dans la première entrée du tableau relatif à ce qui résulte de l'égalité de deux grandeurs parmi les six, que lorsque A est égal à B, alors le rapport de C à D est égal au rapport de F à E. Mais C est égale à D, donc E est égale à F.

Il apparaît là clairement que, lorsque deux des six grandeurs sont égales, que l'égalité de ces deux grandeurs entraîne la proportionnalité des quatre grandeurs restantes, et que deux des quatre grandeurs proportionnelles sont égales, soit la première d'entre elles et celle à laquelle on en prend le rapport, c'est-à-dire sa suivante, soit la troisième et la quatrième, soit la première et la troisième, soit la deuxième et la quatrième, alors les deux grandeurs restantes sont égales.

ا	هـ	و	ب	جـ	د	ط
ب	جـ	د	ا	و	هـ	د
ب	جـ	هـ	ة	ة	ة	ة
ب	جـ	و	د	ا	هـ	هـ
ب	د	هـ	ا	و	جـ	ح
ب	د	و	هـ	جـ	ا	د
ب	هـ	و	د	ا	جـ	هـ
جـ	د	هـ	و	ا	ب	و
جـ	د	و	هـ	ب	ا	ز
جـ	هـ	و	د	ا	ب	ز
د	هـ	و	جـ	ب	ا	ح

وإن كان قدران من الستة الأقدار متساويين وكان قدران آخران من الأقدار الباقية متساويين، وكان القدران الأولان المتساويان هما الأول والثاني والقدران الآخران المتساويان هما الثالث والرابع، فإن الخامس مثل السادس. فليكن الأقدار الستة أيضاً ا ب جـ د هـ و على المثال المتقدم. وليكن ا مثل ب وليكن أيضاً جـ مثل د. فأقول إن هـ مثل و.

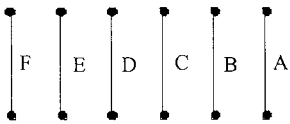


برهان ذلك : أنه قد تبيّن، في الباب الأول من الجداول التي لما يجب من تساوي قدرين من الستة، أنه متى كان ا مثل ب، فإن نسبة جـ إلى د كنسبة و إلى هـ. ولكن جـ مثل د. فـ هـ مثل و.

وهنالك استبان أنه متى تساوى قدران من الستة الأقدار، وكان تساوي ذينك القدرين يوجب تناسب الأربعة الأقدار الباقية، وتساوى قدران من الأربعة الأقدار المتناسبة : إما الأول منها والذي ينسب إليه وهو ثانيه، وإما الثالث والرابع، وإما الأول والثالث، وإما الثاني والرابع، فإن القدرين الباقيين متساويان.

2 وكان : فكان [ب] / المتساويان هما الأول : مكررة [ا] – 4 ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] – 9 متى : من [ا] / وكان : ولا [ب] – 10 الأقدار (الثانية) : ناقصة [ا] – 11 ثانيه : ثانية [ا] – 12 متساويان : متساويين [ا].

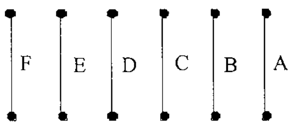
Si les deux premières grandeurs égales sont [A-177^{r}] A et B et les deux autres grandeurs C et E, alors le rapport de D à chacune des deux grandeurs C et E est égal au rapport de chacune d'elles à F.



Démonstration également. Le rapport de C à D [B-65^{v}] est égal au rapport de F à E, puisque A est égale à B. Mais E est égale à C. Donc le rapport de F à chacune des deux grandeurs C et E est égal au rapport de chacune d'elles à D.

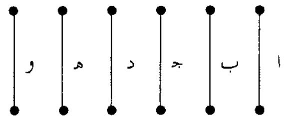
Il apparaît là clairement que si deux des six grandeurs sont égales, que l'égalité de ces deux grandeurs entraîne la proportionnalité des grandeurs restantes, et que deux des quatre grandeurs proportionnelles sont égales, soit la première d'entre elles et la quatrième, soit la deuxième et la troisième, alors le rapport de l'une des deux grandeurs restantes parmi les quatre à chacune des deux d'entre elles <qui sont> égales est égal au rapport de chacune des deux <qui sont> égales à la grandeur restante. Etant donné qu'il en est ainsi, il nous est possible de connaître ce qui résulte de l'égalité de deux des six grandeurs et de l'égalité de deux grandeurs parmi les quatre restantes si l'égalité de deux grandeurs parmi elles entraîne la proportionnalité des quatre grandeurs restantes. Il a été démontré que cela entraîne parfois[9] l'égalité des deux grandeurs restantes parmi les six et parfois une proportion entre elles deux et deux des grandeurs égales.

Si les grandeurs qui sont égales n'entraînent pas la proportionnalité des quatre grandeurs restantes, alors le rapport, doublé par répétition, des deux grandeurs égales aux deux autres grandeurs égales est égal au rapport de l'une des deux grandeurs restantes à l'autre. Que les six grandeurs soient encore A, B, C, D, E et F. Que A soit égale à D et C égale à B. Je dis que le rapport, doublé par répétition, de chacune de A et de D à chacune de B et de C est égal au rapport de E à F.



[9] Littéralement : peut-être. Thābit sous-entend ici qu'il arrive que l'on se trouve dans telle ou telle situation, d'où notre traduction.

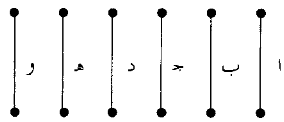
فإن كان القدران الأولان المتساويان / ا ب والقدران الآخران جـ هـ، فإن نسبة د إلى كل واحد من قدري جـ هـ كنسبة كل واحد منهما إلى و. ا-١٧٧-و



برهان ذلك أيضاً: أن نسبة جـ إلى د / كنسبة و إلى هـ لأن ا مثل ب. ولكن هـ مثل جـ. فنسبة و إلى كل واحد من قدري جـ هـ كنسبة كل واحد منهما إلى د. ب-٦٥-ظ

وهنالك استبان أنه إذا تساوى قدران من الستة الأقدار وكان تساوي ذينك القدرين يوجب تناسب الأقدار الباقية وتساوى قدران من الأربعة المتناسبة، إما الأول منها والرابع وإما الثاني والثالث، فإن نسبة واحد من القدرين الباقيين من الأربعة إلى كل واحد من الاثنين المتساويين منها، كنسبة كل واحد من الاثنين المتساويين إلى القدر الباقي. فإذ كان هذا هكذا، فقد يمكننا أن نعلم ما يجب من تساوي قدرين من الستة الأقدار مع تساوي قدرين من الأربعة الباقية إذا كان تساوي القدرين منها يوجب تناسب الأربعة الأقدار الباقية. وقد تبيّن أن ذلك ربما أوجب تساوي القدرين الباقيين من الستة وربما أوجب مناسبة بينهما وبين قدرين من الأقدار المتساوية.

فإن كانت الأقدار التي تساوت لا توجب تناسب الأربعة الأقدار الباقية، فإن نسبة القدرين المتساويين إلى القدرين الآخرين المتساويين مثناة بالتكرير كنسبة أحد القدرين الباقيين إلى الآخر. فليكن الأقدار الستة أيضاً ا ب جـ د هـ و. وليكن ا مثل د وجـ مثل ب. فأقول إن نسبة كل واحد من ا د إلى كل واحد من ب جـ مثناة بالتكرير كنسبة هـ إلى و.



1 جـ هـ : جه [ب] — 2 جـ هـ : جه [ب] — 4 فنسبة : ونسبة [ا] / هـ : جه [ب] — 7 واحد : الواحد [ا] — 8 منها (...) المتساويين : مكررة [ا] — 9 فإذ : فإذا [ا] / هذا : فوق السطر [ا] / يمكننا : يمكنا [ب] — 9-10 من الستة الأقدار مع تساوي قدرين : في الهامش [ا] — 11 وقد : فقد [ا] — 14 الآخرين المتساويين : الآخرين من المتساويين [ا] — 15 ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] / و : فوق السطر [ا] — 16 ب جـ : بجـ [ب] / بالتكرير : ناقصة [ا].

Démonstration. Il a été démontré, dans le septième cas du premier tableau, que le rapport de E à F est composé du rapport de A à B et du rapport de D à C. Mais D est égale à A et C est égale à B, donc le rapport de E à F est égal au rapport, doublé par répétition, de chacune de A et de D à chacune de B et de C.

De même, ceci s'en suit nécessairement[10] dans tout ce dont l'exposé est cet exposé. En effet, il arrive toujours, pour les deux grandeurs restantes parmi les six grandeurs, que leur rapport soit composé des rapports des grandeurs restantes, selon l'exemple que nous avons démontré dans cette proposition. Cela apparaît clairement des cas précédemment mentionnés et établis dans le premier tableau. Il en résulte donc la même <chose> que ce qui résulte ici. J'ai établi cela dans le tableau que voici. Si la grandeur qui est dans la première de ses colonnes est égale à la grandeur qui est dans dans la deuxième colonne et que la grandeur qui est dans la troisième est égale à la grandeur qui est dans la quatrième, alors les deux grandeurs qui sont vis-à-vis d'elles dans la cinquième colonne et la sixième : soit elles sont égales – et l'on sait cela par ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne, en effet, on trouve alors dans cette colonne [A-177^{v}] *égalité*, et le sens [B-66^{r}] de cela est que ce qui résulte pour ces deux grandeurs est leur égalité – soit le rapport de la grandeur qui est dans la cinquième colonne à chacune des deux grandeurs qui sont dans la troisième colonne et la quatrième est égal au rapport de chacune de ces deux grandeurs à la grandeur qui est vis-à-vis d'elles dans la sixième colonne – et l'on sait cela par ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne, en effet, s'y trouve alors *proportion aux deux autres grandeurs*, et le sens de cela est que ce qui résulte pour les deux grandeurs qui sont dans la cinquième colonne et la sixième est une proportion aux deux grandeurs qui sont dans la troisième colonne et la quatrième – soit le rapport de la grandeur qui est dans la cinquième colonne à chacune des deux grandeurs qui sont dans la première colonne et la deuxième est égal au rapport de chacune de ces deux grandeurs à la grandeur qui est dans la sixième colonne – et l'on sait cela par ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne, on peut alors y trouver écrit *proportion aux deux premières grandeurs*, et le sens de cela est que ce qui résulte pour les deux grandeurs est une proportion aux deux grandeurs qui sont dans la première colonne et la deuxième – soit le rapport de ce qui

[10] Littéralement : nécessaire (par son contenu).

برهان ذلك : أنه قد تبيّن في الوجه السابع من الجداول الأُول أن نسبة هـ إلى و مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى جـ. ولكن د مثل ا وجـ مثل ب. فنسبة هـ إلى و كنسبة كل واحد من ا د إلى كل واحد من ب جـ مثناة بالتكرير.

وكذلك يلزم في سائر ما كانت قصته هذه القصة. وذلك أنه يعرض أبداً للقدرين الباقيين من الستة الأقدار أن يكون نسبتهما مؤلفة من نسب الأقدار الباقية على هذا المثال الذي بيّنا في هذا الشكل. وذلك يتبيّن من الوجوه التي تقدم ذكرها ووضعها في الجداول الأُول. فيجب منها مثل الذي وجب هاهنا. وقد وضعت ذلك في الجداول التي هاهنا. فإذا كان القدر الذي في الجدول الأول منها مساوياً للقدر الذي في الجدول الثاني وكان القدر الذي في الجدول الثالث مساوياً للقدر الذي في الجدول الرابع، فإن القدرين اللذين بحيالهما في الجدول الخامس وفي السادس : إما أن يكونا متساويين، ويعرف ذلك مما بحيالهما في الجدول السابع – وذلك أنه يوجد في هذا الجدول عند ذلك / "تساوي" ومعنى / ذلك أن الذي يجب في هذين القدرين هو ا-١٧٧-ظ تساويهما – وإما أن يكون نسبة القدر الذي في الجدول الخامس إلى كل واحد من ب-٦٦-و القدرين اللذين في الجدول الثالث والرابع، كنسبة كل واحد من هذين القدرين إلى القدر الذي بحيالهما في الجدول السادس، ويعرف ذلك مما بحيالهما في الجدول السابع – وذلك أنه يكون فيه عند ذلك "مناسبة للقدرين الآخرين" ومعنى ذلك أن الذي يجب في القدرين اللذين في الجدول الخامس والسادس هو مناسبة للقدرين اللذين في الجدول الثالث والرابع – وإما أن يكون نسبة القدر الذي في الجدول الخامس إلى كل واحد من القدرين اللذين في الجدول الأول والثاني، كنسبة كل واحد من هذين القدرين إلى القدر الذي في الجدول السادس، ويعرف ذلك مما بحيالهما في الجدول السابع – فإنه قد يوجد فيه مكتوب عند ذلك "مناسبة للقدرين الأولين" ومعنى ذلك أن الذي يجب في القدرين هو مناسبة للقدرين اللذين في الجدول الأول والثاني – وإما

3 ب جـ : بجـ [ب] – 5 نسبتهما : نسبتها [ا] – 7 الأول : الأولى [ب] / منها : ناقصة [ا] – 8 في الجدول الأول (...) الذي : في الهامش [ا] – 10 يكونا : يكون [ا] – 12 تساوي : حسب التعريف الذي أعطاه في الجداول – 15 القدر : كتب أولاً "كل" ثم شطبها [ب] – 16 فيه : منه [ب] / للقدرين : القدرين [ا] – 17 هو : وهو [ا] – 18 القدر : مكررة [ا] – 19 اللذين : الذي [ا] – 21 قد : ناقصة [ا].

est dans la cinquième colonne à ce qui est dans la sixième colonne est égal au rapport, doublé par répétition, de chacune des deux grandeurs qui sont dans la première colonne et la deuxième à chacune des deux grandeurs qui sont dans la troisième grandeur et la quatrième – et l'on sait cela par ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne, y est alors écrit *doublé par répétition*, et le sens de cela est que le rapport des deux grandeurs est égal au rapport, doublé par répétition, des deux grandeurs égales aux deux autres <grandeurs> égales. Quant à la huitième colonne, il s'y trouve la mention des cas ou des entrées par lesquels on démontre cela : soit vis-à-vis de ce dont résulte nécessairement le rapport doublé par répétition, alors les cas par lesquels on démontre ceci sont issus du premier des tableaux qui précèdent ; soit ce qui n'est pas cela, alors les entrées par lesquelles on démontre ceci sont dans le deuxième des tableaux qui précèdent.

Tableau relatif à ce qui résulte de l'égalité de deux des six grandeurs jointe à l'égalité de deux autres grandeurs parmi les quatre restantes

Les deux premières grandeurs égales		Les deux autres grandeurs égales		Les deux grandeurs restantes		Ce qui résulte, de l'égalité, de la proportion ou du doublement du rapport	Les cas et les entrées par lesquels cela est démontré
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième	huitième
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	égalité	1
A	*B*	*C*	*E*	*D*	*F*	proportion aux deux autres	1

أن يكون نسبة ما في الجدول الخامس إلى ما في الجدول السادس، كنسبة كل واحد من القدرين اللذين في الجدول الأول والثاني إلى كل واحد من القدرين اللذين في الجدول الثالث والرابع مثناة بالتكرير، ويعرف ذلك مما بحيالهما في الجدول السابع – فإن فيه مكتوب عند ذلك "مثناة بالتكرير" ومعنى ذلك أن نسبة القدرين هي كنسبة القدرين المتساويين إلى الآخرين المتساويين مثناة بالتكرير. وأما في الجدول الثامن، فإن فيه ذكر الوجوه أو الأبواب التي يتبيّن بها ذلك : إما بحيال ما كان إنما يجب فيه النسبة المثناة بالتكرير، فالوجوه التي يتبيّن بها ذلك هي من الأول من الجداول التي تقدمت؛ وإما ما سوى ذلك، فالأبواب التي يتبيّن بها ذلك هي في الثاني من الجداول التي تقدمت.

جداول لما يجب من تساوي قدرين من الستة الأقدار مع تساوي قدرين آخرين من الأربعة الباقية (+)

القدران الأولان المتساويان		القدران الآخران المتساويان		القدران الباقيان		ما يجب من تساوي أو مناسبة أو تثنية النسبة	الوجوه والأبواب التي يبين بها ذلك
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع	الثامن
ا	ب	جـ	د	هـ	و	تساوي	ا
ا	ب	جـ	هـ	د	و	مناسبة للآخرين	ا

3 الثالث : كتب أولاً "الأول" ثم شطبها [ب] السادس [ا] – 6 إنما : يجما ؟ [ا] – 7 بها : ناقصة [ا] / هي : وهي، وهذا جائز [ب، ا] – 8 بها : لها [ا] / هي : وهي، وهذا جائز [ب، ا] – 9 تقدمت : ونجد بعدها "يتلو رسم الجدول" [ا] – 10 جداول : جدول [ا] / الستة : النسبة [ا] – 11 الأربعة : أربعة [ا].

(+) نجد في الجدول كلها "مناسبة الأولين" بدلاً من "مناسبة للأولين" و"مناسبة الآخرين" بدلاً من "مناسبة للآخرين" [ب، ا] – وفي السطر الأول : "القدرين الأولين المتساويين"، "القدرين الآخرين المتساويين" و"القدرين الباقيين" بدلاً من "القدران الأولان المتساويان"، "القدران الآخران المتساويان" و"القدران الباقيان" [ب، ا] – في السطر الثاني : "ا"، "ب"، "جـ"، "د" والخ بدلاً من الأول، الثاني، الثالث، الرابع والخ [ب] – في السطر الثاني عشر والعمود الثالث : "جـ" بدلاً من "د" [ب] – في السطر الخامس عشر والعمود الثامن : "ب" بدلاً من "ز" [ب] – في السطر السادس عشر والعمود السابع : "مناسبة الأولين" (وهي من السطر السابع عشر) بدلاً من "مثناة بالتكرير"، وهذا يحدث فجوة فيما يلي [ب، ا] ولكن فطن ناسخ مخطوطة ب لذلك وكتب "مثناة بالتكرير" في الهامش مع بيان موضعها – في السطر السادس عشر والعمود الثامن : "د" بدلاً من "يج" [ب] – في السطر السابع عشر والعمود السابع : "مثناة بالتكرير" بدلاً من "مناسبة للأولين" [ب، ا] – في السطر الثامن عشر والعمود السابع : "مناسبة الأولين" بدلاً من "مثناة بالتكرير" [ب] – في السطر العشرين والعمود السابع : "مناسبة الآخرين" بدلاً من "مناسبة للأولين" [ب] – في السطر الحادي والعشرين والعمود السابع : "تساوي" بدلاً من "مناسبة الآخرين" [ب] – في السطر الخامس والعشرين والعمود السابع : نجد "+" بدلاً من "تساوي" [ب].

A	*B*	*C*	*F*	*D*	*E*	égalité	1
A	*B*	*D*	*E*	*C*	*F*	égalité	1
A	*B*	*D*	*F*	*C*	*E*	proportion aux deux autres	1
A	*B*	*E*	*F*	*C*	*D*	égalité	1
A	*C*	*B*	*D*	*E*	*F*	égalité	2
A	*C*	*B*	*E*	*D*	*F*	proportion aux deux autres	2
A	*C*	*B*	*F*	*D*	*E*	égalité	2
A	*C*	*D*	*E*	*B*	*F*	égalité	2
A	*C*	*D*	*F*	*B*	*E*	proportion aux deux autres	2
A	*C*	*E*	*F*	*B*	*D*	égalité	2
A	*D*	*B*	*C*	*E*	*F*	doublé par répétition	7
A	*D*	*B*	*E*	*C*	*F*	doublé par répétition	13
A	*D*	*B*	*F*	*C*	*E*	proportion aux deux	5
A	*D*	*C*	*E*	*B*	*F*	doublé par répétition	10
A	*D*	*C*	*F*	*B*	*E*	proportion aux deux	7
A	*D*	*E*	*F*	*B*	*C*	proportion aux deux	9
A	*E*	*B*	*C*	*D*	*F*	proportion aux deux autres	3
A	*E*	*B*	*D*	*F*	*C*	égalité	3
A	*E*	*B*	*F*	*D*	*C*	égalité	3
A	*E*	*C*	*D*	*B*	*F*	égalité	3
A	*E*	*C*	*F*	*B*	*D*	égalité	3

[A-178r] <Suite du tableau>[11]

A	*E*	*D*	*F*	*B*	*C*	proportion aux deux autres	3
A	*F*	*B*	*C*	*E*	*D*	doublé par répétition	15
A	*F*	*B*	*D*	*C*	*E*	proportion aux deux premières	4
A	*F*	*B*	*E*	*C*	*D*	doublé par répétition	6
A	*F*	*C*	*D*	*B*	*E*	proportion aux deux premières	6
A	*F*	*C*	*E*	*B*	*D*	doublé par répétition	8
A	*F*	*D*	*E*	*B*	*C*	proportion aux deux premières	8
B	*C*	*D*	*E*	*A*	*F*	proportion aux deux premières	8
B	*C*	*D*	*F*	*A*	*E*	doublé par répétition	4
B	*C*	*E*	*F*	*A*	*D*	proportion aux deux premières	9
B	*D*	*C*	*E*	*A*	*F*	proportion aux deux autres	4

[11] Cette seconde partie du tableau, avec répétition des titres, est sur la page 66^{v} du manuscrit *B* et sur la page suivante du manuscrit *A*.

ا	ب	جـ	و	د	هـ	تساوي	ا
ا	ب	د	هـ	جـ	و	تساوي	ا
ا	ب	د	و	جـ	هـ	مناسبة للآخرين	ا
ا	ب	هـ	و	جـ	د	تساوي	ا
ا	جـ	ب	د	هـ	و	تساوي	ب
ا	جـ	ب	هـ	د	و	مناسبة للآخرين	ب
ا	جـ	ب	و	د	هـ	تساوي	ب
ا	جـ	د	هـ	ب	و	تساوي	ب
ا	جـ	د	و	ب	هـ	مناسبة للآخرين	ب
ا	جـ	هـ	و	ب	د	تساوي	ب
ا	د	ب	جـ	هـ	و	مثناة بالتكرير	ز
ا	د	ب	هـ	جـ	و	مثناة بالتكرير	يج
ا	د	ب	و	جـ	هـ	مناسبة للأولين	هـ
ا	د	جـ	هـ	ب	و	مثناة بالتكرير	ي
ا	د	جـ	و	ب	هـ	مناسبة للأولين	ز
ا	د	هـ	و	ب	جـ	مناسبة للأولين	ط
ا	هـ	ب	جـ	د	و	مناسبة للآخرين	جـ
ا	هـ	ب	د	و	جـ	تساوي	جـ
ا	هـ	ب	و	د	جـ	تساوي	جـ
ا	هـ	جـ	د	ب	و	تساوي	جـ
ا	هـ	جـ	و	ب	د	تساوي	جـ

<تابع الجدول>(+) / ا-١٧٨-و

ا	هـ	د	و	ب	جـ	مناسبة للآخرين	جـ
ا	و	ب	جـ	هـ	د	مثناة بالتكرير	يه
ا	و	ب	د	جـ	هـ	مناسبة للأولين	د
ا	و	ب	هـ	جـ	د	مثناة بالتكرير	و
ا	و	جـ	د	ب	هـ	مناسبة للأولين	و
ا	و	جـ	هـ	ب	د	مثناة بالتكرير	ح
ا	و	د	هـ	ب	جـ	مناسبة للأولين	ح
ب	جـ	د	هـ	ا	و	مناسبة للأولين	ح
ب	جـ	د	و	ا	هـ	مثناة بالتكرير	د
ب	جـ	هـ	و	ا	د	مناسبة للأولين	ط
ب	د	جـ	هـ	ا	و	مناسبة للآخرين	د
ب	د	جـ	و	ا	هـ	تساوي	د

(+) هذا الجزء الثاني من الجدول، مع تكرار العناوين، على صفحة ٦٦-ظ في مخطوطة ب وعلى الصفحة التالية في مخطوطة ا - في السطر السابع والعمود الثاني : "د" بدلاً من "و" [ا] - في السطر الثامن والعمود الثامن : "ه" بدلاً من "ح" [ا] - في السطر التاسع والعمود السابع : ينقص "بالتكرير" [ب] - في السطر الثاني عشر والعمود الثامن : "و" بدلاً من "د" [ا] - في السطر الثالث عشر والعمود الثامن : "و" بدلاً من "د" [ا] - في السطر العشرين والعمود الثامن : "د" بدلاً من"و" [ا].

B	*D*	*C*	*F*	*A*	*E*	égalité	4
B	*D*	*E*	*F*	*A*	*C*	égalité	4
B	*E*	*C*	*D*	*A*	*F*	proportion aux deux premières	6
B	*E*	*C*	*F*	*A*	*D*	proportion aux deux premières	7
B	*E*	*D*	*F*	*A*	*C*	doublé par répétition	2
B	*F*	*C*	*D*	*A*	*E*	égalité	5
B	*F*	*C*	*E*	*A*	*D*	proportion aux deux autres	5
B	*F*	*D*	*E*	*A*	*C*	égalité	5
C	*D*	*E*	*F*	*A*	*B*	égalité	6
C	*E*	*D*	*F*	*A*	*B*	doublé par répétition	origine
C	*F*	*D*	*E*	*A*	*B*	égalité	7

Si les trois rapports dont l'un est composé des deux rapports restants sont dans trois grandeurs, alors il faut que l'une des grandeurs se répète quatre fois lorsque l'on prend les rapports, ou que l'une d'elles se répète trois fois et une autre deux fois, ou chacune d'elles deux fois. Ceci tient donc la place de six grandeurs dont quatre sont égales, ou dont trois sont égales et deux autres égales, ou dont deux sont égales, deux autres égales et les deux restantes égales. Si [B-66^{v}] quatre grandeurs parmi les six sont égales, alors il résulte de cela parfois l'égalité des deux grandeurs restantes, parfois une proportion aux grandeurs égales ; cela se démontre pareillement à ce par quoi on démontre ce qui résulte de l'égalité de deux grandeurs jointe à l'égalité de deux autres grandeurs. On sait cela à partir de ce tableau. Lorsque les grandeurs qui sont dans la première colonne, la deuxième, la troisième et la quatrième, sont égales, et que ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne est *égalité*, alors les deux grandeurs qui sont dans la cinquième colonne et la sixième sont égales. Et si ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne est *proportion*, alors le rapport de la grandeur qui est dans la cinquième colonne à chacune des quatre grandeurs égales est égal au rapport de chacune d'elles à ce qui est dans la sixième colonne.

ب	د	ه	و	ا	جـ	تساوي	د
ب	ه	جـ	د	ا	و	مناسبة للأولين	و
ب	ه	جـ	و	ا	د	مناسبة للأولين	ز
ب	ه	د	و	ا	جـ	مثناة بالتكرير	ب
ب	و	جـ	د	ا	ه	تساوي	ه
ب	و	جـ	ه	ا	د	مناسبة للآخرين	ه
ب	و	د	ه	ا	جـ	تساوي	ه
جـ	د	ه	و	ا	ب	تساوي	و
جـ	ه	د	و	ا	ب	مثناة بالتكرير	الأصل
جـ	و	د	ه	ا	ب	تساوي	ز

وإذا كانت النسب الثلاث اللواتي إحداهن مؤلفة من النسبتين الباقيتين في ثلاثة أقدار، فلا بد لأحد الأقدار من أن يكرر في النسبة أربع مرات أو أن يكرر واحد منها ثلاث مرات وواحد مرتين، أو كل واحد منها مرتين. فيكون ذلك بمنـــزلة ستة أقدار تكون أربعة منها متساوية أو ثلاثة متساوية واثنان آخران متساويين، أو تكون اثنان متساويين واثنان آخران متساويين والاثنان الباقيان متساويين. فإن كانت / أربعة أقدار ب-٦٦-ظ من الستة متساوية، فإنه يجب من ذلك أحياناً تساوي القدرين الباقيين، وأحياناً مناسبة للأقدار المتساوية، ويتبيّن ذلك بمثل الذي تبيّن به ما يجب من تساوي قدرين مع تساوي قدرين آخرين. ويعلم ذلك من هذه الجداول. فإنه متى استوت الأقدار التي في الجدول الأول والثاني والثالث والرابع، وكان ما بحيالها في الجدول السابع "تساوي"، فإن القدرين اللذين في الجدول الخامس والسادس متساويان. وإن كان ما بحيالها في الجدول السابع "مناسبة"، فإن نسبة القدر الذي في الجدول الخامس إلى كل واحد من الأقدار الأربعة المتساوية كنسبة كل واحد منها إلى ما في الجدول السادس.

2 يكرر (الأولى) : يكون [ب] / أن (الثانية) : ناقصة [ا] / يكرر (الثانية) : يكرون [ب] — 3 بمنزلة : فبين له [ا] — 4 أو تكون : أو أن يكون [ا] — 5 والاثنان الباقيان متساويين : ناقصة [ب] — 6 القدرين الباقيين : القدرين المتساويين الباقيين [ا] / مناسبة : متشابه [ا] — 7 للأقدار : الأقدار [ب، ا] — 9 وكان : ولان [ب] — 10 متساويان : متساويين [ب، ا] / بحيالها : بحيالهما [ب، ا] — 12 إلى : تحت السطر [ا] / السادس : ونجد بعدها "يتلو رسم الجدول" [ا].

[A-178v] Tableau relatif à ce qui résulte de l'égalité de quatre grandeurs

Les quatre grandeurs égales				Les deux grandeurs restantes		L'égalité et la proportion
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	égalité
A	*B*	*C*	*E*	*D*	*F*	proportion
A	*B*	*C*	*F*	*D*	*E*	égalité
A	*B*	*D*	*E*	*C*	*F*	égalité
A	*B*	*D*	*F*	*C*	*E*	proportion
A	*B*	*E*	*F*	*C*	*D*	égalité
A	*C*	*D*	*E*	*B*	*F*	égalité
A	*C*	*D*	*F*	*B*	*E*	proportion
A	*C*	*E*	*F*	*B*	*D*	égalité
A	*D*	*E*	*F*	*B*	*C*	proportion
B	*C*	*D*	*E*	*A*	*F*	proportion
B	*C*	*D*	*F*	*A*	*E*	égalité
B	*C*	*E*	*F*	*A*	*D*	proportion
B	*D*	*E*	*F*	*A*	*C*	égalité
C	*D*	*E*	*F*	*A*	*B*	égalité

Si trois grandeurs parmi les six et également deux autres grandeurs sont égales, on sait ce qui résulte alors à partir du tableau relatif à l'égalité de deux grandeurs parmi les six jointe à l'égalité de deux autres grandeurs. Ce qui résulte de cela est soit l'égalité de la grandeur restante aux trois grandeurs égales, soit la proportion des deux grandeurs égales aux trois grandeurs égales, la grandeur restante étant entre elles. On sait cela par ce qui se trouve dans la septième colonne du tableau ci-dessous. Si [B-67r] les grandeurs qui sont dans la première colonne, la deuxième et la troisième sont égales, que les grandeurs qui sont dans la quatrième colonne et la cinquième sont également égales, et que ce qui est vis-à-vis d'elles dans la septième colonne est *égalité*, alors la grandeur qui est dans la sixième colonne est égale aux grandeurs qui sont dans la première colonne, la deuxième et la troisième. Si vis-à-vis d'elles dans la septième est

/ جداول لما يجب من تساوي أربعة أقدار (+) ا-١٧٨-ظ

الأربعة الأقدار المتساوية				القدران الباقيان		التساوي والمناسبة
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
ا	ب	جـ	د	هـ	و	تساوي
ا	ب	جـ	هـ	د	و	مناسبة
ا	ب	جـ	و	د	هـ	تساوي
ا	ب	د	هـ	جـ	و	تساوي
ا	ب	د	و	جـ	هـ	مناسبة
ا	ب	هـ	و	جـ	د	تساوي
ا	جـ	د	هـ	ب	و	تساوي
ا	جـ	د	و	ب	هـ	مناسبة
ا	جـ	هـ	و	ب	د	تساوي
ا	د	هـ	و	ب	جـ	مناسبة
ب	جـ	د	هـ	ا	و	مناسبة
ب	جـ	د	و	ا	هـ	تساوي
ب	جـ	هـ	و	ا	د	مناسبة
ب	د	هـ	و	ا	جـ	تساوي
جـ	د	هـ	و	ا	ب	تساوي

وإن كانت ثلاثة أقدار من الستة وقدران آخران أيضاً متساويين، فإن الذي يجب في ذلك يعلم من الجداول التي لتساوي قدرين من الستة مع تساوي قدرين آخرين. والذي يجب من ذلك إما مساواة القدر الباقي للثلاثة الأقدار المتساوية، وإما مناسبة القدرين المتساويين للثلاثة الأقدار المتساوية، والقدر الباقي فيما بينهما. ويعلم ذلك مما يوجد في الجدول السابع من هذه الجداول التي أسفل. فإذا / تساوت الأقدار التي في ب-٦٧-و الجدول الأول والثاني والثالث، وتساوت أيضاً الأقدار التي في الجدول الرابع والخامس، وكان ما بحيالها في الجدول السابع *مساواة*، فإن القدر الذي في الجدول السادس مساوٍ للأقدار التي في الجدول الأول والثاني والثالث. وإن كان بحيالها في السابع *مناسبة*، فإن

1 جداول : جدول [ا] — 3 لتساوي : تساوي [ب] — 4 والذي : كتب "من" ثم شطبها [ب] / القدر : للقدر [ا] — 5 المتساويين للثلاثة الأقدار : في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 8 ما : ناقصة [ا] / بحيالها : بحيالهما [ب] / السادس : السابع، مع "٦" فوقها [ا].

(+) في السطر الثالث عشر والعمود الرابع : "جـ" بدلاً من "د" [ب] – في السطر السابع عشر والعمود الأول : "ب" بدلاً من "جـ" [ب].

proportion, alors le rapport de chacune des trois grandeurs qui sont dans la première colonne, la deuxième et la troisième, à chacune des deux grandeurs qui sont dans la quatrième colonne et la cinquième, est égal au rapport de chacune de ces deux-ci à la grandeur qui est dans la sixième colonne. Et si vis-à-vis d'elles dans la sixième est un zéro, alors il n'en résulte rien d'autre que ce qui en a résulté dans le tableau relatif à l'égalité de deux grandeurs parmi les six jointe à l'égalité de deux autres grandeurs, et cela est toujours la duplication du rapport.

Table relative à ce qui résulte de l'égalité de trois grandeurs jointe à l'égalité de deux autres grandeurs[12] [A-179r]

Les trois grandeurs égales			Les deux grandeurs égales		La grandeur restante	L'égalité et la proportion
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	égalité
A	*B*	*C*	*D*	*F*	*E*	proportion
A	*B*	*C*	*E*	*F*	*D*	égalité
A	*B*	*D*	*C*	*E*	*F*	proportion
A	*B*	*D*	*C*	*F*	*E*	égalité
A	*B*	*D*	*C*	*E*	*F*	égalité
A	*B*	*E*	*C*	*D*	*F*	égalité
A	*B*	*E*	*C*	*F*	*D*	égalité
A	*B*	*E*	*D*	*F*	*C*	proportion
A	*B*	*F*	*C*	*D*	*E*	égalité
A	*B*	*F*	*C*	*E*	*D*	proportion
A	*B*	*F*	*D*	*E*	*C*	égalité
A	*C*	*D*	*B*	*E*	*F*	proportion
A	*C*	*D*	*B*	*F*	*E*	égalité
A	*C*	*D*	*E*	*F*	*B*	égalité
A	*C*	*E*	*B*	*D*	*F*	égalité
A	*C*	*E*	*B*	*F*	*D*	égalité
A	*C*	*E*	*D*	*F*	*B*	proportion
A	*C*	*F*	*B*	*D*	*E*	égalité
A	*C*	*F*	*B*	*E*	*D*	proportion

[12] Cette première partie du tableau est absente du manuscrit *B*.

نسبة كل واحد من الثلاثة الأقدار التي في الجدول الأول والثاني والثالث إلى كل واحد من القدرين اللذين في الجدول الرابع والخامس كنسبة كل واحد من هذين إلى القدر الذي في الجدول السادس. وإن كان ما بحيالها في السادس صفر، فإنه لا يجب فيها شيء سوى ما وجب فيها في الجداول التي لتساوي قدرين مع تساوي قدرين آخرين، وذلك أبداً هو تثنية النسبة.

جدول لما يجب من تساوي ثلاثة أقدار مع تساوي قدرين آخرين (+) / ا-١٧٩-و

الثلاثة الأقدار المتساوية			القدران المتساويان		القدر الباقي	المساواة والمناسبة
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
ا	ب	جـ	د	هـ	و	مساواة
ا	ب	جـ	د	و	هـ	مناسبة
ا	ب	جـ	هـ	و	د	مساواة
ا	ب	د	جـ	هـ	و	مناسبة
ا	ب	د	جـ	و	هـ	مساواة
ا	ب	د	هـ	و	جـ	مساواة
ا	ب	هـ	جـ	د	و	مساواة
ا	ب	هـ	جـ	و	د	مساواة
ا	ب	هـ	د	و	جـ	مناسبة
ا	ب	و	جـ	د	هـ	مساواة
ا	ب	و	جـ	هـ	د	مناسبة
ا	ب	و	د	هـ	جـ	مساواة
ا	جـ	د	ب	هـ	و	مناسبة
ا	جـ	د	ب	و	هـ	مساواة
ا	جـ	د	هـ	و	ب	مساواة
ا	جـ	هـ	ب	د	و	مساواة
ا	جـ	هـ	ب	و	د	مساواة
ا	جـ	هـ	د	و	ب	مناسبة
ا	جـ	و	ب	د	هـ	مساواة
ا	جـ	و	ب	هـ	د	مناسبة

3 ما : ناقصة [ا] — 4 في : من [ا] / لتساوي : تساوي [ب] / مع تساوي قدرين : في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 5 النسبة : ونجد بعدها "يتلو رسم الجدول" [ا].

(+) هذا الجزء الأول من الجدول ناقص في مخطوطة ب. وفي السطر التاسع عشر والعمود الرابع : "ه" بدلاً من "ب" [ا].

<Suite de la table>[13]

A	C	F	D	E	B	égalité
A	D	E	B	C	F	proportion
A	D	E	B	F	C	égalité
A	D	E	C	F	B	égalité
A	D	F	B	C	0	0
A	D	F	B	E	0	0
A	D	F	C	E	0	0
A	E	F	B	C	D	proportion
A	E	F	B	D	C	égalité
A	E	F	C	D	B	égalité
B	C	D	A	E	F	égalité
B	C	D	A	F	E	proportion
B	C	D	E	F	A	égalité
B	C	E	A	D	0	0
B	C	E	A	F	0	0
B	C	E	D	F	0	0
B	C	F	A	D	E	proportion
B	C	F	A	E	D	égalité
B	C	F	D	E	A	égalité

<Suite de la table>[14]

B	D	E	A	C	F	égalité
B	D	E	A	F	C	proportion
B	D	E	C	F	A	égalité
B	D	F	A	C	E	égalité
B	D	F	A	E	C	égalité
B	D	F	C	E	A	proportion
B	E	F	A	C	D	égalité
B	E	F	A	D	C	proportion

[13] Cette seconde partie du tableau, avec répétition des titres, est sur la même page du manuscrit *A*.

[14] Cette troisième partie du tableau, avec répétition des titres, est sur la même page du manuscrit *A* ; elle est répétée page 67^v du manuscrit *B*.

<تابع الجدول>(+)

ا	جـ	و	د	هـ	ب	مساواة
ا	د	هـ	ب	جـ	و	مناسبة
ا	د	هـ	ب	و	جـ	مساواة
ا	د	هـ	جـ	و	ب	مساواة
ا	د	و	ب	جـ	ة	ة
ا	د	و	ب	هـ	ة	ة
ا	د	و	جـ	هـ	ة	ة
ا	هـ	و	ب	جـ	د	مناسبة
ا	هـ	و	ب	د	جـ	مساواة
ا	هـ	و	جـ	د	ب	مساواة
ب	جـ	د	ا	هـ	و	مساواة
ب	جـ	د	ا	و	هـ	مناسبة
ب	جـ	د	هـ	و	ا	مساواة
ب	جـ	هـ	ا	د	ة	ة
ب	جـ	هـ	ا	و	ة	ة
ب	جـ	هـ	د	و	ة	ة
ب	جـ	و	ا	د	هـ	مناسبة
ب	جـ	و	ا	هـ	د	مساواة
ب	جـ	و	د	هـ	ا	مساواة

<تابع الجدول>(++)

ب	د	هـ	ا	جـ	و	مساواة
ب	د	هـ	ا	و	جـ	مناسبة
ب	د	هـ	جـ	و	ا	مساواة
ب	د	و	ا	جـ	هـ	مساواة
ب	د	و	ا	هـ	جـ	مساواة
ب	د	و	جـ	هـ	ا	مناسبة
ب	هـ	و	ا	جـ	د	مساواة
ب	هـ	و	ا	د	جـ	مناسبة
ب	هـ	و	جـ	د	ا	مساواة

(+) نجد هذا الجزء الثاني من الجدول، مع تكرار العناوين، على نفس الصفحة في مخطوطة ا - في عوانين جدول مخطوطة ب، نجد "ا"، "ب"، "جـ"، "د" والخ بدلاً من "الأول"، "الثاني"، "الثالث"، "الرابع" والخ - وفي السطر الثالث عشر والعمود السادس : "ة" بدلاً من "ا" [ا] - في السطر الرابع عشر والعمود السادس : "ه" بدلاً من "ة" [ا] - في السطر التاسع عشر والعمود الرابع : "ب" بدلاً من "د" [ا].

(++) هذا الجزء الثالث من الجدول مع تكرار العناوين على نفس الصفحة في مخطوطة ا وهو مكرر (مع "جداول" بدلاً من "جدول" في العنوان) في صفحة ٦٧-ظ من مخطوطة ب - وفي العمود الأول من السطر التاسع عشر إلى السطر الحادي والعشرين : "جـ" بدلاً من "د" [ا].

B	*E*	*F*	*C*	*D*	*A*	égalité
C	*D*	*E*	*A*	*B*	*F*	égalité
C	*D*	*E*	*A*	*F*	*B*	proportion
C	*D*	*E*	*B*	*F*	*A*	égalité
C	*D*	*F*	*A*	*B*	*E*	égalité
C	*D*	*F*	*A*	*E*	*B*	égalité
C	*D*	*F*	*B*	*E*	*A*	proportion
C	*E*	*F*	*A*	*B*	*D*	égalité
C	*E*	*F*	*A*	*D*	*B*	proportion
C	*E*	*F*	*B*	*D*	*A*	égalité
D	*E*	*F*	*A*	*B*	*C*	égalité
D	*E*	*F*	*A*	*C*	*B*	égalité
D	*E*	*F*	*B*	*C*	*A*	proportion

[B-67^{v} ; A-179^{v}] Si deux des six grandeurs sont égales, que deux autres grandeurs sont également égales, et que les deux grandeurs restantes sont égales, alors on sait ce qui résulte de cela à partir de la table relative à ce qui résulte de l'égalité de deux grandeurs jointe à l'égalité de deux autres grandeurs. Si l'égalité des deux premières grandeurs et l'égalité des deux grandeurs médianes entraînent dans cette table l'égalité des deux grandeurs restantes, alors il n'y a pas ici d'avantage à leur égalité, et il ne résulte de cela rien d'autre que ce qui résultait alors. Si leur égalité entraîne une proportion aux deux premières, alors les deux dernières sont égales aux deux premières, chacune à chacune. Si leur égalité entraîne une proportion aux deux médianes, alors les deux dernières sont égales aux deux médianes. Si leur égalité entraîne un rapport doublé, alors les deux premières sont égales aux deux médianes. Mais afin que la connaissance de cela soit facile, posons également pour cela un tableau. Si ce qui est dans la première colonne est égal à ce qui est dans la deuxième, que ce qui est dans la troisième est égal à ce qui est dans la quatrième, et que ce qui est dans la cinquième est égal à ce qui est dans la sixième, alors les grandeurs qui sont dans la septième sont égales. Et si il y a là un zéro, alors il ne résulte de cela rien d'autre que ce qui résultait dans le tableau que nous avons mentionné.

جـ	د	هـ	ا	ب	و	مساواة
جـ	د	هـ	ا	و	ب	مناسبة
جـ	د	هـ	ب	و	ا	مساواة
جـ	د	و	ا	ب	هـ	مساواة
جـ	د	و	ا	هـ	ب	مساواة
جـ	د	و	ب	هـ	ا	مناسبة
جـ	هـ	و	ا	ب	د	مساواة
جـ	هـ	و	ا	د	ب	مناسبة
جـ	هـ	و	ب	د	ا	مساواة
د	هـ	و	ا	ب	جـ	مساواة
د	هـ	و	ا	جـ	ب	مساواة
د	هـ	و	ب	جـ	ا	مناسبة

/ وإن كان قدران من الأقدار الستة متساويين، وكان قدران آخران أيضاً ب-٦٧-ظ متساويين، وكان القدران الباقيان متساويين، فإن الذي يجب من ذلك يعلم من ا-١٧٩-ظ الجدول الذي لما يجب من تساوي قدرين مع تساوي قدرين آخرين. فإذا كان تساوي القدرين الأولين وتساوي القدرين الأوسطين يوجب في ذلك الجدول تساوي القدرين الباقيين ، فلا منفعة في تساويهما هاهنا ولا يجب من ذلك شيء سوى ما وجب هنالك. وإذا كان تساويها يوجب مناسبة للأولين، فإن الآخرين مساويان للأولين كل واحد لكل واحد. وإن كان تساويها يوجب مناسبة للأوسطين، فإن الآخرين مساويان للأوسطين. وإن كان تساويها يوجب نسبة مثناة، فإن الأولين مساويان للأوسطين. ولكن ليكون معرفة ذلك سهلة، فإنا نجعل لذلك أيضاً جداول .فإذا كان ما في الجدول الأول مثل الذي في الثاني وما في الثالث مثل الذي في الرابع وما في الخامس مثل الذي في السادس، فإن الأقدار التي في السابع متساوية. وإن كان فيه صفر، فليس يجب من ذلك شيء سوى ما وجب في الجداول التي ذكرنا.

1 وإن : فإن [ب، ا] — 3 لما : ناقصة [ا] / مع تساوي قدرين : في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 4-5 تساوي القدرين الباقيين : مساويا للقدرين الباقيين [ب] تساو القدرين الباقيين [ا] — 5 شيء : ناقصة [ب] — 6 للأولين (الأولى) : الأولين [ا] / مساويان : مساويين [ب، ا] / للأولين (الثانية) : ناقصة [ا] — 7 مناسبة : مناسب [ا] / الآخرين : الأخير [ا] — 8 مساويان (الأولى) : مساويين [ب] مساوية [ا] / مساويان (الثانية) : مساويين [ب، ا] — 9 جداول : جداولاً [ا] — 11 وإن : فإن [ب، ا] — 12 ذكرنا : ونجد بعدها "يتلوه الجدول" [ا].

Tableau relatif à ce qui résulte de l'égalité de deux grandeurs parmi les six, jointe à l'égalité de deux autres grandeurs et à l'égalité des deux grandeurs restantes

Les deux premières		Les deux médianes		Les deux dernières		Ce qui résulte de cela
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0
A	*B*	*C*	*E*	*D*	*F*	*F E D C*
A	*B*	*C*	*F*	*D*	*E*	0
A	*C*	*B*	*D*	*E*	*F*	0
A	*C*	*B*	*E*	*D*	*F*	*F E D B*
A	*C*	*B*	*F*	*D*	*E*	0
A	*D*	*B*	*C*	*E*	*F*	*D C B A*
A	*D*	*B*	*E*	*C*	*F*	*E D B A*
A	*D*	*B*	*F*	*C*	*E*	*E D C A*
A	*E*	*B*	*C*	*D*	*F*	*F D C B*
A	*E*	*B*	*D*	*C*	*F*	0
A	*E*	*B*	*F*	*C*	*D*	0
A	*F*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F C B A*
A	*F*	*B*	*D*	*C*	*E*	*F E C A*
A	*F*	*B*	*E*	*C*	*D*	*F E B A*

[B-68r] *Troisième chapitre*
Problèmes résolus à l'aide de la composition des rapports

Pour ce qui est du sujet de la composition des rapports et des grandeurs dans lesquelles ils se trouvent, nous avons achevé ce que nous voulions en dire. Mais afin de faciliter l'utilisation de cela à qui le voudrait parmi ceux qui veulent apprendre et que ce que soit pour lui un exercice traitant de choses parmi celles qui sont résolues grâce à cela, j'ai pensé disposer des problèmes dont je montrerai comment ils sont résolus par cette voie.

جداول لما يجب من تساوي قدرين من الستة مع تساوي قدرين آخرين ومع تساوي القدرين الباقيين (+)

الأولان		الأوسطان		الآخران		ما يجب من ذلك
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
ا	ب	جـ	د	هـ	و	ة
ا	ب	جـ	هـ	د	و	جـ د هـ و
ا	ب	جـ	و	د	هـ	ة
ا	جـ	ب	د	هـ	و	ة
ا	جـ	ب	هـ	د	و	ب د هـ و
ا	جـ	ب	و	د	هـ	ة
ا	د	ب	جـ	هـ	و	ا ب جـ د
ا	د	ب	هـ	جـ	و	ا ب د هـ
ا	د	ب	و	جـ	هـ	ا جـ د هـ
ا	هـ	ب	جـ	د	و	ب جـ د و
ا	هـ	ب	د	جـ	و	ة
ا	هـ	ب	و	جـ	د	ة
ا	و	ب	جـ	د	هـ	ا ب جـ و
ا	و	ب	د	جـ	هـ	ا جـ هـ و
ا	و	ب	هـ	جـ	د	ا ب هـ و

/ الباب الثالث ب-٦٨-و

في مسائل مستخرجة من تأليف النسب

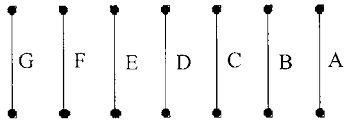
أما أمر تأليف النسب والأقدار التي فيها يكون ذلك، فقد أتينا على ما أردنا ذكره منه. ولكن ليسهل استعمال ذلك على من أراده من المتعلمين بأن يكون له رياضة في أشياء مما يستخرج من ذلك، رأيت أن أضع مسائل أبيّن كيف تستخرج بهذا المسلك.

(+) في السطر الثالث عشر والعمود الرابع : "ر" بدلاً من "د" [ا].

5 أمر : أمرنا [ا] / أتينا : بينا [ا] – 6 ليسهل : لسهل [ب] / ذلك : ناقصة [ا] – 7 يستخرج : كتب "يحتاج" ثم شطبها [ب].

Si l'on a six grandeurs, que le rapport de la première d'entre elles à la deuxième est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième, et que [A-180ʳ] cinq grandeurs parmi elles sont connues, alors la grandeur restante est connue.

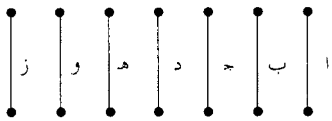
Exemple. Soit six grandeurs A, B, C, D, E et F, le rapport de A à B étant composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Je dis que si cinq grandeurs parmi elles sont connues, alors la grandeur restante est connue.



Démonstration. Posons le rapport de D à G égal au rapport de E à F. Alors le rapport de C à G est composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Or le rapport composé du rapport de C à D et du rapport de E à F est égal au rapport de A à B, donc le rapport de C à G est égal au rapport de A à B. Si les cinq grandeurs connues sont A, B, C, D et E, alors si nous multiplions B par C et que nous divisons ce que l'on a obtenu par A, le quotient est connu, et c'est la grandeur G car les grandeurs A, B, C et G sont proportionnelles. Si nous multiplions G par E et que nous divisons ce que l'on a obtenu par D, le quotient est connu, et c'est F puisque les grandeurs D, G, E et F sont proportionnelles. Donc la grandeur F est connue. Si les grandeurs connues sont A, B, C, D et F, alors la grandeur E est connue car le rapport de B à A est composé du rapport de D à C et du rapport de F à E ; donc quand nous multiplions A par D, que nous divisons ce que l'on a obtenu par B, que nous multiplions le quotient par F, et que nous divisons ce que l'on a obtenu par C, le quotient est connu, et c'est la grandeur E. Si les grandeurs A, B, E et F sont connues et que l'une des deux grandeurs C et D est connue, alors l'exposé sur la grandeur restante des deux est semblable à l'exposé que l'on avait sur les deux grandeurs E et F. Si les grandeurs connues sont A, C, D, E et F, alors la grandeur B est

إذا كانت ستة أقدار وكانت نسبة الأول منها إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس وكانت / خمسة أقدار منها معلومة، فإن ا-١٨٠-و القدر الباقي معلوم.

مثال ذلك: ستة أقدار عليها ا ب جـ د هـ و ونسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. فأقول إنه إن كانت خمسة أقدار منها معلومة، فإن القدر الباقي معلوم.



برهان ذلك: أنا نجعل نسبة د إلى ز كنسبة هـ إلى و. فيكون نسبة جـ إلى ز مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. والنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و هي كنسبة ا إلى ب. فنسبة جـ إلى ز كنسبة ا إلى ب. فإن كانت الأقدار الخمسة المعلومة ا ب جـ د هـ، فإنا إذا ضربنا ب في جـ وقسمنا ما اجتمع على ا، كان ما يخرج من القسمة معلوماً، وهو قدر ز لأن أقدار ا ب جـ ز متناسبة. وإذا ضربنا ز في هـ وقسمنا ما اجتمع على د، كان ما يخرج من القسمة معلوماً وهو و لأن أقدار د ز هـ و متناسبة. فقدر و معلوم. وإن كانت الأقدار المعلومة ا ب جـ د و، فإن قدر هـ يكون معلوماً لأن نسبة ب إلى ا مؤلفة من نسبة د إلى جـ ومن نسبة و إلى هـ؛ فمتى ضربنا ا في د وقسمنا ما اجتمع على ب وضربنا ما خرج من القسمة في و وقسمنا ما اجتمع على جـ، كان ما يخرج من القسمة معلوماً، وهو قدر هـ. وإن كانت أقدار ا ب هـ و معلومة وأحد قدري جـ د معلوماً، فإن القصة في القدر الباقي منهما كالقصة <التي> كانت في قدري هـ و. وإن كانت الأقدار المعلومة ا جـ د هـ و، فإن قدر ب

1-2 الثالث إلى الرابع ومن نسبة: في الهامش مع بيان موضعها [ا] — 4 ستة: نسبة [ا] / ا ب جـ د هـ و: ابجدهو [ب] / ونسبة: نسبة [ا] — 7 برهان ذلك: في الهامش [ا] / هـ إلى: ناقصة [ا] — 9 هي: ناقصة [ب] — 10 ا ب جـ د هـ: ابجده [ب] — 11 ا ب جـ ز: ابجز [ب] ا ب جـ د [ا] — 13 معلوم: معلومة [ا] / وإن: وإذا [ا] / ا ب جـ د و: ابجدو [ب] — 15 ب: د [ا] — 15-16 وضربنا ما خرج من القسمة في و وقسمنا ما اجتمع على جـ: ناقصة [ا] — 16-17 ا ب هـ و: ابهو [ب] ا ب هـ [ا] — 17 جـ د: جد [ب] — 18 هـ و (الأولى): هو [ب] / وإن: فإن [ب، ا] / ا جـ د هـ و: اجدهو [ب] / فإن: فان [ب].

connue car si nous multiplions D par F et que nous divisons ce que l'on a obtenu par E, le quotient est connu, et c'est G car les grandeurs D, G, E et F sont proportionnelles ; et si nous multiplions le quotient, soit G, par A, et que nous divisons ce que l'on a obtenu par C, le quotient est connu, et c'est la grandeur B car les grandeurs A, B, C et G sont proportionnelles. De même, on connaît la grandeur A si les grandeurs connues sont B, C, D, E et F, car le rapport de B à A est composé du rapport de D à C et du rapport de F à E ; donc si nous multiplions C par E, que nous divisons ce que l'on a obtenu par F, que nous multiplions le quotient par B, et que nous divisons ce que l'on a obtenu par D, le quotient est connu, et c'est la grandeur A. Ce qu'il fallait démontrer.

[B-68v] Il apparaît là clairement que si nous voulons séparer d'un rapport connu, comme le rapport de A à B, des rapports connus, autant qu'ils soient, comme le rapport de C à D, cela nous est possible, et le rapport qui reste est alors connu comme était connu le rapport de E à F, et que si nous voulons composer des rapports connus, autant qu'ils soient, les uns avec les autres, comme le rapport de C à D et le rapport de E à F, cela nous est possible, et le rapport composé à partir d'eux est alors connu comme était connu le rapport de A à B. Et si deux grandeurs parmi les six sont égales, qu'il survient de cela que les quatre restantes sont proportionnelles, et que l'une des quatre grandeurs est celle que l'on cherche à connaître, alors c'est le plus facile à connaître car le produit de la première des quatre par la quatrième est égal au produit de la deuxième par la troisième et donc, étant donné que trois d'entre elles sont connues, la quatrième est connue ; or nous avons montré, dans ce qui précède, quelles sont les deux grandeurs dont il résulte de l'égalité que les quatre [A-180v] restantes sont proportionnelles. Afin qu'il soit facile de retenir ce que j'ai dit et d'en prendre connaissance, j'ai établi pour cela ce tableau. Si les grandeurs qui sont dans sa première colonne, la deuxième, la troisième, la quatrième et la cinquième sont connues, alors la grandeur qui est dans la sixième est connue par <le fait> qu'en multipliant la grandeur qui est dans la première colonne par la grandeur qui est dans la deuxième colonne, en divisant ce que l'on a obtenu par la grandeur qui est dans la troisième colonne, en multipliant le quotient par la grandeur qui est dans la quatrième

يكون معلوماً لأن إن ضربنا د في و وقسمنا ما اجتمع على ه، كان ما يخرج من القسمة معلوماً، وهو ز لأن أقدار د ز ه و متناسبة؛ وإذا ضربنا ما خرج من القسمة، وهو ز، في ا، وقسمنا ما اجتمع على جـ، كان ما يخرج من القسمة معلوماً، وهو قدر ب لأن أقدار ا ب جـ ز متناسبة. وكذلك يعلم قدر ا إذا كانت الأقدار المعلومة ب جـ د ه و لأن نسبة ب إلى ا مؤلفة من نسبة د إلى جـ ومن نسبة و إلى ه؛ فإذا ضربنا جـ في ه وقسمنا ما اجتمع على و وضربنا ما خرج من القسمة في ب وقسمنا ما اجتمع على د، كان ما يخرج من القسمة معلوماً، وهو قدر ا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

/ وهنالك استبان أنا إن أردنا أن نفصل من نسبة معلومة، كنسبة ا إلى ب، نسباً ب-٦٨-ظ
معلومة، كم كانت، مثل نسبة جـ إلى د، أمكننا ذلك وصارت النسبة التي تبقى معلومة كما علمت نسبة ه إلى و، وأنا إن أردنا أن نؤلف نسباً معلومة، كم كانت، بعضها مع بعض، كنسبة جـ إلى د وه إلى و، أمكننا ذلك وصارت النسبة المؤلفة منها معلومة كما علمت نسبة ا إلى ب. فإن كان قدران من الستة متساويين، وعرض من ذلك أن يكون الأربعة الباقية متناسبة وكان أحد الأربعة الأقدار هو الذي يطلب علمه، فإن الأسهل أن يعلم لأن ضرب الأول من الأربعة في الرابع مثل ضرب الثاني في الثالث، فإذ كانت ثلاثة منها معلومة، فإن الرابع معلوم؛ وقد بيّنا فيما تقدم، من تساوي أي
قدرين يجب أن يكون الأربعة / الباقية متناسبة. ولكي يسهل حفظ ما قلت والوقوف ا-١٨٠-ظ
عليه، وضعت له هذه الجداول. فإذا كانت الأقدار التي في الجدول الأول منها والثاني والثالث والرابع والخامس معلومة، فإن القدر الذي في الجدول السادس يُعلم بأن يضرب القدر الذي في الجدول الأول في القدر الذي في الجدول الثاني ويقسم ما اجتمع على القدر الذي في الجدول الثالث ويضرب ما خرج من القسمة في القدر

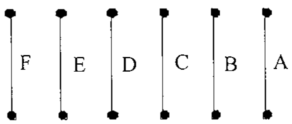
1 لأن : لانا [ا] — 2 معلوماً وهو ز لأن أقدار د ز ه و متناسبة وإذا ضربنا ما خرج من القسمة : ناقصة [ا] / د ز ه و : دزهو [ب] — 3 ز : ا [ا] — 4 ا ب جـ ز : ابجز [ب] — 4-5 ب جـ د ه و : بجدهو [ب] — 5 و (الثانية) : ز [ا] / إلى : للى [ب] / جـ : د [ا] — 6 خرج : يخرج [ا] — 8 إن: ناقصة [ا] — 11 أمكننا : وأمكننا [ا] — 12 الستة : النسبة [ا] — 14 لأن : أن [ب، ا] — 16 ولكي : ولكن [ب، ا] — 19 القدر (الأولى) : قدر [ا] / ويقسم : ونقسم [ب] — 20 في (الثانية) : من [ا].

colonne et en divisant ce que l'on a obtenu par la grandeur qui est dans la cinquième colonne, le quotient est la grandeur qui est dans la sixième colonne.

Tableau par lequel on connaît la sixième des grandeurs mentionnées précédemment si l'on connaît cinq d'entre elles

Les cinq grandeurs connues					La sixième grandeur recherchée
première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième
B	*C*	*A*	*E*	*D*	*F*
A	*D*	*B*	*F*	*C*	*E*
B	*E*	*A*	*C*	*F*	*D*
A	*F*	*B*	*D*	*E*	*C*
D	*F*	*E*	*A*	*C*	*B*
C	*E*	*F*	*B*	*D*	*A*

On peut connaître ce que nous avons mentionné d'une autre façon : le rapport de *A* à *B* est composé du rapport de *C* à *D* et du rapport de *E* à *F*. Or le rapport composé du rapport de *C* à *D* et du rapport de *E* à *F* est égal au rapport du produit de *C* par *E* au produit de *D* par *F*, car le rapport de ceux-ci, de l'un des deux à l'autre, est composé des rapports de leurs côtés. Donc le rapport de *A* à *B* est égal au rapport du produit de *C* par *E* au produit de *D* par *F*. Donc ces quatre sont toujours proportionnelles, c'est-à-dire les grandeurs *A* et *B*, le produit de *C* par *E* et le produit de *D* par *F*. Or si l'on connaît cinq grandeurs parmi les six, alors trois parmi ces quatre choses proportionnelles sont connues, et donc nous connaissons grâce à elles la quatrième. Donc si la quatrième est *A* ou *B*, alors nous sommes parvenus à connaître ce que nous voulions. Et si la quatrième est autre qu'elles deux, alors si nous divisons par le côté connu de ses deux côtés, [B-69^{r}] le quotient est connu et c'est le recherché. Ce qu'il fallait démontrer.



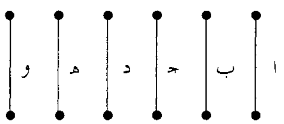
الذي في الجدول الرابع ويقسم ما اجتمع على القدر الذي في الجدول الخامس، فما خرج من القسمة، فهو القدر الذي في الجدول السادس.

جداول يعلم بها القدر السادس من الأقدار التي ذكرت آنفاً إذا علمت خمسة منها (+)

الخمسة الأقدار المعلومة					القدر السادس المطلوب
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس
ب	جـ	ا	هـ	د	و
ا	د	ب	و	جـ	هـ
ب	هـ	ا	جـ	و	د
ا	و	ب	د	هـ	جـ
د	و	هـ	ا	جـ	ب
جـ	هـ	و	ب	د	ا

وقد يعلم ما ذكرنا بوجه آخر، وهو أن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. والنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و هي كنسبة الذي يكون من ضرب جـ في هـ إلى الذي يكون من ضرب د في و، لأن نسبة هذين، أحدهما إلى الآخر، مؤلفة من نسب أضلاعهما. فنسبة ا إلى ب كنسبة الذي يكون من ضرب جـ في هـ إلى الذي يكون من ضرب د في و. فيكون هذه الأربعة أبداً متناسبة، أعني قدري ا ب، والذي يكون من ضرب جـ في هـ، والذي يكون من ضرب د في و.

وإذا علمت خمسة أقدار من الستة، فإن ثلاثة من هذه الأربعة الأشياء المتناسبة تكون معلومة، فنعلم بها الرابع. فإن كان الرابع ا أو ب، فقد علمنا ما أردنا. وإن كان الرابع غيرهما، فإنه إذا قسم على الضلع المعلوم من ضلعيه، كان ما يخرج من / القسمة ب-٦٩-و
معلوماً، وهو المطلوب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



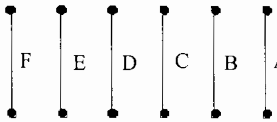
(+) في السطر الأول والعمود الأخير : ينقص "القدر" [ا] – في السطر الرابع والعمود الخامس : "د" بدلاً من "جـ" [ا] – في السطر الخامس والعمود الخامس : "ه" بدلاً من "و" [ا].

6 إلى : التي [ب] / د : جـ [ا] – 9 قدري : قدرين [ا] – 11 أو : و [ا] – 12 إذا : إذ [ا].

Il apparaît là clairement que le produit d'une des grandeurs qui sont dans le premier domaine par une autre grandeur parmi elles, et de ce que l'on a obtenu par la troisième, est égal au produit d'une des grandeurs qui sont dans le deuxième domaine, quelle qu'elle soit, par une autre grandeur parmi elles, et de ce que l'on a obtenu par la troisième. Etant donné [A-181^r] qu'il en est ainsi, on peut connaître par cette méthode également les dix-sept cas mentionnés précédemment.

1) Si l'on a six grandeurs, que le rapport de deux d'entre elles est composé de deux des rapports des grandeurs restantes, et que quatre d'entre elles sont connues, alors les deux grandeurs restantes sont telles que soit le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu, soit le produit de l'une par l'autre est connu.

Exemple. Soit six grandeurs A, B, C, D, E et F, le rapport de deux d'entre elles, de l'une à l'autre, étant composé des rapports des grandeurs restantes, et quatre d'entre elles étant connues, soit A, B, C et D. Je dis que les deux grandeurs E et F sont telles que soit le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu, soit le produit de l'une d'elles par l'autre est connu.

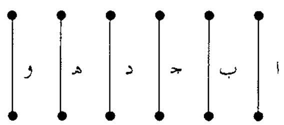


Démonstration. Les deux grandeurs E et F sont issues soit de deux domaines différents, soit d'un même domaine. Si elles sont issues de deux domaines différents, alors le rapport de E à F est composé de deux des rapports des grandeurs A, B, C et D. Donc si nous composons ces deux rapports, l'un avec l'autre, le rapport composé à partir d'eux est connu étant donné qu'ils sont connus. Donc le rapport de E à F est connu. Si les deux grandeurs E et F sont issues d'un même domaine, alors les grandeurs qui sont dans l'autre domaine sont connues. Si l'on multiplie l'une des deux par l'autre et ce que l'on a obtenu par la troisième, le produit est

وهنالك استبان أن الذي يكون من ضرب القدر من الأقدار التي في الحيز الأول في قدر آخر منها وما اجتمع في الثالث مساوٍ للذي يكون من ضرب القدر من الأقدار التي في الحيز الثاني، أي قدر كان، في قدر آخر منها وما اجتمع في الثالث. وإذ كان / ذلك كذلك، فقد يمكن للإنسان أن يعلم السبعة عشر وجهاً التي تقدم ذكرها بهذا ا-١٨١-و
الطريق أيضاً.

<ا.> إذا كانت ستة أقدار وكانت نسبة قدرين منها مؤلفة من نسبتين من نسب الأقدار الباقية، وكانت أربعة أقدار منها معلومة، فإن القدرين الباقيين : إما أن يكون نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، وإما أن يكون ضرب أحدهما في الآخر معلوماً.

مثال ذلك : ستة أقدار، عليها ا ب جـ د هـ و، ونسبة قدرين منها، أحدهما إلى الآخر، مؤلفة من نسب الأقدار الباقية، وأربعة أقدار منها معلومة، وهي ا ب جـ د؛ فأقول : إن مقداري هـ و : إما أن يكون نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، وإما أن يكون ضرب أحدهما في الآخر معلوماً.



برهان ذلك : أن مقداري هـ و إما أن يكونا من حيزين مختلفين وإما من حيز واحد. فإن كانا من حيزين مختلفين، فإن نسبة هـ إلى و مؤلفة من نسبتين من نسب مقادير ا ب جـ د. فإذا ألفنا تينك النسبتين، إحداهما مع الأخرى، كانت النسبة المؤلفة منهما معلومة إذ كانتا معلومتين. فنسبة هـ إلى و معلومة. وإن كان مقدارا هـ و من حيز واحد، فإن المقادير التي في الحيز الآخر تكون معلومة. وإذا ضرب أحدهما في الآخر وما اجتمع في الثالث، كان المجتمع معلوماً، وهو مساوٍ للذي يكون من ضرب

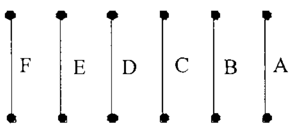
3 كان (الأولى) : مكررة [ب] / وإذ : وإذا [ا] — 4 للإنسان : الإنسان [ب] / بهذا : بهذه [ا] — 6 ستة : نسبة [ا] — 9 ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] ا ب جـ د هـ [ا] / منها : ناقصة [ا] — 10 نسب : نسبة [ا] / جـ د : جد [ب] — 11 هـ و : هو [ب] — 13 هـ و : هو [ب] / يكونا : يكون [ا] — 15 ا ب جـ د : ابجد [ب] — 16 منهما : منها [ب، ا] / هـ إلى و معلومة وإن كان مقدارا : مكررة [ا] / هـ و : هو [ب] — 17 تكون : ناقصة [ا] — 18-1 ضرب هـ : ضربه [ا].

connu, et il est égal au produit de E par F et de ce que l'on a obtenu par la grandeur restante des grandeurs qui sont dans leur domaine. Donc le produit de E par F et de que l'on a obtenu par la grandeur restante des grandeurs qui sont dans leur domaine est connu. Or cette grandeur est connue, donc le produit de E par F est connu. Il a donc été démontré que si quatre grandeurs parmi les six sont connues, alors les deux grandeurs restantes sont telles que soit le rapport de l'une à l'autre est connu, soit le produit de l'une par l'autre est connu. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que l'on ne connaît que le rapport des deux grandeurs restantes, de l'une des deux à l'autre, si elles font partie des grandeurs qui sont dans deux domaines différents, et que si elles sont issues d'un même domaine, on ne connaît que le produit de l'une des deux par l'autre.

2) Si l'on a six grandeurs, que le rapport de la première d'entre elles à [B-69^{v}] la deuxième est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième, que quatre grandeurs parmi elles sont connues, et que les deux grandeurs restantes sont de somme connue, alors chacune des deux est connue.

Exemple. Soit six grandeurs A, B, C, D, E et F, le rapport de A à B étant composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Je dis si quatre grandeurs parmi elles sont connues et que les deux grandeurs restantes sont de somme connue, alors chacune des deux est connue.



Démonstration. Les deux grandeurs restantes, soit sont issues de deux domaines différents comme les deux grandeurs A et B, et alors le rapport de A à B est connu, soit sont issues d'un même domaine comme les deux grandeurs A et D, et alors le produit de A par D est connu. Donc si elles sont [A-181^{v}] comme les deux grandeurs A et B, alors le rapport de A à B est connu et si nous composons[15], le rapport de A plus B à chacune de A et de B est connu. Or elles sont de somme connue, donc chacune d'entre elles est connue. Et si elles sont comme les deux grandeurs A et D, alors le

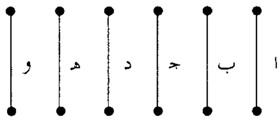
[15] Il s'agit ici de la composition d'un rapport, telle qu'elle est définie dans la définition 14 du livre V des *Éléments*, et non de la composition de plusieurs rapports, notion qui forme le sujet du présent livre de Thābit. Contrairement au français, l'arabe utilise deux verbes différents pour rendre ces deux sens : le verbe *rakkaba* dans le premier cas, comme ici, et le verbe *allafa* dans le second cas, comme dans la plus grande partie de l'ouvrage.

هـ في و وما اجتمع في المقدار الباقي من المقادير التي في حيزهما. فالذي يكون من ضرب هـ في و وما اجتمع في المقدار الباقي من المقادير التي في حيزهما معلوم. وذلك المقدار معلوم، فالمجتمع من ضرب هـ في و معلوم. فقد تبيّن أنه إذا كانت أربعة أقدار من الستة معلومة، فإن القدرين الباقيين إما أن تكون نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة وإما أن يكون ضرب أحدهما في الآخر معلوماً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إنما تعلم نسبة القدرين الباقيين، أحدهما إلى الآخر، إذا كانا من الأقدار التي في حيزين مختلفين، وأنهما إذا كانا من حيز واحد، فإنما يعلم ضرب أحدهما في الآخر.

ب. إذا كانت ستة أقدار وكانت نسبة الأول منها إلى / الثاني مؤلفة من نسبة ب-٦٩-ظ
الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس، وكانت أربعة أقدار منها معلومة، وكان القدران الباقيان إذا جمعا معلومين، فإن كل واحد منهما معلوم.

مثال ذلك : ستة أقدار، عليها ا ب جـ د هـ و، ونسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و؛ فأقول : إنه إن كانت أربعة أقدار منها معلومة وكان القدران الباقيان إذا جمعا معلومين، فإن كل واحد منهما معلوم.



برهان ذلك : أن المقدارين الباقيين : إما أن يكونا من حيزين مختلفين كقدري ا ب، فيكون نسبة ا إلى ب معلومة، وإما أن يكونا من حيز واحد كقدري ا د، فيكون
ضرب ا في د معلوماً. فإن كانا / كقدري ا ب، فإن نسبة ا إلى ب تكون معلومة، ا-١٨١-ظ
وإذا ركبنا، كانت نسبة ا ب مجموعين إلى كل واحد من ا ب معلومة. وهما إذا جمعا معلومان. فكل واحد منهما معلوم. وإن كانا كقدري ا د، فإن ضرب أحدهما في

1 في (الثانية) : من [ا] / المقادير : المقدارين [ا] — 1-2 فالذي يكون (...) حيزهما : ناقصة [ب] — 2 في (الثانية) : من [ا] — 3 تبيّن : بينا [ا] — 4 الباقيين : ناقصة [ا] — 5 معلوماً : معلومة [ا] — 9 ب : في الهامش [ب] ناقصة [ا] وهكذا فيما بعد ولن نشير إلى مثلها — 10 وكانت : وكان [ا] / أقدار : أعداد [ب] — 12 ستة : نسبة [ا] / ا ب جـ د هـ و : ابجد هو [ب] — 16 يكونا : يكون [ا] / د : جـ [ا] — 17 كانا : كان [ا] / ا ب : ا ب جـ، مع "ب" فوق "جـ" [ا] — 19 د : جـ [ا].

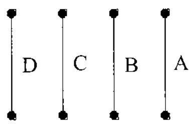
produit de l'une d'entre elles par l'autre est connu. Or elles sont de somme connue, donc chacune d'entre elles est connue. Ce qu'il fallait démontrer.

Donc si quatre grandeurs parmi les six sont connues et que les deux grandeurs restantes sont de somme connue, alors chacune des deux est connue. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si les deux grandeurs que l'on cherche à connaître sont issues de deux domaines différents, qu'elles ne sont pas de somme connue mais que le produit de l'une d'elles par l'autre est connu, alors chacune d'entre elles est connue, et que si elles sont issues d'un même domaine, qu'elles ne sont pas de somme connue mais que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu, alors chacune d'entre elles est connue.

3) Si l'on a deux grandeurs, que le produit de l'une d'elles par l'autre est connu, et que deux autres grandeurs sont telles que leurs deux rapports aux deux premières grandeurs sont connus, alors le produit de l'une des deux par l'autre est connu.

Que les deux premières grandeurs soient A et B, que le produit de A par B soit connu, et que chacun des deux rapports de C à A et de D à B soit connu. Je dis que le produit de C par D est connu.



Démonstration. Le rapport du produit de A par B au produit de C par D est composé du rapport de A à C et du rapport de B à D. Or ces deux rapports sont connus, donc le rapport du produit de A par B au produit de C par D est connu. Or le produit de A par B est connu, le produit de C par D est connu. Ce qu'il fallait démontrer.

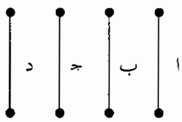
الآخر معلوم. وهما إذا جمعا معلومان. فكل واحد منهما معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإذا كانت أربعة أقدار من الستة معلومة وكان القدران الباقيان إذا جمعا معلومين، فإن كل واحد منهما معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان القدران اللذان يطلب علمهما من حيزين مختلفين، و لم يكونا بمعلومين إذا جمعا، لكن المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر معلوم، فإن كل واحد منهما معلوم، وإن كانا من حيز واحد و لم يكونا بمعلومين إذا جمعا، لكن نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، فإن كل واحد منهما معلوم.

جـ. إذا كان مقداران وكان المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر معلوماً وكان قدران آخران نسبتاهما إلى المقدارين الأولين معلومتين، فإن الذي يكون من ضرب أحدهما في الآخر معلوم.

فليكن المقداران الأولان ا ب وليكن المجتمع من ضرب ا في ب معلوماً وليكن كل واحدة من نسبتي جـ إلى ا ود إلى ب معلومة؛ فأقول: إن الذي يكون من ضرب جـ في د معلوم.

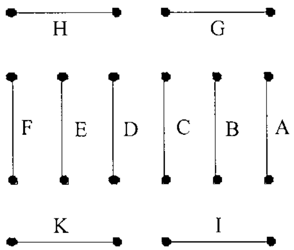


برهان ذلك: أن نسبة الذي يكون من ضرب ا في ب إلى الذي يكون من ضرب جـ في د مؤلفة من نسبة ا إلى جـ ومن نسبة ب إلى د. وهاتان النسبتان معلومتان. فنسبة الذي يكون من ضرب ا في ب إلى الذي يكون من ضرب جـ في د معلومة. والذي يكون من ضرب ا في ب معلوم. فالذي يكون من ضرب جـ في د معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

6 بمعلومين : معلومين [ب] / في : إلى [ا] — 7 واحد (الأولى) : واحدة [ا] / و لم : فلم [ب] — 8 معلوم : معلوماً [ب] — 9 وكان المجتمع : وكان كل واحد المجتمع [ا] / ضرب أحدهما : ضرب واحد أحدهما [ا] — 12 معلوماً : معلوم [ا] — 12-13 وليكن كل واحدة : ولكن كان واحدة [ا] — 13 نسبتي : نسبتين [ا] / جـ : د [ا] — 16 ب إلى د : د إلى ب [ب، ا].

4) Si l'on a six grandeurs, que le rapport de la première d'entre elles à la deuxième est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième, que quatre grandeurs parmi elles sont connues, que deux grandeurs sont telles que leur rapport aux deux grandeurs restantes, chacune à son homologue, est connu, et qu'elles sont [B-70ʳ] de somme connue, alors chacune de ces deux grandeurs restantes est connue.

Soit six grandeurs A, B, C, D, E et F, que le rapport de A à B soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à F, que quatre d'entre elles soient connues, et que deux grandeurs telles que leur rapport aux deux grandeurs restantes, chacune à son homologue, soit connu, soient de somme connue. Je dis que chacune des deux grandeurs restantes parmi les six est connue. [A-182ʳ]

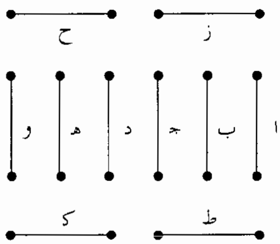


Démonstration. Les deux grandeurs que l'on cherche à connaître sont issues soit de deux domaines différents, soit d'un même domaine. Qu'elles soient d'abord issues de deux domaines différents comme les deux grandeurs A et B, que le rapport de G à A soit connu et le rapport de H à B connu, et que G et H soient de somme connue. Alors le rapport de A à B est connu et le rapport de G à A est connu, donc le rapport de G à B est connu. Or le rapport de B à H est connu, donc le rapport de G à H est connu. Or elles sont de somme connue, donc chacune d'elles est connue. Or leurs rapports à A et à B sont connus, donc les deux grandeurs A et B sont connues. Également, posons les deux grandeurs recherchées issues d'un même domaine comme les deux grandeurs A et D. Que le rapport de I à A soit connu et le rapport de K à D connu, et que I et K soient de somme connue. Alors le produit de A par D est connu. Or le rapport de I à A est connu et le rapport de K à D est connu, donc le produit de I par K est connu[16]. Or elles sont de somme connue, donc chacune d'elles est connue.

[16] D'après la proposition précédente.

د. إذا كانت ستة أقدار وكانت نسبة الأول منها إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس، وكانت أربعة أقدار منها معلومة، وكان قدران نسبتهما إلى القدرين الباقيين، كل واحد إلى نظيره، معلومة وكانا / معلومين ب-٧٠-و إذا جمعا، فإن كل واحد من ذينك القدرين الباقيين معلوم.

فليكن ستة أقدار، عليها ا ب جـ د هـ و، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و، وليكن أربعة منها معلومة، وليكن قدران نسبتهما إلى القدرين الباقيين، كل واحد إلى نظيره معلومة، وليكونا إذا جمعا معلومين؛ فأقول : إن كل واحد من القدرين الباقيين من الستة معلوم. /



برهان ذلك : أن القدرين اللذين يطلب علمهما إما أن يكونا من حيزين مختلفين ا-١٨٢-و وإما من حيز واحد. فليكونا أولاً من حيزين مختلفين كقدري ا ب، وليكن نسبة ز إلى ا معلومة ونسبة ح إلى ب معلومة وليكن ز ح إذا جمعا معلومين. فنسبة ا إلى ب معلومة ونسبة ز إلى ا معلومة. فنسبة ز إلى ب معلومة. ونسبة ب إلى ح معلومة. فنسبة ز إلى ح معلومة. وهما إذا جمعا معلومان. فكل واحد منهما معلوم. ونسبهما إلى ا وإلى ب معلومة. فقدرا ا ب معلومان. وأيضاً فإنا نجعل القدرين المطلوبين من حيز واحد كقدري ا د. وليكن نسبة ط إلى ا معلومة ونسبة ك إلى د معلومة وليكن ط ك إذا جمعا معلومين. فالذي يكون من ضرب ا في د معلوم. ونسبة ط إلى ا معلومة ونسبة ك إلى د معلومة. فالذي يكون من ضرب ط في ك معلوم. وهما إذا جمعا

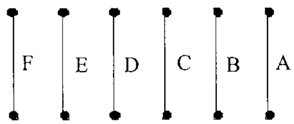
4 معلوم : معلوماً [ب، ا] — 5 ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] — 6 وليكن (الأولى) : ولكن [ا] — 7 كل واحد : من ا كل واحد [ا] — 8 معلوم : معلوماً [ب] — 9 علمهما : عملها [ا] — 10 ز : ا ب [ا] — 11 ح (الثانية) : جـ [ا] — 12 ح : جـ [ا] — 13 فنسبة : ونسبة [ب] / ح : جـ [ا] / معلوم : معلومان [ا] — 15 د (الثانية) : جـ [ا] — 16 ط ك : طك [ب] — 17 د : جـ [ا].

Or leurs rapports à A et D sont connus, donc les deux grandeurs A et D sont connues. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si les deux grandeurs A et H ou G et B sont de somme connue, ou que le résultat de G par H ou par B ou de H par A est connu, alors chacune de A et de B est connue, et que si les deux grandeurs I et D ou A et K sont de somme connue ou que le rapport de I à K ou à D ou le rapport de K à A est connu[17], alors les deux grandeurs A et B sont connues.

5) Si l'on a six grandeurs, que la composition de leurs rapports est selon ce que nous avons mentionné dans les propositions qui précèdent, que quatre grandeurs parmi elles sont connues, et que la différence entre les deux grandeurs restantes est connue, alors chacune des deux grandeurs est connue.

Soit six grandeurs A, B, C, D, E et F telles qu'elles étaient dans la proposition qui précède, que quatre d'entre elles soient connues et que la différence entre les deux grandeurs restantes soit connue. Je dis que chacune des deux est connue.



Démonstration. Les deux grandeurs que l'on cherche à connaître soit sont issues de deux domaines différents, soit sont issues d'un même domaine. Qu'elles soient d'abord issues de deux domaines différents comme les deux grandeurs A et B. Alors le rapport de A à B est connu. Si nous séparons, le rapport de la plus petite des deux à l'excédent de la plus grande sur elle est connu. Or son excédent sur elle est connu, donc chacune des deux grandeurs A et B [A-182^{v}] est connue. Également, posons les deux grandeurs recherchées [B-70^{v}] parmi les grandeurs qui sont issues d'un même domaine comme les deux grandeurs A et D. Alors le produit de A par

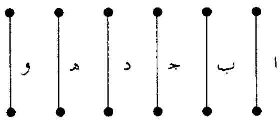
[17] Ces conditions alternatives, que ce soit dans la première partie ou dans la deuxième de la proposition, remplacent la condition G et H de somme connue.

معلومان، فكل واحد منهما معلوم. ونسبهما إلى ا د معلومة، فقدرا ا د معلومان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان قدرا ا ح أو ز ب إذا جمعا معلومين أو كان المجتمع من ز في ح أو في ب أو من ح في ا معلوماً، فإن كل واحد من ا ب معلوم، وأنه إن كان قدرا ط د أو ا ك إذا جمعا معلومين أو كانت نسبة ط إلى ك أو إلى د أو نسبة ك إلى ا معلومة، فإن قدري ا د معلومان.

هـ. إذا كانت ستة أقدار وكان تأليف نسبها على ما ذكرنا في الأشكال التي قبل هذا، وكانت أربعة أقدار منها معلومة وكان فضل ما بين المقدارين الباقيين معلوماً، فإن كل واحد من القدرين معلوم.

فليكن ستة أقدار على مثل ما كانت عليه في الشكل الذي قبل هذا، عليها ا ب جـ د هـ و، وليكن أربعة منها معلومة، وليكن فضل ما بين القدرين الباقيين معلوماً؛ فأقول : إن كل واحد منهما معلوم.



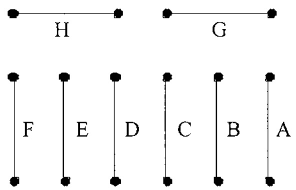
برهان ذلك : أن القدرين اللذين يطلب علمهما : إما أن يكونا من حيزين مختلفين وإما أن يكونا من حيز واحد. فليكونا أولاً من حيزين مختلفين كقدري ا ب. فنسبة ا إلى ب معلومة. وإذا فصلنا، كانت نسبة أصغرهما إلى زيادة الأكبر عليه معلومة. وزيادته عليه معلومة، فكل واحد من قدري ا ب / معلوم. وأيضاً فإنا نجعل ا-١٨٢-ظ
القدرين المطلوبين / من الأقدار التي في حيز واحد كقدري ا د. فالذي يكون من ب-٧٠-ظ

1 معلومان : معلوما [ا] / ونسبهما : ونسبتهما [ا] / د (الثانية) : جـ [ا] — 4 معلوم : معلوماً [ب] — 5 د (الأولى) : جـ [ا] / د (الثانية) : هـ [ب] جـ [ا] — 6 د : جـ [ا] / معلومان : معلومين [ب، ا] — 7-8 قبل هذا : قبلها [ا] — 9 معلوم : معلوماً [ب] — 10-11 ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] — 12 معلوم : معلوماً [ب] — 13 علمهما : عملهما [ا] — 14 وإما أن يكونا من حيز واحد فليكونا أولاً من حيزين مختلفين : في الهامش مع بيان موضعها [ب] — 15 أصغرهما : ناقصة [ا] — 17 د : جـ [ا] / من (الثانية) : ناقصة [ا].

D est connu. Or la différence entre elles est connue, donc chacune d'elles est connue. Ce qu'il fallait démontrer.

6) Si l'on a six grandeurs, que la composition de leurs rapports est selon ce que nous avons mentionné dans les propositions précédentes, que quatre d'entre elles sont connues, et que la différence entre deux grandeurs dont les deux rapports aux deux grandeurs restantes sont connus est connue, alors chacune des ces deux grandeurs restantes est connue.

Que les six grandeurs soient *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F*, que quatre d'entre elles soient connues, que les deux rapports des deux grandeurs *G* et *H* aux deux grandeurs restantes soient connus, et que la différence entre elles deux soit connue. Je dis que chacune de ces deux grandeurs est connue.

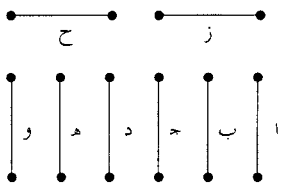


Démonstration. Les deux grandeurs que l'on cherche à connaître sont telles que soit le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu, comme les deux grandeurs *A* et *B*, soit le produit de l'une d'elles par l'autre est connu, comme les deux grandeurs *A* et *D*. Qu'elles soient d'abord comme les deux grandeurs *A* et *B*, et que chacun des deux rapports de *G* à *A* et de *H* à *B* soit connu. Alors le rapport de *A* à *B* est connu et le rapport de *G* à *A* est connu, donc le rapport de *G* à *B* est connu. Or le rapport de *B* à *H* est connu, donc le rapport de *G* à *H* est connu. Or la différence entre elles est connue, donc chacune d'elles est connue. Également, posons les deux grandeurs recherchées comme les deux grandeurs *A* et *D*, et que chacun des deux rapports de *G* à *A* et de *H* à *D* soit connu. Alors le produit de *A* par *D* est connu, le rapport de *G* à *A* est connu et le rapport de *H* à *D* est connu. Donc le produit de *G* par *H* est connu. Or la différence entre elles est connue, donc

ضرب ا في د معلوم. وفضل ما بينهما معلوم، فكل واحد منهما معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

و. إذا كانت ستة مقادير وكان تأليف نسبها على ما ذكرنا في الأشكال المتقدمة، وكانت أربعة منها معلومة، وكان فضل ما بين مقدارين نسبتاهما إلى المقدارين الباقيين معلومتان معلوماً، فإن كل واحد من ذينك القدرين الباقيين معلوم.

فليكن الستة المقادير ا ب جـ د هـ و، وليكن أربعة منها معلومة، وليكن نسبتا مقداري ز ح إلى المقدارين الباقيين معلومتين ، وليكن فضل ما بينهما معلوماً؛ فأقول : إن كل واحد من ذينك المقدارين معلوم.



برهان ذلك : أن المقدارين اللذين يطلب علمهما : إما أن يكون نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، كقدري ا ب، وإما أن يكون المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر معلوماً، كقدري ا د. فليكونا أولاً كقدري ا ب، وليكن كل واحدة من نسبتي ز إلى ا وح إلى ب معلومة. فنسبة ا إلى ب معلومة ونسبة ز إلى ا معلومة. فنسبة ز إلى ب معلومة. ونسبة ب إلى ح معلومة. فنسبة ز إلى ح معلومة. وفضل ما بينهما معلوم. فكل واحد منهما معلوم. وأيضاً فإنا نجعل المقدارين المطلوبين كمقداري ا د، وليكن كل واحدة من نسبتي ز إلى ا وح إلى د معلومة. فالذي يكون من ضرب ا في د معلوم ونسبة ز إلى ا معلومة ونسبة ح إلى د معلومة. فالذي يكون من ضرب ز في ح

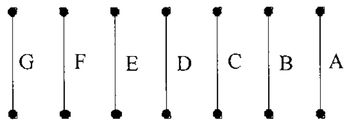
4 نسبتاهما : ونسبتاهما [ب] — 5 معلومتان : ناقصة [ا] / معلوم : معلوماً [ب] — 6 الستة : نسبة [ا] / ا ب جـ د هـ و : ابجدهو [ب] — 7 المقدارين : المقداري [ا] / معلومتين : معلومين [ا] / بينهما معلوماً : بين هما معلوم [ا] — 8-9 معلوم (...) المقدارين : في الهامش [ا] — 8 معلوم : معلوماً [ب] — 9 علمهما : عملهما [ا] — 10-11 ب وإما أن يكون المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر معلوماً كقدري ا : ناقصة [ا] — 11 نسبتي : نسبتين [ا] — 13 معلومة (الأولى) : ناقصة [ب] — 15 نسبتي : نسبتين [ا] / وح : ورلح [ا] — 16 ز (الثانية) : د [ا].

chacune d'elles est connue. Or leurs deux rapports à A et D sont connus, donc les deux grandeurs A et D sont connues. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si la différence entre l'une des deux grandeurs G et H et la grandeur à laquelle on a pris le rapport de l'autre d'entre elles est connue[18], alors les deux grandeurs recherchées sont connues.

7) Si l'on a six grandeurs, que le rapport de la première d'entre elles à la deuxième est composé du rapport de la troisième à la quatrième et du rapport de la cinquième à la sixième, alors le rapport du produit de la première par elle-même au produit de la deuxième par elle-même est composé du rapport du produit de la troisième par elle-même au produit de la quatrième par elle-même et du rapport du produit de la cinquième par elle-même au produit de la sixième par elle-même.

Que les six grandeurs soient A, B, C, D, E et F, et que le rapport de A à B soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Je dis que le rapport du carré de A au carré de B est composé du rapport du produit de C par elle-même au produit de D par elle-même et du rapport du produit de E par [B-71[r]] elle-même au produit de F par elle-même.



Démonstration. Posons le rapport de D à G égal au rapport de E à F. Alors le rapport de A à B est composé du rapport de C à D et du rapport de D à G. Or le rapport composé du rapport de C à D et du rapport de D à G est égal au rapport de C à G, donc le rapport de A à B est égal au rapport de C à G. C'est pourquoi le rapport du produit de A par elle-même au [A-183[r]] produit de B par elle-même est égal au rapport du produit de C par elle-même au produit de G par elle-même. Posons le produit de D par elle-

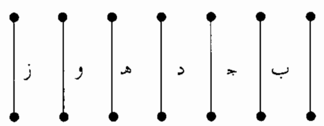
[18] Cette condition alternative, à savoir que G et B (ou D) ou H et A sont de différence connue, remplace la condition G et H de différence connue.

معلوم. وفضل ما بينهما معلوم. فكل واحد منهما معلوم. ونسبتاهما إلى ا د معلومتان. فمقدارا ا د معلومان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان فضل ما بين <واحد من> مقداري ز ح وبين المقدار الذي نسب إليه المقدار الآخر منهما معلوماً، فإن المقدارين المطلوبين معلومان.

ز. إذا كانت ستة مقادير وكانت نسبة الأول منها إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس، فإن نسبة المجتمع من ضرب الأول في نفسه إلى المجتمع من ضرب الثاني في نفسه مؤلفة من نسبة المجتمع من ضرب الثالث في نفسه إلى المجتمع من ضرب الرابع في نفسه ومن نسبة المجتمع من ضرب الخامس في نفسه إلى المجتمع من ضرب السادس في نفسه.

فليكن المقادير الستة ا ب جـ د هـ و، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و؛ فأقول : إن نسبة مربع ا إلى مربع ب مؤلفة من نسبة المجتمع من ضرب جـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب د في نفسه ومن نسبة المجتمع من ضرب هـ في / نفسه إلى المجتمع من ضرب و في نفسه. ب-٧١-و



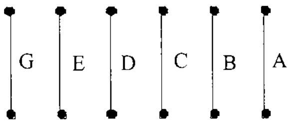
برهان ذلك : أنا نجعل نسبة د إلى ز كنسبة هـ إلى و. فيكون نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ز. والنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ز هي كنسبة جـ إلى ز، فنسبة ا إلى ب كنسبة جـ إلى ز. ولذلك تكون نسبة المجتمع من ضرب ا في نفسه إلى المجتمع / من ضرب ب في نفسه كنسبة المجتمع من ضرب جـ ا-١٨٣-و في نفسه إلى المجتمع من ضرب ز في نفسه. فنجعل المجتمع من ضرب د في نفسه وسطاً

1 وفضل : ففضل [ب] / فكل واحد منهما معلوم : ناقصة [ا] / معلومتان : معلومة ا [ا] — 2 د : جـ [ا] — 6-7 المجتمع من ضرب الأول في نفسه إلى : ناقصة [ا] — 8 ومن نسبة : وإلى [ا] — 10 ا ب جـ د هـ و : ابجد هو [ب] — 12 د : ز [ب] — 15-16 والنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ز : مكررة و"المؤلفة من نسبة (...) جـ إلى ز" في الهامش المرة الثانية [ب] ناقصة [ا] — 16 ولذلك : وكذلك [ا] — 17 ب : ناقصة [ا] / ضرب : ناقصة [ا] — 18 ضرب ز في نفسه : د [ا] / د : جـ [ب].

même moyen entre le produit de C par elle-même et le produit de G par elle-même. Alors le rapport du produit de C par elle-même au produit de G par elle-même est composé du rapport du produit de C par elle-même au produit de D par elle-même et du rapport du produit de D par elle-même au produit de G par elle-même. Par conséquent, le rapport du produit de A par elle-même au produit de B par elle-même est composé du rapport du produit de C par elle-même au produit de D par elle-même et du rapport du produit de D par elle-même au produit de G par elle-même. Or le rapport du produit de D par elle-même au produit de G par elle-même est égal au rapport du produit de E par elle-même au produit de F par elle-même. Donc le rapport du produit de A par elle-même au produit de B par elle-même est composé du rapport du produit de C par elle-même au produit de D par elle-même et du rapport du produit de E par elle-même au produit de F par elle-même. Ce qu'il fallait démontrer.

8) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, et que les rapports des trois grandeurs restantes, de l'une à l'autre, sont connus, alors chacune d'elles est connue.

Que les deux grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à G, et que l'une des grandeurs C, D, E et G soit connue et les rapports des trois grandeurs restantes, de l'une à l'autre, connus. Je dis que chacune d'elles est connue.

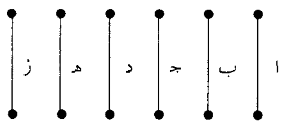


Démonstration. Posons la grandeur connue parmi les quatre grandeurs C. Alors le rapport de A à B est connu et le rapport de E à G est connu. Or si nous séparons du rapport de A à B le rapport de E à G, il reste le rapport

فيما بين المجتمع من ضرب جـ في نفسه والمجتمع من ضرب ز في نفسه. فنسبة المجتمع من ضرب جـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب ز في نفسه مؤلفة من نسبة المجتمع من ضرب جـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب د في نفسه ومن نسبة المجتمع من ضرب د في نفسه إلى المجتمع من ضرب ز في نفسه. فيكون إذاً نسبة المجتمع من ضرب ا في نفسه إلى المجتمع من ضرب ب في نفسه مؤلفة من نسبة المجتمع من ضرب جـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب د في نفسه ومن نسبة المجتمع من ضرب د في نفسه إلى المجتمع من ضرب ز في نفسه. ونسبة المجتمع من ضرب د في نفسه إلى المجتمع من ضرب ز في نفسه كنسبة المجتمع من ضرب هـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب و في نفسه. فنسبة المجتمع من ضرب ا في نفسه إلى المجتمع من ضرب ب في نفسه مؤلفة من نسبة المجتمع من ضرب جـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب د في نفسه ومن نسبة المجتمع من ضرب هـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب و في نفسه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ح. إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر، وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً وكانت نسب الثلاثة الأقدار الباقية، بعضها إلى بعض، معلومة، فإن كل واحد منها معلوم.

فليكن القدران المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى ز، وليكن أحد مقادير جـ د هـ ز معلوماً ونسب المقادير الثلاثة الباقية، بعضها إلى بعض، معلومة؛ فأقول : إن كل واحد منها معلوم.



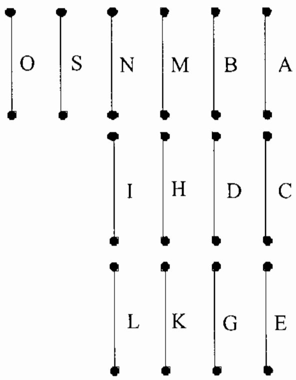
برهان ذلك : أنا نجعل المقدار المعلوم من المقادير الأربعة جـ. فنسبة ا إلى ب معلومة ونسبة هـ إلى ز معلومة. فإذا فصلنا من نسبة ا إلى ب نسبة هـ إلى ز، بقيت

1 والمجتمع : إلى المجتمع [ب] المجتمع [ا] — 1-2 فنسبة المجتمع من ضرب جـ في نفسه إلى المجتمع من ضرب ز في نفسه : ناقصة [ا] — 3 جـ : د [ا] / إلى : ومن نسبة [ا] — 7 ز (الثانية) : و [ا] — 12 ومؤلفة : مؤلفة [ا] — 13 نسب (الأولى) : نسبة [ب] — 14 الثلاثة الأقدار : الأقدار الثلثة [ا] / معلوم : معلوما [ب] — 15 القدران : المقداران [ا] — 16 جـ د هـ ز : جد هز [ب] / ونسب : ونسبة [ب] — 17 معلوم : معلوما [ب].

de C à D, donc le rapport de C à D est connu. Or la grandeur C est connue, donc la grandeur D est connue. Or le rapport de D à chacune des deux grandeurs E et G est connu, donc chacune d'elles deux est connue. De même, [B-71^{v}] on connaît les trois grandeurs restantes si la grandeur connue est autre que la grandeur C. Ce qu'il fallait démontrer.

9) Si un rapport est connu, qu'il est composé de rapports de grandeurs quelconques et qu'il y a d'autres grandeurs dont les rapports à ces grandeurs sont connus, [A-183^{v}] alors le rapport composé des rapports des autres grandeurs est connu.

Que le rapport connu soit le rapport de A à B, qu'il soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à G, et que les rapports des grandeurs H, I, K et L aux grandeurs C, D, E et G, chacune à son homologue, soient connus. Je dis que le rapport composé du rapport de H à I et du rapport de K à L est connu.

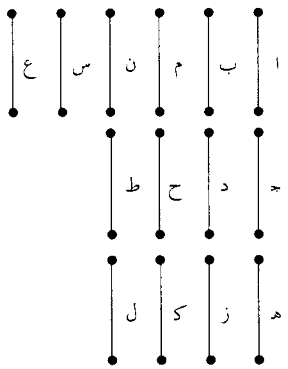


Démonstration. Posons le rapport de B à M égal au rapport de H à C, le rapport de M à N égal au rapport de D à I, le rapport de N à S égal au rapport de K à E et le rapport de S à O égal au rapport de G à L. Alors le rapport de A à O est connu puisqu'il est composé de rapports connus, à savoir le rapport de A à B, le rapport de H à C, le rapport de D à I, le rapport de K à E et le rapport de G à L. Or le rapport de A à B est composé du rapport de C à D et du rapport de E à G. Donc le rapport de A à O est composé du rapport de C à D, du rapport de E à G, du rapport de H à C, du rapport de D à I, du rapport de K à E et du rapport de G à L. Pour ce qui est du rapport

نسبة جـ إلى د. فنسبة جـ إلى د معلومة. ومقدار جـ معلوم، فمقدار د معلوم. ونسبة د إلى كل واحد من مقداري هـ ز معلومة، فكل واحد منهما معلوم. وكذلك / نعلم ب-٧١-ظ المقادير الثلاثة الباقية إذا كان المقدار المعلوم غير مقدار جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ط. إذا كانت نسبة معلومة وكانت مؤلفة من نسب مقادير ما وكانت مقادير أُخر نسبها إلى تلك المقادير معلومة، / فإن النسبة المؤلفة من نسب المقادير الأُخر ا-١٨٣-ظ معلومة.

فليكن النسبة المعلومة نسبة ا إلى ب، ولتكن مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى ز، وليكن نسب مقادير ح ط ك ل إلى مقادير جـ د هـ ز، كل واحد إلى نظيره، معلومة؛ فأقول : إن النسبة المؤلفة من نسبة ح إلى ط ومن نسبة ك إلى ل معلومة.



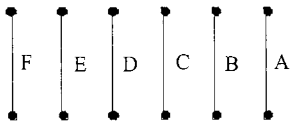
برهان ذلك : أنا نجعل نسبة ب إلى م كنسبة ح إلى جـ ونسبة م إلى ن كنسبة د إلى ط ونسبة ن إلى س كنسبة ك إلى هـ ونسبة س إلى ع كنسبة ز إلى ل. فيكون نسبة ا إلى ع معلومة لأنها مؤلفة من نسب معلومة، وهي نسبة ا إلى ب ونسبة ح إلى جـ ونسبة د إلى ط ونسبة ك إلى هـ ونسبة ز إلى ل. ونسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى ز. فنسبة ا إلى ع مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى ز ومن نسبة ح إلى جـ ومن نسبة د إلى ط ومن نسبة ك إلى هـ ومن نسبة ز إلى ل. وأما

1 د (الثالثة) : جـ [ا] — 2 مقداري : مقدارين [ا] / هـ ز : هز [ب] — 5 أُخر : اخر على، وشطب "على" [ب] / نسبها : نسبتها [ا] — 7 ولتكن : وليكن [ب] — 8 ل : ناقصة [ا] / جـ د هـ ز : جد هز [ب] — 9 النسبة : نسبة [ا] / ح : جـ [ب] — 10 ح إلى جـ : جـ إلى د [ا] / ن : ز [ا] / د : جـ [ا] — 11 ن : ز [ا] / ز : ل [ا] — 12 نسبة (الأولى) : نسب [ب] — 15 د : جـ [ا] / وأما : فاما [ا].

composé du rapport de H à C, du rapport de C à D et du rapport de D à I, il est égal au rapport de H à I ; quant au rapport composé du rapport de K à E, du rapport de E à G et du rapport de G à L, il est égal au rapport de K à L. Donc le rapport de A à O est composé du rapport de H à I et du rapport de K à L. Or nous avons démontré que le rapport de A à O était connu, donc le rapport composé du rapport de H à I et du rapport de K à L est connu. Ce qu'il fallait démontrer.

10) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, et que le rapport de deux grandeurs parmi les trois restantes, de l'une à l'autre, est connu, alors la grandeur restante est soit connue, soit telle que le rapport de son produit par la grandeur connue au produit par elle-même de l'une des deux grandeurs de rapport connu parmi les quatre grandeurs, quelle qu'elle soit, est connu.

Que les deux premières grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé de deux des rapports des grandeurs C, D, E et F, que la grandeur C soit connue, et que le rapport de D à E soit connu. Je dis que la grandeur F est soit connue, soit telle que le rapport de son produit par la grandeur C au produit de D par elle-même, et au produit de E par elle-même, est connu.

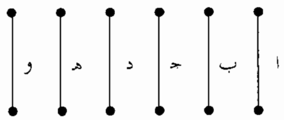


Démonstration. Les deux grandeurs D et E sont soit [B-72r] issues de deux domaines différents, soit [A-184r] issues d'un même domaine. Si elles sont issues de deux domaines différents, alors le rapport de l'une d'elles à l'autre est composé du rapport de A à B et du rapport de l'une des deux grandeurs C et F à l'autre. Or le rapport de A à B est connu, donc le rapport

النسبة المؤلفة من نسبة ح إلى جـ ومن نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ط، فهي كنسبة ح إلى ط، وأما النسبة المؤلفة من نسبة ك إلى هـ ومن نسبة هـ إلى ز ومن نسبة ز إلى ل، فهي كنسبة ك إلى ل. فنسبة ا إلى ع مؤلفة من نسبة ح إلى ط ومن نسبة ك إلى ل. وقد كنا بيّنا أن نسبة ا إلى ع معلومة. فالنسبة المؤلفة من نسبة ح إلى ط ومن نسبة ك إلى ل معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ي. إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر، وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً، وكانت نسبة مقدارين من الثلاثة الباقية، أحدهما إلى الآخر، معلومة، فإن المقدار الباقي إما أن يكون معلوماً، وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه في المقدار المعلوم إلى المجتمع من ضرب واحد من المقدارين المعلومي النسبة من الأربعة المقادير في مثله، أي مقدار كان، معلومة.

فليكن المقداران الأولان المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبتين من نسب مقادير جـ د هـ و، وليكن مقدار جـ معلوماً، وليكن نسبة د إلى هـ معلومة؛ فأقول : إن مقدار و إما أن يكون معلوماً وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه في مقدار جـ إلى المجتمع من ضرب د في <نفسه، وإلى المجتمع من ضرب> هـ <في> نفسه، معلومة.



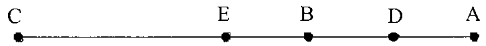
برهان ذلك : أن مقداري د هـ إما أن / يكونا من حيزين مختلفين وإما / أن يكونا ب-٧٢-و
من حيز واحد. فإن كانا من حيزين مختلفين، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر مؤلفة من ا-١٨٤-و
نسبة ا إلى ب ومن نسبة أحد مقداري جـ و إلى الآخر. ونسبة ا إلى ب معلومة،

1 د (الثانية) : جـ [ا] — 2 ح : ع [ا] — 3 ا : ل [ا] / ح : جـ [ا] — 6 من : مكررة [ا] — 10 مقدار : فوق السطر [ا] — 11 معلومة : معلوما [ا] — 13 جـ د هـ و : جدهو [ب] / د (الثانية) : جـ [ا] — 15 د : جـ [ا] — 16 نفسه : نسبة [ب، ا] — 17 د : جـ [ا] / يكونا (الأولى) : يكون [ا] — 18-19 من نسبة : ونسبة [ا].

de l'une des deux grandeurs F et C à l'autre est connu. Or la grandeur C est connue, donc la grandeur F est connue. Si les deux grandeurs D et E sont issues d'un même domaine, alors elles sont issues soit du premier domaine, soit du deuxième domaine. Si elles sont issues du premier domaine, alors le rapport de A à B est composé du rapport de D à l'une des deux grandeurs C et F et du rapport de E à la grandeur restante[19]. Or le rapport de A à B est connu, donc le rapport composé du rapport de D à l'une des deux grandeurs C et F et du rapport de E à l'autre grandeur des deux est connu. Or il est égal au rapport du produit de C par F au produit de D par E[20], donc le rapport du produit de C par F au produit de D par E est connu. Or le rapport du produit de D par E au produit de D par elle-même, et au produit de E par elle-même, est connu. Donc le rapport du produit de C par F au produit de D par elle-même, et au produit de E par elle-même, est connu. De même, on démontre ce que nous avons dit si les deux grandeurs D et E sont issues du deuxième domaine. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là que si la grandeur C n'est pas connue, alors soit le rapport de C à F est connu, soit le rapport de son produit par elle[21] au produit de D par elle-même, et au produit de E par elle-même, est connu[22].

11) Si les deux grandeurs AB et BC sont connues, que l'on partage AB en deux parties selon D, et que le rapport du produit de CB par AD au carré obtenu de BD est connu, alors chacune des deux parties AD et DB est connue.



Démonstration. Posons le rapport de CB à BE égal au rapport connu. Alors le rapport du produit de CB par AD au produit de BE par AD est égal au rapport connu. Donc les rapports du produit de CB par AD au produit de

[19] En réalité, si D et E ne se trouvent pas dans le premier domaine, à savoir le même domaine que A, les rapports composant le rapport de A à B sont les inverses des rapports cités par Thābit. Le rapport composé de ces deux rapports est néanmoins connu puisque le rapport de B sur A est connu comme l'est le rapport de A sur B.

[20] Il est clair que ces deux rapports ne sont pas égaux, mais inverses l'un de l'autre. Avec cette deuxième erreur, qui annule la première, on retrouve ici le cas où D et E se trouvent dans le premier domaine.

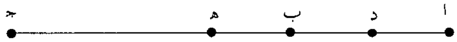
[21] Entendre : le produit de C par F.

[22] Remarquons que, dans le cas où D et E sont dans le même domaine, l'hypothèse « C est connue » n'est pas utilisée dans la démonstration qui précède. On retrouve donc ici la même conclusion pour ce cas.

فنسبة أحد مقداري و جـ إلى الآخر معلومة. ومقدار جـ معلوم. فمقدار و معلوم. وإن كان مقدارا د هـ من حيز واحد، فإنهما إما من الحيز الأول وإما من الحيز الثاني. فإن كانا من الحيز الأول، فإن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة د إلى أحد مقداري جـ و ومن نسبة هـ إلى المقدار الباقي. ونسبة ا إلى ب معلومة. فالنسبة المؤلفة من نسبة د إلى أحد مقداري جـ و ومن نسبة هـ إلى المقدار الآخر منهما معلومة. وهي كنسبة المجتمع من ضرب جـ في و إلى المجتمع من ضرب د في هـ. فنسبة المجتمع من ضرب جـ في و إلى المجتمع من ضرب د في هـ معلومة. ونسبة المجتمع من ضرب د في هـ إلى المجتمع من ضرب د في نفسه، وإلى المجتمع من ضرب هـ في نفسه، معلومة. فنسبة المجتمع من ضرب جـ في و إلى المجتمع من ضرب د في نفسه وإلى المجتمع من ضرب هـ في نفسه، معلومة. وكذلك يتبين ما قلنا إذا كان مقدارا د هـ من الحيز الثاني؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن لم يكن مقدار جـ معلوماً، فإن نسبة جـ إلى و إما أن يكون معلومة، وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه فيه إلى المجتمع من ضرب د في نفسه وإلى المجتمع من ضرب هـ في نفسه معلومة.

يا. إذا كان مقدارا ا ب ب جـ معلومين وقسم ا ب قسمين على د، وكانت نسبة ما يكون من ضرب جـ ب في ا د إلى المربع الذي يكون من ب د معلومة، فإن كل واحد من قسمي ا د د ب معلوم.



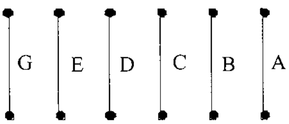
برهان ذلك : أنا نجعل نسبة جـ ب إلى ب هـ مثل النسبة المعلومة. فيكون نسبة المجتمع من ضرب جـ ب في ا د إلى الذي يكون من ضرب ب هـ في ا د مثل النسبة المعلومة. فنسبة الذي يكون من ضرب جـ ب في ا د إلى الذي يكون من ضرب ب هـ

1 فمقدار : ومقدار [ا] — 2 مقدارا : مقدار [ا] — 4 هـ : و [ا] / ونسبة : ومن نسبة [ا] / د : جـ [ا] — 5 جـ : د [ب، ا] — 7 معلومة : في الهامش مع بيان موضعها [ب] / ونسبة : فنسبة [ب] / د (الثانية) : جـ [ب، ا] — 8 د في نفسه وإلى المجتمع من ضرب : ناقصة [ا] — 8-9 من ضرب جـ في و إلى المجتمع : ناقصة [ا] — 10 د : جـ [ا] — 15 مقدارا : مقدار [ا] / وقسم : قسم [ا] / وكانت : فكانت [ب] — 17 ا د د ب : ا هـ جـ ب [ا] / معلوم : معلوما [ب] — 18 جـ ب : جـ هـ [ا] — 19 ا د (الأولى) : ا جـ [ا].

BE par *AD* et au carré obtenu de *BD* sont les mêmes. Donc le produit de *BE* par *AD* est égal au carré obtenu de *BD*. Étant donné qu'il en est ainsi, le rapport de *AD* à *BD* est égal au rapport de *BD* à *BE*. Si nous composons, on a le rapport de *AB* à *BD* égal au rapport de *DE* à *BE*, donc le produit de *AB* par *BE* est égal au produit de *BD* par *DE*. Or *AB* est connue, et *BE* est connue puisque le rapport de *CB* à elle est connu. Donc le produit de *AB* par *BE* est connu. Or nous avons démontré qu'il était égal au produit de *BD* par *DE*, donc le produit de *BD* [B-72^{v}] par *DE* [A-184^{v}] est connu. Or *BE* est connue, donc *DB* est connue. Or *AB* est connue, donc il reste *AD* connue. Ce qu'il fallait démontrer.

12) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, que le rapport de deux grandeurs parmi les trois restantes, de l'une à l'autre, est connu, et que l'une des ces deux grandeurs et la troisième grandeur restante sont de somme connue, alors chacune des trois grandeurs est connue.

Que les deux premières grandeurs de rapport connu soient *A* et *B*, que le rapport de *A* à *B* soit composé de deux des rapports des grandeurs *C*, *D*, *E* et *G*, que l'une des grandeurs *C*, *D*, *E* et *G* soit connue, soit *C*, que le rapport de *D* à *E* soit connu, et que l'une des deux grandeurs *D* et *E* et la grandeur *G* soient de somme connue. Je dis que chacune des grandeurs *D*, *E* et *G* est connue.



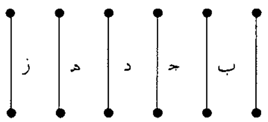
Démonstration. La grandeur *G* est soit connue, soit telle que le rapport de son produit par *C* à chacun des deux carrés de *D* et de *E* est connu[23].

[23] D'après la proposition 10.

في ا د وإلى المربع الذي يكون من ب د واحدة. فالذي يكون من ضرب ب هـ في ا د مساوٍ للمربع الذي يكون من ب د. وإذ كان ذلك كذلك، فإن نسبة ا د إلى ب د كنسبة ب د إلى ب هـ. وإذا ركبنا، كانت نسبة ا ب إلى ب د كنسبة د هـ إلى ب هـ. فالذي يكون من ضرب ا ب في ب هـ مثل الذي يكون من ضرب ب د في د هـ. وا ب معلوم وب هـ معلوم لأن نسبة جـ ب إليه معلومة. فالذي يكون من ضرب ا ب في ب هـ معلوم. وقد بيّنا أنه مثل الذي يكون من ضرب ب د في د هـ. فالذي يكون من ضرب ب د / في د هـ / معلوم. وب هـ معلوم. فَ د ب معلوم. وا ب معلوم. ب-٧٢-ظ
فيبقى ا د معلوماً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ا-١٨٤-ظ

يب. إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً وكانت نسبة مقدارين من الثلاثة الباقية، أحدهما إلى الآخر، معلومة وكان أحد ذينك المقدارين والمقدار الثالث الباقي إذا جمعا معلومين، فإن كل واحد من الثلاثة المقادير معلوم.

فليكن المقداران الأولان المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبتين من نسب مقادير جـ د هـ ز، وليكن أحد مقادير جـ د هـ ز معلوماً، وهو جـ، وليكن نسبة د إلى هـ معلومة، وليكن أحد مقداري د هـ ومقدار ز، إذا جمعا، معلومين؛ فأقول: إن كل واحد من مقادير د هـ ز معلوم.



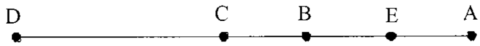
برهان ذلك: أن مقدار ز إما أن يكون معلوماً وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه في جـ إلى كل واحد من مربعي د هـ معلومة. فإن كان مقدار ز معلوماً ومقدارا

2 وإذ : وإذا [ا] — 3 ب د (الثانية) : ر د [ا] / د هـ : جـ هـ [ا] — 5 معلومة : كتب "كنسبة" ثم شطبها [ب] — 6 د هـ : جـ هـ [ا] — 7 د هـ : جـ هـ [ا] — 8 ا د : ا جـ [ا] — 11 معلومة : معلوم [ا] — 12 معلوم : معلوما [ب] — 13 ب (الأولى) : جـ [ا] — 14 جـ د هـ ز (الأولى) : جدهز [ب] جـ د هـ [ا] / جـ د هـ ز (الثانية) : جدهز [ب] جـ د هـ و [ا] — 15 د (الأولى) : هـ [ا] / د (الثانية) : جـ [ا] / ز : ب [ا] — 16 د هـ ز : دهز [ب] جـ هـ ز [ا] / معلوم : معلوما [ب] — 18 معلومة : معلوما [ب] معلوم [ا].

Donc si la grandeur G est connue et si les deux grandeurs D et G ou E et G sont de somme connue, alors l'une des deux grandeurs D et E est connue. Or le rapport de D à E est connu, donc chacune de D et de E est connue. Si le rapport du produit de C par G à chacun des deux carrés de D et de E est connu et si la grandeur C est connue et que la grandeur G plus l'une des deux grandeurs D et E est connue, alors la grandeur G est connue et l'une des deux grandeurs D et E est connue[24]. Or le rapport de D à E est connu, donc chacune des grandeurs D, E et G est connue. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si l'on remplace les grandeurs C, D, E et G par d'autres grandeurs dont les rapports à C, D, E et G sont connus, alors les grandeurs C, D, E et G sont connues puisque le rapport composé des rapports de ces grandeurs est connu.

13) Si l'on a trois grandeurs comme AB, BC et CD, que AB est connue et la différence entre BC et CD également connue, et que le rapport du produit de AB par CD au carré obtenu de BC est connu, alors chacune de BC et de CD est connue.



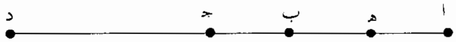
Démonstration. Posons le rapport de AB à BE égal au rapport connu. Alors le rapport du produit de AB par CD au produit de BE par CD est égal au rapport connu. Donc le rapport du produit de AB par CD au produit de BE par CD est égal à son rapport au carré de BC. Donc le produit de BE par CD est égal au carré de BC. S'il en est ainsi, le rapport de BE à BC est égal au rapport de BC à CD. Donc si BC est plus grande que CD, alors si nous convertissons, le rapport de BE [B-73^r] à son excédent sur BC est égal au rapport de BC à son excédent sur CD. Et si CD est plus grande que BC, alors si nous séparons, le rapport de BE [A-185^r] à l'excédent de BC sur elle est égal au rapport de BC à l'excédent de CD sur elle. Dans les deux

[24] D'après la proposition 11.

د ز أو ه ز، إذا جمعا، هما معلومين، فإن أحد مقداري د ه معلوم. ونسبة د إلى ه معلومة. فكل واحد من د ه معلوم. وإن كانت نسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى كل واحد من مربعي د ه معلومة ومقدار جـ معلوم ومقدار ز مع أحد مقداري د ه معلوم، فإن مقدار ز معلوم وأحد مقداري د ه معلوم. ونسبة د إلى ه معلومة. فكل واحد من مقادير د ه ز معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان بدل مقادير جـ د ه ز مقادير أُخر نسبها إليها معلومة، فإن مقادير جـ د ه ز تكون معلومة لأن النسبة المؤلفة من نسب تلك المقادير تكون معلومة.

يج. إذا كانت ثلاثة مقادير مثل ا ب ب جـ جـ د وكان ا ب معلوماً وفضل ما بين ب جـ جـ د أيضاً معلوماً وكانت نسبة ما يكون من ضرب ا ب في جـ د إلى المربع الذي يكون من ب جـ معلومة، فإن كل واحد من ب جـ جـ د معلوم.



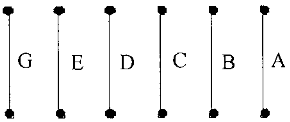
برهان ذلك: أنا نجعل نسبة ا ب إلى ب ه مثل النسبة المعلومة. فيكون نسبة المجتمع من ضرب ا ب في جـ د إلى الذي يكون من ضرب ب ه في جـ د مثل النسبة المعلومة. فيكون نسبة ما يكون من ضرب ا ب في جـ د إلى الذي يكون من ضرب ب ه في جـ د كنسبته إلى مربع ب جـ. فالذي يكون من ضرب ب ه في جـ د مساوٍ لمربع ب جـ. وإذا كان ذلك كذلك، فإن نسبة ب ه إلى ب جـ كنسبة ب جـ إلى جـ د. فإن كان ب جـ أطول من جـ د، فإنا إذا قلبنا، كانت نسبة ب ه / إلى زيادته ب-٧٣-و
على ب جـ كنسبة ب جـ إلى زيادته على جـ د. وإن كان جـ د أطول من ب جـ، فإنا إذا فصلنا، كانت نسبة ب ه / إلى زيادة ب جـ عليه كنسبة ب جـ إلى زيادة جـ د ا-١٨٥-و

1 د (الأولى) : جـ [ا] / أو ه ز : وهز [ب] أو ه [ا] / معلومين : معلومان [ب، ا] — 2 ز : ب [ا] — 3 ز : ناقصة [ا] / د (الثانية) : جـ [ا] — 4 فإن مقدار ز معلوم وأحد مقداري د ه معلوم : ناقصة [ا] — 5 د ه ز : دهز [ب] — 6 جـ د ه ز : جدهز [ب] — 6-7 مقادير أُخر نسبها إليها معلومة فإن مقادير جـ د ه ز : ناقصة [ا] — 7 جـ د ه ز : جدهز [ب] / تلك : ناقصة [ا] — 11 معلوم : معلوما [ب] — 14 فيكون : ويكون [ب، ا] / يكون (الثانية) : مكررة [ا] — 15 كنسبته : كنسبة [ا] / مربع : المربع [ا] / جـ د (الثانية) : جـ ه [ا] — 16 وإذا كان ذلك كذلك فإن نسبة ب ه إلى ب جـ : ناقصة [ا] — 17 قلبنا : أقبلنا [ا] — 18 ب جـ (الثالثة) : د جـ [ا] / فإنا : فان [ا].

cas, ce que l'on obtient du produit de BE par la différence entre BC et CD est égal au produit de la différence entre BE et BC par BC. Mais le produit de BE par la différence entre BC et CD est connu, donc le produit de BC par la différence entre elle et BE est connu. Or BE est connue, donc BC est connue. Or la différence entre elle et CD est connue, donc CD est connue. Ce qu'il fallait démontrer.

14) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, que le rapport de deux grandeurs parmi les trois restantes, de l'une à l'autre, est connu, et que la différence entre l'une des ces deux grandeurs et la troisième grandeur restante est connue, alors chacune des trois grandeurs est connue.

Que les deux premières grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé de deux des rapports des grandeurs C, D, E et G, que l'une des grandeurs C, D, E et G soit connue, soit C, que le rapport de D à E soit connu, et que la différence entre l'une des deux grandeurs D et E et la grandeur G soit connue. Je dis que chacune des grandeurs D, E et G est connue.

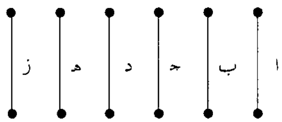


Démonstration. La grandeur G est soit connue, soit telle que le rapport de son produit par C à chacun des deux carrés de D et de E est connu[25]. Donc si la grandeur G est connue et si la différence entre l'une des deux grandeurs D et E et la grandeur G est connue, alors l'une des deux grandeurs D et E est connue. Or le rapport de D à E est connu, donc chacune des grandeurs D, E et G est connue. Si le rapport du produit de C par G à chacun des deux carrés obtenus de D et de E est connu et si la grandeur C est connue et que la différence entre G et l'une des deux grandeurs D et E est connue, alors la grandeur G est connue et l'une des deux grandeurs D et

[25] D'après la proposition 10.

عليه. وعلى الوجهين جميعاً، يكون ما يجتمع من ضرب ب ه في فضل ما بين ب جـ وجـ د مثل الذي يكون من ضرب فضل ما بين ب ه وب جـ في ب جـ. ولكن الذي يكون من ضرب ب ه في فضل ما بين ب جـ وجـ د معلوم. فالذي يكون من ضرب ب جـ في فضل ما بينه وبين ب ه معلوم. وب ه معلوم. فـَ ب جـ معلوم. وفضل ما بينه وبين جـ د معلوم. فـَ جـ د معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

يد. إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً وكانت نسبة مقدارين من الثلاثة الباقية، أحدهما إلى الآخر، معلومة وكان فضل ما بين أحد ذينك المقدارين وبين المقدار الثالث الباقي معلوماً، فإن كل واحد من الثلاثة المقادير معلوم. فليكن المقداران الأولان المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبتين من نسب مقادير جـ د ه ز، وليكن أحد مقادير جـ د ه ز معلوماً، وهو جـ، وليكن نسبة د إلى ه معلومة، وليكن فضل ما بين أحد مقداري د ه وبين مقدار ز معلوماً؛ فأقول : إن كل واحد من مقادير د ه ز معلوم.



برهان ذلك : أن مقدار ز إما أن يكون معلوماً وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه في جـ إلى كل واحد من مربعي د ه معلومة. فإن كان مقدار ز معلوماً وفضل ما بين أحد مقداري د ه وبين مقدار ز هو معلوم، فإن أحد مقداري د ه معلوم. ونسبة د إلى ه معلومة، فكل واحد من مقادير د ه ز معلوم. وإن كانت نسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى كل واحد من المربعين اللذين يكونان من د ومن ه معلومة ومقدار جـ معلوم وفضل ما بين ز وأحد مقداري د ه معلوم، فإن مقدار ز معلوم

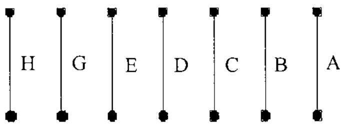
3 في : وفي [ا] — 9 وبين : من [ا] / معلوم : معلوما [ب] — 11 جـ د ه ز (الأولى) : جد هز [ب] / جـ د ه ز (الثانية) : جد هز [ب] — 11-12 وليكن نسبة د إلى ه معلومة : ناقصة [ا] — 12 مقدار : مقداري [ا] — 13 د ه ز : دهز [ب] د ه و [ا] / معلوم : معلوما [ب] — 15 جـ : جا [ب] / ه : ز [ب، ا] — 16 ز هو : زهو [ب] — 17 د ه ز : دهز [ب] — 18 في ز : وز [ا] — 19 وفضل : ففضل [ب] / د : ز [ا] / فإن مقدار : فإن كان مقدار [ب] / ز (الثانية) : زب [ا].

E est connue[26]. Or le rapport de l'une des deux à l'autre est connu, donc chacune des grandeurs D, E et G est connue. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si l'on remplace les grandeurs C, D, E et G par d'autres grandeurs dont les rapports à C, D, E et G sont connus, alors les grandeurs D, E et G sont connues puisque le rapport composé des rapports de ces grandeurs est connu.

15) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, que le rapport de deux grandeurs parmi les trois restantes, de l'une à l'autre, est connu, et que le carré de l'une des ces deux grandeurs [B-73^{v}] et le carré de la troisième grandeur [A-185^{v}] restante sont de somme connue, alors chacune des trois grandeurs est connue.

Que les deux premières grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé de deux des rapports des grandeurs C, D, E et G, que l'une des grandeurs C, D, E et G soit connue, soit la grandeur C, que le rapport de D à E soit connu, et que le carré de G et le carré de l'une des deux grandeurs D et E soit de somme connue. Je dis que chacune des grandeurs D, E et G est connue.



Démonstration. La grandeur G est soit connue, soit telle que le rapport de son produit par C à chacun des deux carrés de D et de E est connu. Donc si la grandeur G est connue et si son carré plus le carré de l'une des deux grandeurs D et E est connu, alors l'une des deux grandeurs D et E est connue. Or le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu, donc chacune des grandeurs D, E et G est connue. Si le rapport du produit de C par G au carré de chacune des deux grandeurs D et E est connu, alors posons le rapport de

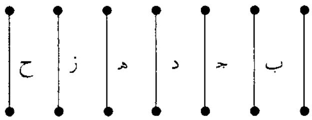
[26] D'après la proposition 13.

وأحد مقداري د ه معلوم. ونسبة أحدهما إلى الآخر معلومة. فكل واحد من مقادير د ه ز معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان بدل مقادير جـ د ه ز مقادير أُخر نسبها إليها معلومة، فإن مقادير د ه ز تكون معلومة لأن النسبة المؤلفة من نسب تلك المقادير تكون معلومة.

يه. إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً وكانت نسبة مقدارين من الثلاثة الباقية، أحدهما إلى الآخر، معلومة وكان مربع أحد ذينك المقدارين / ومربع المقدار الثالث / الباقي، إذا جمعا، معلومين، فإن كل واحد من الثلاثة المقادير ب-٧٣-ظ ا-١٨٥-ظ معلوم.

فليكن المقداران الأولان المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبتين من نسب مقادير جـ د ه ز، وليكن أحد مقادير جـ د ه ز معلوماً، وهو مقدار جـ، وليكن نسبة د إلى ه معلومة، وليكن مربع ز ومربع أحد مقداري د ه، إذا جمعا، معلومين؛ فأقول : إن كل واحد من مقادير د ه ز معلوم.



برهان ذلك : أن مقدار ز إما أن يكون معلوماً وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه في جـ إلى كل واحد من مربعي د ه معلومة. فإن كان مقدار ز معلوماً ومربعه مع مربع أحد مقداري د ه معلوم، فإن أحد مقداري د ه يكون معلوماً. ونسبة أحدهما إلى الآخر معلومة. فكل واحد من مقادير د ه ز معلوم. وإن كانت نسبة المجتمع من ضرب جـ في ز إلى مربع كل واحد من مقداري د ه معلومة، فإنا نجعل

1-2 د ه ز : دهز [ب] — 3 جـ د ه ز : جدهز [ب] — 4 د ه ز : دهز [ب] — 10 معلوم : معلوما [ب] — 12 جـ د ه ز (الأولى) : جد هز [ب] / جـ د ه ز (الثانية) : جدهز [ب] — 13 د (الأولى) : جـ [ا] / ز ومربع : ناقصة [ب] / د (الثانية) : جـ [ا] — 14 د ه ز : دهز [ب] / معلوم : معلوما [ب] معلومة [ا] — 17 د (الأولى) : جـ [ا] / معلوماً : معلوم [ا] — 18 الآخر : الاخرى [ا] / فكل : وكل [ا] / د ه ز : دهز [ب] — 19 د : جـ [ا].

la grandeur C à la grandeur H égal au rapport du produit de C par G au carré qui, si on lui ajoute le carré de G, est connu, et que ce carré soit le carré de D. Alors la grandeur H est connue. Or le rapport de la grandeur C à la grandeur H est égal au rapport du produit de C par G au produit de H par G, et le rapport de C à H est aussi égal au produit de C par G au carré de D. Donc le rapport du produit de C par G au produit de H par G est égal à son rapport au carré de D. Donc le produit de H par G est égal au carré de D. Or le carré de D et le carré de G sont de somme connue, donc le produit de H par G plus le carré de G est connu. Or la grandeur H est connue, donc la grandeur G est connue et son carré est connu. Il reste donc le carré de D connu, donc la grandeur D est connue. Or son rapport à la grandeur E est connu, donc la grandeur E est connue et toutes les grandeurs D, E et G sont connues. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si l'on remplace les grandeurs C, D, E et G par des grandeurs dont les rapports à C, D, E et G sont connus, alors les grandeurs D, E et G sont connues.

16) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, que le rapport de deux grandeurs parmi les trois restantes, de l'une à l'autre, est connu, et que la différence entre le carré de l'une des ces deux grandeurs et le carré de la troisième grandeur restante est connue, alors chacune des trois grandeurs est connue.

Que les deux premières grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé de deux des rapports des grandeurs C, D, E et G, [A-186r] que l'une des grandeurs C, D, E et G soit connue, soit C,

نسبة مقدار جـ إلى مقدار ح كنسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى المربع الذي إذا جمع إليه مربع ز، كان معلوماً، وليكن ذلك المربع مربع د. فيكون مقدار ح معلوماً. ويكون نسبة مقدار جـ إلى مقدار ح كنسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى الذي يكون من ضرب ح في ز، ونسبة جـ إلى ح هي أيضاً كنسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى مربع د. فنسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى الذي يكون من ضرب ح في ز كنسبته إلى مربع د. فالذي يكون من ضرب ح في ز مساوٍ لمربع د. ومربع د ومربع ز، إذا جمعا، معلومان. فالذي يكون من ضرب ح في ز مع مربع ز معلوم. ومقدار ح معلوم، فمقدار ز معلوم ومربعه معلوم. فيبقى مربع د معلوماً. فمقدار د معلوم. ونسبته إلى مقدار هـ معلومة، فمقدار هـ معلوم وجميع مقادير د هـ ز معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

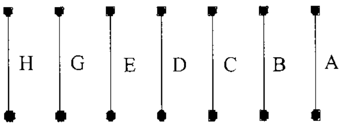
وهنالك استبان أنه إن كان بدل مقادير جـ د هـ ز مقادير نسبها إليها معلومة، فإن مقادير د هـ ز تكون معلومة.

يو. إذا كان مقداران، وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر، وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً، وكانت نسبة مقدارين من الثلاثة الباقية – أحدهما إلى الآخر – معلومة، وكان فضل ما بين مربع أحد ذينك المقدارين وبين مربع المقدار الثالث الباقي معلوماً، فإن كل واحد من الثلاثة المقادير معلوم.

فليكن المقداران الأولان المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبتين من نسب مقادير جـ د هـ ز، / وليكن أحد مقادير جـ د هـ ز معلوماً، وهو ا-١٨٦-و

4 ح (الأولى) : جـ [ا] — 5 مربع د فنسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى : ناقصة [ا] — 7 ح : جـ [ب، ا] — 8 ح : جـ [ب، ا] / فمقدار (الأولى) : مقدار [ب] — 8-9 ومربعه معلوم فيبقى مربع د معلوماً فمقدار د معلوم ونسبته إلى مقدار هـ معلومة فمقدار هـ معلوم : مكررة مع "معلوم" بدلاً من "معلومة" في المرة الأولى والثانية و"معلوم" بدلاً من "معلوماً" في الثانية و"فمقدار د معلوما" بدلاً من "فمقدار د معلوم" في الثانية [ا] — 8 معلوماً : معلوم [ب] — 9 د هـ ز : دهز [ب] — 11 جـ د هـ ز : جد هز [ب] / نسبها : نسبتها [ا] — 12 د هـ ز : دهز [ب] — 17 معلوم : معلوما [ب] — 19 جـ د هـ ز (الأولى) : جدهز [ب] / جـ د هـ ز (الثانية) : جدهز [ب].

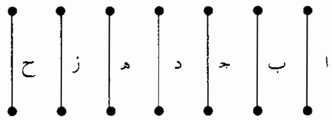
que le rapport de D à E soit connu, et que la différence entre le carré de G et le carré de l'une des deux grandeurs D et E soit connue. Je dis que chacune des grandeurs D, E et G est connue.



Démonstration. La grandeur G est soit connue, soit telle que le rapport de son produit par C à chacun des deux carrés de D et de E est connu. Donc si la grandeur G est connue et si la différence entre le carré de G et le carré de l'une des deux grandeurs D et E est connu, alors l'une des deux grandeurs D et E est [B-74^r] connue. Or le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu, donc chacune des grandeurs D, E et G est connue. Si le rapport du produit de C par G au carré de chacune des deux grandeurs D et E est connu, alors posons le rapport de la grandeur C à la grandeur H égal au rapport du produit de C par G au carré dont la différence avec le carré de G est connue, et que ce carré soit le carré de D. Alors la grandeur H est connue et nous démontrons, comme nous l'avons démontré dans la proposition qui précède, que le produit de H par G est égal au carré de D. Or la différence entre le carré de D et le carré de G est connue, donc la différence entre le produit de H par G et le carré de G est connue, et elle est égale au produit de G par sa différence avec H. Or la grandeur H est connue, donc la grandeur G est connue. Or la différence entre son carré et le carré de D est connue, donc le carré de D est connu et la grandeur D est connue. Or son rapport à la grandeur E est connu, donc la grandeur E est connue et toutes les grandeurs D, E et G sont connues. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si l'on remplace les grandeurs C, D, E et G par des grandeurs dont les rapports à C, D, E et G sont connus, alors les grandeurs D, E et G sont connues.

مقدار جـ، وليكن نسبة د إلى هـ معلومة، وليكن فضل ما بين مربع ز ومربع أحد مقداري د هـ معلوماً؛ فأقول : إن كل واحد من مقادير د هـ ز معلوم.

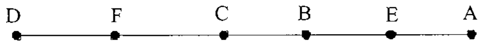


برهان ذلك : أن مقدار ز إما أن يكون معلوماً وإما أن يكون نسبة المجتمع من ضربه في جـ إلى كل واحد من مربعي د هـ معلومة. فإن كان مقدار ز معلوماً وفضل ما بين مربع ز ومربع أحد مقداري د هـ معلوماً، فإن أحد مقداري د هـ يكون / معلوماً. ب-٧٤-و ونسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، فكل واحد من مقادير د هـ ز معلوم. وإن كانت نسبة المجتمع من ضرب جـ في ز إلى مربع كل واحد من مقداري د هـ معلومة، فإنا نجعل نسبة مقدار جـ إلى مقدار ح كنسبة الذي يكون من ضرب جـ في ز إلى المربع الذي فضل ما بينه وبين مربع ز معلوم، وليكن ذلك المربع مربع د. فيكون مقدار ح معلوماً، ونبيّن كما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا، أن الذي يكون من ضرب ح في ز مساوٍ لمربع د. وفضل ما بين مربع د ومربع ز معلوم، ففضل ما بين المجتمع من ضرب ح في ز وبين مربع ز معلوم، وهو مساوٍ للذي يكون من ضرب ز في فضل ما بينه وبين ح. ومقدار ح معلوم، فمقدار ز معلوم. وفضل ما بين مربعه ومربع د معلوم، فمربع د معلوم ومقدار د معلوم. ونسبته إلى مقدار هـ معلومة، فمقدار هـ معلوم وجميع مقادير د هـ ز معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان بدل مقادير جـ د هـ ز مقادير نسبها إليها معلومة، فإن مقادير د هـ ز تكون معلومة.

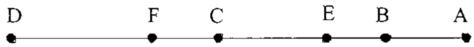
1 د : جـ [ا] / وليكن (الثانية) : فليكن [ب] – 2 د هـ ز : دهز [ب] / معلوم : معلوما [ب] – 3 يكون معلوماً وإما أن : ناقصة [ا] – 5 معلوماً (الأولى) : معلوم [ا] – 6 فكل : وكل [ب، ا] / د هـ ز : دهز [ب] د هـ و [ا] – 8 جـ (الأولى) : د [ا] – 9 ز : ب [ا] – 12 ح : جـ [ب، ا] / ز (الثانية) : د [ب، ا] – 13 ح (الأولى) : جـ [ب، ا] / ح (الثانية) : جـ [ب، ا] – 15 د هـ ز : دهز [ب] د هـ ب [ا] / معلومة : معلوم [ا] – 16 جـ د هـ ز : دهز [ب] د هـ ز [ا] – 17 د هـ ز : دهز [ب].

17) Si les grandeurs AB, BC et CD sont connues et que le rapport du produit de AE par CD au produit de BE par EC est connu, alors chacune de AE et de BE est connue[27].



Démonstration. Posons le rapport de DC à CF égal au rapport connu. Alors CF est connue et le rapport du produit de DC par AE au produit de FC par AE est égal au rapport du produit de DC par AE au produit de BE par EC. Donc le produit de AE par FC est égal au produit de BE par EC. Donc le rapport de AE à BE est égal au rapport de EC à CF. Si nous composons, le rapport de AB à BE sera égal au rapport de EF à CF. Donc le produit de AB par CF est égal au produit de BE par EF. Or le produit de AB par CF est connu, donc le produit de BE par EF est connu. Or BF est connue, donc BE est connue[28]. Or AB est connue, donc il reste AE connue. Ce qu'il fallait démontrer.

18) [A-186^{v}] Si les grandeurs AB, BC et CD sont connues, et que le rapport du produit de AE par CD au produit de BE par EC est connu, alors chacune de BE et de EC est connue[29].



Démonstration. Posons le rapport de DC à CF égal au rapport connu et démontrons, comme nous l'avons démontré dans la proposition qui précède, que le rapport de AE à BE est égal au rapport de EC à CF. Si nous séparons, on a le rapport de AB à BE égal au rapport de la différence entre EC et CF à CF[30]. Donc le produit de AB par CF est égal au produit de BE par la différence entre EC et CF. Mais BE plus la différence entre EC et CF est connue[31], donc BE est connue et il reste EC connue. Ce qu'il fallait démontrer.

[27] Le point E est ici entre A et B. On peut alors démontrer que, quels que soient CD et le rapport connu, le point E existe.

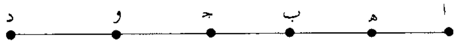
[28] Thābit utilise le fait que si la somme et le produit de deux grandeurs sont connues, les deux grandeurs sont connues.

[29] Les conditions sont les mêmes que précédemment, sauf pour le point E, qui doit être entre B et C. On peut démontrer alors que, pour que le point E existe, il faut que le rapport connu soit plus grand que le rapport de CD à $(AB + AC - 2AG)$, où G est le point tel que AG soit la moyenne géométrique de AB et AC ; dans ce cas, il y a deux solutions pour E : l'une entre B et G, l'autre entre G et C.

[30] En réalité, cette différence doit être $EC - CF$, ce qui implique que EC soit plus grande que CF, et donc BC plus grande que CF. La condition BC plus grande que CF est nécessaire mais cependant non suffisante pour rendre compte du diorisme explicité dans la note précédente.

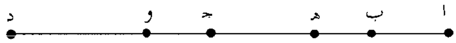
[31] Il s'agit de $BC - CF$.

يز. إذا كانت مقادير ا ب ب جـ جـ د معلومة، وكانت نسبة ما يكون من ضرب ا هـ في جـ د إلى ما يكون من ضرب ب هـ في هـ جـ معلومة، فإن كل واحد من ا هـ ب هـ معلوم.



برهان ذلك : أنا نجعل نسبة د جـ إلى جـ و مثل النسبة المعلومة. فيكون جـ و معلوماً ويكون نسبة الذي يكون من ضرب د جـ في ا هـ إلى الذي يكون من ضرب و جـ في ا هـ كنسبة ما يكون من ضرب د جـ في ا هـ إلى الذي يكون من ضرب ب هـ في هـ جـ. فالذي يكون من ضرب ا هـ في و جـ مثل الذي يكون من ضرب ب هـ في هـ جـ، فنسبة ا هـ إلى ب هـ كنسبة هـ جـ إلى جـ و. وإذا ركبنا، صارت نسبة ا ب إلى ب هـ كنسبة هـ و إلى جـ و. فالذي يكون من ضرب ا ب في جـ و مثل الذي يكون من ضرب ب هـ في هـ و. والذي يكون من ضرب ا ب في جـ و معلوم. فالذي يكون من ضرب ب هـ في هـ و معلوم، وب و معلوم، فَ ب هـ معلوم. وا ب معلوم، فيبقى ا هـ معلوماً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

<يح>. / إذا كانت مقادير ا ب ب جـ جـ د معلومة وكانت نسبة ما يكون من ١-١٨٦-ظ
ضرب ا هـ في جـ د إلى الذي يكون من ضرب ب هـ في هـ جـ معلومة، فإن كل واحد من ب هـ هـ جـ معلوم.

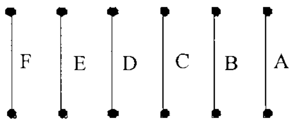


برهان ذلك : أنا نجعل نسبة د جـ إلى جـ و مثل النسبة المعلومة، ونبيّن كما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا، أن نسبة ا هـ إلى ب هـ كنسبة هـ جـ إلى جـ و. وإذا فصلنا، كانت نسبة ا ب إلى ب هـ كنسبة فضل ما بين هـ جـ وبين جـ و إلى جـ و. فالذي يكون من ضرب ا ب في جـ و مثل الذي يكون من ضرب ب هـ في فضل ما بين هـ جـ

6 و جـ : و د [ا] — 7 و جـ : و د [ا] — 8 ب هـ : ا ب [ا] — 9 جـ و (الأولى) : و جـ [ا] / فالذي : مثل الذي [ا] — 10-11 فالذي يكون من ضرب ب هـ في هـ و معلوم : ناقصة [ا] — 12 معلوماً : معلوم [ب، ا] — 15 معلوم : معلوما [ب] — 16 جـ و : د و [ا] / النسبة المعلومة : النسبة أنا نجعل المعلومة [ا] — 17 ا هـ : ا ب [ب، ا] / جـ و : د و [ا] — 18 وبين جـ و : وجـ و [ا] — 19 ا ب في جـ و مثل الذي يكون من ضرب : ناقصة [ا].

19) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de [B-74[v]] quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue, que deux autres grandeurs parmi les quatre sont de somme connue et que la différence entre l'une des deux et la grandeur restante parmi elles est connue, alors chacune des trois grandeurs restantes parmi les quatre est connue.

Que les deux grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à F, que l'une des grandeurs C, D, E et F soit connue, comme la grandeur C, que deux autres grandeurs parmi les grandeurs D, E et F soient de somme connue, comme les deux grandeurs D et E, et que la différence entre l'une des deux et la grandeur restante, soit la grandeur F, soit connue. Je dis que chacune des grandeurs D, E et F est connue.



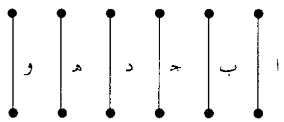
Démonstration. Le rapport de A à B est connu, et il est composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Donc le rapport composé du rapport de C à D et du rapport de E à F est connu. Or il est égal au rapport du produit de C par E au produit de D par F, donc le rapport du produit de C par E au produit de D par F est connu. Or la grandeur C est connue, la différence entre l'une des grandeurs D et E et la grandeur F est connue, et les deux grandeurs D et E sont de somme connue. Donc chacune des grandeurs D, E et F est connue[32]. Ce qu'il fallait démontrer.

[32] D'après les propositions 17 et 18. En effet, si c'est la différence entre E et F qui est connue, on construit les points A, B, C, D comme sur la figure de la proposition 17, de façon à ce que CD soit égale à la grandeur C, AE à la grandeur D, BE à la plus petite des deux grandeurs E et F, et EC à la plus grande (si les grandeurs C, D, E et F ne sont pas des droites, on se ramène à des droites dont les rapports sont égaux aux rapports de ces grandeurs entre elles). Alors le fait que la différence entre les grandeurs E et F est connue donne BC connue, et le fait que la somme des grandeurs D et E est connue donne soit AB connue, soit AC connue. Les grandeurs AB, BC et CD sont donc connues. En appliquant la proposition 17, on a donc AE, BE et CE connues, et les grandeurs D, E et F sont donc connues. Si c'est la différence entre D et F qui est connue, on construit les points A, B, C, D comme sur la figure de la proposition 18, de façon à ce que CD soit égale à la grandeur C, AE à la grandeur D, EC à la grandeur E et EB à la grandeur F. Alors le fait que la différence entre les grandeurs D et F est connue donne soit BC connue si la grandeur F est plus grande que la grandeur D soit AB connue dans le cas contraire, et le fait que la somme des grandeurs D et E est connue donne AC connue. Les grandeurs AB, BC et CD sont donc toutes connues. En appliquant la proposition 18, on a donc AE, BE et CE connues, et les grandeurs D, E et F sont donc connues.

وبين جـ و. ولكن ب هـ مع فضل ما بين هـ جـ وبين جـ و معلوم، فَ ب هـ معلوم ويبقى هـ جـ معلوماً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

يط. إذا كان مقداران، وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب / أربعة مقادير أُخر، وكان واحد من الأربعة المقادير معلوماً، وكان ب-٧٤-ظ مقداران آخران من الأربعة – إذا جمعا – معلومين وفضل ما بين أحدهما وبين المقدار الباقي منها معلوماً، فإن كل واحد من المقادير الثلاثة الباقية من الأربعة معلوم.

فليكن المقداران المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و، وليكن أحد مقادير جـ د هـ و معلوماً، كمقدار جـ، وليكن مقداران آخران من مقادير د هـ و – إذا جمعا – معلومين، كمقداري د هـ، وليكن فضل ما بين أحدهما وبين المقدار الباقي، وهو مقدار و، معلوماً؛ فأقول : إن كل واحد من مقادير د هـ و معلوم.



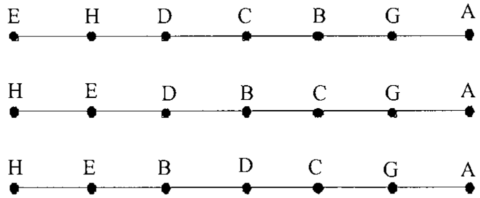
برهان ذلك : أن نسبة ا إلى ب معلومة، وهي مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. فالنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و معلومة. وهي كنسبة المجتمع من ضرب جـ في هـ إلى المجتمع من ضرب د في و. فنسبة المجتمع من ضرب جـ في هـ إلى المجتمع من ضرب د في و معلومة. ومقدار جـ معلوم، وفضل ما بين أحد مقداري د هـ وبين مقدار و معلوم، ومقدارا د هـ، إذا جمعا، معلومان. فكل واحد من مقادير د هـ و معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان بدل مقادير جـ د هـ و مقادير لها إليها نسبة معلومة أو مقادير لها إلى بعضها نسبة معلومة مع بعض الباقية، فإن مقادير د هـ و معلومة؛

1 معلوم (الأولى) : معلومة [ب] — 4 معلوماً : معلوم [ب] — 6 المقادير الثلاثة : المقادير الثلاثة المقادير [ا] — 8 جـ د هـ و : جد هو [ب] / كمقدار : لمقدار [ب] — 9 د هـ و : دهو [ب] / د (الثانية) : جـ [ا] — 11 د هـ و : دهو [ب] — 12 وهي : وهو [ب] — 14 المجتمع من ضرب جـ في هـ إلى : ناقصة [ا] — 15 معلومة : معلوم [ب، ا] — 16 ومقدارا : ومقدار [ب] — 17 د هـ و : دهو [ب] — 18 جـ د هـ و : جدهو [ب] / مقادير (الثانية) : ومقادير [ا] — 19 د هـ و : دهو [ب].

Il apparaît là clairement que si à la place des grandeurs C, D, E et F il y a des grandeurs qui ont avec elles un rapport connu ou des grandeurs dont certaines ont avec certaines restantes un rapport connu, alors les grandeurs D, E et F sont connues. Il en est de même si à la place des grandeurs C, D, E et F il y a leurs produits par elles-mêmes, puisque si l'on compose également leurs rapports, on a un rapport égal au rapport du produit de A par elle-même au produit de B par elle-même. Il est clair également, de par ce que nous avons dit, que si deux des grandeurs D, E et F sont de somme connue et que l'une de ces grandeurs et la troisième grandeur restante sont de somme connue, alors chacune d'elles est connue [A-187^{r}] puisque la différence entre deux d'entre elles est dès lors connue.

20) Si les grandeurs AB, BC et CD sont connues, qu'on leur ajoute la grandeur DE, et que le rapport du produit de AB par BE au produit de CE par ED est connu, alors chacune de AE, BE, CE et DE est connue.

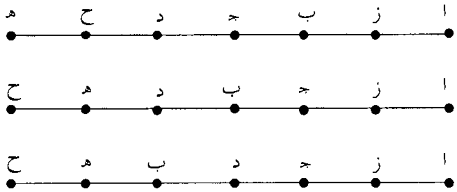


Démonstration. Posons le rapport de AB à BG égal au rapport connu. Alors le rapport du produit de AB par BE au produit de BG par BE est égal au rapport connu. Or on avait le rapport du produit de AB par BE au produit de CE par ED égal au rapport connu, donc le produit de BE par BG est égal au produit de CE par ED. Donc le rapport de BE à EC est égal au rapport de ED à BG. Posons DH égal à BG. Alors le rapport de BE à EC est égal au rapport de ED à DH. C'est pourquoi le rapport de EC à CB est égal au rapport de DH à EH[33]. Donc le produit de EC par EH est égal [B-75^{r}] au

[33] On a ici deux cas de figure principaux. Si l'on a en premier lieu $DE > DH$, on a également $BE > CE$ et on peut toujours placer les points A, B, C, D, H, E dans cet ordre, comme sur la première figure ; le nouveau rapport s'obtient alors par séparation puis inversion. Si l'on a $DE < DH$, alors $BE < EC$ et le nouveau rapport s'obtient par contre par inversion puis séparation ; mais l'emplacement des points les uns par rapport aux autres peut différer selon les grandeurs données AB, BC et CD et la grandeur inconnue DE : si $AB > BC$ et $CD > BC$, on peut toujours placer les points A, C, B, D, E, H dans cet ordre, comme sur la deuxième figure ; si $AB > BC$ et $CD < BC$, alors on place les points A, C, D, B dans cet ordre, B étant soit entre D et E comme sur la troisième figure, soit entre E et H, soit à gauche de H (mais ces deux derniers sous-cas, non représentés ici, ne correspondent pas à l'utilisation qui sera faite de cette proposition dans la proposition suivante) ; enfin, les cas où $AB < BC$ ne sont pas représentés, et conduiraient à placer différemment le point A, sans qu'il y ait d'incidence sur la démonstration ; quant au point G, dont on aurait pu se passer en posant directement le rapport de AB à DH égal au rapport connu, son emplacement est tout à fait indifférent et pourrait même être en dehors de la droite.

وكذلك إن كان بدل مقادير جـ د هـ و ما يجتمع من ضربها في أنفسها، لأن نسبها أيضاً إذا ألفت، كانت كنسبة المجتمع من ضرب ا في نفسه إلى المجتمع من ضرب ب في نفسه. وقد تبيّن أيضاً مما قلنا : إنه إن كان مقداران من مقادير د هـ و، إذا جمعا، معلومين، وكان أحد ذينك المقدارين والمقدار الثالث الباقي، إذا جمعا، معلومين، فإن كل واحد منها معلوم / لأن فضل ما بين مقدارين منها يكون عند ذلك معلوماً. ا-١٨٧-و

كـ. إذا كانت مقادير ا ب ب جـ جـ د معلومة، وزيد عليها مقدار د هـ، وكانت نسبة المجتمع من ضرب ا ب في ب هـ إلى الذي يكون من ضرب جـ هـ في هـ د معلومة، فإن كل واحد من ا هـ ب هـ جـ هـ د هـ معلوم.



برهان ذلك : أنا نجعل نسبة ا ب إلى ب ز كالنسبة المعلومة. فيكون نسبة المجتمع من ضرب ا ب في ب هـ إلى المجتمع من ضرب ب ز في ب هـ كالنسبة المعلومة. وقد كانت نسبة المجتمع من ضرب ا ب في ب هـ إلى المجتمع من ضرب جـ هـ في هـ د كالنسبة المعلومة. فالذي يكون من ضرب ب هـ في ب ز مثل الذي يكون من ضرب جـ هـ في هـ د. فنسبة ب هـ إلى هـ جـ كنسبة هـ د إلى ب ز. ونجعل د ح مثل ب ز، فيكون نسبة ب هـ إلى هـ جـ كنسبة هـ د إلى د ح، ولذلك، يكون نسبة هـ جـ إلى جـ ب كنسبة د ح إلى هـ ح. فالذي يكون من ضرب هـ جـ في هـ ح مساوٍ / للذي ب-٧٥-و يكون من ضرب جـ ب في د ح. والذي يكون من ضرب جـ ب في د ح معلوم. فالذي يكون من ضرب هـ جـ في هـ ح معلوم. ومقدار جـ ح معلوم لأنه مساوٍ لمقداري

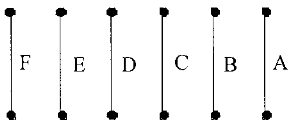
1 جـ د هـ و : جدهو [ب] — 2 المجتمع من ضرب ا في نفسه إلى : ناقصة [ا] — 3 د هـ و : دهو [ب] جـ هـ و [ا] — 6 د هـ : جـ هـ [ا] / وكانت : فكانت [ب] — 8 د هـ : د [ا] / معلوم : معلوما [ب] — 9 كالنسبة : كل كنسبة [ا] — 11 جـ هـ : د هـ [ا] — 12 ب ز : هـ ز [ب، ا] — 13 ب هـ : د هـ [ا] / د ح : ز ح [ا] — 16 د ح (الثانية) : د جـ [ا].

produit de CB par DH. Or le produit de CB par DH est connu, donc le produit de EC par EH est connu. Or la grandeur CH est connue puisqu'elle est égale à <la somme des> deux grandeurs CD et DH, donc la grandeur EH est connue[34], donc les grandeurs AE, BE, CE et DE sont connues. Ce qu'il fallait démontrer.

La position des deux points A et G peut différer sans que la démonstration ne diffère alors à cause de cela[35].

21) Si l'on a deux grandeurs, que le rapport de l'une d'elles à l'autre est connu et composé de deux des rapports de quatre autres grandeurs, que l'une des quatre grandeurs est connue et que la différence entre chacune des trois grandeurs restantes et son associée est connue, alors chacune d'elles est connue.

Que les deux grandeurs de rapport connu soient A et B, que le rapport de A à B soit composé du rapport de C à D et du rapport de E à F, que l'une des grandeurs C, D, E et F soit connue, comme la grandeur C, et que la différence entre les grandeurs D, E et F soit connue[36]. Je dis que chacune des grandeurs D, E et F est connue.



Démonstration. Le rapport de A à B est connu, et il est composé du rapport de C à D et du rapport de E à F. Donc le rapport composé du rapport de C à D et du rapport de E à F est connu. Or il est égal au rapport du produit de C par E au produit de D par F, donc le rapport du produit de C par E au produit [A-187^{v}] de D par F est connu. Or la grandeur C est connue et la différence entre les grandeurs D, E et F est connue, donc chacune d'elles est connue[37]. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît là clairement que si à la place des grandeurs C, D, E et F on a des grandeurs dont les rapports à elles sont connus, alors elles sont connues. Il en est de même si à leur place on a leurs produits par elles-mêmes.

[34] En effet, CH est soit la différence entre EH et EC si $ED > DH$, soit la somme de EH et EC dans le cas contraire. Mais on ne sait pas a priori dans quel cas on se trouve.

[35] Voir note précédente.

[36] Il faut entendre ici les trois différences deux à deux de ces trois grandeurs.

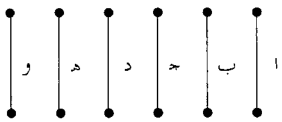
[37] D'après la proposition 20, en posant un point E et en définissant, à droite de E, le point B tel que BE soit égale à la grandeur D, le point C tel que CE soit égale à la plus grande des grandeurs E et F, le point D tel que DE soit égale à la plus petite, et enfin le point A tel que AB soit égale à la grandeur C. Alors, dans tous les cas, AB est connue puisque la grandeur C est connue, BC est connue comme différence des grandeurs D et E ou F, et CD est connue comme différence des grandeurs E et F.

جـ د د ح، فمقدار هـ ح معلوم. فمقادير ا هـ ب هـ جـ هـ د هـ معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ونقطتا ا ز قد يختلف مواضعهما إلا أن البرهان لا يختلف بسبب ذلك.

كا. إذا كان مقداران، وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ومؤلفة من نسبتين من نسب أربعة مقادير أُخر، وكان أحد الأربعة المقادير معلوماً، وفضل ما بين كل واحد من الثلاثة المقادير الباقية وبين صاحبه معلوماً، فإن كل واحد منها معلوم.

فليكن المقداران المعلوما النسبة ا ب، وليكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و، وليكن أحد مقادير جـ د هـ و معلوماً، كمقدار جـ، وليكن فضل ما بين مقادير د هـ و معلوماً؛ فأقول : إن كل واحد من مقادير د هـ و معلوم.

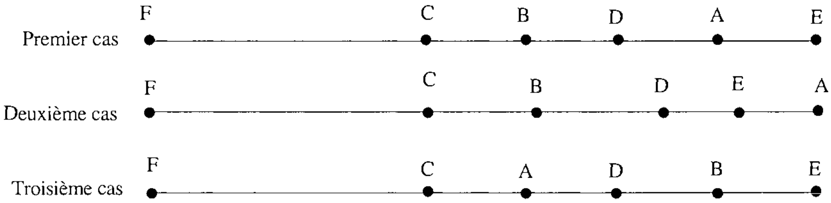


برهان ذلك : أن نسبة ا إلى ب معلومة، وهي مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و. فالنسبة المؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة هـ إلى و معلومة. وهي كنسبة المجتمع من ضرب جـ في هـ إلى المجتمع من ضرب د في و. فنسبة المجتمع من ضرب جـ في هـ إلى المجتمع / من ضرب د في و معلومة. ومقدار جـ معلوم، وفضل ما بين مقادير ا-١٨٧-ظ
د هـ و معلوم. فكل واحد منها معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كان بدل مقادير جـ د هـ و مقادير نسبها إليها معلومة، فإنها تكون معلومة. وكذلك إن كان بدلها ما يجتمع من ضربها في أنفسها.

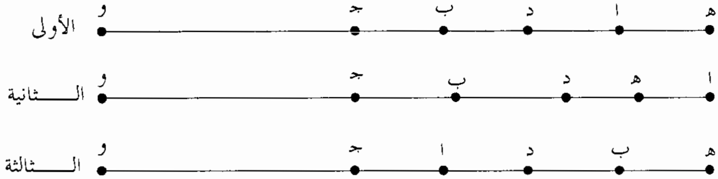
1 ا هـ ب هـ جـ هـ د هـ : ا ب ب هـ هـ جـ [ا] — 3 ونقطتا ا ز قد يختلف مواضعهما إلا أن البرهان لا يختلف بسبب ذلك : ناقصة [ب] / إلا أن : الان [ا] — 8 جـ د هـ و : جدهو [ب] / كمقدار : كقدرى [ا] — 9 د هـ و (الأولى) : دهو [ب] ده [ا] / إن كل واحد : إن نسبة ا كل واحد [ا] / د هـ و (الثانية) : دهو [ب] جـ هـ [ا] — 12 د في و : و في د [ا] — 12-13 فنسبة المجتمع من ضرب جـ في هـ إلى المجتمع من ضرب د في و : مكررة مع د بدلاً من جـ [ا] — 14 د هـ و : دهو [ب] / معلوم : ناقصة [ا] — 15 جـ د هـ و : جدهو [ب] — 16 أنفسها : أنفسامها [ا].

22) Si les deux grandeurs *AB* et *BC* ou les deux grandeurs *AB* et *AC* sont connues, que l'on partage *AB* selon *D*, et que le rapport du produit de *CD* par *DB* au produit de *AD* par elle-même est connu, alors chacune de *AD*, de *DB* et de *DC* est connue.



Démonstration. Posons le rapport de *ED* à *DA* égal au rapport connu. Alors le rapport du produit de *CD* par *DB* au produit de *AD* par elle-même est égal au rapport de *ED* à *DA*. Or le rapport de *ED* à *DA* est égal au rapport du produit de *ED* par *DA* au produit de *AD* par elle-même, donc le produit de *CD* par *DB* est égal au produit de *ED* par *DA*. Posons *CF* égale à *AB*, et posons le produit de *FD* par *DA* commun. Alors le produit de *CD* par *DB* plus le produit de *FD* par *DA* est égal au produit de *FD* par *DA* plus le produit de *ED* par *DA*. Mais le produit de *FD* par *DA* plus le produit de *ED* par *DA* est égal au produit de *EF* par *DA*, donc le produit de *CD* par *DB* plus le produit de *FD* par *DA* est égal au produit de *EF* par *DA*. [B-75^{v}] Mais le produit de *CD* par *DB* plus le produit de *FD* par *DA* est égal au produit de *CD* par *DB* plus le produit de *CD* par *DA* et le produit de *AB* par *DA*, puisque *AB* est égale à *CF*. Or le produit de *CD* par *DB* plus le produit de *CD* par *DA* est égal au produit de *CD* par *AB*, donc le produit de *EF* par

كب. إذا كان مقدارا ا ب ب جـ أو مقدارا ا ب ا جـ معلومين، وقسم ا ب على د، وكانت نسبة المجتمع من ضرب جـ د في د ب إلى المجتمع من ضرب ا د في نفسه معلومة، فإن كل واحد من ا د د ب د جـ معلوم.



برهان ذلك : أنا نجعل نسبة هـ د إلى د ا مثل النسبة المعلومة، فيكون نسبة المجتمع من ضرب جـ د في د ب إلى المجتمع من ضرب ا د في نفسه كنسبة هـ د إلى د ا. ونسبة هـ د إلى د ا كنسبة المجتمع من ضرب هـ د في د ا إلى الذي يكون من ضرب ا د في نفسه. فالذي يكون من ضرب جـ د في د ب مساوٍ للذي يكون من ضرب هـ د في د ا. فنجعل جـ و مثل ا ب ونجعل المجتمع من ضرب و د في د ا مشتركاً. فيكون المجتمع من ضرب جـ د في د ب مع المجتمع من ضرب و د في د ا مساوياً للذي يكون من ضرب و د في د ا مع الذي يكون من ضرب هـ د في د ا. ولكن المجتمع من ضرب و د في د ا مع المجتمع من ضرب هـ د في د ا مساوٍ للذي يكون من ضرب هـ و في د ا. فالذي يكون من ضرب جـ د في د ب مع المجتمع من ضرب و د في د ا مساوٍ للمجتمع من ضرب هـ و في د ا. / ولكن المجتمع من ضرب جـ د في د ب مع المجتمع ب-٧٥-ظ من ضرب و د في د ا مساوٍ للمجتمع من ضرب جـ د في د ب مع الذي يكون من ضرب جـ د في د ا ومن ضرب ا ب في د ا، لأن ا ب مثل جـ و. والذي يكون من ضرب جـ د في د ب مع الذي يكون من ضرب جـ د في د ا مساوٍ للذي يكون من ضرب جـ د في ا ب. فالذي يكون من ضرب هـ و في د ا مساوٍ للذي يكون من

1 أو مقدارا ا ب ا جـ : ومقدارا ا ب جـ [ا] – 2 د : جـ [ا] / جـ د : جـ ا [ب] ا جـ [ا] / في د ب إلى المجتمع من ضرب ا د : ناقصة [ا] – 3 ا د : ا ر [ا] / د جـ : د ح [ب] – 5 ضرب (الثانية) : ناقصة [ا] – 6 إلى (الثانية) : ناقصة [ا] – 7 ا د : ا جـ [ا] – 8 د ا (الأولى) : جـ ا [ا] / و د في د ا : و جـ في جـ ا [ا] – 10 و د في د ا : و جـ في جـ ا [ا] / هـ د في د ا ولكن المجتمع : و جـ إلى جـ ا مع الذي يكون [ا] – 15 جـ و : د و [ا] – 16-17 د ا مساوٍ للذي يكون من ضرب جـ د في : ناقصة [ب].

DA est égal au produit de CD par AB plus le produit de AB par DA. Dans les première et deuxième figures[38], le produit de CD par AB plus le produit de AB par DA est égal au produit de CA par AB, donc le produit de EF par DA est égal au produit de CA par AB. Or le produit de CA par AB est connu, donc le produit de EF par DA est connu. Or le rapport de EA à AD est connu[39], et il est égal au rapport du produit de EF par EA au produit de EF par DA. Donc le rapport du produit de EF par EA au produit de EF par AD est connu. Or le produit de EF par AD est connu, [A-188^r] donc le produit de EF par EA est connu. Or la grandeur AF est connue, donc chacune des grandeurs AD, DC et DB est connue. Pour la troisième figure[40], nous avons démontré que le produit de EF par DA est égal au produit de CD par AB plus le produit de AB par AD. Or cela est égal au produit de la somme de CD et de AD par AB, donc le produit de EF par DA est égal au produit de la somme de CD et de AD par AB[41].

Ce qui a été trouvé sous la plume d'Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra le sabéen sur ce sujet est achevé.

[38] Ces deux figures correspondent à AB et BC connues, ou à AB et AC connues avec $AC > AB$. La première figure correspond alors à $DE > DA$, la deuxième à $DE < DA$.

[39] Par séparation du rapport connu de ED à DA dans la première figure, par séparation du rapport inverse dans la deuxième.

[40] La troisième figure correspond à la donnée de AB et de AC, avec $AC < AB$.

[41] Le texte dont nous disposons s'arrête avant la fin de la démonstration, la suite suggérant en outre que la source du copiste a pu être incomplète. On peut néanmoins résoudre le cas de la troisième figure de la façon suivante : on a démontré que $ED \cdot DA = CD \cdot DB$, ce qui donne, en ajoutant $CD \cdot DA$ de part et d'autre, $EC \cdot DA = CD \cdot AB$; or on a ici $CD = AC + DA$; donc $EC \cdot DA = AC \cdot AB + DA \cdot AB$; donc $DA \cdot (EC - AB) = AC \cdot AB$; donc le produit $DA.(EC - AB)$ est connu ; or le rapport de EA à DA est connu puisque le rapport de ED à DA est connu, donc le produit $EA \cdot (EC - AB)$ est connu ; or $EA - (EC - AB) = AB - AC$; EA et $(EC - AB)$ sont donc de produit et de différence connus ; ils sont donc connus.

Cette proposition devait probablement être pensée pour servir de lemme à la proposition suivante : si deux grandeurs sont de rapport connu, que ce rapport est composé de deux des rapports de trois autres grandeurs de sorte que la grandeur répétée soit dans le même domaine, et que les différences deux à deux entre ces trois grandeurs sont connues, alors ces trois grandeurs sont connues (voir Annexe).

ضرب جـ د في ا ب مع الذي يكون من ضرب ا ب في د ا. فأما الصورة الأولى والثانية، فإن منهما الذي يكون من ضرب جـ د في ا ب مع الذي يكون من ضرب ا ب في د ا مساوٍ للذي يكون من ضرب جـ ا في ا ب. فالذي يكون من ضرب هـ و في د ا مساوٍ للذي <يكون> من ضرب جـ ا في ا ب. والذي يكون من ضرب جـ ا في ا ب معلوم، فالذي يكون من ضرب هـ و في د ا معلوم. ونسبة هـ ا إلى ا د معلومة، وهي كنسبة المجتمع من ضرب هـ و في هـ ا إلى المجتمع من ضرب هـ و في د ا. فنسبة المجتمع من ضرب هـ و في هـ ا إلى المجتمع من ضرب هـ و في ا د معلومة. والمجتمع من ضرب هـ و في ا د معلوم، / فالمجتمع من ضرب هـ و في هـ ا معلوم. ا-١٨٨-و
ومقدار ا و معلوم، فكل واحد من مقادير ا د د جـ د ب معلوم. وأما في الصورة الثالثة، فقد بيّنا أن الذي يكون من ضرب هـ و في د ا مساوٍ للذي يكون من ضرب جـ د في ا ب مع الذي يكون من ضرب ا ب في ا د. وذلك مساوٍ للذي يكون من ضرب جـ د وا د مجموعين في ا ب. فالذي يكون من ضرب هـ و في د ا مساوٍ للذي يكون من ضرب جـ د وا د مجموعين في ا ب.

تم ما وجد بخط أبي الحسن ثابت بن قرة الصابئ في هذا المعنى.

2 منهما : منها [ا] / جـ د : جـ د ا [ا] – 3 د ا : جـ ا [ا] – 4 جـ ا في ا ب : جـ في ب [ا] – 4-5 جـ ا في ا ب معلوم فالذي يكون من ضرب : ناقصة [ا] – 7 هـ ا : هـ هـ [ب] – 9-10 في الصورة الثالثة فقد بيّنا أن الذي يكون من ضرب هـ و : مكررة [ب] – 10 يكون من ضرب هـ و في د ا مساوٍ للذي : ناقصة [ا] – 12 فالذي : والذي [ب، ا] – 14 وجد : وجدنا [ا] / الصابئ : الحراني [ا] / في هذا المعنى : ناقصة [ا].

LA TRADUCTION LATINE DU LIVRE DE THĀBIT IBN QURRA SUR LA FIGURE SECTEUR

Eberhard KNOBLOCH

INTRODUCTION

1. *La préhistoire*

Le traité grec des *Sphériques* de Ménélaüs est perdu. Cependant, des traductions arabes, hébraïques et latines de cette œuvre nous ont été conservées ; elles ont été énumérées par Max Krause en 1936[1]. Les traductions arabes d'al-Māhānī et d'al-Harawī sont décrites par Hélène Bellosta[2].

Les trois traductions latines ont été élaborées par Gérard de Crémone (1134-1187) à partir de l'arabe, par Francesco Maurolico (1494-1575) à partir de l'arabe et de l'hébreu[3] et par Edmond Halley (1656-1742) à partir de l'arabe et de l'hébreu[4].

Krause a publié la révision arabe due à Abū Naṣr Manṣūr ibn ʿAlī ibn ʿIrāq (achevée en 1007) en même temps que la traduction allemande. Grâce

[1] Max Krause, *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. ʿAlī b. ʿIrāq mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern*, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Philosophisch-historische Klasse Folge 3, Nr. 17. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1936.

[2] Hélène Bellosta, « Le traité de Thābit ibn Qurra sur la figure secteur », *supra*, p. 337.

[3] Francesco Maurolico (éd.), *Theodosii sphaericorum elementorum libri III. Ex traditione Maurolyci Messanensis Mathematici. Menelai Sphaericorum lib. III. Ex traditione eiusdem. Maurolyci sphaericorum lib. II. Autolyci de sphaera quae movetur liber. Theodosii de habitationibus. Euclidis Phaenomena. Brevissime demonstrata. Demonstratio et praxis trium tabellarum scilicet Sinus recti, Foecundae, et Beneficae ad Sphaeralia triangula pertinentium. Compendium mathematicae mira brevitate ex clarissimis Authoribus. Maurolyci de sphaera sermo*, Messina, Petrus Spira, 1558.

[4] Menelaus, *Sphaericorum libri III quos olim, collatis Mss. Hebraeis et Arabicis Typis exprimendos curavit Vir Cl.*, ed. Halleius Praefationem addidit G. Costard, Oxford, Sumptibus Academicis, 1758 ; Arthur von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 1. Teil 1900, 2. Teil 1903, Leipzig, Teubner (réédition Niederwalluf, M. Sändig, 1971), I, p. 14.

à Maurolico et Halley, nous savons que Ménélaüs s'est employé à travailler sur le théorème transversal de la trigonométrie plane et sphérique, c'est-à-dire de la « règle des six quantités » au début du troisième livre. Plus tard, son nom fut donné à ce théorème.

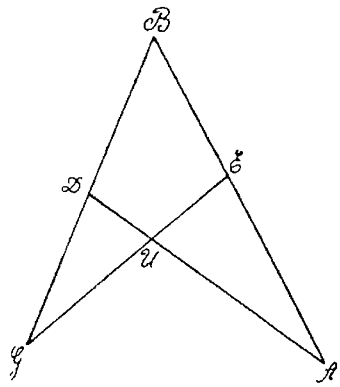


Fig. 1

Deux affirmations peuvent être déduites de la figure plane :

Proposition 1 : $AE : EB = (AU : UD)*(DG : GB)$ (mode de diérèse).

Proposition 2 : $AB : BE = (AD : DU)*(UG : GE)$ (mode de synthèse).

Les propositions peuvent être appliquées à la trigonométrie sphérique (« cda » veut dire « corde du double de l'arc ») :

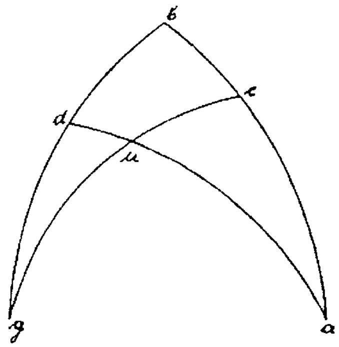


Fig. 2

Théorème 1 : cda *ae* : cda *eb* = (cda *au* : cda *ud*)*(cda *dg* : cda *gb*) (mode de diérèse).

Théorème 2 : cda *ab* : cda *be* = (cda *ad* : cda *du*)*(cda *ug* : cda *gc*) (mode de synthèse).

En ce qui concerne la dernière équation, Halley dit[5] : « Hoc autem Theorema omisit Menelaus » (Mais Ménélaüs a omis ce théorème). Ménélaüs a démontré le théorème 1 en s'appuyant sur les deux propositions mentionnées plus haut et sur les deux propositions suivantes :

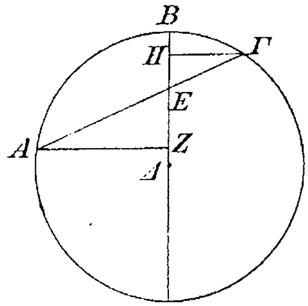


Fig. 3

Proposition 3 : cda AB : cda $B\Gamma = AE : E\Gamma$.

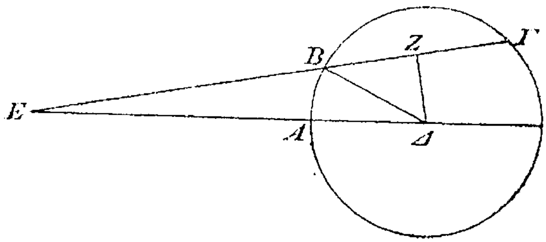


Fig. 4

Proposition 4 : cda ΓA : cda $AB = \Gamma E : EB$.

Dans son *Almageste*, Ptolémée a repris ces considérations de Ménélaüs sans révéler sa source (*Almageste* I.13). Contrairement à Ménélaüs, il est vrai qu'il a mentionné l'un et l'autre théorème (ecthèse et diérèse). Mais il n'a démontré que le premier de la même manière que Ménélaüs, en s'appuyant sur les quatre propositions. Il les a intitulées « propositions qui doivent précéder la démonstration sphérique ». Thābit les appellera « quatuor antecedentia », les quatre propositions antécédentes (voir *infra*). Il a ajouté en effet qu'il fallait démontrer le deuxième théorème exactement de la même manière que le premier en utilisant le cas correspondant de la figure plane.

[5] Menelaus, *Sphaericorum libri III*, p. 85.

2. Le *Traité sur la figure secteur* de Thābit

La gloire mathématique de Thābit ibn Qurra dans le monde latin était basée sur sa *Risāla fī al-shakl al-qaṭṭā'*, son *Traité sur la figure secteur*[6]. Grâce à l'intérêt que ce traité éveilla parmi les savants européens, il fut traduit au moins trois fois en latin : par Gérard de Crémone[7] et par deux auteurs inconnus. Lorch a appelé ces deux autres traductions la « Grecising translation » et la « 'Inter universas' translation »[8] et les a publiées sans les traduire[9].

Lorsqu'en 1558 Francesco Maurolico publia sa collection de traductions latines de textes grecs sur les mathématiques, il y inclut les *Sphériques* de Ménélaüs et ajouta un *Supplementum Tebitii.* Ce supplément est un abrégé du traité de Thābit qui comprend les dix-huit modes de l'équation qui représente une formulation du théorème transversal[10]

3. *La structure du traité*

3.1. La partie introductive (§ 1-3)

Manifestement, le traité consiste en trois parties. Je les nommerai « la partie introductive », « la partie démonstrative » et « la partie combinatoire ».

[6] Fuat Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. IV : *Mathematik. Bis ca. 430 H.*, Leiden, E. J. Brill, 1974, p. 268 ; Boris H. Rosenfeld & Ashot T. Grigorian, « Thābit ibn Qurra », *Dictionary of Scientific Biography*, 13, 1976, p. 288-295.

[7] Axel Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore)*, Mit Bemerkungen von Heinrich Suter, Herausgegeben und ergänzt durch Untersuchungen über die Entwicklung der muslimischen sphärischen Trigonometrie von H. Bürger und K. Kohl, Erlangen, Max Mencke, 1924. L'édition critique d'Axel Björnbo de la traduction latine par Gérard n'est pas complète et encore moins sa traduction allemande

[8] *Thābit ibn Qurra*, *On the Sector-Figure and Related Texts*, edited with Translation and Commentary by Richard Lorch, Frankfurt/Main, Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe-University, 2001, p. 30.

[9] *Ibid.*, p. 124-153.

[10] Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, p. 47 ; Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore)*, p. 33 ; Sabine Koelblen, « Un exercice de combinatoire : Les relations issues de la figure sécante de Ptolémée, ou les règles des six quantités en proportion », *Sciences et techniques en perspective*, 26, 1993, p. 1-21, chapitres I et IVb).

Le traité est écrit sous la forme d'une lettre ouverte. La partie introductive s'adresse à quelqu'un avec lequel Thābit avait discuté de la figure secteur. Appelons-le « l'interlocuteur ». Cette partie résume ou même répète les problèmes et les questions de cette discussion, à savoir :

(1) L'importance fondamentale de la figure pour l'astronomie.

(2) Les précédents auteurs et les contemporains qui se sont occupés de cette figure et la manière dont ils l'ont fait : Ptolémée et une autre personne dont l'identité reste peu claire. De toute façon, personne n'a discuté complètement de la figure ou n'a donné des preuves complètes des théorèmes en question. Cela s'applique à Ménélaüs et à Ptolémée.

(3) Les deux modes de dièrèse et de synthèse du théorème que Ptolémée a voulu démontrer. Thābit met en évidence qu'il y a beaucoup d'autres modes, abstraction faite de ces deux modes, conformément à d'autres modes de compositions des raisons en question.

(4) Les réquisits d'une démonstration complète.

Un des collègues de Thābit l'avait prié d'expliquer comment ces modes doivent être démontrés. Thābit donna une explication orale sans la mettre par écrit. Ce collègue parfois appelé « élève[11] » n'est pas l'interlocuteur parce que Thābit s'adresse de nouveau à son interlocuteur un peu plus tard. Appelons ce collègue « l'élève ».

L'élève savait qu'il fallait distinguer trois cas ou configurations selon le mode de dièrèse et vingt-sept cas selon le mode de synthèse. En fin de compte, trente cas doivent être considérés dont seulement seize peuvent se produire et doivent être démontrés. Ptolémée n'a démontré qu'un seul cas selon le mode de dièrèse.

(5) Les différentes méthodes de démonstration. Thābit appelle la méthode consistant à considérer les trente configurations la « méthode » de Ptolémée. Thābit avait expliqué à l'interlocuteur qu'il y avait d'autres méthodes et façons communes comprenant les configurations en peu de mots.

(6) Les questions auxquelles répond Thābit

L'interlocuteur avait posé trois questions sur lesquelles Thābit maintenant se penche :

1) Quelle démonstration l'élève avait-il faite?

2) Cette démonstration était-elle l'une de celles que Thābit lui-même avait faite ?

[11] Ce terme correspond à un ajout du texte latin qui ne figure dans aucune des versions arabes qui nous ont été transmises.

3) Ptolémée renvoyait-il à la même démonstration lorsqu'il a démontré les propositions précédant la démonstration de la figure?

Thābit ne répond pas à la première question. Il répond par l'affirmative à la deuxième question. Il répond par la négative à la troisième, c'est-à-dire qu'il croit avoir lui-même mis en œuvre une autre démonstration que Ptolémée. Comment Thābit a-t-il pu parvenir à cette conclusion ? Il ne lui fallait pas nécessairement pour cela connaître l'écrit de Ménélaüs, il basait sa conclusion sur les différentes méthodes de preuve. Cette différence joue un rôle crucial dans la deuxième partie.

3.2. La partie démonstrative (§ 4-8)

La première méthode de Thābit est basée sur la démonstration de Ptolémée de l'une des configurations du mode de diérèse. Elle complète cette démonstration en démontrant également le théorème de Ménélaüs pour les deux autres configurations du mode de diérèse et en réduisant d'un seul trait le mode de synthèse au mode de diérèse. Thābit ne s'occupe plus que de quatre configurations ou cas au lieu de trente comme dans le cas précédent.

Thābit ajoute ensuite une seconde méthode de démonstration qui dispense d'avoir à considérer les diverses configurations tant pour le mode de diérèse que pour le mode de synthèse. La démonstration consiste en une simple application aux deux modes de synthèse et de diérèse d'un théorème auxiliaire. C'est seulement le choix approprié du plan de projection qui importe.

En fait, cette démonstration élégante se distingue par deux caractéristiques : elle ne renvoie pas au théorème plan ; il ne lui faut considérer aucun sous-cas ni aucune configuration spéciale.

3.3. La partie combinatoire (§ 9-12)

Le traité de Thābit sur la trigonométrie sphérique s'achève, à proprement parler, par sa deuxième démonstration du théorème de Ménélaüs. Cependant, il ajoute une longue section générale, combinatoire, pour démontrer que chacun des deux modes principaux du théorème admet dix-huit formes, ou même deux fois plus, si les raisons inverses sont prises en considération.

Il considère six « quantités » quelconques a, b, g, d, e, u qui ne sont plus des cordes d'arcs. Les traductions latines utilisent des expressions combinatoires comme « permuter » (*permutare*), « permutation » (*permutatio*), « combinaison » (*combinatio*). En plus, Thābit dit expressément que toutes les permutations possibles sont « engendrées » au moins par une forme initiale.

Un tel langage nous rappelle les considérations modernes au sens de la théorie des groupes où les permutations sont interprétées comme des applications bijectives d'un ensemble fini dans le même ensemble. En 1993, Sabine Koelblen a démontré qu'il était possible d'expliquer, ou au moins d'interpréter, la procédure et la suite de permutations de Thābit par une telle approche d'après la théorie des groupes[12]. À cette fin, il faut introduire les quatre permutations suivantes :

$$C\begin{Bmatrix}1,2,3,4,5,6\\1,2,5,6,3,4\end{Bmatrix},\quad E\begin{Bmatrix}1,2,3,4,5,6\\1,2,3,6,5,4\end{Bmatrix},\quad M\begin{Bmatrix}1,2,3,4,5,6\\3,4,1,2,6,5\end{Bmatrix}\quad P\begin{Bmatrix}1,2,3,4,5,6\\1,3,2,4,5,6\end{Bmatrix}.$$

Quoi qu'il en soit, le traité de Thābit témoigne de son intérêt pour la combinatoire[13] ; il a initié une longue série de recherches arabes et latines sur les aspects combinatoires de la figure secteur, les configurations possibles et les diverses relations possibles qui peuvent en être déduites. Je me limiterai à mentionner Aḥmad ibn Yūsuf ibn Ibrāhīm ibn al-Dāya (mort vers 912/13), Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274) , Francesco Maurolico[14].

En d'autres mots, Thābit a joué un rôle essentiel dans l'émergence et le développement de la combinatoire et de l'algèbre arabe[15]. Sa tâche dans son traité sur la figure secteur consistait en la démonstration que la relation

$$a : b = (g : d)(e : u)$$

implique exactement dix-sept autres relations, si l'on ne tient pas compte des inverses de ces dix-huit relations.

[12] Koelblen, « Un exercice de combinatoire ».

[13] Pascal Crozet, « Thābit ibn Qurra et la composition des rapports », *supra*, p. 391.

[14] Michel Chasles, *Geschichte der Geometrie hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden*, Aus dem Französischen übertragen durch L.A. Sohncke, 1839 (réedition Wiesbaden, M. Sändig, 1968 ; original français : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, Bruxelles, 1837 ; Paris, 1875), note VI ; Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore)*, p. 40-90.

[15] Roshdi Rashed, « Algèbre et linguistique : l'analyse combinatoire dans la science arabe », dans R. Cohen (éd.), *Logical and Epistemological Studies in Contemporary Studies*, Boston Studies in the Philosophy of Sciences, Boston, Reidel, 1973, p. 383-399 ; repris dans *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes,* Collection « Sciences et philosophie arabes - Études et reprises », Paris, Les Belles Lettres, 1984, p. 245-257.

Dans la première partie (§ 9-10), il démontre qu'il y a au moins dix-huit modes (*modi*), dans la deuxième partie (§ 11-12) qu'il y a tout au plus dix-huit modes.

4. *Commentaire*

4.1. La première méthode (§ 4-5)

Thābit affirme que la démonstration de Ptolémée nécessite les quatre propositions précédentes. Son propre complément de cette démonstration dispense de l'une de ces quatre propositions, à savoir de la deuxième proposition[16].

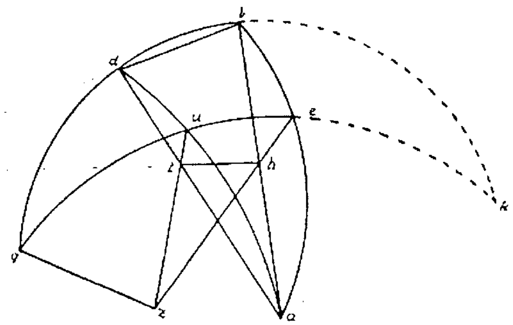


Fig. 5

Soit z le centre de la sphère. Il tire les lignes zg, zu, ze, ab, ad.

ab, ad coupent ze, zu en h et en t respectivement. Il y a trois configurations possibles si l'on prolonge db et gz :

(1) Les lignes se coupent du côté de d et g.

(2) Les lignes se coupent du côté de b et z.

(3) Elles se ne coupent pas parce qu'elles sont équidistantes.

(1) C'est le cas de Ptolémée, cela est donc démontré. (2) Thābit ramène le deuxième cas au premier au moyen d'une nouvelle interprétation de la figure complétée : db, gz sont prolongées de sorte qu'elles se coupent en k. gbk, gek sont des demi-cercles.

Donc,

$$(\text{cda } au : \text{cda } ud) = (\text{cda } ae : \text{cda } eb)*(\text{cda } bk : \text{cda } kd)$$

Thābit renvoie à la partie combinatoire qui suit où il démontrera, dit-il, qu'une relation

$$a : b = (c : d)*(e : f)$$

entre six quantités a, b, c, d, e, f peut être écrite ainsi :

[16] La démonstration de Ptolémée, telle qu'elle figure dans l'*Almageste*, est incomplète.

$c : d = (a : b)*(f : e)$ (7[e] forme de sa liste).

Par conséquent, il obtient :

cda ae : cda eb = (cda au : cda ud)*(cda kd : cda kb).

kd, *gd* et *kb*, *gb* sont des arcs supplémentaires, donc leurs cordes sont égales. Il obtient ainsi la relation cherchée.

(3) La preuve consiste en deux parties.

D'abord, il démontre que *ht* est parallèle à *bd* si *bd* est parallèle à *gz* :

Soit plan 1 le plan du cercle *gfbk* contenant *bd*.

Soit plan 2 le plan du cercle *gaek* contenant *ht*.

Soit plan 3 le plan passant par *a*, *t*, *d*, *b*, *h* coupant les deux premiers plans.

bd est la ligne d'intersection des plans 1 et 3, *ht* est la ligne d'intersection des plans 2 et 3, *gz* est la ligne d'intersection (le rayon) des plans 1 et 2. Si *bd* est parallèle à *gz*, *ht* doit être parallèle à *bd*.

Deuxièmement, Thābit utilise dans sa démonstration les quatre relations suivantes :

$ah : hb = at : td$ (théorème de Thalès)

$ah : hb$ = cda ae : cda eb

$at : td$ = cda au : cda ud (la troisième proposition de Ptolémée concernant les cordes des arcs)

cda gb = cda gd (*gb*, *gd* sont des arcs supplémentaires)

Donc : cda ae : cda eb = (cda au : cda ud)*(cda gd : cda gb) (la dernière raison est égale à 1).

Thābit doit encore démontrer la deuxième affirmation, c'est-à-dire le mode de synthèse du théorème de Ménélaüs. Il applique le même système que dans le cas (2) du mode de diérèse : Le mode de synthèse est réduit au mode de diérèse au moyen d'une nouvelle interprétation de la ligne complétée. Soit les arcs *ah*, *ad* prolongés de sorte qu'ils se coupent en *z*. *abz*, *adz* sont des demi-cercles. Le côté gauche de la figure complète est interprété au moyen du mode de diérèse :

Les arcs *ze*, *ge* sont coupés par les deux arcs *bg*, *zu* qui se coupent en *d*. Donc

cda zb : cda be = (cda zd : cda du)*(cda ug : cda ge)

ab, *zb* et *zd*, *da* sont des arcs complémentaires. Par conséquent, leurs cordes sont égales. Ainsi, Thābit obtient le mode de synthèse cherché.

Il résume la première méthode de démonstration en disant (§ 6) qu'elle réduit les nombreuses configurations en une petite tâche. Il ne croit pas que Ptolémée voulait l'utiliser, et cela pour deux raisons :

(1) Après sa démonstration partielle du mode de dièrèse, Ptolémée renvoie, dans le cas de la synthèse, à sa première procédure, en disant qu'il faut procéder exactement de la même manière, en utilisant la forme correspondante du théorème dans le plan.

(2) Si Ptolémée avait voulu utiliser la deuxième méthode, il n'aurait pas démontré au préalable le mode de synthèse du théorème plan, puisqu'il n'avait besoin de ce mode que dans la démonstration du théorème, mais non ailleurs dans son livre.

4.2. La deuxième méthode (§ 7-8)

La démonstration est basée sur le théorème auxiliaire suivant :

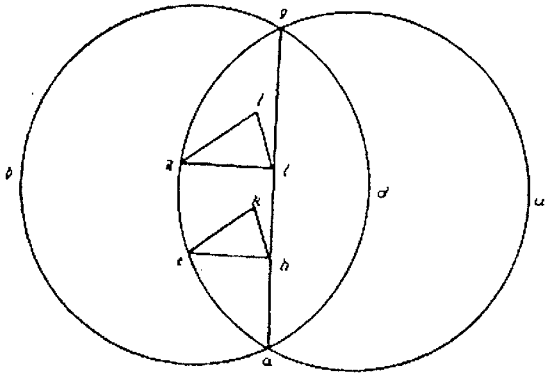


Fig. 6

Prenons deux grands cercles *abgd*, *aegu* qui se coupent en *a* et *g*. Soient *ae*, *az* deux arcs inférieurs à deux demi-cercles. Tirons les perpendiculaires *zl*, *ek* de *z* et *e* sur le plan de l'autre grand cercle *abgd*, nous obtenons les points d'intersection *l* et *k*.

Voici le théorème auxiliaire : cda *ae* : cda *az* = *ek* : *zl* (la raison des cordes est égale à la raison des perpendiculaires).

La soi-disant règle des quatre quantités peut être déduite simplement de ce théorème[17].

Afin de démontrer ce théorème auxiliaire, Thābit tire les perpendiculaires *zt*, *eh* de *z*, *e* sur la droite de jonction *ag*. Ces deux perpendiculaires sont les sinus » des arcs *az*, *ae* respectivement. Ainsi, il y a deux paires de perpendiculaires différentes, les triangles *ehk*, *ztl* sont semblables. Donc,

$$\sin ae : \sin az = eh : zt = ek : zl.$$

[17] Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, p. 47.

Cette égalité est équivalente au théorème.
La démonstration du théorème de Ménélaüs :
(1) Le mode de synthèse

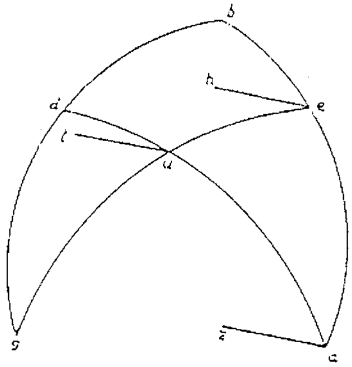


Fig. 7

On a deux arcs *ab*, *gb* de grands cercles, deux autres arcs *ad*, *ge* se coupent en *u*.

Affirmation : cda *ab* : cda *be* = (cda *ad* : cda *du*)*(cda *ug* : cda *ge*).

Preuve: Le plan de projection est le plan par l'arc *gdb*. Thābit tire les trois perpendiculaires *az*, *eh*, *ut* de *a*, *e*, *u* sur le plan de projection.

1. *az* : *eh* = (*az* : *ut*)*(*ut* : *eh*)

2. Le théorème auxiliaire est appliqué trois fois :
   az : *he* = cda *ab* : cda *eb*
   az : *ut* = cda *ad* : cda *ud*
   ut : *eh* = cda *gu* : cda *ge*

3. En substituant les raisons de 1. à leurs valeurs de 2. on obtient immédiatement l'affirmation.

(2) Le mode de diérèse

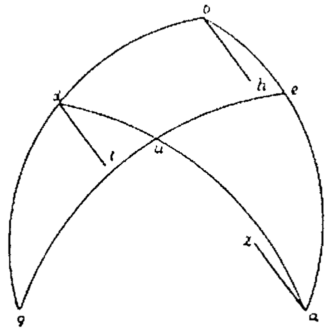


Fig. 8

Affirmation : cda *ae* : cda *eb* = (cda *au* : cda *ud*)*(cda *gd* : cda *gb*).

Preuve: Le plan de projection est le plan par l'arc *gue*. Thābit tire les trois perpendiculaires *az*, *bh*, *dt* de *a*, *b*, *d* sur le plan de projection qui appartiennent cette fois à différents côtés du plan.

1. *az* : *bh* = (*az* : *dt*)*(*dt* : *bh*) Le théorème auxiliaire est appliqué trois fois :

az : *bh* = cda *ae* : cda *eb*
az : *dt* = cda *au* : cda *ud*
dt : *bh* = cda *gd* : cda *gb*

2. En substituant les raisons de 1. à leurs valeurs de 2, on obtient immédiatement l'affirmation.

4.3. Les méthodes de démonstration de la partie combinatoire

La première section (§ 9-10) : Il y a au moins dix-huit modes. Les outils mathématiques de Thābit sont les rapports composés, l'application de relations antérieures déjà démontrées, une nouvelle numérotation des quantités, l'introduction de nouvelles quantités auxiliaires comme les quatrièmes proportionnelles.

De cette manière, Thābit déduit la suite suivante de modes à partir de

1. $a : b = (g : d)*(e : u)$:
2. $a : b = (b : u)*(e : d)$
3. $a : g = (b : u)*(e : u)$
4. $a : g = (b : u)*(e : d)$
5. $a : e = (b : u)*(g : d)$
6. $a : e = (b : d)*(g : u)$
7. $g : d = (a : b)*(u : e)$
8. $e : u = (a : b)*(d : g)$
9. $b : d = (a : g)*(u : e)$
10. $b : d = (a : e)*(u : g)$
11. $b : u = (u : g)*(d : e)$
12. $b : u = (u : e)*(d : g)$
13. $g : d = (u : e)*(u : b)$
14. $g : u = (a : b)*(d : e)$
15. $g : u = (a : e)*(d : b)$
16. $d : e = (b : a)*(g : u)$
17. $d : e = (b : u)*(g : a)$
18. $e : u = (u : g)*(d : b)$

Je voudrais expliquer les démonstrations du deuxième, cinquième et septième mode pour illustrer les méthodes de démonstration de Thābit.

Le deuxième mode : $a : b = (g : u)*(e : d)$.

Preuve : $g : u = (g : d)*(d : e)*(e : u)$.

Donc $(g : u)*(e : d) = (g : d)*(d : e)*(e : u)*(e : d) = (g : d)*(e : u)$ (permutation des facteurs ; la composition de deux raisons dont l'une est l'inverse de l'autre est égale à 1)

$a : b = (g : u)*(e : d)$ (renvoie au premier mode).

Le cinquième mode : $a : e = (b : u)*(g : d)$.

Preuve : $a : b = (e : u)*(g : d)$ (premier mode).

Thābit remplace la première numérotation a, b, g, u, e, d par une nouvelle numérotation a, b, e, u, g, d en permutant e, g de sorte que e devient la troisième, g la cinquième quantité. Le nouveau dénombrement est appliqué au troisième mode

$$a : g = (b : u)*(e : d),$$

ce qui donne

$$a : e = (b : u)*(g : d).$$

Le septième mode : $g : d = (a : b)*(u : e)$.

Preuve : Soit $d : z = e : u$ (z est la quatrième proportionnelle, une nouvelle quantité auxiliaire).

Donc

$$a : b = (g : d)*(d : z)$$

(renvoie au premier mode)

$$g : z = (g : d)*(d : z) \text{ ou } a : b = g : z.$$

Mais

$g : d = (g : z)*(z : d)$ et $z : d = u : e$ (inversion de la première égalité).

Donc

$$g : d = (a : b)*(u : e).$$

Les copies des traductions latines donnent des valeurs numériques pour les six quantités comme 35, 6, 7, 2, 5, 3 qui rendent des vérifications numériques des relations possibles.

Par exemple, le mode

1. $a : b = (g : d)*(e : u)$

est vérifié par $35 : 6 = (7 : 2)*(5 : 3)$.

Dans trois copies de ces traductions latines, les résultats sont rassemblés dans une table[18] ou un rapport est établi entre les quantités *a*, *b*, *g*, *u*, *e*, *d*, et les valeurs numériques 1, 2, 3, 4, 6, 9.

La table comprend les six raisons de quantités qui ne peuvent pas être déduites du premier mode :

1^re^ quantité : 4^e^ qu., 1^re^ qu. : 6^e^ qu., 3^e^ qu. : 5^e^ qu., 2^e^ qu. : 3^e^ qu., 2^e^ qu. : 5^e^ qu., 4^e^ qu., : 6^e^ qu.

La deuxième section (§11-12) : Il y a tout au plus dix-huit modes.

D'abord, Thābit affirme que (§11) :

1. Il y a 15 combinaisons sans répétition de six quantités prises deux à deux.

Dans notre cas, il s'agit de raisons dont les inversions ne sont pas prises en considération. En fait, $\binom{6}{2}=\frac{6*5}{2}=15$. Le point d'interrogation après « quindecim » (quinze) dans le texte latin de Björnbo[19] est superflu.

2. L'ensemble de toutes les paires de raisons acceptées parmi quatre quantités a un certain nombre défini, à savoir douze.

En fait, il y a trois partitions d'un ensemble de quatre quantités en deux classes de sorte que l'une et l'autre contiennent deux quantités : *gd*, *eu* ; *ge*, *du* ; *gu*, *de*.

Le problème général est résolu par les nombres de Stirling de deuxième espèce. Dans notre cas, il s'agit de paires non ordonnées (produits) de paires ordonnées (raisons) de sorte que chacune des trois partitions comprend quatre compositions possibles de raisons. Au total, il y a douze telles compositions.

La deuxième section de la démonstration consiste de nouveau en deux parties.

La première partie (encore §11) démontre que les six raisons mentionnées à la fin de la première section ne sont pas des transformations possibles du premier mode.

La raison $a : d$ peut servir de modèle pour illustrer la méthode de démonstration de Thābit. Soit z une quantité différente de a.

Thābit considère un rectangle, dont l'aire est égale au produit *ad*. Soit $z : d$ la raison de ses côtés *ht*. Donc

[18] Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore)*, p. 20.

[19] *Ibid.*, p. 19.

$$h : t = z : d \text{ et } ht = ad$$

ou

$$h : a = d : t.$$

Alors

$$a : b = (g : d)^*(e : u) \text{ (premier mode)}$$

$$h : b = (h : a)^*(a : b) \text{ ou } h : b = (d : t)^*(g : d)^*(e : u)$$
$$= (g : t)^*(e : u).$$

Il faut comparer cette égalité avec l'égalité

$$a : b = (g : d)^*(e : u).$$

Les deux égalités deviennent identiques si nous remplaçons h par a, t par d. Thābit argumente donc :

S'il était possible de déduire une égalité pour $a : d$, nous obtiendrions la même égalité pour $h : t$ ou

$$a : d = h : t.$$

Mais $h : t = z : d$ ou $a : d = z : d$ ou $a : z$; ce qui implique une contradiction contre l'hypothèse que a soit différente de z[20].

La traduction allemande[21] induit en erreur parce qu'elle parle de deux rectangles égaux. En réalité, il n'y a qu'un seul rectangle. Son aire est exprimée au moyen de ses côtés et au moyen du produit ad.

La deuxième partie (§ 12) démontre que les neuf raisons différentes qui se trouvent à gauche des dix-huit modes ne peuvent pas être représentées d'une autre manière si les six quantités sont deux à deux distinctes. Aucune de ces neuf raisons ne peut être composée de deux des six raisons exclues plus haut, sinon ces raisons elles-mêmes pourraient être composées de deux raisons des quatre quantités restantes.

Aucune nouvelle représentation ne peut être obtenue en inversant une ou l'une et l'autre raison à droite, sinon les deux quantités de la raison inverse devraient être égales, ce qui est contraire à l'hypothèse, parce que

$$a : b = (g : d)^*(e : u)$$

et

$$a : b = (g : d)^*(u : e)$$

impliquerait $u = e$.

[20] Pour cette démonstration dont seule la première partie figure ici, voir l'article de H. Bellosta dans le même ouvrage.

[21] Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore)*, p. 36.

HISTOIRE DU TEXTE

Cette traduction française de la traduction latine attribuée à Gérard de Crémone du traité de Thābit ibn Qurra sur *La Figure secteur* s'appuie sur l'édition complétée et corrigée de Björnbo :

Axel Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz* (*liber de figura sectore*). Mit Bemerkungen von H. Suter. Herausgegeben und ergänzt durch Untersuchungen über die Entwicklung der muslimischen sphärischen Trigonometrie von H. Bürger und K. Kohl. Erlangen 1924, p. 6-23.

Deux autres traductions latines ont été publiées par Lorch :

Richard Lorch, Thābit ibn Qurra, *On the Sector-Figure and Related Texts*, Edited with Translation and Commentary by Richard Lorch, Frankfurt am Main, 2001.

Pour son édition, Björnbo utilisa les quatre manuscrits suivants :

A Paris, Arsenal 1035, fol. 105^r-110^r, XIV^e siècle.

B Naples, Biblioteca Nazionale VIII E. 33, fol. 97^r-100^v, XIV^e siècle.

P Paris, Bibliothèque nat. de France, lat. 7377B, fol. 66^r-72^v, XV^e siècle.

E Erfurt, Amplon. Q 349, fol. 57^r-65^r, vers 1400.

Björnbo a supprimé les démonstrations de onze modes (du 6^e, 9^e, 10^e, 11^e, 12^e, 13^e, 14^e, 15^e, 16^e, 17^e, 18^e mode). Cette première édition du texte latin supprimé s'appuie sur les manuscrits A, P, E. Je voudrais remercier la Bibliothèque Nationale de Paris qui a mis à ma disposition des microfilms de A et P et Richard Lorch qui a mis à ma disposition des copies de E.

6^e mode $a{:}e = (b{:}d)(g{:}u)$; après page 16, ligne 26
9^e mode $b{:}d = (a{:}g)(u{:}e)$; après page 17, ligne 28
10^e mode $b{:}d = (a{:}e)(u{:}g)$; après page 17, ligne 31
11^e mode $b{:}u = (a{:}g)(d{:}e)$; après page 17, ligne 34
12^e mode $b{:}u = (a{:}e)(d{:}g)$; après page 17, ligne 37
13^e mode $g{:}d = (a{:}e)(u{:}b)$; après page 17, ligne 40
14^e mode $g{:}u = (a{:}b)(d{:}e)$; après page 18, ligne 3
15^e mode $g{:}u = (a{:}e)(d{:}b)$; après page 18, ligne 6
16^e mode $d{:}e = (b{:}a)(g{:}u)$; après page 18, ligne 9
17^e mode $d{:}e = (b{:}u)(g{:}a)$; après page 18, ligne 12
18^e mode $e{:}u = (a{:}g)(d{:}b)$; après page 18, ligne 15

TEXTE ET TRADUCTION

Le livre de Thābit ibn Qurra sur la figure secteur

Liber Thebit filii chore de figura sectore

Le livre de Thābit ibn Qurra sur la figure secteur

§ 1. J'ai compris ce que tu as dit de la figure dite secteur ainsi que ce que tu en as demandé et qui a trait à sa nature. Mais je ne connais aucune des figures géométriques avec lesquelles on opère dans la science des étoiles qui ait donné plus de peine aux gens que cette figure ni aucune qui soit plus fameuse que celle-ci. Ainsi leur raison de l'étudier réside dans notre connaissance de la multiplicité de son utilité et dans sa nécessité dans la science de la sphère et de ce qu'elle est le fondement sur lequel s'appuie la pensée en bon nombre de travaux sur la science des étoiles. Et même si un autre que Ptolémée a obtenu cette figure et en a parlé, il ne l'a pas complètement explorée et personne, à ma connaissance, n'a pu compléter sa démonstration jusqu'à maintenant. Mais lui-même n'a mentionné que deux des façons que l'on peut y découvrir, de la composition d'une raison. Les voici : en effet si deux arcs *ad*, *ge* se coupent, entre deux arcs *ab*, *bg*, au point *u*, si ces arcs sont des arcs de grands cercles qui se trouvent sur la sphère et si chacun de ces arcs-là est plus petit qu'un demi-cercle, la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* sera composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *dg* à la corde du double de l'arc *gb*. Et de même, la raison de la corde du double de l'arc *ab* à la corde du double de l'arc *be* sera composée de la raison de la corde du double de l'arc *ad* à la corde du double de l'arc *du* et de la raison de la corde du double de l'arc *ug* à la corde du double de l'arc *ge*.

Liber Thebit Filii Chore de figura sectore[1]

§ 1. Quod de figura quae nominatur sector dixisti et quod de ea quaesivisti et de ipsius esse, intellexi[2]. Nullam autem geometricarum scio figurarum cum qua in stellarum operetur scientia, in qua maior hominum sit labor quam in figura hac, neque quae ipsa sit famosior[3]. Causa vero studii eorum in ipsa[4] est illud[5], quod scimus de multitudine utilitatis eius et vehementi[6] necessitate ipsius in scientia[7] sperae[8], et quod ipsa est radix super quam currit res in pluribus operibus[9] scientiae stellarum. Et quamvis praeter Ptholomeum[10] ad hanc alius[11] antecessit[12] figuram et in ea locutus fuit[13], non tamen plenarie de ea executus est, neque[14] eius complevit demonstrationem aliquis, de quo audivissemus adhuc[15]. Ipse vero[16] non attulit nisi duas tantum intentiones[17], quae in ipsa[18] reperiuntur de compositione proportionis. Quae sunt : Quoniam quando[19] secuerint se inter duos arcus *ab bg* duo arcus *ad ge* super punctum *u* et fuerint arcus isti[20] circulorum magnorum arcus[21] qui cadunt in spera, et fuerit unusquisque illorum arcuum minor semicircolo, erit proportio[22] cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb* composita ex proportione cordae dupli arcus *au ad* cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae dupli arcus *dg* ad cordam dupli arcus gb. Et erit etiam proportio cordae dupli arcus ab ad cordam dupli arcus *be* composita ex proportione cordae dupli arcus *ad* ad cordam dupli arcus *du*[23] et ex proportione cordae dupli arcus *ug* ad cordam dupli arcus *ge*.

[1] Liber ... sectore] APB, Tractatus Campani de figura sectoris sive alcate quod idem est E.
[2] intellexi] P, intellexisti A, intellexi corr. Ex intellexisti B.
[3] Quod ... famosior] APB, Intellexi quod dixisti de figura nominata alcata et quod quaesivisti de ea et de re eius, ego autem nescio aliquam figurarum geometricarum cum qua operetur in scientia stellarum, in qua maior labor hominum sit quam in hac figura, neque eius fama maior sit fama ipsius E.
[4] ipsa] APB, ea E.
[5] illud] om. E.
[6] vehementi] BP, vehementer AE.
[7] Scientia] ABP, figura E.
[8] sperae] ABP, sperae et scientia eius E.
[9] operibus]ABP, opererum (!) E.
[10] Tholomeum] P, Ptholemeum AB.
[11] Alius] BP, om. A.
[12] antecessit] AB, ante accessit P.
[13] Et quamvis ... fuit] ABP, et quamvis alius praecessit ad hanc figuram et locutus fuit in ea praeter tholomeum E.
[14] neque] ABP, nec E.
[15] neque ... adhuc] ABP, nec complerit eius demonstrationem E.
[16] vero] ABP, om. E.
[17] intentiones] ABP, intentionum E.
[18] ipsa] ABP, ea E.
[19] Quoniam quando] ABP, quoniam E.
[20] arcus isti] ABP, hi arcus E.
[21] arcus]ABP, om. E.
[22] proportio] ABE, portio E.
[23] *du*] AB, *da* P.

§ 2. Mais il y a ici d'autres façons utiles et nécessaires dans la composition des raisons des cordes des doubles des arcs qui se trouvent dans cette figure selon beaucoup d'autres modes outre ces deux façons. Car il n'y a aucun de ces arcs dont la raison de la corde du double à la corde du double associé ne soit composée de deux raisons, c'est-à-dire des raisons des cordes des doubles des arcs restants, excepté peu d'entre elles, même s'ils sont éloignés de ceux-ci. Car la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *dg*, à plus forte raison que les autres, est composée des raisons des cordes des doubles des arcs restants. Et chacune de ces raisons, qui est composée selon quelque mode, est elle-même composée selon d'autres modes. Mais notre intention est la détermination de celui-là (de ce mode) et l'explication par les modes concordant avec celui-là et avec les autres parmi ceux qui sont semblables pour ce qui est de la composition de la raison et qui sont propres à une explication dans cette science.

Mais la détermination de ces choses et leur mention n'étaient nécessaires ni pour Ptolémée, ni pour quelqu'un qui utilise sa manière de penser, parce qu'il n'avait pas promis d'expliquer cela, mais d'expliquer ce qui est nécessaire à la démonstration des deux façons dont il s'est proposé l'explication ; et cela est nécessaire pour celui qui veut utiliser sa manière de penser.

De fait, il n'a exposé lui-même qu'un seul des deux cas de la démonstration de ces deux façons et il s'est dispensé des cas restants, confiant que celui qui lirait et comprendrait cela, serait capable de suivre son exemple dans les cas restants et trouverait leur démonstration ; et en effet, les commentateurs de ce livre auraient dû finir ces tâches. Or, j'ai exposé moi-même cela en parlant avec celui qui m'a demandé son explication, mais je ne l'ai pas fait, ni n'ai non plus démontré ces cas dans un livre. Cependant, l'un de nos

§ 2. Sunt autem hic[24] intentiones aliae oportunae et necessariae in compositione proportionum cordarum duplorum arcuum qui sunt in hac figura secundum multos alios modos praeter has duas intentiones. Non est enim[25] horum[26] arcuum aliquis[27] cuius dupli cordae proportio ad cordam dupli comparis sui non componatur ex duabus proportionibus, id est ex proportionibus cordarum duplorum arcuum reliquorum exceptis paucis eorum et si ab eis elongentur.[28] Proportio namque cordae dupli[29] arcus *ae* ad cordam dupli[29] arcus *dg*, nedum aliorum, est composita ex proportionibus cordarum duplorum arcuum reliquorum ; et unaquaeque harum proportionum quae secundum aliquem modum componitur, ipsamet componitur secundum modos alios. Quod autem intendimus est distincio illius et ostensio per modos communes illi et reliquis eorum qui[30] sunt similes ex re compositionis proportionis et conveniunt ad exponendum in hac scientia.

Distinctio autem harum rerum et earum allatio [vel comprehensio][31] non fuit[32] Ptholomeo[33] necessaria[34] neque[35] alicui surgenti secundum eius sententiam [i. e. volenti tueri eius sententiam][36], quoniam non promisit illud[37] exponere, vero id[38] quod est necessarium in demonstratione duarum intentionum quarum intendit explanationem, et[39] est necessarium illi qui secundum eius vult sententiam surgere[40].

Ipse enim non attulit nisi unam de divisionibus demonstrationis[41] harum duarum intentionum, reliquas vero divisiones ipsius dimisit, confidens quod qui legeret illud et intelligeret, posset sequi ipsius[42] exemplum in reliquis divisionibus et inveniret eius demonstrationem. Et res quidem istae expositoribus[43] libri huius ipsius[44] necessariae fuerunt[45] ; ego vero iam exposui illud colloquendo ad eum[46] qui a me quaesivit eius expositionem, sed non affirmavi neque eius divisiones in

[24] Sunt autem hic] ABP, hic autem sunt E.
[25] est enim] AP, enim B, enim est (?) E.
[26] horum] ABP, istorum E.
[27] aliquis] ABP, om. E.
[28] ab eis elongentur] AB, ab eis elongetur] P, elongentur ab eis E.
[29] dupli] ABP, duplia E.
[30] qui] E, quae A, P, Björnbo.
[31] [vel comprehensio] E, suprascr. PA, in marg. A.
[32] fuit] ABP, sunt E.
[33] Ptholomeo] AP, Tholomeo BE.
[34] necessaria] ABP, nota E.
[35] neque] ABE, neque in P.
[36] (i.e. vol. ... sententiam)] suprascr. AP, in marg. B.
[37] non promisit illud] in marg. adiec. B : in alio : non fuit praeparatus ad illud.
[38] id] ABP, illud E.
[39] et] A, om. BPE.
[40] secundum ... surgere] ABP, vult surgere secundum eius sententiam E.
[41] demonstrationis] ABP, demonstrationum E.
[42] ipsius] ABP, eius E.
[43] expositoribus] PE, ex positoribus AB.
[44] huius ipsius] AE, ipsius BP.
[45] res ... fuerunt] ABP, haec quidem res necessariae fuerunt expositoribus huius ipsius libri.
[46] eum] ABP, illum E.

compagnons l'a fait pour lui-même, parce qu'il l'a su et l'a saisi, et il a rassemblé toutes les propriétés de la figure qui s'y trouvent et les cas par lesquels elle est divisée selon les deux modes – à savoir dissolution et composition – que Ptolémée voulait démontrer.

§ 3. Et il sut (à savoir l'élève) qu'il s'y trouve trois cas selon le mode de dissolution et vingt-sept cas selon le mode de composition, dont quatorze sont écartés et disparaissent et dont les autres sont vérifiés. Et la preuve de ce que Ptolémée voulait démontrer concernant cette figure n'est achevée que par leur étude complète et en affirmant la preuve de chaque cas parmi eux. Mais alors je t'ai fait voir la nature de ces cas, tu les as reconnus et tu les as compris. Et je t'ai fait savoir qu'il y a ici d'autres méthodes et façons communes qui rassemblent ces nombreux cas, sans lesquels la preuve de la figure n'est pas achevée, et qui les regroupent en peu de mots. Et moi je les ai souvent démontrés. Mais tu disais que je t'avais montré l'œuvre par laquelle lui-même avait exécuté cela. Donc tu as voulu savoir si cela était une de ces œuvres-là au moyen desquelles j'avais travaillé, ou non, et si je croyais que Ptolémée renvoyait à cette œuvre-là, ou à une autre, là où il omettait la démonstration des cas de ces deux façons – dont la mention précède – de cette figure. Mais je ne crois pas que Ptolémée ait renvoyé à cette œuvre, qui est une des œuvres au moyen desquelles j'ai travaillé, libro ostendi. Verum tamen[47] quidam nostrorum sociorum, propterea quod scivit illud et intellexit, affirmavit[48] sibi et comprehendit omnia huius figurae accidentia quae contingunt[49] in ea, et divisiones eius per quas dividitur secundum duos modos, scilicet dissolutionis et compositionis, quos Ptholomeus[50] demonstrare [vel probare][51] voluit.

§ 3 Et scivit (id est discupulus)[52], quod accidunt ei secundum modum[53] dissolutionis tres[54] divisiones et secundum modum compositionis viginti septem[55] divisiones, quarum[56] delentur et evanescunt quattuordecim et verificantur reliquae. Et neque completur demonstratio eius quod Ptholomeus[57] probare voluit de hac figura nisi comprehensione[58] scientiae earum[59] et[60] affirmatione[61] probationis cuiusque[62] divisionis earum. Iam autem[63] feci te videre harum divisionum esse[64], et scivisti eas et intellexisti ; et feci te scire[65], quod hic sunt viae et intentiones aliae communes, quae aggregant has divisiones, plures, sine quibus non completur figurae probatio, et comprehendunt eas in paucis rebus ; et ego multociens eas ostendi. Sed tu dicebas ut ostenderem tibi opus per quod ipse illud[66] operatus est. Voluisti ergo scire[67], si fuerit[68] unum illorum operum per quae operatus sum an non, et si aestimo[69] quod Ptholomeus[70] ad hoc illud [71]opus intendit in eo cuius dimisit probationem[72] de divisionibus harum[73] duarum intentionum quarum praecessit narratio huius figurae, an ad aliud[74]. Sed opus quod est unum operum[75], per quae operatus sum, non aestimo quod Ptholomeus ad hoc inten-

[47] Verum tamen] APE, verum B.
[48] affirmavit] ABP, firmavit E.
[49] contingunt] BP, contigunt A, contangunt E.
[50] Ptholomeus] PE, Ptolomeus B, Ptholomus A.
[51] (vel probare)] suprascr. ABP, om. E.
[52] (id est discipulus)] suprascr. ABP, om. E.
[53] modum] ABP, modos E.
[54] tres] APE, et tres B.
[55] Viginti septem] AB, XXVII PE.
[56] quarum] E, de quibus ABP.
[57] Ptholomeus] AE, Ptolomeus BP.
[58] comprehensione] comprehensio AP, complemento (?) BE.
[59] earum] ABP, eorum E.
[60] et] ABP, om. E.
[61] affirmatione] BPE, affirmationem A.
[62] cuiusque] ABE, cuius P.
[63] autem] ABP, vero E.
[64] harum ... esse] ABP, rem harum divisionum E.
[65] scire]APE, corr. ex videre A.
[66] ipse illud] ABP, om. E.
[67] Voluisti ... scire] ABP, dilexisti ergo ut scires E.
[68] fuerit] BE, fuit AP.
[69] aestimo] BPE, exstimo A.
[70] Ptholomeus] E, Ptolomeus BP, Ptholomus A.
[71] illud] ABP, om. E.
[72] probationem] BPE, probationes A.
[73] harum] ABP, om. E.
[74] aliud] E, P, illud A, Björnbo.
[75] operum] BPE, opereum A.

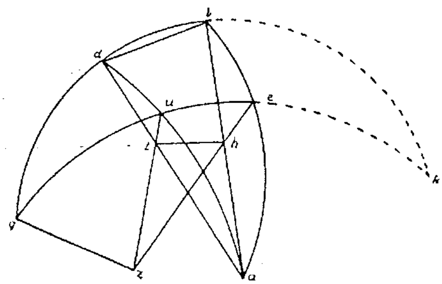
quand il a laissé de côté l'exposé de la démonstration de cette figure ; mais (il a renvoyé) à la première méthode selon laquelle trente cas s'ensuivent – dans les deux modes de dissolution et de composition – dont seize s'avèrent être vrais. Et cela parce que c'est cette méthode qui regroupe ces cas en une petite chose et qui est comme je le rapporte :

§ 4. Si deux arcs *ad*, *ge* se coupent entre deux arcs *ab*, *bg* au point *u*, si ces arcs sont des parties d'arcs de grands cercles qui se trouvent sur la sphère et si chacun de ces arcs est plus petit qu'un demi-cercle, la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* sera composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *dg* à la corde du double de l'arc *gb*. Cela est démontré ainsi : je poserai donc le point *z* centre de la sphère, je tirerai les lignes *zg*, *zu*, *ze*, je tirerai les deux lignes *ab*, *ad* qui coupent les deux lignes *ze*, *zu* aux deux points *h*, *t*, et je tirerai la ligne *ht* et la ligne *bd*. Par conséquent, la ligne *bd* ou bien rencontrera la ligne *zg*, si on la prolonge en ligne droite, du côté de *dg*, ou bien de l'autre et opposé côté, ou bien elles seront équidistantes. Et si elles se rencontrent du côté de *dg*, on va démontrer, au moyen de la preuve que Ptolémée a narrée, que la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *du* et de la raison de la corde du double de l'arc *dg* à la corde du double de l'arc *gb*. Et si *zg*, *db* se rencontrent du côté opposé à cette partie, nous prolongerons les deux arcs *gb*, *ge* jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point *k*. Donc *gbk*, *gek* sont deux demi-cercles parce que ces arcs appartiennent à derit in eo cuius praemisit[76] narrationem de[77] demonstratione figurae. At[78] ad viam primam ex qua dividuntur in duobus modis dissolationis et compositionis[79] triginta divisiones[80], de quibus perveniunt sedecim[81] divisiones verae. Quod[82] est, quoniam haec via quae aggregat has divisiones in re parva, et est[83] secundum quod narro :

§ 4. Cum[84] secuerint se inter duos arcos *ab bg* duo arcus *ad ge* supra punctum *u*, fuerintque[85] hii arcus ex arcubus[86] circulorum maiorum, qui cadunt in spera, et fuerit unusquisque arcus eorum[87] minor semicirculo : tunc erit proportio cordae dupli arcus[88] *ae*[89] ad cordam dupli arcus *eb* composita ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae[90] dupli arcus *dg* ad cordam dupli arcus *gb*. Quod sic probatur : Ponam enim centrum sperae[91] punctum *z*, et producam lineas *zg*, *zu*, *ze*, et producam[92] duas lineas *ab ad*[93], quae secent duas lineas *ze*, *zu* super duo puncta *h t*[94], et producam lineam *ht*[95] et lineam *bd*. Linea igitur *bd* aut concurret lineae[96] *zg* cum protrahetur secundum rectitudinem a parte *dg* aut a parte altera et[97] diversa, aut erunt[98] aequidistantes. Quod si concurrerint[99] a parte *dg*, ostendetur[100] cum probatione quam narravit Ptholemeus, quod proportio cordae dupli arcus[101] *ae* ad cordam dupli arcus *eb* componitur ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *du* et ex proportione cordae dupli arcus[102] *dg* ad cordam dupli arcus *gb*. Quod si concurrerint *zg db* a parte diversa huic parti, producemus duos arcus *gb ge*, donec concurrant supra[103] punctum *k*. Erunt ergo *gbk gek* duo semicirculi,

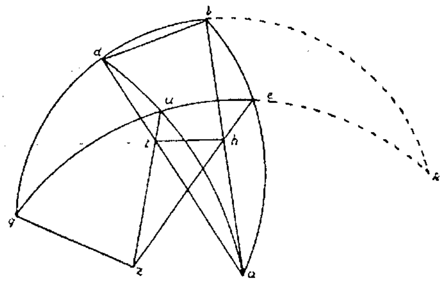
[76] praemisit] AB, praetermisit PE.
[77] de] P, om. ABE.
[78] At] ABE, ad P.
[79] compositionis] ABP, expositionis E.
[80] divisiones] ABP, om. E.
[81] sedecim] AB, XVI P, XV E.
[82] Quod] addid. BP in marg. : illa (id est via) quae continet has divisiones in re parva est haec (?) P.
[83] et] E, om. ABP.
[84] Cum] A, Quando BPE.
[85] fuerintque] ABP, et fuerint E.
[86] ex arcubus] ABP, om. E.
[87] eorum] E, ex eis ABP.
[88] cordae ... arcus] BPE, arcus cordae dupli A.
[89] ae] BPE, at A.
[90] cordae] BPE, om. A.
[91] centrum sperae] ABP, om. E.
[92] producam] E, protraham ABP.
[93] addid. E : secundum rectitudinem et.
[94] quae] ABP, om. E.
[95] *ht*] ABP, *hc*] E.
[96] lineae] ABP, om. E.
[97] et] AB, ei PE.
[98] erunt] ABP, sunt E.
[99] concurrerint] ABP, concurrerunt E.
[100] ostendetur] ABP, ostendemus E.
[101] cordae ... arcus] BPE, dupli arcus cordae A.
[102] cordae ... arcus] ABP, dupli arcus cordae E.
[103] supra] ABP, super E.

des grands cercles de la sphère. Et les deux lignes *gzk*, *db* se rencontreront si elles sont prolongées du côté de *bk* ; et alors les deux arcs *ab*, *ku* se couperont entre les deux arcs *ad*, *dk* au point *e*. Donc le problème y sera ramené à la preuve que Ptolémée a narrée, et la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* sera composée de la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* et de la raison de la corde du double de l'arc *bk* à la corde du double de l'arc *kd*.



Mais la raison de la troisième à la quatrième de toutes les six quantités telles que la raison de la première à la deuxième soit composée de la raison de la troisième à la quatrième et de la raison de la cinquième à la sixième, est composée de la raison de la première à la deuxième et de la raison de la sixième à la cinquième, comme je le démontrerai ci-dessous. Donc la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *kd* à la corde du double de l'arc *kb*. Mais la corde du double de l'arc *kd* est la corde du double de l'arc *gd*, et la corde du double de l'arc *kb* est la corde du double de l'arc *gb* ; donc la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *gd* à la corde du double de l'arc *gb*. Et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

Et si la ligne *bd* était équidistante de la ligne *zg*, la ligne *ht* serait équidistante de la ligne *bd*, parce que, si elle n'était pas équidistante de celle-ci, *zg* ne serait pas équidistante de *bd*, or *zg* était équidistante de *bd*. Et si la ligne *ht* n'était pas équidistante des deux lignes *bz*, *zg*, elle les rencontrerait et elle se trouverait dans un plan commun avec elles. Mais ce n'est pas le cas ; par conséquent, les deux lignes *ht*, *bd* sont équidistantes, c'est pourquoi la raison de *ah* à *hb* sera la même que la raison de *at* à *td* ; mais la raison de *ah* à *hb* quoniam hii arcus sunt circulorum maiorum spaerae[104]. Et duae lineae *gzk db*, cum protrahentur in parte *bk*, concurrent ; et iam secabunt se inter duos arcus *ad dk* duo arcus *ab ku* supra[105] punctum *e*. Erit ergo res in eo iam reversa[106] ad probationem quam narravit Ptholomeus, et fiet proportio cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* composita ex proportione cordae dupli arcus *ae* ad cordam[107] dupli arcus *eb* et ex proportione cordae dupli arcus *bk* ad cordam dupli arcus *kd*. [108]



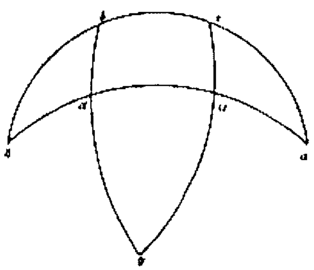
Omnium autem sex[109] quantitatum quarum primae proportio ad secundam componitur ex proportione tertiae ad quartam et ex proportione quintae ad sextam, erit proportio tertiae[110] ad quartam composita ex proportione primae ad secundam et ex proportione sextae ad quintam[111], quemadmodum ostendam in sequentibus. Ergo proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb* componitur ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proporione cordae dupli arcus *kd* ad cordam dupli arcus *kb*. Corda autem dupli arcus *kd* est corda dupli arcus *gd*, et corda dupli arcus *kb* est corda dupli arcus *gb* ; ergo proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb* componitur ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae dupli arcus *gd* ad cordam dupli arcus *gb*. Et illud est quod demonstrare voluimus.

Quod si fuerit linea *bd* aequidistans lineae *zg*, tunc linea *ht* erit aequidistans lineae *bd*, quoniam si non fuerit[112] aequidistans ei, tunc *zg* non aequidistabit *bd*, sed *zg* fuit aequidistans *bd*. Et si esset linea *ht* non aequidistans duabus lineis *bd zg*, concurreret[113] eis, et esset cum eis in superficie una. Res autem non est sic, duae igitur lineae *ht bd* aequidistant[114], et propter illud erit proportio *ah* ad *hb* sicut proportio *at* ad *td* ; proportio autem *ah* ad *hb* est sicut proportio cordae

[104] maiorum sperae] E, sperae maiorum ABP.
[105] supra] ABP, super E.
[106] reversa] ABP, versa E.
[107] cordam] BPE, cordae A.
[108] *kd*] ABP, *kb* E.
[109] sex] ABP, rerum E.
[110] tertiae] ABP, sextae E.
[111] quintam] ABP, quartam E.
[112] fuerit] BP, fuit A.
[113] concurreret] PB (?), concurret A.
[114] aequidistant] BP, aequidistat A.

est la même que la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb*, et la raison de *at* à *td* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud*. Mais la corde du double de l'arc *gd* est égale à la corde du double de l'arc *bg*, car la ligne *bd* est équidistante de la ligne *gz*. Donc la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *gd* à la corde du double de l'arc *bg*.

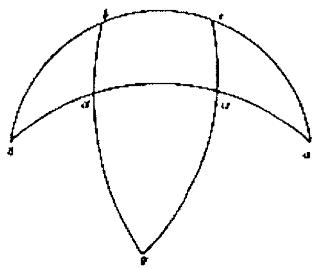
§ 5. Et après que cela ait été démontré, il va ressortir clairement de ce que nous avons dit que, selon le mode de la composition, la raison de la corde du double de l'arc *ab* à la corde du double de l'arc *eb* sera composée de la raison de la corde du double de l'arc *ad* à la corde du double de l'arc *du* et de la raison de la corde du double de l'arc *ug* à la corde du double de l'arc *ge*. Cela est démontré ainsi : je vais donc prolonger les deux arcs *ab*, *ad* jusqu'à ce qu'ils se coupent au point *z*, par conséquent, *abz*, *adz* seront deux demi-cercles. Les deux arcs *zu*, *gb* se couperont alors, entre les deux arcs *ze*, *eg* au point *d*, donc la raison de la corde du double de l'arc *zb* à la corde du double de l'arc *be* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *zd* à la corde du double de l'arc *du* et de la raison de la corde du double de l'arc *ug* à la corde du double de l'arc *ge*, du fait de ce qui a déjà été montré au sujet de la dissolution. Or la corde du double de l'arc *zb* est la corde du double de l'arc *ab*, et la corde du double de l'arc *zd* est la corde du double de l'arc *ad*, donc la raison de la corde du double de l'arc *ab* à la corde du double de l'arc *be* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *ad* à la corde du double de l'arc *du* et de la raison de la corde du double de l'arc *ug* à la corde du double de l'arc *ge*. Et cela est ce que nous avons voulu expliquer.



§ 6. Donc cette méthode a rassemblé ces nombreux cas-là en une petite chose et a dispensé de l'un des quatre théorèmes antécédents que Ptolémée avait mis en tête de cette figure, quoiqu'il soit nécessaire pour cette tâche dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb*, et proportio *at* ad *td* est sicut proportio cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* ; corda autem[115] dupli arcus *gd* est aequalis cordae dupli arcus *bg*, linea enim *bd* aequidistat lineae *gz* ; ergo proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb* componitur ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae dupli arcus *gd* ad cordam dupli arcus *bg*.

§ 5. Et postquam iam ostensum est illud, tunc declarabitur ex eo quod diximus secundum modum compositionis, quod erit proportio cordae dupli arcus *ab* ad cordam dupli arcus *eb* composita ex proportione cordae dupli arcus *ad* ad cordam dupli arcus *du* et ex proportione cordae dupli arcus *ug* ad cordam dupli arcus *ge* ; quod sic probatur : Producam enim duos arcus *ab ad*, donec concurrant supra[116] punctum *z* ; erunt itaque *abz*[117] *adz* duo semicirculi : et tunc iam secabunt se inter duos arcus *ze eg* duo arcus *zu gb* supra punctum *d* ; ergo proportio cordae dupli arcus *zb* ad cordam dupli arcus *be* componitur ex proportione cordae dupli arcus *zd* ad cordam dupli arcus *du* et ex proportione cordae dupli arcus *ug* ad cordam dupli arcus *ge*, propter illud quod iam declaratum est ex parte dissolutionis.

Corda vero dupli arcus *zb* est corda dupli arcus *ab*, et corda dupli arcus *zd* est corda dupli arcus *ad* ; ergo proportio cordae dupli arcus *ab* ad cordam dupli arcus *be* componitur ex proportione cordae dupli arcus *ad* ad cordam dupli arcus *du* et ex proportione cordae dupli arcus *ug* ad cordam dupli arcus *ge* ; et illud est quod voluimus declarare.



§6. Haec ergo via iam aggregavit[118] illas divisiones plures in re parva ; et excusavit[119] ab uno quattuor antecedentium[120] quae ad hanc figuram praemisit Ptholomeus, quamvis esset[121] necessarium huic operi, ut ante ipsum demonstra-

[115] autem] A, vero BP.
[116] supra] ABP, super E.
[117] *abz*] APE, *aba* B.
[118] aggregavit] EA, agregavit BP.
[119] excusavit] ABPE, scrib. excussit.
[120] antecedentium] APE, accidentium (?) B.
[121] esset] ABP, sit E.

que soit effectuée avant elle la preuve que Ptolémée a présentée – d'entre les preuves des cas de cette figure – et ce qu'il avait, au préalable, placé avant elle parmi les théorèmes antécédents. Cependant, je ne crois pas que Ptolémée ait visé cela dans ce dont il a renvoyé la preuve, mais la première méthode (celle) comportant beaucoup de cas. Or il y a deux témoignages de ce que j'en ai dit, dont l'un est qu'il a dit, après avoir achevé ses explications concernant la dissolution, que le mode de composition de la figure secteur va ressortir clairement de cet exemple-là par lequel la description des lignes droites qui se trouvent dans un plan est expliqué. Mais l'autre témoignage est le suivant : s'il n'avait voulu, par cette méthode, que l'explication de ce qui rassemble les cas, il ne lui aurait pas été nécessaire de traiter auparavant du théorème antécédent dans lequel il a démontré comment sont les raisons, selon le mode de la composition, pour les lignes qui se coupent dans un plan, car il n'aurait opéré en aucune manière au moyen de cela dans absolument aucune partie de son livre à moins d'utiliser la première méthode que nous avons mentionnée dans la démonstration du « secteur », car dans ce cas, il en avait besoin ; par conséquent, c'est l'autre méthode que nous avons mentionnée. Alors, si elle rassemble ces nombreux cas-là et les regroupe en quatre cas seulement, il ne nous est absolument pas permis cependant de renoncer à la preuve qu'il s'est proposée dans ce à quoi il a renoncé et d'en mettre en avant une autre, si nous nous proposons de présenter les deux sortes d'explications de l'auteur.

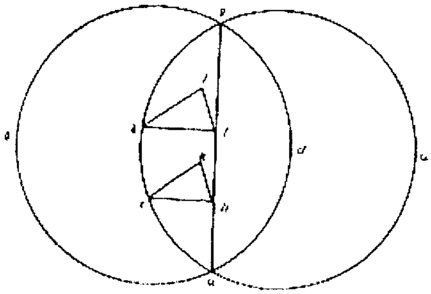
Mais s'il nous est absolument permis de présenter la preuve que nous voulons de ce que Ptolémée voulait démontrer au sujet de cette figure, nous allons alors en présenter une preuve plus concevable et plus facile que les retur probatio quam attulit[122] Ptholomeus de probationibus divisionum huius figurae et quod praemisit[123] ante[124] ipsam ex antecedentibus[125]. Ego tamen non aestimo[126] quod Ptholomeus intenderit ad illud[127] in eo quod dimisit de probatione, sed ad viam primam[128] multarum divisionum ; secundum illud autem quod ego dixi de illo sunt duo testimonia[129] ; quorum unum est, quoniam dixit, postquam expedivit se ab eo quod dixit de parte dissolutionis de eo quod[130] declarabitur secundum illud exemplum quo declaratur[131] in descriptione[132] linearum rectarum[133], quae sunt in superficie : modus compositionis figurae elcata[134]. Testimonium[135] vero aliud[136] est, quoniam si voluisset[137] nisi declarationem eius per hanc viam quae aggregat divisiones, non esset ei necessarium praemittere[138] antecedens, in quo demonstravit qualiter sunt proportiones secundum modum compositionis[139] in lineis quae secant se in superficie ; non enim ullo[140] modo operatus est per illud in aliqua parte sui libri omnino, nisi procedat in probatione elcata[141] via prima quam diximus ; tunc enim est[142] illud ei necessarium in ea ; haec igitur altera via quam diximus. Et si iam aggreget[143] illas divisiones plures et comprehendat[144] eas in quattuor divisionibus tantum, non tamen conceditur nobis absolute cum intendimus exponere duas intentiones viri sermonis[145], ut dimittamus probationem quam intendit in eo quod dimisit et afferamus aliam.

Quod si absolute concedatur nobis, ut afferamus probationem ad id quod Ptholomeus voluit probare de[146] hac figura unamcunque[147] voluerimus[148], nos iam afferemus ei probationem propinquiorem et leviorem probationibus[149] Ptholomei

[122] attullit] BPE, attulit A.
[123] praemisit] ABP, promisit E.
[124] ante] ABE, propter P.
[125] antecedentibus] APE, accidentibus B.
[126] aestimo] BPE, extimo A.
[127] Addid. BP : i.e. ad viam quae in brevi comprehendit.
[128] sed ad viam primam] om. E. addid. BP : i.e. ad probandum quod adhuc intendit.
[129] duo testimonia] A, testimonia E, duae rationes BP.
[130] de eo quod] ABP, de ea figura quae E ; addid. BP : verba ptolomei sunt in fine probationis figurae.
[131] declaratur] ABP, declarabitur E.
[132] descriptione] BPE, disscriptione A.
[133] rectarum] ABP, om. E.
[134] elcata] ABP, elkata E.
[135] Testimonium] addid. BP : scil. ratio.
[136] aliud] PE, ad illud AB, ad aliud Björnbo.
[137] voluisset] E, noluisset ABP.
[138] praemittere] APE, praetermittere B.
[139] compositionis] AEP, compositiones Björnbo.
[140] ullo] AP, nullo E, Björnbo.
[141] elcata] ABP, elkata E.
[142] est] ABP, et E.
[143] agregat] B, agreget APE.
[144] comprehendit] A, comprehendat BPE.
[145] pro modis viri] B, sermonis viri APE.
[146] de] ABP, in E.
[147] unamcunque] BP, uniuscuiusque (?) A.
[148] voluerimus] ABP, voluimus E.
[149] probationibus] ABP, proportionibus E.

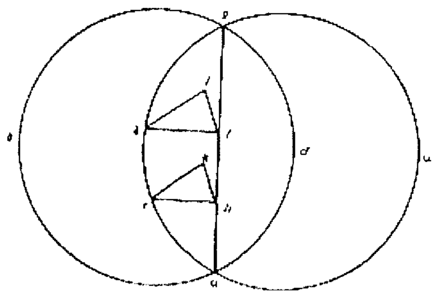
preuves de Ptolémée, n'utilisant ni la preuve qu'il en a effectuée ni aucun des quatre théorèmes antécédents dont il a traité auparavant à cause de cette preuve. Et cette preuve va rassembler tous ces cas en un seul chapitre sur le mode de la composition et en un chapitre seulement sur le mode de la dissolution. Et c'est ce que je vais rapporter. Auparavant, je commencerai par le théorème suivant :

§ 7. Si l'on coupe deux arcs inférieurs à deux demi-cercles de l'un de deux cercles quelconques parmi les grands cercles qui se trouvent sur la surface d'une sphère, à partir de ce qui découle de l'un de leurs deux points d'intersection, et si l'on abaisse deux perpendiculaires sur le plan de l'autre cercle des deux extrémités des deux arcs, la raison de la corde du double de l'un des deux arcs à la corde du double de l'autre arc sera la même que la raison de la perpendiculaire tirée de l'extrémité de l'un des arcs à la perpendiculaire tirée de l'extrémité de l'autre arc, soit que les deux arcs se trouvent d'un même côté, soit qu'ils se trouvent de deux côtés différents.
Par exemple :



Soient deux cercles *abgd*, *aegu* parmi les grands cercles qui se trouvent sur la surface de la sphère et qui se coupent aux points *a* et *g*. Soient deux arcs coupés du cercle *aegu* et dont chacun est inférieur à un demi-cercle, que ces arcs soient *ae*, *az*. Que soient tirées, des deux points *e* et *z*, deux perpendiculaires au plan du cercle *abgd*. Je dis alors que la raison de la corde du double de l'arc *ae* est à la corde du double de l'arc *az* comme la raison de la non pervenientem ad[150] probationem quam ei fecit, neque ad[151] aliquod quattuor antecedentium[152], quae praemisit propter ipsam, et quae[153] (i.e. probatio) communicabit[154] omnes divisiones eius in capitulo uno secundum modum compositionis, et capitulo secundum modum dissolutionis tantum. Et est haec quam narrabo[155]. Praemittam prius[156] hoc antecedens :

§7. Si ex uno omnium duorum circulorum de circulis maioribus qui cadunt in superficie spaerae separentur[157] duo arcus minores duobus semicirculis ab eo quod[158] sequitur unum duorum punctorum sectionis eorum, et protrahantur a duabus extremitatibus duorum arcuum duae perpendiculares supra superficiem circuli alterius, erit proportio cordae dupli unius duorum arcuum ad cordam dupli arcus alterius[159] sicut[160] proportio perpendicularis protractae ab extremitate arcus unius[161] ad perpendicularem productam ab extremitate arcus alterius, sive sint ambo arcus in parte una, sive duabus diversis. Verbi gratia :



Sint duo circuli *abgd aegu* de circulis maioribus, qui cadunt in spaerae superficie et iam secuerunt se supra duo puncta *a* et *g* ; et separentur[162] ex circulo *agu*, qui est unus eorum, duo arcus quorum unusquisque sit minor semicirculo, sintque[163] *ae az*, et producantur[164] a duobus punctis *e* et *z* duae perpendiculares supra superficiem circuli *abgd*, dico ergo[165] quod proportio cordae dupli arcus *ae* ad

[150] non pervenientem ad] recte secundum Textum arabicum : ad quam non opus est probatio etc.
[151] ad] APE, om. B.
[152] antecedentium] BP, accidentium (?) AE.
[153] quae] om. ABPE.
[154] communicabit] melius complectitur.
[155] narrabo] B, narro APE.
[156] prius] ABP, primo E.
[157] separentur] APE, separetur B.
[158] quod] BPE, qui A.
[159] erit ... alterius] BPE in textu, A in marg.
[160] sicut] ABP, sicud E.
[161] arcus unius] eius ABPE.
[162] separentur] P, separeretur AB, separantur E.
[163] sintque] BPE, sitque A.
[164] producantur] PE, producatur AB.
[165] ergo] BPE, om. A.

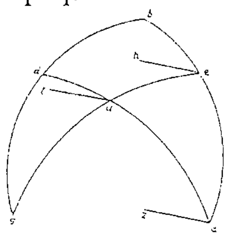
perpendiculaire qui est tirée du point *e* à la perpendiculaire qui est tirée du point *z*, ce qui est démontré ainsi : en effet la section commune des deux cercles *abgd*, *aegu* est leur diamètre, que ce soit donc le diamètre *ag*. Je vais alors abaisser, des deux points *e* et *z*, deux perpendiculaires à *ag*, que ce soient *eh*, *zt*. Donc si elles sont aussi deux perpendiculaires au plan du cercle *abgd*, ce que nous voulions est déjà expliqué, parce qu'elles sont les deux sinus des deux arcs *ae*, *az*. S'il n'en est pas ainsi, je vais abaisser, des deux points *e*, *z*, deux perpendiculaires au plan du cercle *abgd*, que ce soient *ek*, *zl*, elles sont donc équidistantes. Et je tirerai les deux lignes *lt*, *kh*, mais les deux lignes *eh*, *zt* sont aussi équidistantes. Or lorsque deux lignes enfermant un angle sont équidistantes de deux autres lignes enfermant un autre angle, les deux angles sont égaux, par conséquent, l'angle *hek* est égal à l'angle *tzl*, et les deux angles *ekh*, *zlt* sont droits. Donc les deux triangles *ehk*, *zlt* sont semblables. Donc la raison de *eh* à *zt* est la même que la raison de *ek* à *zl*, mais la raison de *eh* à *zt* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *az*, parce qu'elles sont leurs sinus. Donc la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *az* est la même que la raison de la perpendiculaire *ek* à la perpendiculaire *zl*. Et d'une manière semblable, ce sera expliqué, en raison de ce que nous avons dit, si un des deux arcs *ae*, *az* était du côté *au*. Et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

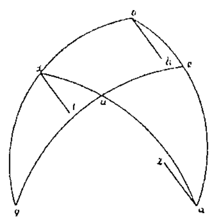
§ 8. Après avoir mis en avant ce qui précède, supposons que les deux arcs *ad*, *ge* se coupent entre les deux arcs *ah*, *bg* au point *u*. Que ces arcs soient ceux de cercles majeurs qui se trouvent sur la sphère et que chacun de ces arcs soit moindre qu'un demi-cercle, par conséquent, je dis que la raison de la corde du double de l'arc *ab* à la corde du double de l'arc *be* est composée de la raison du double de l'arc *ad* à la corde du double de l'arc *du* et de la raison de la corde du double de l'arc *ug* à la corde du double de l'arc *ge*. Cela est démontré ainsi : je tirerai donc des perpendiculaires des points *a*, *e*, *u* au plan du cercle de l'arc *bg*, que ces perpendiculaires soient *az*, *eh*, *ut*. Je poserai alors la perpendiculaire *ut*, qui est l'une d'elles, moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires *az*, *eh*. Donc la raison de *az* à *eh* sera composée de la raison de *az* à *ut* et de la raison de *ut* cordam dupli arcus[166] *az* est sicut[167] proportio perpendicularis quae protrahitur a puncto *e* ad perpendicularem quae protrahitur a puncto *z*, quod sic probatur : differentia[168] enim communis duorum circulorum *abgd aegu* est diametrus[169] eorum, sit ergo diametrus *ag* ; producam autem[170] a duobus punctis *e* et *z* duas[171] perpendiculares supra *ag*, sintque *eh zt*[172] ; si ergo fuerint duae perpendiculares etiam supra superficiem circuli *abgd*, tunc iam declaratum est, quod voluimus, quoniam ipsae sunt duo sinus duorum arcuum *ae*[173] *az*. Quod si non fuerint[174] ita, protraham a duobus punctis *e z* duas perpendiculares supra superficiem ciruli *abgd*, sintque *ek zl*, sunt ergo aequidistantes ; et protraham duas lineas *lt kh*, sed duae lineae : *eh* zt sunt[175] etiam aequidistantes ; quando vero duae linae continentes angulum aequidistant duabus aliis lineis continentibus alium angulum, sunt duo anguli aequales, angulus igitur *hek* aequatur angulo *tzl* ; et duo anguli *ekh zlt*[176] sunt recti ; ergo duo trianguli *ehk ztl* sunt[177] similes. Ergo proportio *eh* ad zt est sicut proportio *ek* ad zl, proportio autem *eh* ad *zt* est sicut proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *az*, quoniam ipse sunt[178] sinus eorum[179] ; ergo proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *az*, est sicut proportio perpendicularis *ek* ad perpendicularem z*l*. Et similiter etiam declarabitur ex eo quod diximus, si unus duorum arcuum *ae az* fuerit a parte *au*. Et illud est quod voluimus demonstrare[180].

§8. Et postquam praemisimus hoc antecedens, tunc secent se inter duos arcus *ab bg* duo arcus *ad ge* supra punctum *u*. Et sint hii[181] arcus ex circulis maioribus qui cadunt in spaera, sitque unusquisque arcus eorum minor semicirculo, dico igitur[182], quod proportio cordae dupli arcus *ab* ad cordam dupli arcus *be* componitur ex proportione cordae dupli arcus *ad* ad cordam dupli arcus *du* et ex proportione cordae dupli arcus *ug* ad cordam dupli arcus *ge* ; quod sic probatur : Producam enim a punctis *a e u* perpendiculares supra superficiem circuli arcus *bg*, sintque perpendiculares *az eh ut* ; ponam autem perpendicularem *ut*, quae est una earum, mediam in proportione inter duas perpendiculares *az eh* ; erit ergo proportio *az* ad *eh* composita, ex proportione *az*[183] ad *ut* et ex propor-

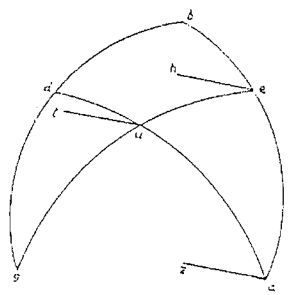
166 *ae* ... arcus] ABP, om. E.
167 sicut] ABP, sicud E.
168 differentia] melius sectio.
169 diametrus] ABP, dyametrus E.
170 producam autem] ABP, sem (?) E.
171 duas] ABP, duae E.
172 *zt*] ABP, *zr* E.
173 *ae*] BPE, *ad* A.
174 fuerint] BPE, fuerit A.
175 sunt] ABP, sint E.
176 *zlt*] ABP, *ztl* E.
177 recti ... sunt] AB, recti, ergo anguli *ehk*, *ztl* sunt E, om. P.
178 sunt] ABE, om. P.
179 eorum] ABE, earum P.
180 est ... demonstrare] A, voluimus ut demonstraretur BP, voluimus E.
181 hii] APE, hi B.
182 igitur] ABP, ergo E.
183 *az*] APE, *az* ad *eh* composita ex proportione *at* B.

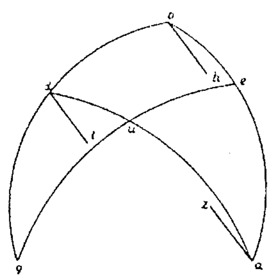
à *eh*. Mais nous avons déjà démontré, par ce que nous avons mis avant, que la raison de la perpendiculaire *az* à la perpendiculaire *eh* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *ab* à la corde du double de l'arc *be*. Et nous avons démontré, par la même chose, que la raison de la perpendiculaire *az* à la perpendiculaire *ut* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *ad* à la corde du double de l'arc *du*. Et nous avons démontré, par la même chose aussi, que la raison de la perpendiculaire *ut* à la perpendiculaire *eh* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *gu* à la corde du double de l'arc *ge*. Donc la raison de la corde du double de l'arc *ab* à la corde du double de l'arc *be* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *ad* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *gu* à la corde du double de l'arc *ge*. Je dis aussi que, selon le mode de la dissolution, la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* sera composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *gd* à la corde du double de l'arc *gb*. Quant à la méthode pour le prouver, elle est semblable à la méthode pour prouver ce que nous avons démontré auparavant et cela parce que la raison de la perpendiculaire *az* à la perpendiculaire *bh* est composée de la raison de la perpendiculaire *az* à la perpendiculaire *dt* et de la raison de la perpendiculaire *dt* à la perpendiculaire *bh*, quand nous aurons tiré trois perpendiculaires des points *a*, *b*, *d* au plan de l'arc *gue* du cercle, à savoir *az*, *bh*, *dt*, et quand nous aurons posé la perpendiculaire *dt* d'entre elles moyenne proportionnelle entre les deux autres perpendiculaires. Mais la raison de la perpendiculaire *az* d'entre elles à la perpendiculaire *bh* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb*, la raison de la perpendiculaire *az* à la perpendiculaire *dt* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et la raison de la perpendiculaire *dt* à la perpendiculaire *bh* est la même que la raison de la corde du double de l'arc *gd* à la corde du double de l'arc *gb*, et tout cela à cause de ce qui a déjà été démontré dans ce qui précède et dont nous avons traité plus haut. Donc la raison de la corde du double de l'arc *ae* à la corde du double de l'arc *eb* est composée de la raison de la corde du double de l'arc *au* à la corde du double de l'arc *ud* et de la raison de la corde du double de l'arc *gd* à la corde du double de l'arc *gb*. Et voici ce que nous avons voulu expliquer.





tione *ut* ad *eh* ; proportio vero perpendicularis *az* ad perpendicularem *eh*, iam ostendimus[184] per antecedens quod praemisimus, quod est sicut proportio cordae dupli arcus *ab* ad cordam dupli arcus *be* ; et proportio perpendicularis *az* ad perpendicularem *ut*, ostendimus per ipsum, quod est sicut proportio cordae dupli arcus *ad* ad cordam dupli arcus *du* ; et proportio perpendicularis *ut* ad perpendicularem *eh*, ostendimus per ipsum etiam, quod est sicut proportio cordae dupli arcus *gu* ad cordam dupli arcus *ge*. Ergo proportio cordae dupli arcus *ab* ad cordam dupli arcus *be* componitur ex proportione cordae dupli arcus *ad* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae dupli arcus *gu* ad cordam dupli arcus *ge*. Et dico etiam, quod erit secundum modum dissolutionis proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb* composita ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae dupli arcus *gd* ad cordam dupli arcus *gb*. Via autem in probatione illius est similis viae in eo quod ostendimus ante ipsum , et illud est, quia[185], si nos produxerimus a punctis *a b d* ad superficiem circuli arcus *gue* perpendiculares tres quae sint[186] *az bh dt* et posuerimus perpendicularem *dt* ex eis mediam in proportione inter duas alias perpendiculares, erit proportio perpendicularis *az* ad perpendicularem *bh* composita ex proportione perpendicularis *az* ad perpendicularem *dt* et ex proportione perpendicularis *dt* ad perpendicularem *bh*. Proportio autem perpendicularis *az* ex eis ad perpendicularem *bh* est sicut proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb*, et proportio perpendicularis *az* ad perpendicularem *dt* est sicut proportio cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud*, et proportio perpendicularis *dt* ad perpendicularem *bh* est sicut proportio cordae dupli arcus *gd* ad cordam dupli arcus *gb*. Hoc autem totum est, propter illud quod iam ostensum est in antecedente quod praemisimus. Ergo proportio cordae dupli arcus *ae* ad cordam dupli arcus *eb* componitur ex proportione cordae dupli arcus *au* ad cordam dupli arcus *ud* et ex proportione cordae dupli arcus *gd* ad cordam dupli arcus *gb*. Et illud est cuius[187] voluimus declarationem.





[184] ostendimus] ABP, ostendam E.
[185] quia] ABP, quod E.
[186] sint] ABE, sunt P.
[187] cuius] B, quod AP (?).

§ 9. Donc la preuve des deux cas de la figure dite secteur que Ptolémée voulait démontrer est maintenant établie. De fait, on trouve d'autres modes de composition des raisons dans le « secteur », sur lesquels Ptolémée n'a rien dit et dont il n'avait pas besoin – comme il avait besoin des divisions dont il a été parlé auparavant – pour compléter la preuve de ce qu'il a maintenu auparavant sur ces deux cas. Mais parce qu'elles appartiennent au même genre que ceux-là et parce qu'elles sont nécessaires dans d'autres problèmes, j'ai décidé de mettre en avant pour cela les racines qui comprennent et rassemblent toutes les permutations par lesquelles est établie une permutation de la raison de toutes les six quantités telles que la raison de deux d'entre elles soit composée de deux raisons des quatre quantités restantes, de sorte que, lorsqu'on a rencontré six quantités selon cette règle de composition de raison, on peut les permuter et on engendre à partir d'elles toute chose dont la génération est possible, soit que le problème que l'on trouve concerne des arcs sur la sphère comme dans le « secteur » ou des lignes droites dans un plan, soit qu'il s'agisse du mode de dissolution, soit qu'il s'agisse du mode de composition ou de quelque mode que ce soit. Et ce qui est engendré à partir de toutes les six quantités selon cette règle, ce sont dix-sept règles de composition de raison, qui, avec la racine à partir de laquelle elles sont engendrées, seront dix-huit.

Ainsi donc, que le premier des 18 modes soit que la raison de la première des six quantités à la deuxième d'entre elles soit composée de la raison de la 3^e à la 4^e et de la raison de la 5^e à la 6^e. Ainsi le 2^e mode en étant engendré sera que la raison de la 1re à la 2^e est composée de la raison de la 3^e à la 6^e et de la raison de la 5^e à la 4^e. Par exemple : soient six quantités sur lesquelles sont (écrits) a, b, g, d, e, u, la raison de la 1re, qui est a, à la 2^e, qui est b, est composée de la raison de la 3^e, qui est g, à la 4^e, qui est d, et de la raison de la 5^e, qui est e, à la 6^e, qui est u. J'affirme donc que la raison de la 1re, qui est a, à la 2^e, qui est b, est aussi composée de la raison de la 3^e, qui est g, à la 6^e, qui est u, et de la raison de la 5^e, qui est e, à la 4^e, qui est d. Cela est démontré ainsi :

Je vais poser d, e deux moyennes entre g et u. Donc la raison de g à u sera composée de la raison de g à d, de la raison de d à e et de la raison de e à u. Donc la raison composée de la raison de g à u et de la raison de e à d est la

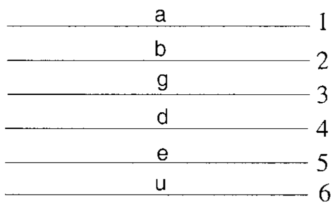
§ 9. Iam ergo praecessit[188] probatio duarum[189] intentionum quas Ptholomeus probare voluit de re alcata[190]. Reperiuntur vero[191] modi alii de compositione proportionum in elcata, quos[192] non narravit Ptholomeus et quibus non indiguit in[193] complemento probationis eius quod praemisit de his duabus intentionibus, sicut indiguit divisionibus quarum praemisit narrationem. Verum quia sunt unius generis cum illis et sunt necessarii in rebus aliis, visum est mihi ut afferrem ad illud radices communicantes et aggregantes permutationes[194] omnes per quas praeparatur[195] permutatio[196] proportionis in omnibus sex quantitatibus, quarum duarum proportio est composita ex duabus proportionibus quattuor reliquarum, donec, cum invenerit aliquis sex quantitates secundum hunc modum compositionis proportionis[197], possit permutare eas, et generet ex eis omnem rem cuius generatio possibilis est, sive sit res quae reperitur in arcubus super spaeram, sicut in alcata aut in lineis rectis in superficie, sive secundum modum dissolutionis sit illud, sive secundum modum compositionis, aut quocumque modo sit. Quod autem generatur ex omnibus sex quantitatibus secundum hunc modum decem et septem modi sunt de compositione proportionis, qui cum radice ex qua generantur erunt[198] decem et octo[199] modi.

Sit itaque primus ex decem et octo[200] ut proportio primae sex quantitatum ad secundam earum componatur ex proportione tertiae ad quartam et ex proportione quintae ad sextam. Erit itaque modus secundus generatus ex eo, ut proportio primae ad secundam sit composita ex proportione tertiae ad sextam et ex proportione quintae ad quartam. Verbi gratia : Sint sex quantitates super quas sint[201] *a b g d e u*, et proportio primae quae est *a* ad secundam quae est *b* componatur ex proportione tertiae quae est *g* ad quartam quae est *d* et ex proportione quintae quae est *e* ad sextam quae est *u*, dico ergo, quod proportio primae quae est *a* ad secundam quae est *b*, componitur etiam ex proportione tertiae quae est *g* ad sextam quae est *u* et ex proportione quintae quae est *e* ad quartam quae est *d* ; quod sic probatur :

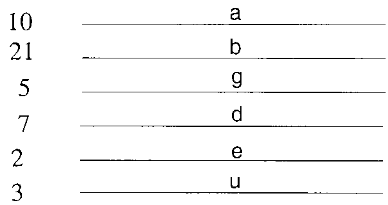
Ponam enim *de* medias duas inter *gu* ; erit ergo proportio *g* ad *u* composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *d* ad *e* et ex proportione *e* ad *u*. Proportio ergo composita ex proportione *g* ad *u* et ex proportione *e* ad *d* est

[188] praecessit] AP, processit E.
[189] duarum] AP, om. E.
[190] de re alcata] ABP, de reelkata E.
[191] Reperiuntur vero] AP, Iam vero reperiuntur E.
[192] quos] AE, quas P.
[193] in] AP, om. E.
[194] permutationes] B, considerationes APE.
[195] praeparatur] AP, separatur E.
[196] permutatio] BP, consideratio A.
[197] proportionis] BPE, proportionibus A.
[198] erunt] BP, om. A.
[199] decem et octo] BP, XVIII A.
[200] decem et octo] BP, XVIII A.
[201] sint] BP, sit A.

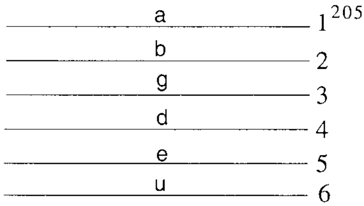
même que la raison composée de la raison de g à d, de la raison de d à e, de la raison de e à u et de la raison de e à d. Mais la raison composée de la raison de g à d, de la raison de d à e et de la raison de e à d est la même que la raison de g à d ; donc la raison composée de la raison de g à u et de la raison de e à d est la même que la raison composée de la raison de g à d et de la raison de e à u. Mais la raison de a à b était composée de la raison de g à d et de la raison de e à u. Donc la raison de a à b est composée de la raison de g à u et de la raison de e à d.



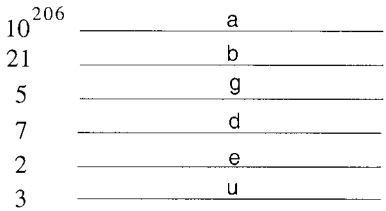
D'autre part, le 3^e^ mode est que la raison de la 1^re^, qui est a, à la 3^e^, qui est g, est composée de la raison de la 2^e^, qui est b, à la 4^e^, qui est d, et de la raison de la 5^e^, qui est e, à la 6^e^, qui est u. Cela est démontré ainsi : Je vais en effet poser b moyenne entre a et g, donc la raison de a à g sera composée de la raison de a à b et de la raison de b à g. Mais la raison de a à b est composée de la raison de g à d et de la raison de e à u, donc la raison de a à g est composée de la raison de b à g et des deux raisons de g à d et de e à u. Mais la raison de b à d est composée de la raison de b à g et de la raison de g à d, donc la raison de a à g est composée de la raison de b à d et de la raison de e à u.



D'autre part, le 4^e^ mode est que la raison de la 1^re^, qui est a, à la 3^e^, qui est g, est aussi composée de la raison de la 2^e^, qui est b, à la 6^e^, qui est u, et de la raison de la 5^e^, qui est e, à la 4^e^, qui est d. Cela est démontré ainsi : Nous avons en effet déjà démontré dans le 3^e^ mode que la raison de a à g est composée de la raison de b à d et de la raison de e à u. Par conséquent, sicut[202] proportio composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *d* ad *e* et ex proportione *e* ad u et ex proportione *e* ad *d* ; sed proportio composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *d* ad *e* et ex proportione *e* ad *d* est sicut proportio *g* ad *d* ; ergo proportio composita ex proportione *g* ad *u* et ex proportione *e* ad *d* est sicut[203] proportio composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u* ; proportio vero *a* ad *b* iam fuit composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u*[204] ; ergo proportio *a* ad *b* componitur ex proportione *g* ad *u* et ex proportione *e* ad *d*.



Modus autem tertius est, ut proportio primae quae est *a* ad tertiam quae est *g* componatur ex proportione secundae quae est *b* ad quartam quae est *d* et ex proportione quintae quae est *e* ad sextam quae est *u* ; quod sic probatur : Ponam enim *b* mediam inter *a* et *g* ; erit ergo proportio *a* ad *g* composita ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *b* ad *g* ; proportio autem *a* ad *b* componitur ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u* ; ergo proportio *a* ad *g* componitur ex proportione *b* ad *g* et ex duabus proportionibus *g* ad *d* et *e* ad *u* ; proportio autem *b* ad *d* est composita ex proportione *b* ad *g* et ex proportione *g* ad *d*, ergo proportio *a* ad *g* componitur ex proportione *b* ad d et ex proportione *e ad u*.



Modus autem quartus est, ut proportio primae quae est *a* ad tertiam quae est *g* componatur etiam ex proportione secundae quae est *b* ad sextam quae est *u* et ex proportione quintae quae est *e* ad quartam quae est *d* ; quod sic probatur : Nos enim iam ostendimus in modo tertio, quod proportio *a* ad *g* componitur ex proportione *b* ad *d* et ex proportione *e* ad *u* ; fiat itaque prima *a* et secunda *g* et

[202] sicut] om. ABP?
[203] sicut] AE, om. BP.
[204] proportio vero ... *u*] P, in marg. A.B.
[205] 1 2 3 4 5 6] P, 35 6 5 7 2 3 B.
[206] 10 21 5 7 2 3] A, om. BP.

soit la première a, la 2e g, la 3e b, la 4e d, la 5e e et la 6e u. Mais nous avons déjà démontré dans le 2e mode que, dans ce cas, la raison de a à g sera composée de la raison de b à u et de la raison de e à d.

D'autre part, le 5e mode est que la raison de la 1re, qui est a, à la 5e, qui est e, est composée de la raison de la 2e, qui est b, à la 6e, qui est u, et de la raison de la 3e, qui est g, à la 4e, qui est d. Cela est démontré ainsi : La raison de a à b est aussi composée de la raison de e à u et de la raison de g à d, de ce fait, soit à présent la première a, la 2e b, la 3e e, la 4e u, la 5e g et la 6e d. Mais nous avons déjà démontré dans le 3e mode que dans ce cas, la raison de a à e sera composé de la raison de b à u et la raison de g à d.

Le 6e mode est alors que la raison de la 1re, qui est a, à la 5e, qui est e, est composée de la raison de la 2e, qui est b, à la 4e, qui est d, et de la raison de la 3e, qui est g, à la 6e, qui est u. Cela est démontré ainsi :

Nous avons en effet déjà démontré dans le cinquième mode que la raison de a à e est composée de la raison de b à u et de la raison de g à d, donc soit la première a, la deuxième e, la troisième b, la quatrième u, la cinquième g et la sixième d. Mais nous avons déjà démontré dans le deuxième mode que la raison de a à e sera composée de la raison de b à d et de la raison de g à u, quand il en va ainsi.

1	a	10
2	b	21
3	g	5
4	d	7
5	e	2
6	u	3

Mais je vais poser le 7e et le 8e mode deux modes qui seront nécessaires pour démontrer ce qui les suit. Alors, dans le 7e, la raison de la 3e, qui est g, à la 4e, qui est d, sera composée de la raison de la 1re, qui est a, à la 2e, qui est b, et de la raison de la 6e, qui est u, à la 5e, qui est e. Cela est démontré ainsi : Je vais en effet supposer que la raison de d à z est la même que la raison de e à u, donc la raison de a à b est composée de la raison de g à d et de la raison de d à z. Mais la raison de g à z est aussi composée de la raison tertia b et quarta d et quinta e et sexta u ; iam vero ostendimus in modo secundo, quod quando illud fuerit ita, tunc proportio a ad g erit composita ex proportione b ad u et ex proportione e ad d.

Modus autem quintus est, ut sit proportio primae quae est a ad quintam[207] quae est e composita ex proportione secundae quae est b ad sextam quae est u et ex proportione tertiae quae est g ad quartam quae est d, quod sic probatur : Quia proportio a ad b est etiam composita ex proportione e ad u et ex proportione g ad d, fiat tunc prima a et secunda b et tertia e et quarta u et quinta g et sexta d ; iam autem ostendimus in modo tertio, quod si illud fuerit ita[208] tunc proportio a ad e erit composita ex proportione d ad u et ex proportione g ad d.

Modus vero sextus est, ut proportio, primae quae est a ad quintam quae est e composita sit[209] ex proportione secundae quae est b[210] ad quartam quae est d et ex proportione tertiae quae est g ad sextam quae est u.

Quod sic probatur. Nos enim iam ostendimus in modo quinto quod proportio a ad e componitur et proportione b ad u et ex proportione g ad d. fiat ergo prima a et[211] secunda e. et tertia b. et quarta u. et quinta g. et sexta d. Nos vero iam ostendimus in modo secundo quod quando illud fiat ita tunc proportio a ad e erit composita ex proportione b ad d et ex proportione g ad u.

1	a	10[212]
2	b	21
3	g	5
4	d	7
5	e	2
6	u	3

Ponam autem modum septimum et octavum duos modos qui necessarii erunt in probatione eorum quae sunt post eos. In septimo vero erit proportio tertiae quae est g ad quartam quae est d composita ex proportione primae quae est a ad secundam quae est b et ex proportione sextae quae est u ad quintam quae est e ; quod sic probatur : Ponam enim[213] proportionem d ad z sicut proportionem e ad u ; proportio igitur a ad b componitur ex proportione g ad d et ex proportione d ad z ; proportio autem g ad z[214] est etiam composita ex proportione g ad d et ex

[207] quintam] BP, quartam A.
[208] ita] AP, om. B.
[209] sit] BP, sicut A.
[210] Modus ... b] bis A.
[211] et] AP, om. E.
[212] 1 2 3 4 5 6, 10 21 5 7 2 3] A, om. BP.
[213] enim] AP, om. B.
[214] proportio ... z] BP, om. A.

de *g* à *d* et de la raison de *d* à *z*, donc la raison de *a* à *b* est la même que la raison de *g* à *z*. Mais la raison de *g* à *d* est composée de la raison de *g* à *z* et de la raison de *z* à *d*. Or nous avons déjà démontré que la raison de *g* à *z* est la même que la raison de *a* à *b* et la raison de *z* à *d* était la même que la raison de *u* à *e*, donc la raison de *g* à *d* est composée de la raison de *a* à *b* et de la raison de *u* à e.

D'autre part, le 8^e^ mode est que la raison de la 5^e^, qui est *e*, à la 6^e^, qui est *u*, est composée de la raison de la 1^re^, qui est *a*, à la 2^e^, qui est *b*, et de la raison de la 4^e^, qui est *d*, à la 3^e^, qui est *g*. Cela est démontré ainsi :

La raison de *a* à *b* est aussi composée de la raison de *e* à *u* et de la raison de *g* à *d*, de ce fait, soit à présent la première *a*, la 2^e^ *b*, la 3^e^ *e*, la 4^e^ *u*, la 5^e^ *g* et la 6^e^ *d*. Mais nous avons déjà démontré dans le 7^e^ mode que, dans ce cas, la raison de *e* à *u* est composée de la raison de *a* à *b* et de la raison de *d* à *g*.

Retournons donc maintenant à l'ordre que nous observons. Je vais donc poser pour 9^e^ mode que la raison de la 2^e^, qui est *b*, à la 4^e^, qui est *d* est composée de la raison de la 1^re^, qui est *a*, à la 3^e^, qui est *g*, et de la raison de la 6^e^, qui est *u*, à la 5^e^, qui est *e*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le troisième mode que la raison de *a* à *g* est composée de la raison de *b* à *d* et de la raison de *e* à *u*, donc soit la première *a*, la deuxième *g*, la troisième *b*, la quatrième *d*, la cinquième *e* et la sixième *u*. Nous avons déjà démontré dans le septième mode que la raison de *b* à *d* est composée de la raison de *a* à *g* et de la raison de *u* à *e*, si cela était ainsi.

D'autre part, le 10^e^ mode est que la raison de la 2^e^, qui est *b*, à la 4^e^ qui est *d*, est aussi composée de la raison de la 1^re^, qui est *a*, à la 5^e^, qui est *e*, et de la raison de la 6^e^, qui est *u*, à la 3^e^, qui est *g*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le neuvième mode que la raison de *b* à *d* est composée de la raison de *a* à *g* et de la raison de *u* à *e*, donc soit la première *b*, la deuxième *d*, la troisième *a*, la quatrième *g*, la cinquième *u* et la sixième *e*. Mais nous avons déjà démontré dans le deuxième mode que la raison de *b* a *d* est composée de la raison de *a* à *e* et de la raison de *u* à *g*, si cela était ainsi.

proportione *d* ad *z*[215] ; ergo proportio *a* ad *b* est sicut proportio *g* ad *z* ; proportio autem *g* ad *d* est composita ex proportione *g* ad *z* et ex proportione *z* ad *d* ; proportio autem *g* ad *z* iam ostendimus, quod est sicut proportio *a* ad *b*, et proportio *z* ad *d* iam fuit sicut proportio *u* ad *e*, ergo proportio *g* ad *d* componitur ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *u* ad *e*.

Modus autem octavus est, ut proportio quintae quae est *e* ad sextam quae est *u*, componatur ex proportione primae quae est *a* ad secundam quae est *b* et ex proportione quartae quae est *d* ad tertiam quae est *g* ; quod sic probatur :

Quoniam proportio *a* ad *b* est etiam composita ex proportione e ad *u* et ex proportione *g* ad *d*, tunc fiat prima *a* et secunda *b* et tertia *e* et quarta *u* et quinta *g* et sexta *d* ; iam vero ostendimus in modo septimo, quod si illud fuerit ita, tunc proportio *e* ad *u* componitur ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *d* ad g.

Revertamur igitur nunc ad ordinem quem sequimur. Ponam itaque modum nonum, ut sit proportio secundae quae est *b* ad quartam quae est *d* composita ex proportione primae quae est *a* ad tertiam quae est *g* et ex proportione sexta[216]e quae est *u* ad quintam quae est *e*.

Quod sic probatur. Iam enim ostendimus in modo tertio quod proportio *a* ad *g* componitur ex proportione *b* ad *d* et ex proportione *e* ad *u*. fiat ergo prima *a*. et[217] secunda *g*.[218] tertia *b*. et[219] quarta *d*. et[220] quinta *e*. et sexta *u*. Et[221] iam ostendimus in modo septimo quod si illud fuerit ita tunc proportio *b* ad *d* componitur[222] ex proportione *a* ad *g* et ex proportione *u* ad *e*.

Modus autem decimus est, ut sit proportio secundae quae est *b* ad quartam quae est *d* composita etiam ex proportione primae quae est *a* ad quintam quae est *e* et ex proportione sextae quae est *u* ad tertiam quae est *g*.

Quod sic probatur. Iam enim[223] ostendimus in modo nono quod proportio *b* ad *d* componitur ex proportione *a* ad *g* et ex proportione *u* ad *e*. fiat ergo prima *b*. et secunda *d*. et tertia *a*. et quarta *g*. et quinta *u*. et sexta *e*. Iam vero ostendimus in modo secundo quod[224] quando illud ita fuerit tunc proportio *b* ad *d* componitur[225] ex proportione *a* ad *e* et ex proportione *u* ad *g*.

215 *d* ad *z*] BP, *e* ad *u* A.
216 sextae] APE, sexto Björnbo.
217 et] AP, om. E.
218 et] AP, om. E.
219 et] AP, om. E.
220 et] AP, om. E.
221 Et] AP, om. E.
222 componitur] EP, om. A.
223 enim] AP, om. E.
224 quod] AP, om. E.
225 componitur] AP, componetur E.

D'autre part, le 11e mode est que la raison de la 2e, qui est *b*, à la 6e, qui est *u*, est composée de la raison de la 1re, qui est *a*, à la 3e, qui est *g*, et de la raison de la 4e, qui est *d*, à la 5e, qui est *e*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le quatrième mode que la raison de *a* à *g* est composée de la raison de *b* a *u* et de la raison de *e* à *d*, donc soit la première *a*, la deuxième *g*, la troisième *b*, la quatrième *u*, la cinquième *e* et la sixième *d*. Mais nous avons déjà démontré dans le septième mode que la raison de *b* à *u* est composée de la raison de *a* à *g* et de la raison de *d* à *e*, si cela était ainsi.

D'autre part, le 12e mode est que la raison de la 2e, qui est *b*, à la 6e, qui est *u*, est aussi composée de la raison de la 1re, qui est *a*, à la 5e, qui est *e*, et de la raison, de la 4e, qui est *d*, à la 3e, qui est *g*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le onzième mode que la raison de *b* à *u* est composée de la raison de *a* à *g* et de la raison de *d* à *e*, donc soit la première *b*, la deuxième *u*, la troisième *a*, la quatrième *g*, la cinquième *d* et la sixième *e*. Mais nous avons déjà démontré dans le deuxième mode que la raison de *b* à *u* est composée de la raison de *a* à *e* et de la raison de *d* à *g*, si cela était ainsi.

D'autre part, le 13e mode est que la raison de la 3e, qui est *g*, à la 4e, qui est *d*, est composée de la raison de la 1re, qui est *a*, à la 5e, qui est *e*, et de la raison de la 6e, qui est *u*, à la 2e, qui est *b*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le septième mode que la raison de *g* à *d* est composée de la raison de *a* à *b* et de la raison de *u* à *e*, donc soit la première *g*, la deuxième *d*, la troisième *a*, la quatrième *b*, la cinquième *u* et la sixième *e*. Mais nous avons déjà expliqué dans le deuxième mode que la raison de *g* à *d* sera composée de la raison de *a* à *e* et de la raison de *u* à *b*, si cela était ainsi.

D'autre part, le 14e mode est que la raison de la 3e, qui est *g*, à la 6e, qui est *u*, est composée de la raison de la 1re, qui est *a*, à la 2e, qui est *b*, et de la raison de la 4e, qui est *d*, à la 5e, qui est *e*.

Modus vero undecimus est ut sit proportio secundae quae est *b* ad sextam quae est *u* composita ex proportione primae quae est *a* ad tertiam quae est *g* et ex proportione quartae quae est *d* ad quintam quae est *e*.

Quod sic probatur. Iam enim ostendimus in modo quarto quod proportio *a* ad *g* componitur ex proportione *b* ad *u* et ex proportione *e* ad *d*. Fiat ergo prima *a*. et[226] secunda *g*. et[227] tertia *b*. et quarta *u*. et quinta *e*. et sexta *d*. Iam vero ostendimus in modo septimo quod quando fuerit ita[228] tunc proportio *b* ad *u* componitur[229] ex proportione *a* ad *g* et ex proportione *d* ad *e*.

Modus autem duodecimus est ut sit proportio secundae quae est *b* ad sextam quae est *u* composita etiam ex proportione primae quae est *a* ad quintam quae est *e* et ex proportione quartae quae est *d* ad tertiam quae est *g*.

Quod sic probatur. Iam enim ostendimus[230] in modo undecimo quod proportio *b* ad *u* componitur ex proportione *a* ad *g* et ex proportione *d* ad *e*. fiat ergo prima *b*. et[231] secunda *u*. et[232] tertia *a*. et quarta *g*. et quinta *d*. et sexta *e*. Iam vero ostendimus in modo secundo quoniam cum illud fuerit ita tunc proportio *b* ad *u* componitur ex proportione *a* ad *e* et ex proportione *d* ad *g*.

Modus autem tredecimus est ut sit proportio tertiae quae est *g* ad quartam quae est *d* composita ex proportione primae quae est *a* ad quintam quae est *e* et ex proportione sextae quae est *u* ad secundam quae est *b*[233].

Quod sic probatur. Iam enim ostendimus in modo septimo quod proportio *g* ad *d*[234] componitur ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *u* ad *e*. fiat ergo prima *g* et secunda *d*. et[235] tertia *a*. et quarta *b*. et quinta *u*. et sexta *e*. Iam vero[236] declaravimus in modo secundo quod cum ita fuerit[237] tunc proportio *g* ad *d* componetur ex proportione *a* ad *e* et ex proportione *u* ad *b*.

Modus autem quartus decimus est, ut sit proportio tertiae quae est *g* ad sextam quae est *u* composita ex proportione primae quae est *a* ad secundam quae est *b* et ex proportione quartae quae est *d* ad quintam quae est *e*.

226 et] AP, om. E.
227 et] AP, om. E.
228 fuerit ita] E, illud ita fuerit AP.
229 componitur] E, componetur AP.
230 ostendimus] AE, declaravimus P.
231 et] AP, om. E.
232 et] AP, om. E.
233 et ex ... *b*] AP, om. B.
234 d] AP, b E.
235 et] AP, om. E.
236 vero] AP, enim E.
237 ita fuerit] E, illud fuerit ita A, illud ita fuerit P.

Cela est démontré ainsi : la raison de *g* à *u* est en effet composée de la raison de *g* à *d*, de la raison de *d* à *e* et de la raison de *e* à *u*. Mais la raison de *a* à *b* est composée de la raison de *g* à *d* et de la raison de *e* à *u*, donc la raison de *g* à *u* est composée de la raison de *a* à *b* et de la raison de *d* à *e*.

Le 15^{e} mode est alors que la raison de la 3^{e}, qui est *g*, à la 6^{e}, qui est *u*, est composée de la raison de la 1re, qui est *a*, à la 5^{e}, qui est *e*, et de la raison de la 4^{e}, qui est *d*, à la 2^{e}, qui est *b*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le quatorzième mode que la raison de *g* à *u* est composée de la raison de *a* à *b* et de la raison de *d* à *e*, donc soit la première *g*, la deuxième *u*, la troisième *a*, la quatrième *b*, la cinquième *d* et la sixième *e*. Mais nous avons déjà démontré dans le deuxième mode que la raison de *g* à *u* est composée de la raison de *a* à *e* et de la raison de *d* à *b*, si cela était ainsi.

D'autre part, le 16^{e} mode est que la raison de la 4^{e}, qui est *d*, à la 5^{e}, qui est *e*, est composée de la raison de la 2^{e}, qui est *b*, à la 1re, qui est *a*, et de la raison de la 3^{e}, qui est *g*, à la 6^{e}, qui est *u*.

Cela est démontré ainsi : la raison de *d* à *e* est en effet composée de la raison de *d* à *g*, de la raison de *g* à *u* et de la raison de *u* à *e*. Alors, la raison qui est composée de la raison de *d* à *g* et de la raison de *u* à *e* est la même que la raison de *b* à *a*, donc la raison de *d* à *e* est composée de la raison de *b* à *a* et de la raison de *g* à *u*.

D'autre part, le 17^{e} mode est que la raison de la 4^{e}, qui est *d*, à la 5^{e}, qui est *e*, est aussi composée de la raison de la 2^{e}, qui est *b*, à la 6^{e}, qui est *u*, et de la raison de la 3^{e}, qui est *g*, à la 1re, qui est *a*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le seizième mode que la raison de *d* à *e* est composée de la raison de *b* à *a* et de la

Quod sic probatur. Proportio enim *g* ad *a* componitur ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *d* ad *e* et ex proportione *e* ad *u*. Sed[238] proportio *a* ad *b* est composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u*. Ergo proportio *g* ad *u* componitur ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *d* ad *e*.

Modus vero quintus decimus est ut sit proportio tertiae quae est *g* ad sextam quae est *u* composita ex proportione primae quae est *a* ad quintam quae est *e* et ex proportione quartae quae est *d* ad secundam quae est *b*.

Quod sic probatur. Iam enim[239] ostendimus in modo quartodecimo quod proportio *g* ad *u* componitur ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *d* ad *e*. fiat ergo prima *g*, et[240] secunda *u*. et tertia *a*. et[241] quarta *b*. et[242] quinta *d*. et sexta *e*.[243] Iam vero declaravimus[244] in modo secundo quod cum illud ita[245] fuerit tunc proportio *g* ad *u* componitur ex proportione *a* ad e et ex proportione *d* ad *b*.

Modus autem sextus decimus est, ut sit proportio quartae quae est *d* ad quintam quae est *e* composita ex proportione secundae quae est *b* ad primam quae est *a* et ex proportione tertiae quae est *a* ad sextam quae est *u*.

Quod sic probatur. Proportio[246] enim *d* ad *e* componitur ex proportione *d* ad *g* et ex proportione *g* ad *u* et ex proportione *u* ad *e*. Proportio vero composita ex proportione *d* ad *g* et ex proportione *u* ad *e* est sicut[247] proportio *b* ad *a*.[248] Ergo proportio *d* ad *e* componitur ex proportione *b* ad *a* et ex proportione *g* ad *u*.

Modus autem septimus decimus est ut sit proportio quartae quae est *d* ad quintam quae est *e* composita etiam ex proportione secundae quae est *b* ad sextam quae est *u* et ex proportione tertiae quae est *g* ad primam quae est *a*.

Quod sic probatur. Iam enim ostendimus in modo sextodecimo quod proportio *d* ad *e* componitur ex proportione *b* ad *a* et ex proportione *g* ad *u*. Iam vero fiat[249]

[238] Sed] AP, componitur. Sed E.
[239] enim] AP, vero E.
[240] et] AP, om. E.
[241] et] AP, om. E.
[242] et] AP, om. E.
[243] e] AP, om. E.
[244] vero declaravimus] AP, enim ostendimus E.
[245] ita] AP, tunc ita E.
[246] Proportio] AP, om. E.
[247] est sicut] AP, et omnis E.
[248] a] EP, d A.
[249] fiat] E, sit prima ut A, sit P.

raison de *g* à *u*. Alors, soit la première *d*, la deuxième *e*, la troisième *b*, la quatrième *a*, la cinquième *g*, la sixième *u*. Mais nous avons déjà expliqué dans le deuxième mode que la raison de *d* à *e* est composée de la raison de *b* à *u* et de la raison de *g* à *a*, si cela était ainsi.

Le 18ᵉ mode est alors que la raison de la 5ᵉ, qui est *e*, à la 6ᵉ, qui est *u*, est composée de la raison de la 1ʳᵉ, qui est *a*, à la 3ᵉ, qui est *g*, et de la raison de la 4ᵉ, qui est *d*, à la 2ᵉ, qui est *b*.

Cela est démontré ainsi : nous avons en effet déjà démontré dans le huitième mode que la raison de *e* à *u* est composée de la raison de *a* à *b* et de la raison de *d* a *g*, donc soit la première *e*, la deuxième *u*, la troisième *a*, la quatrième *b*, la cinquième *d* et la sixième *g*. Mais nous avons déjà démontré dans le deuxième mode que, dans ce cas, la raison de *e* à *u* sera composée de la raison de *a* à *g* et de la raison de *d* à *b*.

Ce sont donc 18 modes. Et il est évident que nous pouvons inverser les termes dans les raisons pour chaque mode, et nous remplacerons le conséquent par l'antécédent et l'antécédent par le conséquent dans chaque raison. De là, dix-huit modes s'ensuivent selon leur inversion, chacun de ces modes étant inverse de son homologue. Et la composition des proportions y sera selon l'inversion. Et parmi ces six quantités, on ne trouve aucun mode autre que ceux que nous avons mentionnés, dans lequel la raison de deux de ces quantités soit composée de deux raisons, c'est-à-dire de deux raisons des quatre restantes.

§ 10. Mais alors pour trouver cela, j'ai élaboré des tables afin que l'investigateur trouve plus facilement ce qu'il veut. Et j'ai posé que la raison de ce qui est dans leur première colonne prolongée en longueur à ce qui est avant cela dans la deuxième colonne est composée de la raison de ce qui est avant cela dans la troisième colonne à ce qui est avant cela dans la quatrième colonne et de la raison de ce qui est avant cela dans la cinquième colonne à ce qui est avant cela dans la sixième colonne. En outre, les raisons de ce qui est dans la deuxième colonne à ce qui est dans la première colonne sont composées des raisons restantes inversées. En outre, s'il y a deux quantités avant lesquelles il y a un zéro, il ne faudra pas que la raison de l'une d'entre elles à l'autre soit composée de deux raisons, à savoir des raisons des (quantités) restantes. Mais ce qui est avant celles-ci dans la septième colonne prima *d*. et secunda *e*. et[250] tertia *b*. et quarta *a*. et quinta *g*. et sexta *u*. Et[251] vero iam declaravimus in modo secundo quod cum illud ita fuerit tunc proportio *d* ad *e* componitur[252] ex proportione *b* ad *u* et ex proportione *g* ad *a*.

Modus vero octavus decimus est ut sit proportio quintae quae est *e* ad sextam quae est *u* composita ex proportione primae quae est *a* ad tertiam quae est *g* et ex proportione quartae quae est *d* ad secundam quae est *b*.

Quod sic probatur. Iam enim ostendimus in[253] modo octavo quod proportio *e* ad *u* componitur ex proportione *a* ad *b* et ex proportione *d* ad *g*. fiat[254] ergo prima *e*. et[255] secunda *u*. et[256] tertia *a*. et quarta *b*. et[257] quinta *d*. et sexta *g*. Iam vero ostendimus in modo secundo quod cum illud ita fuerit tunc proportio *e* ad *u* componetur ex proportione *a* ad *g* et ex proportione *d* ad *b*.

Isti ergo[258] sunt decem et octo modi. Et manifestum est quod licet nobis in unoquoque modo convertere in proportionibus, et ponemus consequens in omni proportione antecedens et antecedens consequens, et pervenient inde[259] decem et octo modi secundum conversionem illius, quisque modus eorum conversus sui oppositi. Et erit compositio proportionum in eis secundum conversionem ; et non invenitur in his sex quantitatibus modus praeter illos quos nominavimus, in quo sit proportio duarum quantitatum ex eis composita ex duabus proportionibus, i. e. ex proportionibus quattuor reliquarum.

§10. Iam autem edidi[260] ad inveniendum illud tabulas, ut sit inventio eius quod voluerit inquisitor de eis facilior. Et posui proportionem[261] eius quod est in linea prima earum in longitudine producta ad illud, quod est ante ipsum in linea secunda, compositam ex proportione eius quod est ante ipsum in linea tertia, ad id quod est ante ipsum in linea quarta, et ex proportione eius quod est ante ipsum in linea quinta, ad id quod est ante ipsum in linea sexta. Proportiones autem eius, quod est in linea secunda, ad id quod est in linea prima, componuntur ex proportione reliquarum conversa. Cum autem fuerint quantitates duae, ante quas fuerit sifre, non oportebit ut sit proportio unius earum[262] ad alteram composita ex duabus proportionibus, scil. ex proportionibus reliquarum. Quod vero est ante eas in linea septima, est numerus modorum secundum quod ordi-

[250] et] AP, om. E.
[251] Vero] E, Et vero AP.
[252] componitur] E, componetur AP.
[253] in] AP, in modo secundo quod cum illud ita fuerit in E.
[254] fiat] E, fiet AP.
[255] et] AP, om. E.
[256] et] AP, om. E.
[257] et] AP, om. E.
[258] ergo] BP, vero A.
[259] inde] BP, idem A.
[260] edidi] AB, eddidi P.
[261] proportionem] AP, proportione B.
[262] earum] APE, eorum Björnbo.

est le nombre des modes selon lequel j'ai ordonné leur explication, de sorte qu'un chercheur, s'il veut retourner à la démonstration de l'un d'eux, la trouve facilement.

§ 11. Nous avons donc expliqué maintenant le sujet des 18 modes et de leur inversion. Qu'il n'y ait cependant aucun autre mode ici que ceux-là, dans lequel la raison de deux des six quantités dont la description précède est nécessairement composée de deux raisons, à savoir des raisons des quatre restantes, cela est démontré comme je le décris : après avoir apparié chacune des six quantités avec chacune des quantités restantes et après avoir pris leur raison et après avoir regroupé tout cela, nous aurons quinze combinaisons. Nous avons déjà expliqué de quelles paires de raisons neuf d'entre elles sont composées ; après cela, il ne reste que six combinaisons, à savoir la 1re avec la 4e, la 1re avec la 6e, la 2e avec la 3e, la 2e avec la 5e, la 3e avec la 5e et la 4e avec la 6e. Et de ces combinaisons, il n'y en a aucune dont la raison soit nécessairement composée de deux raisons, c'est-à-dire des quatre quantités qui sont restées. Et il en est ainsi parce que nous poserons les lignes a, b, g, d, e, u selon le premier mode ; je dis donc d'abord qu'il n'est pas nécessaire que la raison de la 1re, qui est a, à la 4e, qui est d soit composée de deux raisons qui existent entre les quatre quantités b, g, e, u, quelle que soit la manière dont sont choisies deux raisons parmi leurs raisons ou de la façon inverse.

Cela est démontré ainsi : je poserai donc la ligne z soit plus petite soit plus grande que la ligne a. Et je poserai une surface rectangulaire égale à a fois d et telle que la raison de l'un de ses côtés à l'autre soit la même que la raison de z à d, que ses côtés soient h, t. Et que la raison de h, qui est l'un d'eux, à t soit la même que la raison de z à d. Mais h fois z est égal à a fois d, donc la raison de h à a est la même que la raison de d à t. Alors, la raison de a à b est composée de la raison de g à d et de la raison de e à u, donc la raison composée de la raison de h à a et de la raison de a à b – qui est égale à la raison de h à b – est égale à la raison composée de la raison de d à t, de la raison de g à d et de la raison de e à u. C'est pourquoi la raison de h à b sera égale à la raison composée de la raison de g à t et de la raison de e à u. Par conséquent, quatre de ces six quantités, qui sont b, g, e, u, sont quatre des six originales et elles ne se distinguent que par la première et la quatrième d'entre elles. Et s'il avait un mode unique nécessaire en soi-même, tel que la raison de la première à la quatrième de toutes les six quantités fût composée des deux mêmes raisons des quatre (quantités) restantes, quelles navi de eis sermonem autecedentem, donec, cum voluerit inquisitor reditionem in probatione alicuius eorum, inveniat ipsam leviter.

§11. Iam ergo declaravimus rem decem et octo modorum et conversionem eorum. Quod autem non sit hic modus alius praeter illos, in quo oportet[263] ut sit proportio[264] duarum sex quantitatum, quarum narratio praecessit, composita ex duabus proportionibus scil. ex proportionibus quattuor reliquarum, demonstratur ex eo quod narro : Et est quod, quando comparaverimus[265] unamquamque sex quantitatum cum unaquaque reliquarum quantitatum earum, et proportionaverimus ipsam ei et comprehenderimus illud totum, erit suma (*sic*) illius quindecim combinationes. Et nos iam declaravimus ex quibus duabus proportionibus componantur novem earum, neque remanent post illud (*sic*) nisi sex combinationes[266], quae sunt prima cum quarta, et prima cum sexta, et secunda cum tertia, et secunda cum quinta, et tertia cum quinta, et quarta cum sexta ; harum autem combinationum nulla est, cuius proportio necessarie sit composita[267] ex duabus proportionibus, scil. quattuor quantitatum quae remanserunt. Et illud est, quia[268] nos ponemus lineas *abgdeu* secundum modum primum, dico igitur primum, quod proportio primae quae est *a* ad quartam quae est *d*, non est necesse, ut sit composita ex duabus proportionibus, quae sunt inter quantitates *b*, *g*, *e*, *u* quattuor, quocunque modo sumantur[269] duae proportiones ex proportionibus[270] earum aut conversim ; quod sic probatur : Ponam enim lineam *z* aut minorem aut maiorem linea *a* ; et ponam superficiem orthogoniam aequalem ei quod est ex *a* in *d*, cuius unius lateris proportio ad aliud sit sicut proportio *z* ad *d*, sintque latera eius *h t* ; et sit proportio *h*, quod est unum eorum, ad *t* sicut proportio *z* ad *d*. Sed illud quod est ex *h* in *t* est aequale ei quod est ex *a* in *d*, ergo proportio *h* ad *a* est sicut proportio *d* ad *t*, proportio vero *a* ad *b* componitur ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u*, ergo proportio composita ex proportione *h* ad *a* et ex proportione *a* ad *b*, quae est sicut proportio *h* ad *b*, est aequalis proportioni composita ex proportione *d* ad *t*[271] et ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u* ; qua propter erit proportio *h* ad *b* aequalis proportioni compositae ex proportione *g* ad *t*[272] et ex proportione *e* ad *u*. Harum igitur sex quantitatum quattuor, quae sunt *b g e u* sunt quattuor sex primarum et neque est in eis diversitas nisi in[273] prima et quarta earum tantum ; quod si esset modus unus necessarius in se, ut proportio primae ad quartam omnium sex quantitatum esset composita ex duabus proportionibus eisdem quattuor reliquarum, quaecunque duae propor-

[263] oporteat] BP, oportet A.
[264] proportio] AP, disponere (?) proportio B.
[265] comparaverimus]BP, comparavimus A.
[266] Et nos ... combinationes] A in marg. BP in textu.
[267] proportio ... composita] A, proportionem necesse sit componi BP.
[268] quia] A, quod BP.
[269] sumantur] B, summantur AP.
[270] proportionibus] proportione ABP.
[271] Addid. A in marg. : quia *d* ad *t* est sicut *h* ad *a*.
[272] Addid. A in marg. : quia *a* ad *b* est composita ex *g* ad *t* (?).
[273] in] AP, om. B.

que soient ces deux raisons, et si les quatre restantes des six quantités originales coïncidaient avec les quatre restantes des six quantités postérieures, la raison de la première des six (quantités) originales, qui est a, à la quatrième d'entre elles, qui est d, serait la même que la raison de la première des six postérieures, qui est h, à la quatrième d'entre elles, qui est t. Mais la raison de h à t était déjà la même que la raison de z à d, donc la raison de a à d est la même que la raison de z à d. Donc z sera égale à a. Or, l'une d'elles était plus longue que l'autre, c'est en effet une contradiction, il n'y a donc pas ici un mode unique pour la première et la quatrième, selon lequel il serait nécessaire que la raison de celle-ci à elle-même soit composée des deux mêmes raisons entre les quatre restantes. Et je maintiens aussi qu'il n'y a pas ici différents modes par lesquels la raison de la première à la quatrième aurait lieu et par lesquels elle serait composée pour quelques quantités de deux raisons d'entre les quatre restantes et pour quelques-unes d'entre elles de deux autres raisons d'entre elles. Car il est manifeste que l'agrégation de toutes les paires de raisons acceptées parmi quatre quantités a un certain nombre défini et global, et ce nombre lui-même est douze.

première	deuxième	troisième	quatrième	cinquième	sixième	septième nombres des modes
1	2	3	4	6	9	1
1	2	3	9	6	4	2
1	3	2	4	6	9	3
1	3	2	9	6	4	4
1	4	0	0	0	0	0
1	6	2	9	3	4	5
1	6	2	4	3	9	6
1	9	0	0	0	0	0
3	4	1	2	9	6	7
3	6	0	0	0	0	0
6	9	1	2	4	3	8
2	3	0	0	0	0	0
2	4	1	3	9	6	9
2	4	1	6	9	3	10
2	6	0	0	0	0	0
2	9	1	3	4	6	11
2	9	1	6	4	3	12
3	4	0	0	0	0	0
3	9	1	2	4	6	14
3	9	1	6	4	2	15
4	6	2	1	3	9	16
4	6	2	9	3	1	17
6	9	1	3	4	2	18

Quant aux lignes, il nous est permis d'en poser autant que nous voulons en nombre plus grand que ce nombre et que les quantités de toutes (les lignes) soient différentes comme lorsque nous avons posé par exemple la ligne z.

tiones essent, et essent quattuor reliquae hic sex quantitatum primarum existentes quattuor reliquae sex quantitatum postremarum, esset proportio primae sex primarum quae est *a* ad quartam earum quae est *d*, sicut proportio primae sex primarum quae est *a* ad quartam earum quae est *d*, sicut proportio primae sex postremarum quae est *h* ad quartam earum quae est *t* ; sed proportio *h* ad *t* iam fuit sicut proportio *z* ad *d*, ergo proportio *a* ad *d* est sicut proportio *z* ad *d*, ergo erit *z* aequalis *a* ; iam vero fuit una earum longior altera, hoc quidem est contrarium, non est ergo hic modus unus in prima et quarta, per quem oporteat, ut sit proportio eius ad ipsam composita ex duabus proportionibus eisdem inter quattuor reliquas. Et dico etiam quod non sunt[274] hic modi diversi per quos fiat proportio primae ad quartam, quandoque[275] et in quibusdam quantitatibus composita ex duabus proportionibus inter reliquas quattuor, et in quibusdam[276] earum ex duabus proportionibus aliis earum. Manifestum namque est, quod aggregatio omnium duarum proportionum acceptarum inter quattuor quantitates habet numerum aliquem diffinitum comprehensum, et ipse numerus est duodecim ;

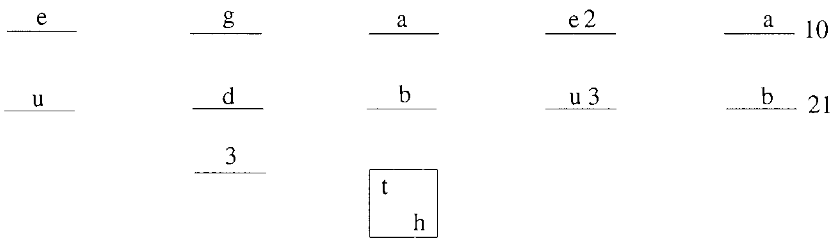
Prima	Sec.	Tert.	Quart.	Quint.	Sext.	Sept.[277] [Numeri modorum]
1	2	3	4	6	9	1
1	2	3	9	6	4	2
1	3	2	4	6	9	3
1	3	2	9	6	4	4
1	4	0	0	0	0	0
1	6	2	9	3	4	5
1	6	2	4	3	9	6
1[278]	9	0	0	0	0	0
3	4	1	2	9	6	7
3	6	0	0	0	0	0
6	9	1	2	4	3	8
2	3	0	0	0	0	0
2	4	1	3	9	6	9
2	4	1	6	9	3	10
2	6	0	0	0	0	0
2	9	1	3	4	6	11
2	9	1	6	4	3	12
3	4	0	0	0	0	0
3	9	1	2	4	6	14
3	9	1	6	4	2	15
4	6	2	1	3	9	16
4	6	2	9	3	1	17
6	9	1	3	4	2	18

de lineis vero licet nobis ponere quantas voluerimus, quarum numeratio sit maior hac numeratione et sint omnes diversarum quantitatum, quem ad modum

[274] sunt] BP, sint A.
[275] Addid. BP in marg. : i.e. semel ; quandoque (?) Björnbo.
[276] Quibusdam] AP, quidam B.
[277] E omet la table ; AB ont des chiffres romains, P a des chiffres arabes.
[278] 1] 2 ABP.

Et je vais montrer pour toutes celles-ci, comme je l'ai montré maintenant, que la raison de chacune d'elles à *d* sera composée de deux raisons des quatre (quantités) qui sont *g*, *d*, *e*, *u*, si la situation est conforme à ce que nous avons dit. Et puisque nous avons déjà trouvé trois lignes présentées (trois ou *z*) plus nombreuses que le nombre des modes dont nous avons montré la réunion pour toutes les paires de raisons entre les quatre (quantités), il est alors nécessaire que la raison de quelques-unes des lignes que nous avons trouvées, qui sont parmi celles présentées, de la ligne *z* à la ligne *d*, soit la même que la raison d'une autre de ces lignes à la ligne *d*, parce qu'elle-même est composée des deux mêmes raisons usitées, à savoir des raisons des quatre quantités. Par conséquent, deux lignes parmi elles sont égales, ou plus de deux lignes. Mais nous les avions déjà posées différentes. C'est certes une contradiction. Par conséquent, il n'est pas nécessaire que la raison de *a* à *d* soit composée de deux raisons d'entre les quatre restantes, ni de deux mêmes raisons ni tantôt de deux raisons quelconques et tantôt de deux autres de ces raisons, ni non plus la raison de *d* à *a*. Car si cela était nécessaire, son inverse serait (aussi) nécessaire. Ainsi, nous avons démontré maintenant ce que nous avons voulu (démontrer) pour cette combinaison.

Il nous est alors possible d'expliquer le problème des cinq combinaisons restantes et le fait qu'il n'y a pas nécessairement dans leur cas de combinaison de raisons d'après ce que nous avons dit de ce qui est semblable à cela, et aussi parce que cela a été démontré pour la première et la quatrième, qui sont *a*, *d*. Car s'il était nécessaire, pour *a*, *d*, que leur raison soit composée de deux raisons d'entre les quatre (quantités) restantes, cela serait nécessaire pour *a*, *u*. Car nous pouvons poser la première *a*, la deuxième *b*, la troisième *e*, la quatrième *u*, la cinquième *g* et la sixième *d*, donc dans ce cas, *a*, *d* vont occuper la place de la première et de la sixième. Mais nous avons déjà démontré que ce n'est pas nécessaire pour *a*, *d*, donc ce n'est pas nécessaire pour *a*, *u*. Et pareillement, le cas de la deuxième et de la troisième, qui



posuimus lineam *z* ; et ostendam in eis omnibus sicut ostendi nunc, quod proportio cuiusque earum ad *d* erit composita ex duabus proportionibus quattuor, quae sunt *g d e u*, si esset res secundum quod diximus. Et quia iam invenimus lineas relatas[279] 3 (tres aut *z*) plures numeri numero modorum quos aggregari ostendimus ex omnibus duabus proportionibus quattuor, tunc necessarium est quod sit proportio quarumdam linearum quas invenimus quae sunt de relatis lineae *z* ad lineam *d*, sicut proportio lineae alterius ex eis ad lineam *d*[280], quoniam ipsa componitur ex duabus proportionibus eisdem usitatis[281], scil. ex proportionibus quattuor quantitatum. Erunt igitur duae lineae ex eis aequales aut plures duabus lineis ; nos vero iam posuimus eas diversas, hoc quidem contrarium est, non oportet igitur, ut sit proportio *a* ad *d* composita ex duabus proportionibus inter quattuor reliquas neque ex duabus proportionibus eisdem, neque quandoque[282] ex aliquibus duabus proportionibus et quandoque[283] ex duabus proportionibus aliis earum ; neque proportio *d* ad *a* etiam, si enim esset necessarium, eius conversio esset necessaria ; iam igitur ostendimus id quod voluimus in hac combinatione.

Iam vero possibile nobis est, ut declaremus[284] rem combinationum aliarum quinque reliquarum, et quod non est necessaria in eis compositio proportionum secundum quod diximus per id quod simile est isti ; et ideo etiam quia ostensum est[285] illud in prima et quarta quae sunt *a d*, quoniam, si esset necessarium in *a d*, ut componeretur ex duabus proportionibus quae sunt[286] inter quattuor reliquas, foret necessarium illud in *a u* ; licet enim nobis ut ponamus *a* primam et *b* secundam et *e* tertiam et *u* quartam et *g* quintam et *d* sextam ; erunt ergo tunc *a d* loco primae et sextae, nos vero iam ostendimus, quod illud non est necessarium in *a d*, ergo non est necessarium in *a u*. Et per similitudinem illius declaratur res

e[287]	g	a	e2	a	10
u	d	b	u 3	b	21
	3	t h			

[279] relatas] rellatas ABP.
[280] sicut ... *d*] AP, in marg. B.
[281] usitatis] Knobloch, itatis AEP, statis Björnbo.
[282] quandoque] ABPE, quandoque (?) Björnbo.
[283] quandoque] ABPE, quandoque (?) Björnbo.
[284] declaremus] BP, declararemus A ?, declaramus Björnbo.
[285] est] AB, om. P.
[286] sunt] est ABP.
[287] *e*] P.

sont b, g, est expliqué. Car nous pouvons poser la première b, la deuxième a, la troisième d, la quatrième g, la cinquième u et la sixième e. Donc a et d vont occuper la place de la deuxième et de la troisième. Et pareillement, aussi le cas de la deuxième et de la cinquième, qui sont b et e, est expliqué. Car nous pouvons poser la première b, la deuxième a, la troisième u, la quatrième e, la cinquième d et la sixième g, et a, d vont occuper la place de la deuxième et de la cinquième. Aussi pareillement, le cas de la troisième et de la cinquième, qui sont g, e, est démontré. Car nous pouvons poser la première e, la deuxième u, la troisième a, la quatrième b, la cinquième d et la sixième g, et a, d vont occuper la place de la troisième et de la cinquième. Aussi pareillement, le cas de la quatrième et de la sixième est démontré. Car nous pouvons poser la première u, la deuxième e, la troisième b, la quatrième a, la cinquième g et la sixième d, et a, d vont occuper la place de la quatrième et de la sixième. Ce sont donc les six combinaisons pour lesquelles le fait d'une composition d'une raison n'est pas nécessaire comme ce qui est nécessaire dans le cas des neuf combinaisons restantes.

§ 12. Mais nous avons déjà démontré que, pour chacune en particulier de ces combinaisons-là, deux modes de composition sont nécessaires. Je maintiens donc qu'un troisième mode n'est pas nécessaire pour n'importe lesquelles d'entre elles. Et j'en exposerai un exemple, semblable à celui qui précède.

Donc la raison de a à b est composée de la raison de g à d et de la raison de e à u. Mais nous avons déjà démontré qu'il faut que, conformément à cela, la raison de a à b soit aussi composée de la raison de g à u et de la raison de e à d. Par conséquent, je maintiens qu'un troisième mode n'est pas nécessaire là. Et cela parce qu'on pourra dire que cette raison est composée ou bien d'une raison qui est entre g, e et d, u, ou bien de celle qui est entre g, d et e, u, ou bien de celle qui est entre g, u et d, e. Et s'il était nécessaire qu'elle fût composée de la raison qui est entre g, e et d, u, chacune en particulier des deux raisons g, e et d, u serait aussi composée de deux raisons entre les quatre restantes. Mais nous avons déjà démontré que cela n'est pas nécessaire. Alors, en ce qui concerne la raison entre g, d et e, u et celle entre g, u et d, e, nous avons déjà dit qu'elle est composée selon deux modes pour chacune en particulier. Par conséquent, je maintiens qu'il n'est pas nécessaire qu'elle soit composée selon un autre mode parmi ceux qui se trouvent entre celles-là en fait de raisons : et cela parce qu'il est encore possible que les deux quantités a, b ne soient pas égales, et semblablement les quantités g, d, e, u. Supposons que cela soit le cas et que la raison de a à b, précédemment composée de deux raisons entre g, d et e, u, soit composée autrement que selon le mode que nous avons mentionné, si c'est possible. Donc, si elle était composée de la raison de g à d et de la raison de u à e, quoiqu'elle fût déjà aussi composée de la raison de g à d et de la raison de e à u, la raison de u à e serait la même que la raison de e à u. Par conséquent, aucune des secundae et tertiae, quae *bg* ; licetenim nobis ponere *b* primam et *a* secundam et *d* tertiam et *g* quartam et *u* quintam et *e* sextam ; erunt ergo *a* et *d* in loco secundae et tertiae. Et similiter etiam[288]demonstratur res secundae et quintae, quae sunt *b* et *e* ; licet enim[289] nobis ut ponamus *b* primam et *a* secundam et *u* tertiam et *e* quartam et *d* quintam et *g* sextam, et erunt *a d* loco secundae et quintae. Similiter quoque ostenditur res tertiae et quintae quae sunt *g e* ; licet enim nobis ponere *e* primam et *u* secundam et *a* tertiam et *b* quartam et *d* quintam et *g* sextam, et erunt *a d* in loco tertiae et quintae. Similiter quoque demonstratur res quartae et sextae ; licet enim nobis, ut ponamus *u* primam et *e* secundam et *b* tertiam, et *a* quartam et *g* quintam et *d* sextam et erunt *a d* in loco quartae et sextae. Haec[290] ergo sunt sex combinationes in quibus non est necessaria res compositionis proportionis sicut illa quae est necessaria in re novem reliquarum.

§12. Nos autem iam ostendimus quod necessarii sunt in unaquaque illarum duo modi[291] compositionis, dico igitur quod non est necessarius in aliqua earum[292] modus tertius. Et ponam exemplum in eo simile illi quod praecessit. Proportio igitur *a* ad *b* componitur ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u* ; nos autem iam ostendimus, quod oportet secundum illud, ut sit proportio a ad *b* composita etiam ex proportione *g* ad *u* et ex proportione *e* ad *d*, dico igitur quod non est necessarius in illo modus tertias. Et illud est[293], quoniam haec proportio aut[294] dicetur esse composita ex proportione quae est inter *g e* et *d u*, aut ex ea quae est inter *g d* et *e u*, aut ex ea quae est inter *g u* et *d e*. Quod si fuerit necessarium ut sit composita ex proportione quae est inter *g e* et *d u*, erit unaquaque duarum proportionum *g e* et *d u* etiam composita ex duabus proportionibus inter quattuor reliquas ; sed nos iam ostendimus, quod illud non est necessarium. De ea vero quae est inter *g d* et *e u*, et de ea quae est inter *g u* et *d e*[295], iam diximus quod componitnr secundum duos modos in unaquaque earum ; dico igitur, quod non oportet ut componatur secundum modum alium eorum qui sunt inter istas de proportionibus ; et illud est quoniam iam possibile est, ut sint quantitates duae *a b* non aequales, et similiter quantitates *g d e u*. Sit ergo ita, et sit proportio *a* ad *b* prius composita ex duabus proportionibus quae sunt inter *g d* et *e u*, non secundum modum quem diximus, si possibile est illud. Si ergo composita fuerit ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *u* ad *e*, cum iam fuerit etiam composita ex proportione *g* ad *d* et ex proportione *e* ad *u*, tunc proportio *u* ad *e* erit sicut proportio *e* ad *u*, duarum igitur linearum *e u* non est una maior altera ; nos autem

[288] etiam] P, om. AB.
[289] [235] enim] AP, om. B.
[290] Haec] ABPE, Hac Björnbo.
[291] modi] AB, modo P.
[292] earum] P, eorum AB.
[293] est] AP, om. B.
[294] aut] BP, autem A.
[295] *gu* et *de*] Knobloch, *ge* et *du* AP, *ge* et *du* (?) Björnbo, *gu* et *ed* E.

deux lignes e, u n'est plus grande que l'autre. Mais alors nous les avions supposées différentes. C'est en effet une contradiction. Et si la raison de a à b était composée de la raison de d à g et de la raison de e à u, on démontrerait, d'une manière semblable à celle-ci, que d, g sont égales, mais ce n'est pas le cas. Si donc la raison de a à b était composée de la raison de d à g et de la raison de u à e alors que la raison de b à a est aussi composée de ces deux raisons, a, b seraient égales. Mais elles ne sont pas égales. Par conséquent, la raison de a à b n'est pas composée de la raison entre g, d et e, u selon aucun mode excepté celui que nous avons mentionné plus haut. D'une manière semblable, on démontre aussi, qu'elle n'est composée d'une raison entre g, u, d, e que selon le seul mode dont nous avons parlé plus haut. Car si cela arrivait selon un autre mode, ou bien les deux quantités g, u ou bien les deux quantités d, e ou bien les deux quantités a, b seraient égales. Mais ce n'est pas le cas. Par conséquent, il n'y a pas ici de troisième mode pour la composition de la raison de a à b excepté les deux modes que nous avons mentionnés.

D'une manière semblable, il n'y aura que deux modes pour une combinaison quelconque des combinaisons restantes parmi les neuf combinaisons. Par conséquent, le nombre total des modes sera dix-huit modes et leurs inverses seulement, ni moins ni plus que ceux-ci. Car la raison des combinaisons restantes est déjà éliminée comme nous l'avons démontré dans ce qui précède. C'est la fin du livre sur la figure secteur par Thābit ibn Qurra.

iam posuimus eas diversas, hoc quidem est contrarium. Quod si composita fuerit proportio *a* ad *b* ex[296] proportione *d* ad *g* et ex proportione *e* ad *u*, demonstrabitur secundum viam huic similem, quod *d g* sunt aequales, sed non est ita. Si ergo composita fuerit proportio *a* ad *b* ex proportione *d* ad *g* et ex proportione *u* ad *e*, et proportio *b* ad *a* est etiam composita ex his duabus proportionibus, tunc *a b* erunt aequales ; sed non sunt ita ; proportio igitur *a* ad *b* non componitur ex proportione, quae est inter *g d* et *e u*, secundum aliquem modorum excepto eo quem praediximus. Similiter quoque ostenditur, quod non est composita ex proportione quae est inter *g u d e* nisi secundum modum unum cuius praemisimus narrationem ; si enim contingeret illud secundum modum alium, aequarentur[297] aut duae quantitates *g u*, aut duae quantitates *d e*, aut duae quantitates *a b*, sed illud non est ita. Nun est igitur hic modus tertius in compositione proportionis *a* ad *b* exceptis duabus modis quos diximus.

Similiter quoque non erunt in aliqua combinationum reliquarum de novem[298] combinationibus nisi duo modi[299] ; erit igitur[300] summa modorum decem et octo[301] modi et eorum conversiones tantum, neque pauciores illis neque plures. Proportio enim combinationum reliquarum iam sublata est, sicut ostendimus in his quae praecesserunt. Explicit liber de figura sectore thebit iben cora *(sic)*[302].

[296] ex] BP, et ex A.
[297] aequarentur] BPE (à partir d'ici, Björnbo utilise de nouveau E), aequaretur A.
[298] novem] ABP, IX E.
[299] duo modi] ABP, om. E.
[300] igitur] ABP, ergo E.
[301] decem et octo] ABP, XVIII E.
[302] Explicit ... cora] BP, explicit tractatus Campani de figura sectoris E, om. A.

CHAPITRE V

COSMOLOGIE ET MÉTAPHYSIQUE

THE ASTRONOMY OF THĀBIT IBN QURRA

Régis MORELON

Thābit ibn Qurra (born in 211/826 and died in 288/901) is especially known as a mathematician, and equally respected as a translator from Greek to Arabic, but his work in astronomy is also important. Various Arabic bio-bibliographic works list between thirty to forty titles of treatises attributed to this author in this discipline. Among these, only nine have survived under his name, and these treatises have been carefully edited by myself with translation and commentary.[1] However, we must exclude from this group the *Book on the Solar Year* (*Kitāb fī Sanat al-shams*), as I have previously shown that it is in fact not his work.[2] Thus we will examine the eight complete treatises written by Thābit, in order to judge his work in scientific astronomy.

CONTENT OF THE COMPLETE TREATISES

1) *The Almagest Simplified* (*Kitāb Tashīl al-Majisṭī*) and the *Presentation of the Orbs of Heavenly Bodies...* referred to respectively as Treatise no. 1 and Treatise no. 2 in the edition of the *Works of Astronomy* of Thābit.[3]

Here he offers two very simple texts which constitute an introduction to the astronomy of Ptolemy. Only *The Almagest* of Ptolemy is cited explicitly, but these two treatises, taken together, appear to be a simplified rendition of the first treatise of the *Book of Hypotheses* (*Kitāb al-Iqtiṣāṣ*), also written by Ptolemy. *The Almagest Simplified*, after a listing of general definitions

[1] See Thābit Ibn Qurra, *Œuvres d'astronomie*, ed., translation and commentary by R. Morelon, coll. Sciences et philosophie arabes, Textes et études, Paris, Les Belles Lettres, 1987. It is in this work that will be found the diverse references, in their large majority, as it is here that one finds the details of the proofs to which this text only makes quick allusion.

[2] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction to Treatise no. 3, pp. XLVI-LIII.

[3] For these two treatises, see Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction pp. XXXVII-XLV, text and translation pp. 1-25, commentary pp. 170-188.

and a global presentation of the geocentric universe, reprises the second part of the *Book of Hypotheses* to discuss the distances and descriptions of the stars; the *Presentation of Orbs...* reprises the first part which details the organisation of the circles of different celestial orbs, star by star, exactly as found in this second work of Ptolemy.

2) *On The Deceleration and Acceleration of the Motion of the Ecliptic According to the Place where this Movement is Found on the Eccentric*, referred to as Treatise no. 4 in the previously cited work.[4]

Thābit re-examines here a problem posed in Book III of *The Almagest* on the study of the motion of the sun on its eccentric orb: Ptolemy addresses the inequality of the sun's apparent motion, given that the sun has a uniform circular path on its orb. He states that the apparent motion is slowest when the sun is in the region of apogee, and fastest in the region of perigee. He affirms as well that between apogee and perigee there is a point of mean transition, found on the ecliptic at 90° from apogee.[5] Using geometry, Thābit shows that this is true in the general case.

He considers the problem in a purely theoretical fashion: Given an eccentric ABC with center D, through which moves a body of uniform circular motion, this body being a star or the center of an epicycle. From the earth at E, one observes this displacement on the ecliptic $A'B'C'$, and this apparent motion is irregular.

Given equal arcs on the eccentric, in which the moving body travels in equal times: GF on either side of the apogee A, HI on either side of perigee C, BK near A, LM near C. The corresponding motion is observed on the ecliptic as its path on the arcs $G'F'$, $H'I'$, $B'K'$, $L'M'$.

Thābit, using geometric proofs taken from Euclid's *Elements*, demonstrates rigorously that $G'F' < B'K' < L'M' < H'I'$, knowing that $GF = BK = LM = HI$. He concludes as follows:

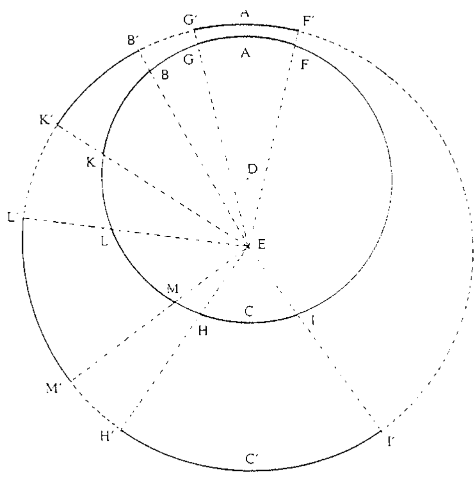


Fig. 1

[4] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction pp. LXXVI-LXXIX, text and translation pp. 68-82, commentary pp. 216-221.

[5] See Ptolemy, *The Almagest*, edition by J. L. Heiberg, 2 vol., Leipzig, 1898-1903; English translation by G.J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, London, Duckworth, 1984, pp. 145-146.

> Thus the apparent progression of the moving body on the ecliptic is slowest when it is at point A, and the fastest when at point C. Near point A the progression of the body is slower than at a point which is further away from A.[6]

We notice that, in this conclusion and elsewhere in his demonstration, Thābit speaks of the speed of a moving body at apogee and at perigee. This is, to the best of our knowledge, the first instance in history in which arises the notion of speed at a particular point. After this first theorem, Thābit then establishes a second:

Given again an eccentric ABC with center D, the ecliptic with center E, points B and F of the eccentric from which the distance to the apogee, A, in apparent motion, is one quarter of a circle, and given two points H and I on the eccentric, corresponding to H' and I' on the ecliptic, such that angle IEB is equal to angle HEB.

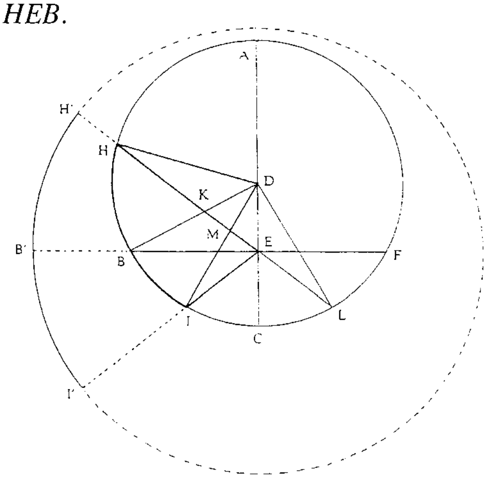


Fig. 2

Thābit proves geometrically that angle HDI is equal to angle HEI; therefore the sum of the two true angular movements on the arcs HB and BI is equal to the sum of the two apparent movements on the arcs $H'B'$ and $B'I'$. Similar results would be obtained using analogous arcs around point F. Thābit thus concludes the following:

> The closer the apparent motion of a moving body is to either point B or point F, the closer the apparent motion approaches that of true motion; and each time one takes, in opposite directions from either point B or point F, two arcs of equal apparent motion on the ecliptic, their sum is equal to the true motion. These points, B and F, are the two points which directly resemble two points of true motion.

[6] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, p. 78.

These two theorems allow Thābit to mathematically analyze true and apparent motion in their reciprocal relations, and this analysis allows him to place two axes of symmetry; one, AC, for the true motion on the eccentric, and the other, BF, for the apparent motion on the ecliptic when both are observed from point E. This treatise constitutes the first mathematical analysis of non-uniform motion.

3) *Treatise on the Motion of Two Luminous Bodies* referred to as Treatise no. 5 in the preceding work.[7]

Thābit re-examines a problem put forth by Ptolemy in the beginning of Book IV of *The Almagest* to expand and clarify the way in which those before him had studied the motion of the moon. His study of lunar motion is based on observations of the moon during lunar eclipses, when the relative positions of the moon and sun can be ascertained without any parallax error to skew the results of the observations. The movement of the sun had been studied in Book III, he concentrates now on choosing intervals of time corresponding to the cycles of the moon. These time intervals are chosen such that lunar eclipses periodically occur at their extremities. Also, during these time intervals, it must be known that the moon has been able to accomplish complete revolutions through each of its different orbs. Once the number of these revolutions is known, one can then determine the periodicity of the various movements of the moon. Before examining how Ptolemy resolved this problem, we will start by looking at how Thābit has defined it.

Thābit first turns his attention to the sun, using again the two axes of symmetry determined in the preceding treatise for the motion of a moving body on an eccentric. These arcs are represented by AP and BC on the following figure, O being the place of the observer, center of the ecliptic, and E the center of the eccentric. In the first interval of time t_1, the sun travels from M_1 to M_2; in the second interval $t_2 = t_1$, it travels from N_1 to N_2. These two arcs of true motion are thus equal, $M_1M_2 = N_1N_2$, and the question thus becomes that of the arcs of corresponding apparent motion observed on the ecliptic: $M_1'M_2'$ and $N_1'N_2'$.

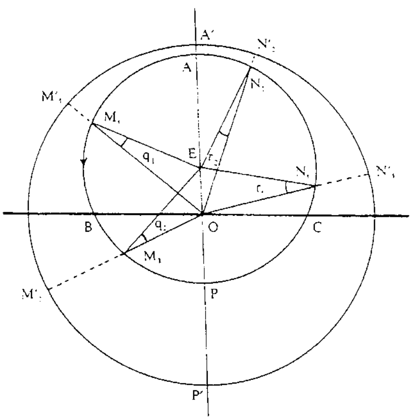


Fig. 3

[7] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction pp. LXXX-XCII, text and translation pp. 83-92, commentary pp. 222-229.

The mathematical relationship between the arcs $M_1'M_2'$ and $N_1'N_2'$ would depend on the respective positions of M_1 and M_2 on the eccentric, following the results of the treatise just described.

Defining q_1 and q_2, r_1 and r_2, respectively, as the differences between the true and apparent motion for M_1 and M_2, N_1 and N_2, we obtain:

$$M_1M_2 - M_1'M_2' = q_2 - q_1; \text{ and } N_1N_2 - N_1'N_2' = r_2 - r_1.$$

Keeping $t_1 = t_2$, i.e. two equal time intervals, Thābit obtains seven modes of composition between the two movements, which can be expressed in purely theoretical fashion in terms of the mathematical relationship between $(q_2 - q_1)$ and $(r_2 - r_1)$, applicable immediately to the case of the sun:

1) During t_1 the sun starts from M_2 and returns to the same point after a number of complete revolutions, in t_2 it likewise starts from and returns back to N_1. It is therefore evident that $q_1 = q_2$, and $r_1 = r_2$.
2) $q_2 - q_1 = r_2 - r_1 = 0$
3) $q_2 - q_1 = r_2 - r_1 > 0$
4) $q_2 - q_1 = r_2 - r_1 < 0$
5) $|q_2 - q_1| = |r_2 - r_1|$; but the two quantities are of opposite sign.
6) $q_2 - q_1 \neq r_2 - r_1$
7) $q_2 - q_1 = 0$, and $r_2 - r_1 \neq 0$

In these two equal time intervals there is equality of the apparent movement for modes 1 to 4, and inequality for modes 5 to 7; in the modes 1 and 2 the true motion is equal to the apparent motion (mode 2 corresponding to the second theorem described above). Figure 3 shows the general case of mode 6.

Using the two theorems of the preceding treatise, and in reference to the two axes of symmetry, we can easily locate the points M_1 and M_2, N_1 and N_2, corresponding to the start and end points of the sun in the two equal time intervals for each of the seven modes.

The case of the moon is more complex because the moon itself travels in an epicycle, which in turn moves on an eccentric. But we are only interested in the case when the lunar eclipses occur at the two extremities of each of the two time intervals mentioned above. This allows us to relate the movements of the sun and moon since they are in opposition, as in the following figure.

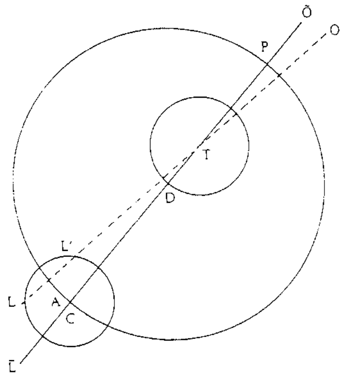


Fig. 4

With the sun at O and the earth at T; the moon, in its epicycle, can be located either at L or L' at the moment of opposition. In this situation, Thābit finds seven modes of composition of lunar motion analogous to those of the sun. If the sun, in each of the two time intervals, has traveled, in apparent motion, equal angular distances, the same would apply to the moon. But, in order for the moon to accomplish complete revolutions for its different orbs, we must eliminate the case where the moon would pass from L to L' in its epicycle between the two extremities of each of the time intervals considered. Turning now to the context of the seven modes: modes 5, 6, and 7 are set aside because of the situation of the sun, for its apparent movements would be unequal within the extremities of the time intervals. Modes 2 to 4 are also eliminated because the moon would pass from L to L' in its epicycle. Only the first mode is retained, where the sun and moon start from and return back to their same respective points on the ecliptic, because it is only in this situation that they will have accomplished a number of complete revolutions through their respective orbs.

Ptolemy had also brought forth a discussion of two analogous time intervals; he had chosen four cases for the sun.[8]

a) In t_1 and t_2, it makes complete revolutions – equivalent to mode 1 of Thābit.

b) In t_1, it leaves from perigee, and arrives at apogee; in t_2, it leaves from apogee and arrives at perigee – this is a particular case of mode 2 of Thābit.

c) In t_1 and t_2, the sun leaves from the same point on the ecliptic – this is a particular case of modes 3 or 4 of Thābit.

[8] See *The Almagest*, ed. Heiberg, I, 272-5 and *Ptolemy's Almagest*, pp. 176-177.

d) The point of departure of t_1 is symmetric, with respect to the apogee or to the perigee, to the point of arrival of t_2, and vice versa – equivalent to modes 3 or 4 of Thābit.

He then considers the situation of the moon and eliminates cases b), c), and d), leaving only the first, the mode 1 of Thābit. The conclusions of both Ptolemy and Thābit are similar, but Ptolemy's proof is based only on particular points, while Thābit considers the problem in the general case. Thābit's analysis is exhaustive and he arrives at a conclusion which is irrefutable (in the context of the geometric models considered), as his theoretical analysis is quite rigorous.

4) Study on the visibility of the crescent moon, in two treatises, referred to as Treatise no. 6 and Treatise no. 7 in the previous work.[9]

Like most Arab astronomers, Thābit took a special interest in the calculation of the conditions of visibility of the crescent moon on the western horizon, just after sunset, on the evening of the 29th day of the lunar month. This problem is not traditionally dealt with in Hellenistic astronomy, but some Indian methods passed through into Arabic at the end of the 8th century. It is a particularly difficult problem given the number of parameters which must be considered. Thābit wrote two treatises on the subject: one purely theoretical, and the other practical, much more brief, allowing a simplified application of its general method thanks to its use of tables.

To address this question, he took the method used by Ptolemy in the study of the visibility of fixed stars and planets on the horizon after sunset. He then applied this method to the case of the moon.[10] He defines the "The Arc of Visibility" of a certain star: i.e. the limiting value of the arc of depression of the sun under the horizon, after its setting, for which the star in question is at the limit of visibility on the horizon. Ptolemy had measured the diverse values of this arc for the planets and fixed stars.

It is "The Arc of Visibility of the Crescent Moon" which Thābit makes his object of discussion, but the case of the moon is much more complex than for the other stars, as this arc does not have a constant value. The luminosity of the crescent depends on the angular distance between the moon and the sun, and Thābit's method is directed toward establishing a relationship between the luminosity of the crescent and that of the sky near the horizon.

[9] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction pp. XCIII-CXVIII, text and translation pp. 93-116, commentary pp. 230-259.

[10] See in detail the evolution of this method in the general introduction of Thābit, *Œuvres d'astronomie*, pp. XXV-XXX.

He defines four variables. The three principal variables are the arcs, sides of a spherical rectangle triangle in which the endpoints are: the sun, under the horizon, the moon, on the horizon, and the foot of the perpendicular taken from the sun to just above the horizon. We will call these α_1, α_2, α_3.

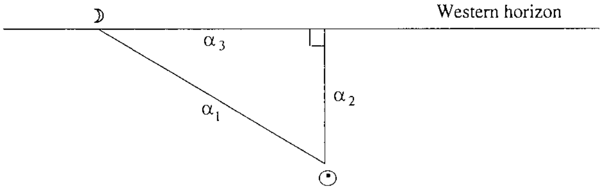


Fig. 5

α_1 is the angular distance between the sun and the moon; it is on this value which depends the portion of the visible surface of the moon lit by the sun, thus the luminosity of the crescent.

α_2 is the arc of depression of the sun under the horizon at the moment of the setting of the moon; it is on this value which depends the luminosity of the sky on the horizon after the sunset.

α_3 is less important than the two preceding variables, this is the distance of the moon, at the moment it sets, to the "most brilliant point on the horizon" situated on the vertical of the sun.

This base figure allows two limiting situations:

Figure 6a corresponds to the case where the moon is at the limit of visibility when it sets at the vertical of the sun. We obtain therefore $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ and $\alpha_3 = 0$. α_0 is a limiting value for the first two variables.

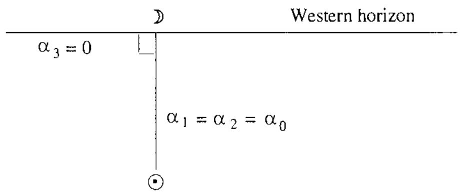


Fig. 6a

Figure 6b corresponds to the case where the moon is at the limit of visibility when it sets at the same time as the sun. We obtain therefore $\alpha_1 = \alpha_3 = A$ and $\alpha_2 = 0$. A is the value of the sun-moon distance beyond which the crescent is visible in the day. Thābit declares, very probably as a result of observation, that if $\alpha_1 > 25°$, the crescent is visible during the day and therefore its arc of visibility is not defined.

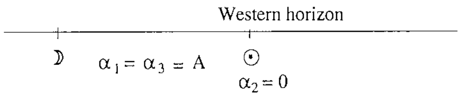


Fig. 6b

The fourth variable is tied to the location of the moon on its epicycle, and it is on this value which depends the distance from the earth to the moon, labeled angle a in the following figure.

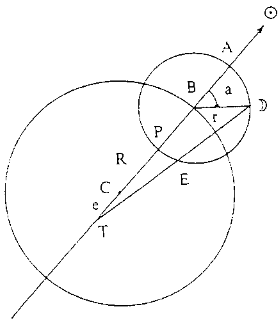


Fig. 7

During times close to the conjunction of the sun and moon, Ptolemy had defined in this manner the situation of the moon on its different orbs: the observer from earth is at T, C is the center of the eccentric with radius R, with $TC = e$, the eccentricity. The epicycle with center B and radius r is situated such that the straight line TCB is directed toward the sun. The angle a determines the position of the moon D on its epicycle, and its distance to the earth varies from $R + e + r$ and $R + e - r$ when a goes from 0° to 180°. The closer the moon is to the earth, the brighter the moon will appear.

The most important variables are α_1 and α_2, as they have the most influence on visibility, the other two serve only to slightly modify the results obtained.

Without going through the details of his method, suffice it to say that Thābit calculates the value of the four variables α_1, α_2, α_3 and a, for the evening of the 29th day of the lunar month. He then directs himself toward establishing more precisely the value of the arc of visibility of the crescent as a function of the three variables α_1, α_3 and a, and compares the value of this arc to the value of α_2. If α_2, arc of depression of the sun under the horizon, is greater than this arc of visibility calculated, the crescent will be visible on the evening in question. After the definition of the four variables his theory comprises six elements.[11]

- An observation, $A = 25°$, value of the moon-sun distance beyond which the moon is visible during the day.
- A constant relationship between the "increase" of α_1 and the corresponding "decrease" of α_2: if the moon-sun distance increases then the brightness of the moon is greater, and "the arc of depression" of the sun under the horizon, on which depends the luminosity of the sky on the horizon, can diminish, the crescent staying at the limit of visibility. He thus postulates: $\Delta\alpha_1 / \Delta\alpha_2 = k$, the value of this relationship probably being deduced from a study on these numerical values given by Ptolemy in the first part of the *Book of Planetary Hypotheses*.
- A term by term correspondence between two progressions, one geometric and the other arithmetic, calculated using Ptolemy's results for Venus between the extreme respective values of its distances to earth and its "arcs of visibility". This is then applied to the moon.
- The situation of the three principal variables with respect to their limiting values: $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq A$; $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_0$; $0 \leq \alpha_3 \leq A$.
- A formula of simple interpolation borrowed from *The Almagest* to calculate the distance from the earth to the moon, as a function of angle a.
- The formula put down by Ptolemy in the *Phaseis* which modifies the value of the arc of visibility of fixed stars as a function of their position of the horizon, corresponding to α_3 for the moon.

This group of results is thus acquired from purely mathematical manipulation of the available data of the visibility of all the stars, whichever ones they may be.

5) A study of the horizontal sundial, in all places of the earth and in all times of the year, referred to as Treatise 8 in the previous work.[12]

The general case is that of the trajectory of the sun on the circle *ABC* parallel to the equator, the point of the gnomon of the horizontal dial being at *D*. Six months later the trajectory of the sun moves through the circle *IKL*. We thus have a cone of vertex *D*. When the sun moves through *ABC*, its rays fall on the vertex of the gnomon *D* creating the cone; the superior nappe being the "cone of rays" and the inferior nappe being the "cone of shadows". The two variables are: the declination of the sun, δ, which

[11] See the explanation of all these elements and their justification in Thābit, *Œuvres d'astronomie*, pp. C-CXVII.

[12] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction pp. CXIX-CXXV, text and translation pp. 118-129, commentary pp. 260-264.

depends on its position on the ecliptic; and the latitude of the location, φ, on which depends the position of the plane of the horizontal dial with respect to the earth's axis, represented by *DP*.

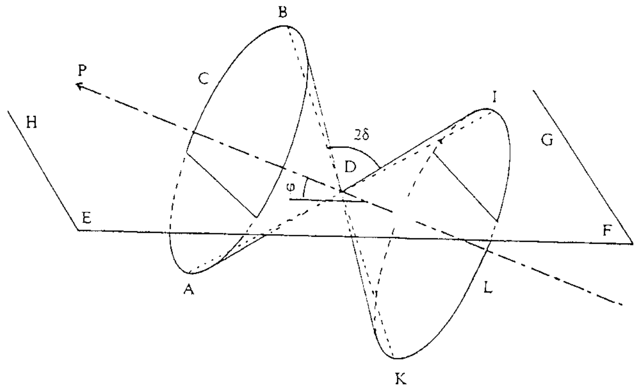


Fig. 8

When $\delta = 0$, the sun is in the plane of the equator, and the path of the shadow is a straight line on the plane of the dial, whatever the latitude may be. When δ is any other value, it is the position of the plane *EFGH* with respect to the axis *DP* – depending on φ, thus the position of the dial on the surface of the earth – which determines the shape of the figure formed by the displacement of the shadow of *D*. We find two branches of a hyperbola in the general case, when the plane cuts the two nappes of the cone; an ellipse if the plane only cuts one of the two nappes; a circle when the plane is perpendicular to the axis (i.e. the poles of the earth); and a parabola when the plane is parallel to one of the generating lines of the cone.

He therefore concerns himself with a treatise on the conics, at the occasion of the study of the sundials, based explicitly on the conclusions of Apollonius in his tract on *The Conics*. O. Neugebauer sees in this line of reasoning the origin itself of the theory of conic sections.[13]

6) *Book on the Plane Sundials*, referred to as Treatise no. 9 in the previously cited work.[14]

Here the location of the sundial is given, and the orientation of the planar dials can be any value. Thābit classes them in seven different

[13] See O. Neugebauer, "The Astronomical Origin of the Theory of Conic Sections," *Proceedings of the American Philosophical Society*, 93, 3, 1948, pp. 136-138, taken up again in: O. Neugebauer, *Astronomy and History, Selected Essays*, New York and Heidelberg, Springer Verlag, 1983, pp. 295-297.

[14] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, introduction pp. CXXVI-CXL, text and translation pp. 131-64, commentary pp. 265-291.

categories and calculates the lines of the hours of the day, seasonals or equinoctials, with passage from one dial to the other, as a function of the latitude of the chosen place. There is no numerical application which is given, the treatise is entirely theoretical and establishes only the formulas to apply. The three first dials are the three fundamental planes of a geographical location: horizon, meridian, first vertical. The next three are each perpendicular to one of the respective planes mentioned above. Their position calls for a supplementary parameter: their inclination with respect to the zenith or with respect to one of the three fundamental planes. The seventh dial can be of any orientation; its position calls for two parameters which enable us to define its line of greatest slope with respect to the horizontal plane. Thābit affirms that each of these planes can always be considered as the horizontal plane from a certain point on earth, and, since he considers that the value of the radius of the earth can be neglected with respect to that of the radius of the orb of the sun, we can represent the seven planes in the following fashion:

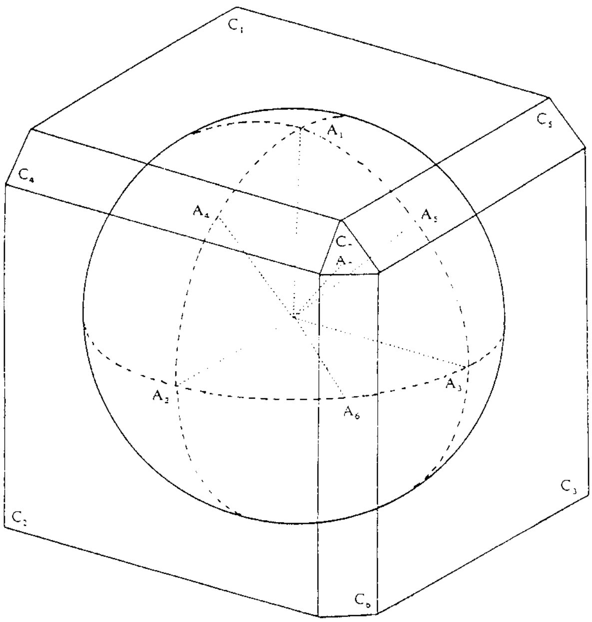


Fig. 9

The horizontal plane is the plane C_1, tangent to the earth at A_1, place of the author of the treatise; his meridian plane is likened to the plane C_2, horizon of the location for those which are located at A_2; and his first vertical is likened to C_3, horizon of A_3. The plane C_4, horizon of A_4, is perpendicular to C_3, and inclined with respect to C_1 and C_2; C_5, horizon of A_5, is perpendicular to C_2 and inclined with respect to C_1 and C_3; C_6, horizon of A_6, is perpendicular to C_1 and inclined with respect to C_2 and C_3. The plane C_7, horizon of A_7, can have any inclination.

The calculation is done using two methodologies: the first, using polar coordinates taken from the foot of the gnomon; the variables being the azimuth and length of the shadow; the second, using rectangular coordinates corresponding to the components of the shadow on the length and width of the dial. The sequence of calculation comprises four steps:

1) Position of the sun in equatorial coordinates for a determined hour.
2) Position of the sun with respect to the plane of the dial considered, azimuth and height over this plane.
3) Calculation of the polar coordinates.
4) Calculation of the rectangular coordinates.

The complete sequence is not applied to every case; some steps may be skipped depending on which dial is considered.

These calculations call for a grand mastery of all the tools of trigonometry of this period, whether they be of Hellenistic or Indian origin, and Thābit, as in his other writings, looks to treat these problems in all their generality, with great exhaustive care.

THĀBIT THE ASTRONOMER

Given the material which has been passed on to us on the work of Thābit the astronomer, we cannot say that this genial mathematician has made revolutionary discoveries in astronomy, or that he has created new models for understanding the movement of stars, since he stays in the frame of the geometrical models proposed by Ptolemy in *The Almagest*. But the big interest of this work is in another plane, that of the precise orientation of this discipline in a certain sense – method and program of work – as a function of the scientific environment in which it was situated, in the 9th century of Baghdad.

After the introduction of Indian astronomical methods in the Arab world at the end of the 8th century, then the access to the Greek sources, especially by the translation into Arabic of *The Almagest* at the beginning of the 9th century, and the creation of the two observatories of Baghdad and Damascus under al-Ma'mūn, the scientists of the Arabic language have had at their disposal the theoretical bases and the fresh observations permitting them to verify the schemes of calculation proposed by Ptolemy approximately seven centuries earlier. The first work depending directly on these diverse elements is that which is known under the name of the *Verified Table (al-zīj al-mumtaḥan)*; gamut of astronomical tables comprising the synthesis of the first observations, *circa* 830. The *Treatise on the Solar Year*, which possibly has for veritable authors scholars from Banū Mūsā, resurrects the model proposed by Ptolemy for the motion of the sun, stemming from observations made between 830 and 832. Ḥabash al-Ḥāsib takes up again those proofs of *The Almagest* which had to be modified, as a function of new data just as theoretical (such as sines and cosines, of Indian origin) as practical (the diverse recent observations).

As we have already seen, Thābit was born in 826, educated in the region of Ḥarrān, he was then accredited to the team of the Banū Mūsā (at their invitation) at an unknown date, but it is clear that he was in Baghdad when the scientific movement was already seriously underway there. His knowledge of Greek gave him a direct access to the texts passed down in this language – we see in particular that he had perfectly assimilated all the work of Ptolemy – and his value as a researcher put him in a place of choice in the scientific world of the epoch,[15] where a veritable "school of Baghdad" was constituted in the domain of exact sciences, such as astronomy.

The astronomical observations

In astronomy Thābit was more a theorist than an observer. Although he spoke sometimes of his observations, none of his works which have survived show any observational figures which he would have personally made, with one possible exception, in the frame of his study on the visibility of the crescent moon (see above, where $A = 25°$). He always uses the results which are at his disposition from his immediate predecessors in Damascus or in Baghdad, or, much before, that of Ptolemy. In addition, we notice that, when he says in an isolated fashion "we have observed", this "we" can correspond simply to the group of astronomers of his generation.

Ptolemy, in *The Almagest*, was supported by 94 observations, 53 were made by others before him and 41 had been taken by himself or his contemporaries. All of these observations are presented in isolated and pinpoint fashion, without tying any of them together. When astronomy became developed in Baghdad under al-Ma'mūn, this was a result of a precise program of continuous observations at Baghdad and at Damascus, between 826 and 832, bearing especially on the sun and the moon. It is in this tradition which Thābit put his name to, and he explicitly says this in the two last fragments cited: the importance of continual observations in large quantities

[15] See on this subject the testimony of al-Bīrūnī cited in Thābit, *Œuvres d'astronomie*, p. XLIX.

to arrive at a concrete theoretical conclusion, comparison between ancient observations and contemporary ones, constant iteration between theory and observation in order to make the results obtained for the composition of the tables more precise, and publication of these results only when all guarantees of precision have definitely been obtained. Moreover, in the conclusion of his purely theoretical treatise on the visibility of the crescent, Thābit presents analytical elements from the conditions of observation:

> It is convenient when you know what the situations are when the crescent is found just at the very limit of visibility/non-visibility, for it is not possible thus to pronounce to oneself with all the guarantees of certitude: the intervention of the least of things – from hidden steam to a heavier density of the air – can modify the judgment to bear; the same goes for the difference in the quality of the observations of the human observers, or other factors still.[16]

This clear theorization of the role of observation in astronomy, of the importance of constantly iterating between theory and observations, and the best way to exploit these, is probably not all attributable personally to Thābit. But this author has at least participated in the work of putting into use a precise method for this discipline, and it is from him that we find it cited explicitly. This methodology does not exist in the works of Hellenistic astronomy which have been passed down to us.

The "mathematization" of astronomy

Ptolemy had conserved in his proofs a large part of empiricism, as he explains globally in the last book of *The Almagest*: "One should try, as far as possible, to fit the simpler hypotheses to the heavenly motions, but if this does not succeed, one should apply hypotheses which do fit".[17] Looking in detail, this empiricism can be found by example during the treatment of the problems taken up again by Thābit in two treatises of which the content is recalled above: *The Deceleration and the Acceleration of the Motion of a Point on the Ecliptic...* and *The Motion of the Two Luminous Bodies*. In the first problem, Ptolemy stated simply which parts of the eccentric orb correspond to the slowest and fastest motions, in the second he empirically took specific cases of the relative positions of the sun and moon on their respective orbs in the extremities of a certain type of time period and concluded on a precise choice. Thābit proves that this is so: in the first case, he demonstrates geometrically which are the points of the eccentric orb where the apparent movement is or nearly is the slowest, or the most rapid, or equal to true motion. He determines two axes of symmetry, one for the

[16] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, p. 112.
[17] See *Ptolemy's Almagest*, p. 601.

true motion, the other for the apparent motion and makes a mathematical analysis of the relationship between true and apparent motion. In the second case, he treats in exhaustive fashion the various possibilities of the positions of the "Two Luminous Bodies", and concludes in the same fashion as Ptolemy, but in a fashion much more rigorous. In these two cases, Thābit studies the geometric models as such; in a purely mathematical fashion. He reduces therefore the empirical part which is found in his sources.

This "mathematization" of astronomy is found again, from another point of view, in the study of Thābit on the visibility of the crescent moon. In the course of his proof he makes a first analogy with the visibility of the planets, and a second with that of the fixed stars. This shows that for him there is only a phenomenon to consider, that of the visibility on the horizon of a luminous body, whatever it may be. This visibility is discussed as a function of the luminosity of this object and of that of the horizon, before the rising or after the setting of the sun. He directs himself toward finding how to establish a mathematical relationship between these two luminosities, stemming from a calculation on all of the available figures on the observations of the general phenomenon of visibility. There is therefore here research on a general law applied to the case of the crescent moon, stemming from the observational data treated with all the mathematical tools available in the epoch. But there is still imprecision when one uses both a mathematical approach and an observational approach, as Thābit mentioned with regard to the respective roles played by the "two first arcs" – that of the moon-sun elongation and that of the depression of the sun under the horizon – in the possible visibility of the crescent:

> As for the share of each of the two arc's contribution to the visibility calculations, and the way which we can manipulate them; these are the elements which we can not calculate in absolutely rigorous fashion, for that which is perceived by the senses does not loan itself to such precision.[18]

The first of the two treatises of the sundials shows Thābit's use of the results of Apollonius on the conics, in purely geometrical fashion, and the second is an occasion to largely develop the trigonometric methods for calculating all the possible orientations of the dials.

If one compares the works of Thābit to those of his contemporaries which have been passed down to us, we see that it is he who has "mathematicized" astronomy to the greatest extent, and who has thus contributed to the creation of a tradition in this sense.

[18] See Thābit, *Œuvres d'astronomie*, p. 108.

"Physical" astronomy

When one takes the principal source of Thābit in astronomy, Ptolemy, we recall in the last book of *The Almagest* this remark:

> For what could one compare more dissimilar than the eternal and unchanging with the ever-changing, or that which can be hindered by anything with that which cannot be hindered even by itself?[19]

We find equally in the *Book of Planetary Hypotheses* of the same author this point of view which radically separates terrestrial "Physics" and celestial "Physics":

> It does not make sense to relate an ethereal body to the elements which we are obliged to use for bodies here on earth, neither to imagine that when something can produce an obstacle to that which is found on earth, a similar thing could produce an obstacle for the celestial nature, which is at the same time totally opposite both in essence and in act.[20]

CONCLUSION

Summarizing quickly from above: from the 9th century at Baghdad, it had become necessary to create a tradition of scientific research in the Arabic language in all of the domains of the exact sciences, including astronomy. This last discipline had not been alive in the Mediterranean basin since many centuries: there are only some isolated observations which have been recorded between the 3rd and 8th centuries, and the successors of Ptolemy of Greek language were globally only commentators. There was therefore discontinuity in a tradition. When astronomy began to be reawaken in Baghdad under al-Ma'mūn, the written sources of work were evidently Hellenistic, but it was necessary to retrieve what bases and what methods were convenient for this discipline, thus to recreate them. The result represents a very sensitive improvement on the Hellenistic model, and all of the ulterior development of Arabic astronomy depends on this point of departure:

1. The importance of careful explanation of the relationship between theory and observation leads to the creation of large observatories with a program of continuous observation – starting from the two first ones at Baghdad and at Damascus, until Marāgha then Samarkand in the 13th and 15th centuries – and in the evolution of geometrical models rendering better and better account of the motion of the stars in the geocentric framework.

[19] See *Ptolemy's Almagest*, p. 600.

[20] Text being edited, this passage in found in the beginning of the second part.

2. The "mathematization" of astronomy is strongly developed, in particular by scholars like al-Bīrūnī a century and a half later, and this will be one of the bases of scientific development of all eastern schools of Arabic astronomy, in reducing more and more the non-negligible part of empiricism which was found in the works of Ptolemy.

3. The conflicting relationship between "Physical" astronomy and "Mathematical" astronomy was one of the engines of evolution of this science, that is what will permit the re-examination of Ptolemaic astronomy: first by Ibn al-Haytham in the 11th century, in his book *Doubts about Ptolemy* (*al-Shukūk 'alā Baṭlamiyūs*)[21] where this author only creates the catalog of the incoherences which he finds in the works of Ptolemy, without proposing any solution; then by the Andalousian scholars,[22] in an especially philosophical research; and finally, at the beginning of the 13th century in the Orient, by the astronomers regrouped around the observatory of Marāgha, in which the program – such that one finds it expressed by example in the introduction of the first book composed by a member of this school, al-ʿUrḍī – was clearly to re-examine the base of the "mathematical" astronomy so that its coherence with "physical" astronomy would be better than that which had been proposed from the works of Ptolemy.[23]

It is on these three points which we state that Thābit, by his work in astronomy, has played a capital role in the 9th century to give this orientation and this stature to this discipline.

[21] Edited by A. I. Sabra and N. Shehaby, Cairo, Dār al-Kutub, 1971.

[22] See, for example, Léon Gauthier, "Une réforme du système astronomique de Ptolémée tentée par les philosophes arabes du XII^e siècle", *Journal Asiatique*, 14, 1909, pp. 483-510.

[23] See al-ʿUrḍī, Mu'ayyad al-Dīn, *Kitāb al-Hay'a – Tārīkh 'ilm al-falak al-'arabī*, ed. and introd. by George Saliba, Beirut, Center for Arab Unity Studies, 1990, pp. 27-29.

THĀBIT IBN QURRA SUR L'EXISTENCE ET L'INFINI : LES *RÉPONSES AUX QUESTIONS POSÉES PAR IBN USAYYID*

Marwan RASHED

Le texte auquel est consacré le présent article, les réponses de Thābit ibn Qurra à des questions philosophiques posées par son élève Ibn Usayyid, bien que connu depuis un siècle et demi[1], n'a pas encore reçu l'étude qu'il mérite, pour des raisons diverses.

Raisons textuelles tout d'abord : on ne connaissait jusqu'à présent qu'un seul manuscrit, assez fautif, British Library Add. 7473, daté de 639/1242 (noté L)[2] ; la découverte, par Roshdi Rashed, d'un nouveau témoin conservé à la bibliothèque de Majlis Shūrā (non numéroté), daté du mercredi 29 ramaḍān 1038/23 mai 1629 (noté A), n'apporte malheureusement aucune

[1] Cf. W. Cureton, *Catalogus codicum manuscriptorum orientalium qui in Museo britannico asservantur : Pars II codices arabicos amplectens. 2° Codices muhammadani geographici, mathematici, philosophici, grammatici, poetici et miscellanei*, Londres, 1852, p. 205 ; D. Chwolsohn, *Die Ssabier und der Ssabismus*, 2 vol., Saint-Petersbourg, 1856, t. I, p. 567, n. 8 ; S. Pines, « Thābit b. Qurra's Conception of Number and Theory of the Mathematical Infinite », *Actes du XI^e congrès international d'histoire des sciences*, Wroclaw, 1968, p. 160-166 ; T. Lévy, *Figures de l'infini : les mathématiques au miroir des cultures*, Paris, 1987, p. 101-109 ; A. I. Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite and other Puzzles : Edition and Translation of his Discussions with Ibn Usayyid », *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-islamischen Wissenschaften*, 11, 1997, p. 1-33.

[2] Cf. Cureton, *Catalogus codicum manuscriptorum orientalium*, p. 205-209. Le manuscrit, de contenu philosophique, scientifique et astrologique, est excessivement précieux. Il est le seul témoin connu pour nombre des vingt-deux œuvres qu'il contient. Certains titres semblent indiquer une relation privilégiée à Thābit ibn Qurra. Hormis le présent traité, le manuscrit est en effet l'exemplaire unique conservé de la traduction, par Thābit, de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase et de son traité *Sur le calcul de la visibilité du croissant* (cf. R. Morelon, *Thābit ibn Qurra. Œuvres d'astronomie*, Paris, 1987, p. XCIII). Il contient également la *Siyāsat al-nufūs* de Sinān ibn Thābit. On notera pour finir que le traité de Bakr al-Mawṣilī *Sur l'âme*, conservé dans ce manuscrit, cite Thābit ibn Qurra : cf. Sh. Pines, « La doctrine de l'intellect selon Bakr al-Mawṣilī », *Studi orientalistici in onore di Giorgio Levi della Vida*, V, Rome, 1956, II, p. 351.

amélioration : A est soit le descendant de L, soit un collatéral excessivement proche, mais un peu plus fautif[3].

Raisons de contenu, aussi et même surtout : la réflexion de Thābit se situe au confluent de trois traditions, la philosophie grecque, la théologie rationnelle islamique et les recherches de l'auteur en mathématiques infinitésimales. Son intelligence exige donc tout d'abord une information sur le passé grec de certaines questions philosophiques : le lieu ; le temps et l'éternité ; le déterminisme ; les catégories ; l'homonymie ; le statut ontologique des classes ; l'infini. En outre, que l'on replace ses considérations sur le statut de l'acte humain dans le contexte de l'opposition, qui se fait jour dès la période omayyade, entre déterministes et antidéterministes. Enfin, que l'on garde présent à l'esprit le fait que dans sa pratique mathématique, Thābit recourt constamment aux sommes infinies. Or, aussi étrange que cela puisse paraître, aucun commentateur n'a tenté de préciser la position de Thābit par rapport à l'un de ces trois domaines. Tout au plus crédite-t-on le savant d'idées novatrices sur la question de l'infini, sans toutefois comprendre dans quel cadre philosophique celles-ci s'insèrent. Envisagée toutefois à la lumière de l'ensemble des questions agitées, la défense par Thābit de l'infini actuel n'est pas le simple exploit solitaire d'un cerveau génial, c'est la conséquence réfléchie et surtout systématique de l'abandon de la théorie biologisante de l'οὐσία aristotélicienne au profit d'un platonisme de mathématicien.

Enfin, et plus accessoirement, raisons de transmission : l'entrée en matière soulève des questions, non pas certes sur la paternité des thèses attribuées à Thābit, mais sur le statut du texte. Ce qu'on a sous les yeux n'est pas une rédaction de Thābit mais de son élève Ibn Usayyid. Par ailleurs, on trouve chez al-Nadīm, comme première notice de la rubrique consacrée aux élèves de Thābit : « ʿĪsā ibn Usayyid le Chrétien ; Thābit lui accordait sa préférence et sa faveur ; ʿĪsā ibn Usayyid a traduit du syriaque en arabe, en présence de Thābit, le livre des réponses de Thābit aux questions de ʿĪsā ibn Usayyid »[4]. On peut s'interroger, si ce renseignement est

[3] Plusieurs fautes communes. Cinq mots de L manquent dans A ; un mot de A manque dans L, mais la correction était à la portée d'un lecteur intelligent. Une variante interlinéaire de L figure dans le texte de A (p. 631, 18). La présence de notre traité est attestée dans le monde persan dès l'époque de Fakhr al-Dīn al-Rāzī. Cf. Fakhr al-Dīn al-Rāzī, *Al-Riyāḍ al-mu'niqa fī ārā' ahl al-ʿilm*, éd. A. Jumʿa, Kairouan, 2004, p. 111, qui fait allusion à notre § [1]. Pour l'unique autre allusion ancienne, voir *infra*, p. 665, n. 54.

[4] C'est du moins comme cela que nous comprenons ce texte. C'était déjà l'interprétation de Chwolsohn, *Die Ssabier und der Ssabismus*, t. I, p. 565, n. 6. En revanche, G. Flügel, p. 272 et R. Tajaddud, *Kitāb al-Fihrist li-al-Nadīm*, Téhéran, 1974, p. 332, ainsi que B. Dodge, *The Fihrist of al-Nadīm*, 2 vol., New York, 1970, t. I, p. 648, placent une ponctuation forte après « Thābit », ce qui donne, pour la seconde

exact, sur le rapport entre le texte que nous lisons aujourd'hui, l'original syriaque et la traduction arabe d'Ibn Usayyid. Cette traduction arabe aurait-elle déjà sélectionné certaines questions au détriment de certaines autres ? Le texte transmis dans les deux manuscrits, qui ne suggère nulle part qu'il s'agirait d'une traduction du syriaque représente-t-il l'ensemble de la traduction arabe, ou seulement un extrait de celle-ci ? Cette question n'est pas de pure forme. Car au titre principal transmis par les deux manuscrits, *Questions posées à Thābit ibn Qurra de Ḥarrān*, fait suite, après l'invocation rituelle, l'indication suivante : « *Parmi* (*min*) les questions qu'Abū Mūsā ibn Usayyid a posées à Abū al-Ḥasan Thābit b. Qurra de Ḥarrān ». On est bien sûr tenté de considérer la seconde indication comme authentique. Alors que le titre principal, générique et vague, ne mentionne pas Ibn Usayyid comme auteur des « questions » posées à Thābit, le second le fait. En outre, il est plus vraisemblable de supposer que le scrupule philologique qu'il y avait à décrire nos questions comme une sous-partie d'un ensemble plus vaste se soit estompé au moment d'apposer un titre général, alors qu'on voit mal pourquoi quelqu'un qui aurait disposé du seul premier titre aurait introduit la nuance du second. Bref, ce détail incline à penser que le texte transmis est un extrait puisé à un ensemble plus large[5]. Deux arguments internes corroborent ces doutes nés de considérations extérieures :

partie du texte, le sens suivant : « Et ʿĪsā ibn Usayyid traduisit du syriaque en arabe en présence de Thābit. Le livre des réponses de Thābit aux questions de Thābit ». On ne voit pas ce qui permet à A. Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite and other Puzzles », p. 1, n. 1, d'écrire « Ibn al-Nadīm's statement should almost certainly be read as saying : "Among (Thābit's) students was the Christian ʿĪsā ibn Usayyid whom Thābit held in high esteem and who used to make translations from Syriac into Arabic in the presence (*biḥaḍrat* ; i.e. under the supervision) of Thābit. [By him is a] Book of Thābit's Answers to the Questions of ʿĪsā ibn Usayyid" ». Bien au contraire : il suffit de comparer les notices suivantes d'al-Nadīm pour s'apercevoir que le bibliographe ne s'exprime pas ainsi, mais écrit « wa-lahu min al-kutub kitāb [...] ». A. Sabra est d'ailleurs obligé de suppléer « By him is a » et B. Dodge, *ad loc.*, « he wrote », tandis qu'Ibn Abī Uṣaybiʿa, *Ṭabaqāt al-aṭibbā'*, éd. A. Müller, Königsberg, 1884, t. I, p. 218, l. 6-8, dans ce qui constitue une évidente adaptation du passage du *Fihrist*, rajoute « et on trouve de lui », *wa-yūjad lahu* : « wa-kāna min talāmidhat Thābit b. Qurra ʿĪsā ibn Usayyid al-Naṣrānī wa-kāna Thābit yuqaddimuhu wa-yufaḍḍiluhu wa-qad naqala ʿĪsā ibn Usayyid min al-suryānī ilā al-ʿarabī bi-ḥaḍrati Thābit wa-yūjad lahu kitābu jawābāt Thābit li-masā'il ʿĪsā ibn Usayyid ». Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-Ḥukamā'*, éd. J. Lippert, Leipzig, 1903, p. 146, brode lui aussi sur le texte d'al-Nadīm en le comprenant comme Ibn Abī Uṣaybiʿa et les tenants modernes de la ponctuation forte. Il nous apprend, *ibid.*, p. 116, l. 10-12 qu'Ibn Usayyid avait traduit du syriaque en arabe le traité de Thābit sur la *quies media* (sur le titre et le contenu de ce traité, cf. *infra*, p. 695-696).

[5] En revanche, la première ligne du texte ne dit pas que Thābit aurait prononcé ce qui suit immédiatement « pendant » (*athnā*) sa réponse à Ibn Usayyid. Il s'agit là d'une faute de lecture d'A. Sabra. Cf. notre apparat critique *infra*, p. 627.

- Le thème initial ayant suscité la discussion sur l'infini est, au dire d'Ibn Usayyid, la question du nombre des âmes, fini ou infini. Or dans un texte de la *Risālat al-aḍḥawiyya fī al-maʿād*, Avicenne mentionne une critique de Thābit à l'encontre des partisans de la métempsycose[6]. On sait par ailleurs que l'un des arguments principaux de ces derniers était fourni par l'impossibilité de l'existence de l'infini actuel. Contrairement à d'autres sujets abordés dans la discussion entre Thābit et Ibn Usayyid, l'impossibilité de l'infini actuel est une thèse globalement partagée – à quelques rares exceptions près – par les théologiens (*mutakallimūn*) et les philosophes (*falāsifa*). Le recours au nombre des âmes suppose en revanche qu'on argumente contre ceux-ci, car il nécessite, pour s'appliquer, qu'on suppose un monde éternel *a parte ante*, peuplé d'espèces biologiques éternelles, ce que refusent les théologiens. Si en effet il y a eu une infinité de générations humaines avant la nôtre et si l'âme de chaque homme lui survit après la mort du corps, il y a donc, à l'heure où nous parlons, une infinité actuelle d'âmes existantes. Si par conséquent on refuse l'infini actuel et qu'on accepte l'éternité de l'âme, il faut se ranger à une autre solution. La métempsycose satisfait à ces trois réquisits : (1) l'âme survit à la mort du corps ; (2) le monde est éternel *a parte ante* ; (3) l'infinité actuelle est impossible. Ainsi, étant donné la parenté des deux arguments – le début du présent traité d'une part, la citation d'Avicenne d'autre part – on peut se demander s'ils n'appartenaient pas originellement à la même unité, dont nous n'aurions conservé qu'une seule partie, ou une recension parmi d'autres.
- Cette éventualité est confortée par les trois citations de Thābit apparaissant dans un traité attribué à Abū Bakr al-Rāzī[7], toutes trois des arguments en faveur de l'infini actuel. Le second (b) affiche une certaine parenté avec celui de la partition de l'ensemble des entiers naturels qui apparaît dans notre traité, mais la présentation est différente. Le premier (a) et le troisième (c), en revanche, se concentrent sur la question de l'éternité temporelle, qui n'est pas abordée dans les ques-

[6] Cf. Avicenna, *Epistola sulla vita futura*, éd. F. Lucchetta, Padoue, 1969, p. 114-115. Texte traduit *infra*, p. 689.

[7] Cf. *Abi Bakr Mohammadi Filii Zachariae Raghensis (Razis) Opera philosophica*, éd. P. Kraus, Le Caire, 1939, p. 129-131. Pour une traduction italienne et une longue étude du *Traité sur la métaphysique*, voir G. A. Lucchetta, *La natura e la sfera. La scienza antica e le sue metafore nella critica di Rāzī*, Bari, 1987, p. 253-260 et 359-378.

tions sous leur forme actuelle[8]. On les cite *in extenso* : • (a) « Thābit ibn Qurra a prétendu que le mouvement du ciel est un mouvement unique qui n'a jamais cessé ni ne cessera jamais, et qu'il n'est *des* mouvements qu'en fonction de ce que nous imaginons et savons à son sujet. Et il a surtout dit cela pour éviter que ce mouvement tombe sous le coup du nombre en sorte d'être soit pair soit impair, car il y aurait eu là des questions qui l'auraient forcé à admettre la finitude. Et il a prétendu qu'il se produit toujours et que son appellation de mouvement (au singulier) provient du fait – dit-il – que c'est un mouvement éternel. Car comment y aurait-il *des* mouvements s'il n'y a pas de repos pour les distinguer ? »[9]. • (b) « Et Thābit ibn Qurra a prétendu que l'infini peut exister en acte. Et il a prétendu qu'il a une moitié car – à ce qu'il prétend – trois est inévitablement la moitié de six, cinq la moitié de dix. Et il a prétendu qu'il pouvait augmenter et diminuer. Et il a prétendu qu'il a une moitié car on aboutit à des dizaines ; or il n'y a pas de dizaine qui ne contienne cinq pairs et cinq impairs : les impairs sont un, trois, cinq, sept et neuf, tandis que les pairs sont deux, quatre, six, huit et dix »[10]. • (c) : « Et il a prétendu qu'il n'y avait pas de mouvement pris en soi qui ne soit instauré (*muḥdath*), alors que leur totalité est éternelle – à ce qu'il dit – à la façon dont chacun des grains de froment a une figure et une forme, tandis que la réserve de ces grains a une figure et une forme qui n'est pas celle de chacun des grains »[11]. On le voit, dans (a) et (c), Thābit esquive deux arguments des défenseurs de la finitude temporelle de l'univers. En s'appuyant tout d'abord sur le double fait que tout nombre est fini ou infini, et qu'il y a nécessairement un nombre des révolutions de tel ou tel astre autour de la terre, ils veulent contraindre leur adversaire à reconnaître la finitude ; le raisonnement est sans doute que si ce nombre est pair, par exemple, il est déterminé. Il ne sera pas pair « en général ». Il sera donc fini. Le deuxième argument n'est autre que la prémisse célèbre

[8] Il ne s'agit donc pas là seulement d'une « opinion philosophique de Thābit » (cf. Sh. Pines, « La doctrine de l'intellect selon Bakr al-Mawṣilī », p. 160, n. 2), mais bien d'arguments en faveur de la même thèse : l'existence de l'infini actuel.

[9] *Loc. cit.*, 129.13-17. Que cet argument est bien une réplique adressée aux philosophes partisans de l'infini potentiel mais non actuel est attesté par Fakhr al-Dīn al-Rāzī, dans sa discussion magistrale de l'infini actuel, *al-Maṭālib al-'āliyya*, éd. M. Ḥ. al-Saqqā, Beyrouth, s. d., t. IV, p. 252. Notons qu'Aristote, *Topiques* Γ 6, 120b 3-6 démontre (contre Xénocrate) que l'âme n'est pas un nombre en s'appuyant sur le fait qu'elle ne peut être ni « paire » ni « impaire ».

[10] *Ibid.*, 130.17-131.1.

[11] *Ibid.*, 130.10-12.

du kalām : si toute substance est instauré, le monde l'est aussi[12]. Thābit s'y oppose en arguant qu'il n'est pas nécessaire qu'un ensemble ait les mêmes propriétés que ses éléments.

Dans l'état présent des connaissances, il convient donc de rester très prudent. Soit Thābit est revenu à plusieurs reprises sur des arguments excessivement voisins concernant l'infini, soit nous ne disposons que d'une recension de ce qui existait, à date ancienne, sous une forme plus complète. Thābit n'étant pas l'auteur du texte que nous lisons, ce dernier était exposé aux modifications.

L'édition et la traduction procurées il y a quelques années par A. Sabra étant demeurées, sur nombre de points importants, insatisfaisantes, et personne n'ayant proposé de ce texte majeur le commentaire qu'il mérite, nous avons pensé utile de reprendre le travail.

[12] Thābit prend ici position contre une prémisse délicate des théologiens musulmans, et particulièrement sensible car elle est mise à contribution dans deux arguments pour démontrer l'existence de Dieu (cf. D. Gimaret, *La Doctrine d'al-Ash'arī*, Paris, 1990, p. 224-227 et p. 230). Ce faisant, il se range avec les philosophes, ceux-là mêmes que les théologiens désignent du sobriquet d'« éternalistes » (*dahriyyūn*). Les théologiens posent dès l'époque de Thābit le principe suivant lequel il ne saurait y avoir une chaîne temporelle infinie d'instaurés (le *terminus ante quem* de l'argument est fourni par la réfutation de la prémisse proposée par Ibn al-Rāwandī, *grosso modo* contemporain de Thābit, à partir de l'éternité d'adventices caractéristiques du Paradis et de la symétrie passé-futur ; voir les références dans Gimaret, *ibid.*, p. 225). Car une telle infinité *a parte ante* empêcherait la réalisation du présent. L'éternité suppose l'invariance (comme en Dieu). On notera que les théologiens font également référence, dans ce contexte, à la succession des périodes célestes, objet de l'argument (a) ; voir les références citées par D. Gimaret, *ibid.*, p. 226. Il faut ajouter que cet argument est une refonte de celui qui apparaît dans les deuxième et troisième chapitres du *De contingentia mundi* de Philopon perdu en grec. Voir G. Troupeau, « Un épitomé arabe du "De contingentia mundi" de Jean Philopon », dans E. Lucchesi et H. D. Saffrey (éds), *Mémorial André-Jean Festugière, Antiquité païenne et chrétienne*, Genève, 1984, p. 77-88, en part. p. 81 (texte arabe) et p. 85 (traduction) : « On peut également nier que chacune des parties du temps possède un commencement et que, si ces parties sont composées, on dise que la totalité composée à partir d'elles n'a pas de commencement [...] ».

TEXTE ET TRADUCTION

Parmi les questions qu'Abū Mūsā 'Īsā ibn Usayyid a posées à Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra de Ḥarrān

Min al-masā'il allatī sa'ala 'anhā Abū Mūsā 'Īsā ibn Usayyid Abā al-Ḥasan Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī

Questions posées à Thābit ibn Qurra de Ḥarrān

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

Parmi les questions qu'Abū Mūsā ʿĪsā ibn Usayyid a posées
à Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra de Ḥarrān

<L'existence de l'infini actuel>

[1] Thābit ibn Qurra dit dans l'élaboration de sa réponse à une question qui lui avait été posée au sujet des âmes, si celles-ci sont finies ou infinies : je m'étonne de qui dit que Dieu, qu'Il soit loué et exalté, ne connaît pas les particuliers mais connaît les universaux. Je ne sais ce qu'ils pourraient bien dire si on leur demandait au sujet de Sa connaissance – majestueuse soit Sa louange – de l'éclipse, par exemple, si ce qu'Il en connaît est seulement la nature de l'éclipse et le fait qu'elle a lieu ; ou bien s'Il connaît une par une les éclipses qui ont eu lieu dans le temps passé et les futures, ainsi que le moment où chacune a eu et aura lieu. Car s'Il connaît seulement la nature de l'éclipse, il s'ensuit de cela que Sa connaissance est inférieure à celle des astronomes. En outre, même Sa connaissance de la nature de l'éclipse ne parvient à son achèvement que du fait qu'Il connaît les causes de l'éclipse et qu'elles sont des mouvements qui mènent les planètes, en un certain moment, à des positions nécessitant la disposition de l'éclipse. S'il en est ainsi, Il connaît que ces dispositions reviennent selon la grandeur des durées qu'elles prennent pour revenir ; Il connaît donc les particuliers dont on avait écarté de Lui la connaissance.

[2] Si cependant l'on accordait, par concession, qu'Il ne connaît pas les particuliers, il y a cependant des choses universelles qui sont des espèces infinies ; or Il les connaît dans leur totalité simultanément en acte, comme les espèces des figures, dont Il connaît chacune ainsi que ses particularités, ses propriétés et l'ensemble de ses dispositions, et les espèces des nombres aussi bien. Or les unes et les autres sont infinies. Il est possible, par conséquent, qu'existe en acte une chose numériquement infinie ; or si cela est possible, il n'est pas impossible qu'il en aille de la sorte dans le cas des âmes.

[3] Abū Mūsā dit : je lui dis alors : Sa connaissance des universaux, on ne saurait l'écarter et cela, ma foi, implique l'existence de choses infinies en acte simultanément. Mais pour Sa connaissance des particuliers, ce dont il a

ا-٤٢
ل-٢٣

مسائل سئل عنها ثابت بن قرة الحرّاني

بسم الله الرحمن الرحيم

من المسائل التي سأل عنها أبو موسى عيسى بن أسيد أبا الحسن ثابت بن قرة الحرّاني

[١] قال ثابت بن قرة في إنشاء جواب ‹سؤال› سُئل عنه من أمر النفوس، هل هي متناهية أم لا؟ إني أعجب ممن يقول إنه تبارك وتعالى لا يعلم الجزئيات بل يعلم الكليات، وما أدري ما الذي يقولونه إذا سئلوا عن علمه، جل ثناؤه، بالكسوف مثلاً، وهل ما يعلمه من ذلك طبيعة الكسوف، وأنه يكون فقط؟ أم يعلم الكسوفات التي كانت في الزمان الماضي والآتية واحداً واحداً والوقت الذي كان ويكون فيه؟ فإنه إن كان إنما يعلم طبيعة الكسوف فقط، لزم من ذلك أن يكون علمه دون علم المنجّمين؛ وعلمه أيضاً طبيعة الكسوف لا يتم إلاّ بأن يعلم أسباب الكسوف، وأنها حركات تنتهي بالكواكب في وقت من الأوقات إلى مواضع توجب حال الكسوف. وإذا كان هذا هكذا، فهو يعلم أن تلك الأحوال تعود مع مقادير المدد التي تعود فيها، فيصير بهذا عالمًا بالجزئيات التي دُفع علمُه بها.

[٢] وإن سُلّم أيضًا على طريق المسامحة أنه لا يعلم الجزئيات، فهاهنا أشياء كلية هي أنواع غير متناهية، وهو يعلمها بأسرها معًا بالفعل، مثل أنواع الأشكال، التي يعلم كل واحد منها وعوارضه وخواصه وسائر أحواله، وأنواع الأعداد أيضًا، وهما جميعًا غير متناهيين. فقد جاز إذن أن يوجد شيء بالفعل غير متناهي العدد، وإذا كان ذلك جائزاً لم يستحل أن يكون سبيل النفوس هذه السبيل.

[٣] قال أبو موسى: فقلت له أما علمه بالكليات فليس يمكن دفعه، وقد أوجب ذلك لعمري وجودَ أشياءَ بلا نهاية بالفعل معًا. وأما علمه بالجزئيات،

2 كتب بعد البسملة «ربّ وعوّنك» [ل] – 3 بن: ابن [ا، ل] – 5 إنشاء: انشاء [ا، ل] – 7 يعلم: تعلم [ا] / سئلوا: سيلو [ل] – 8 ما: ناقصة [ا] – 12 تنتهي: ينتهي [ا] – 15 دُفع: رفع [ا، ل] – 16 المسامحة: الجزئيات، ثم أثبت الصواب فوقها [ل] الجزئيات بالمسامحة [ا] / فهاهنا: فههنا [ا] – 20 يستحل: يستحيل [ا]

été fait état n'est pas entièrement convaincant. Il est en effet possible que celui qui connaît connaisse ce que tu as pris comme exemple dans le cas de l'éclipse – qu'elle revient après telle période de tant et tant de mois, par exemple – du fait qu'il connaît les mouvements, leur durée et ce que cela nécessite comme occurrence des astres en conjonction, opposition et autre ; mais ensuite, qu'il ne connaisse pas la production de cela dans le moment où cela se produit. Il sera alors dans la même situation que les astronomes qui connaissent les causes de l'éclipse et ce qui nécessite sa venue à l'être, mais qui ne connaissent pas les moments où elle a lieu du fait qu'ils ne le calculent pas ni ne le recherchent.

[4] Il dit : est au nombre des choses les plus aberrantes, graves et intolérables que le meilleur de tous les êtres selon la substance, la connaissance et la sagesse soit déficient dans Sa connaissance par rapport à la substance vile. Or ce qui nous contraint à quelque chose d'aberrant, dans le propos selon lequel les choses dont le nombre est infini existent en acte simultanément – si c'est vraiment aberrant comme l'ont énoncé certains –, cela est cependant plus facile et plus nécessaire que de nous soumettre à la contrainte de l'aberration dans l'autre propos et que nous allions jusqu'à rendre la chose la plus majestueuse et la plus éminente déficiente par rapport à la plus minime et la plus humble. En outre, si celui qui déniait cela le déniait seulement pour échapper à la contrainte de l'existence de choses en nombre infini en acte simultanément, il y est contraint par son admission de la connaissance des universaux, comme nous venons de le montrer. Par conséquent, il ne rime à rien de vouloir échapper à ce qui s'ensuit nécessairement par une autre voie.

<Connaissance et changement>

[5] Je lui dis alors : quant à écarter cela et fuir cette aberration que tu as trouvée s'imposer par ailleurs, ma foi, cela ne rime à rien, vu ce que cela comporte d'intolérable et de monstrueux. Toutefois, il reste à celui qui est de cette opinion un autre argument, qui pourrait selon moi être plus fort que celui-là : ils disent que s'Il connaissait les particuliers, il s'ensuivrait que le changement L'affecte. En effet, Il connaît en ce moment-ci, par exemple, ce qui aura lieu demain et Il connaît certes à son sujet, en ce moment-ci, le fait que cela *aura* lieu, non pas que cela *a eu* lieu. Or, quand la chose a eu lieu, qu'elle s'est achevée et que le lendemain est passé, ce qu'Il savait d'elle cesse d'être, à savoir qu'elle aurait lieu, et survient la connaissance que la chose a été – ce qui est le changement dont on nie qu'il prenne place là-bas.

[6] Je dis alors : tu as su ce que dit Aristote : le changement de la substance et sa réception des contraires ne se produisent que par son altération à elle. Il en est venu sur ce point à faire la différence entre cela et les

فليس ما جرى فيه بكل المقنع، وذلك أنه قد يجوز أن يعلم العالم ما ضربت المثال به من أمر الكسوف، وأنه يعود في كل وقت كذا وكذا شهر مثلاً، إذ كان يعلم الحركات ومددها وما يوجب ذلك من توافيها في الاجتماع والاستقبال وغير ذلك، ثم / لا يعلم حدوث ذلك في الوقت الذي يحدث ا-٤٣ فيه، ويكون مثله في ذلك مثل المنجمين الذين يعلمون أسباب الكسوف وما يوجب كونه، ولا يعرفون أوقات وقوعه، إذ لم يحسبوه ويتفقدوه.

[٤] فقال: / هذا من أشنع الأمور وأعظمها وأقبحها أن يكون أفضل ل-٢٤ الأشياء كلها في الجوهر والعلم والحكمة يقصّر في العلم عن الخسيس من الجواهر. وما يلزم أنفسنا ما يستشنع من القول بأن الأشياء ‹التي› لا نهاية لعددها توجد بالفعل معًا – إن كان شنعًا كما نطق قوم – أسهلُ وأوجب من أن يلزمها الشنعة في هذا القول الآخر، ونقدم على التقصير بأجل الأشياء وأعلاها عما هو أقل منها وأدناها. على أنه إن كان إنما يدفع هذا من يدفعه هربًا من أن يلزمه وجود أشياء لا نهاية [لها] لعددها بالفعل معًا، فقد لزمه ذلك من إقراره بمعرفة الكليات كما بينا قبيل، فلا وجه إذاً بعد هذا للهرب مما قد وجب ولزم من وجه آخر.

[٥] فقلت له: أما دفع هذا ‹و›الهرب من هذه الشنعة التي تجد ‹أنها› لزمت في غيره، فلعمري أنه لا وجه له لما فيه من القبح والفحش. ولكن قد بقيت لمن يرى هذا الرأي حجة أخرى، كأنها عندي أقوى من هذه، وهي أنهم يقولون إنه ‹إن› كان يعلم الجزئيات لزم من ذلك أن يلحقه تغيّر، وذلك أنه يكون في هذا الوقت مثلاً يعلم ما يكون في غدٍ، وإنما يعلم من أمره حينئذ أنه يكون لا أنه قد كان، فإذا كان الأمر وفرغ وجاز غدٌ بطل ما كان يعلمه من أنه يكون، وحدث فيه العلم بأنه قد كان، وهذا هو التغيّر الذي ينكر وقوعه هناك.

[٦] فقلت: فقد علمتَ ما يقوله أرسطوطاليس من أن تغيّر الجوهر وقبوله الأضداد إنما يكون باستحالته هو، وذهب في ذلك إلى التفريق بينه وبين

2 كذا وكذا: كذي وكذي [ل] – 5 الذين: اللذين [ا، ل] – 9 وما: ولا [ا، ل] / أنفسنا: ناقصة [ا] – 10 توجد: يوجد [ا] – 12 على: وعلى [ا، ل] – 13 هربًا: هويا [ا، ل] / بالفعل: بالعقل [ا، ل] – 14 للهرب: الهرب [ا، ل] – 15 ولزم: ولزوم [ا، ل] – 18 أقوى: اقوا [ا، ل] – 19 تغيّر: تغيير [ا، ل] – 21 فإذا: بماذا [ا، ل] / غدٌ: غدٍ [ا، ل] – 24 أن: ناقصة [ا] – 25 باستحالته: باستحاله [ا، ل]

accidents qui sont qualifiés par des qualifications contraires en raison d'un changement d'autre chose qu'eux et non parce qu'ils seraient eux altérés, et qui restent à l'identique aux deux moments tout en accueillant les contraires. Il a assimilé cela à la proposition qui est vraie en un certain temps puis qui devient fausse en raison d'un changement de la chose sur laquelle portait l'énoncé, non en raison de son changement à elle. Or, il en va de même pour la croyance et l'opinion.

[7] Il dit : si tu médites sur ce qu'il en est de cette aporie que ces gens ont présentée ici comme objection, tu trouveras que les deux situations diffèrent dans le connaissant non en ce que celui-ci a changé mais en ce que l'état du connu en soi a changé, ou son temps, en sorte qu'a changé avec lui la relation entre lui et le connaissant. Il en va de la sorte pour la plupart des choses reliées à une chose, car la relation entre celles-là et celle-ci change par le changement des premières, en sorte que changent les qualifications de la chose avec laquelle on a la relation sans qu'un changement ne l'affecte en elle-même. Exemple : un homme est assis à ta droite puis se déplace à ta gauche. Ta position à toi diffère alors et ta relation à lui change, du fait que tu étais d'abord à sa gauche puis que tu t'es trouvé à sa droite, sans qu'un changement ou une altération ne t'affecte en toi-même.

[8] Je lui dis alors : je ne suis pas d'avis qu'il en aille dans cette aporie de manière entièrement semblable à cette image, car je discerne ici deux connaissances dont l'une, la connaissance du fait que la chose aura lieu, est supprimée, et l'autre, qui est que la chose était, se produit. Or, que la chose sera et qu'elle était ne sont pas une chose unique connue.

[9] Il dit alors : si la connaissance que la chose aura lieu n'était pas auparavant dans le connaissant, puis se produit ultérieurement, il y aurait bien ma foi un changement en lui. Mais s'il n'a pas cessé de connaître que la chose aurait lieu, le moment où elle a lieu, l'état dans lequel elle se trouve, la durée de sa persistance, le moment de sa disparition et l'ensemble du temps dans sa totalité, ainsi que ce qui a lieu dans chacune de ses portions, alors le changement ne l'affecte pas en cela, du fait qu'il n'a jamais cessé de savoir que cette chose est et existe à tel moment du temps. De sorte que cette connaissance ne cesse en lui d'être dans un état unique, avant l'existence de la chose, pendant son existence et après son existence. Seules changent à son propos les expressions « existera » et « a existé », en raison de la chose en elle-même et non du connaissant. Notre proposition, seulement, qu'Il connaît que cette chose existera ou qu'elle a existé, voilà des relations entre la chose et le connaissant du point de vue du temps, tandis que la connaissance

الأعـراض التـي توصف بأوصـاف متـضـادة لتـغـيّـر مـا سـواها لا لأنـهـا هي تسـتحيل، وتثبت بعينها في الحالين وتقبل الضدين، ومثّلَ في ذلك بالقول الذي يكون صادقًا في وقت ثم يصير كـاذبًا لتغيّر الشيء الذي كـان يخبر عنه لا لتغيره هو في نفسه، وهذا أيضًا سبيل الاعتقاد والظن.

[٧] قال: وإن تأملت/ الحال في هذا الشك الذي اعترض به هؤلاء ثَمّ تجد ا-٤٤ الوضعين اختلفا في العالم ‹لا› من قبل أنه هو تغيّـر بل من قبل أن حال المعلوم في نفسه تغيّرت أو زمانه، فتغيّرت بذلك الإضافة بينه وبين العالِم، وهذا سبيل أكثر الأشياء المضافة إلى شيء، فإن الإضافة بينها وبينه ‹تتغيّر› بتغيّرها هي، فتختلف أوصاف الشيء الذي ‹كانت الإضافة إليه› من غير أن يلحقه في نفسـه تغيّر. مثال ذلك: أن يكون إنسـانٌ جالسًا عن يمينك ثم يتحول إلى يسارك. فيختلف وضعك أنت وتتغيّر إضافتك إليه لأنك كنت أولاً عن يسـرته ثم صرت عن يمنته من غيـر أن يلحقك في نفسك تغـيّـر ولا استحالة.

[٨] فقلت له: لست أرى/ الأمر في هذا الشك يشبه هذا المثل كل الشبه، ل-٢٥ لأني أجد هاهنا علمين يَبْطُلُ أحدُهما: وهو العلم بأن الشيء يكون، ويحدث الآخرَ: وهو أنه كـان. وأن الشيء يكون وأنه كـان، ‹ليسا› شيئًا واحداً معلومًا.

[٩] فقال: لو كـان العلم بأن الشيء يكون، لم يكن قبلُ في العَالِم، ثم حدث بعد لكان لعمري تغيّر فيه، فأما وهو لم يزل عالمًا بأن الشيء يكون وبالوقت الذي يكون فيه والحال التي يكون عليها ومدة بقائه ووقت بطلانه وبجميع الزمان جملة، وكل ما يكون في قطعة قطعة منه، فليس يلحقه في هذا تغيّر، لأنه إنما لم يزل يعلم أن هذا الشيء كائنٌ موجود في قطعة كذا من الزمان، فهذا العلم لا يزال فيه على حال واحدة قبل وجود الشيء ومع وجوده وبعد وجوده، وإنما تتغير عليه الألفاظ «يوجد» و«وجد» من قبله هو في نفسه لا من قبل العالم. وقولنا فقط إنه يعلم أن هذا الشيء يوجد أو

2 تستحيل: يستحيل [ا] – 5 تجد: نجد [ا، ل] – 6 ‹لا›: في [س] – 8 ‹تتغيّر›: في [س] – 10 تغيّر: تغيير [ل] / إنسان: انسانًا [ا، ل] – 11 وضعك أنت: وضعاك وانت [ا، ل] – 12 يسرته: يسارته [ا] / يمنته: يمينه [ا، ل] – 15 يبطل: تبطل [ا] – 16 ‹ليسا›: في [س] / شيئًا: لشيًا [ل] – 18 يكون: أثبتها فوق السطر مع «صح» [ا] – 20 وبالوقت: بالوقت [ا] / ومدة: او مدة [ا] – 22 كذا: كذى [ل] – 24 يوجد: موجد [ا، ل] – 25 فقط: فقد [ا، ل]

en elle-même est seulement que la chose est existante dans telle portion du temps. Si la chose fait l'objet d'une mise en relation antérieure à elle, il est dit qu'elle existera, tandis que si elle fait l'objet d'une mise en relation postérieure à elle, il est dit qu'elle a existé.

[10] Il dit : cela se passe comme cela, dans notre cas – pour ne rien dire de qui est au-dessus de nous – à propos de ce pour quoi nous possédons une connaissance antécédente. De fait, notre connaissance que le soleil se lèvera demain ne change pas, pour moi, après son lever, sous prétexte que nous acquérons alors la connaissance que le soleil s'est levé. Et, pour ce qui relève du chapitre de la connaissance, absolument aucune altération ne nous affecte sous ce rapport.

[11] Il dit : peut-être notre contradicteur dira-t-il : « cette rectification vous est permise dans le cas des choses qui se produisent dans le temps, mais que direz-vous au sujet du temps lui-même ? Comment pourrez-vous dire, à propos de l'un de ses segments, qu'Il n'a jamais cessé de connaître qu'il est existant dans telle portion de temps, à la façon dont cela vous était permis dans le cas des choses qui ont lieu dans le temps ? ». Nous pouvons lui dire que si une telle chose est difficile dans le cas du segment de temps, nous pouvons le définir au moyen d'une autre définition. Nous disons donc : Il n'a cessé de connaître que ce segment de temps est existant à la suite de tel segment et de tel segment de temps. Cette proposition se substituera pour nous à l'autre.

[12] Ce que nous disons au sujet de la connaissance a un équivalent dans le cas de la sensation. Car si nous observons une pierre qui tombe, nous la voyons une fois plus haut que nous, puis une fois au niveau de nos yeux, puis une fois plus bas que nous, sans que se produisent pour nous, dans ces états, des actes visuels différents, ni des objets vus différents. De même, notre connaissance de la pierre quand elle est plus haut que nous, puis à notre niveau, puis plus bas que nous a lieu sans que se produisent pour nous, dans ces états, des actes visuels différents, ni des objets vus différents. Pour cette raison, notre connaissance de la pierre quand elle est plus haut que nous, puis à notre niveau puis plus bas que nous est une connaissance unique. Rien d'elle ne se produit que nous ne possédions pas dès que nous avons vu la pierre tomber. Ainsi s'achève son argument sur ce sujet.

<Refus du changement en Dieu>

[13] À la suite de quoi, il dit : la raison de cette croyance qu'ont ces gens est leur négation du changement dans le Connaissant, bien qu'ils ne sachent pas, selon moi, pourquoi ils nient le changement en Lui ni ce qui s'ensuit de cela. Je lui ai alors demandé de m'apprendre la raison de la négation du changement, et en quel sens il fallait l'affirmer. Il remarqua alors que la discussion exhaustive et rigoureuse de ce point était longue. Cela ne me convainquit pas venant de lui, et je lui demandai qu'il m'enrichisse à ce sujet, sur le mode d'une sentence sur laquelle se reposer.

أنه وجد إنما هي إضافات بين الشيء وبين العالم من جهة الزمان، والعلم في نفسه إنما هو أن الشيء موجود في قطعة كذا من الزمان. فإن أضيف إليه من قبله قيل إنه يوجد وإن أضيف إليه من بعده قيل إنه وجد.

[١٠] قال وهذه سبيلنا نحن فضلاً عمن فوقنا فيما تقدم لنا المعرفة به، فإن علمنا بأن الشمس تطلع في غد ليس يتغير عندي بعد طلوعها بأن نصير حينئذ نعلم أنها قد طلعت ولا يلحقنا في هذا الوجه في باب العلم استحالة أصلاً.

[١١] قال ولعلّ المخالف سيقول: إن هذا الإصحاح يسوغ لكم في الأشياء التي تكون في الزمان، ولكن ما قولكم في الزمان نفسه؟ وكيف يمكنكم أن تقولوا في القطعة منه / إنه لم يزل يعلم أنها موجودة في قطعة كذا من ا-٤٥
الزمان كما ساغ لكم ذلك في الأشياء الكائنة في الزمان؟ ولنا أن نقول له إنه ‹إن› تعذر مثل هذا في القطعة من الزمان فلنا أن نحدّها بغير ذلك من التحديد.

[١٢] فنقول: إنه لم يزل يعلم أن هذه القطعة من الزمان موجودة عن قطعة كذا منه وقطعة كذا منه، فينوب لنا هذا القول عن ذلك؛ ولما قلناه في العلم نظير في الحس. فإنا لو أبصرنا حجراً يهبط لرأيناه مرة أعلى منا ومرة بإزاء أعيننا ومرة أخفض منا من غير أن يحدث لنا في هذه الأحوال إبصارات مختلفة ولا مبصرات مختلفة. فكذلك علمنا به وهو أعلى منا ثم بإزائنا ثم أخفض منا من غير أن يحدث لنا في هذه الأحوال إبصارات مختلفة ولا مبصرات مختلفة، فلذلك علمنا به وهو أعلى منا ثم بإزائنا ثم أخفض منا /
علم واحد ولم يحدث منه ما لم يكن لنا منه أوّل ما رأيناه هابطاً. وكذلك ل-٢٦
هذا آخر ما احتج به في هذا المعنى.

[١٣] ثم قال بعقبه: إن السبب فيما يعتقده هؤلاء من هذا الاعتقاد هو نفي التغيير عن العالم، وليس يدرون – عندي – لِمَ ينفى التغيير عنه ولا ما الذي يلزم من ذلك. فسألته أن يعرفني السبب في نفي التغيير، ومن أي جهة وجب القول في ذلك، فذكر أن الكلام في ذلك يطول على الاستقصاء والتحصيل. فلم أقنع منه بذلك، وسألته أن يعيد لي فيه على حال جملة يسكن إليها.

2 كذا: كذى [ل] – 5 فإن: هان (؟) [ا، ل] – 6 طلعت: أثبتها فوق السطر مع «صح» [ا] – 8 يسوغ: تسوغ [ا، ل] – 10 تقولوا: تقولو [ل] / كذا: كذى [ا، ل] – 15 كذا (الثانية): كذى [ا، ل] – 16 فإنا: فانها [ا] – 17 الأحوال: ناقصة [ا] – 20 فلذلك: فكذلك [ل] – 24 ينفى: سفق [ا، ل]

[14] Il dit alors : cela ne s'impose à certains qu'en raison du fait qu'ils croient à Son sujet qu'Il est la cause première pour toutes les choses, comme en sont d'avis les Déterministes. S'Il est considéré ainsi, Il est la cause première de tous les mouvements, ainsi que de tous les effets et de tous les changements également. Il s'ensuit donc de là qu'aucun changement ne L'affecte, car si quelque changement L'affectait – et nous avons avancé qu'Il était la cause première de tous les changements –, la chose reviendrait à Lui sous la forme d'un cercle, en sorte qu'Il serait Lui la cause d'un certain changement, ce dernier changement serait la cause d'un autre changement et l'autre la cause d'un troisième changement. Ainsi, on accomplirait un cercle de changements qui reviendrait à Lui, en sorte que s'écroulerait alors notre qualification de Lui comme cause première. Car si l'on a comme un cercle, aucune des causes n'a davantage de titre à être première que les autres : toutes sont à la fois des causes et des causés, ce qui est absurde.

[15] Quelqu'un peut dire : « nous pouvons voir des causes premières qu'affectent les changements et les effets provenant de leurs causés, à la manière de l'âme rationnelle ou de la faculté hégémonique qui est la cause première des mouvements volontaires. Car il est possible que l'homme, par son choix, ingurgite un certain aliment ou un certain médicament qui lui nuit par la maladie qui aliène son entendement. À ce moment-là, le changement est revenu à la cause première et cela ne met pas à mal le fait qu'elle est la cause première. Il y a beaucoup d'exemples semblables d'un tel cas de figure ». Ce que nous répondons à cette objection est qu'on dit au sujet de la cause première que l'effet ne revient pas à elle de la manière exacte selon laquelle elle était la cause de sa maladie ; d'une manière différente, il est possible que l'on ait comme un cercle, en sorte qu'on revienne à elle. Car l'âme ou la faculté hégémonique est la cause première des mouvements volontaires d'une manière différente de celle selon laquelle la nourriture était cause du changement qui affectait la compréhension ; bien plus, la nourriture est une *autre* cause première pour ce qui actionne ce changement. Selon cette voie, on ne nie pas que les changements reviennent aux causes premières. En revanche, de la manière selon laquelle la cause première accomplit ce qu'elle accomplit et effectue ce qu'elle effectue, il n'est pas possible que l'effet accomplisse un cercle et qu'on revienne à elle, car s'écroulerait alors le fait qu'elle soit cause première, comme nous l'avons montré auparavant.

[16] Pour ceux en revanche qui sont d'avis qu'il y a des causes premières autres que Lui pour de nombreux mouvements et actes, comme ceux qui professent la délégation et le choix – et eux sont ceux qui s'opposent aux Déterministes – ce n'est pas de cette manière-là que s'impose à eux le refus du changement, mais en ce que Sa substance même, Sa nature, ne peut pas

[١٤] فقال: إنما وجب ذلك عند قوم من قِبل أنهم يعتقدون فيه أنه العلة الأولى لجميع الأمور، كالذي تراه المجبرة. فإذا جعل كذلك فهو علة أولى لجميع الحركات والآثار والتغيرات أيضًا. فيجب من ذلك ألا يلحقه تغيير، لأنه إن لحقه تغيير ما – وقد قدمنا أنه العلة الأولى لجميع التغييرات – كان الأمر قد عاد إليه، فصار شبيهاً بالدائرة، حتى يكون هو علة لتغير ما، وذلك التغير علة لتغير آخر، والآخر علة لتغير ثالث، حتى يستدير الأمر، ويُنتهي إليه في التغييرات، فينتقض حينئذ ما وصفناه من أنه علة أولى. لأن الأمر إذا صار شبيهاً بالدائرة لم يكن واحدٌ من الأسباب أولى بأن يكون أول من الباقية، فيصير جميعها عللاً ومعلولات، وهذا خلف.

[١٥] وللقائل أن يقول: إنا قد نرى أسباباً أوَل تلحقها التغييرات والتأثيرات من معلولاتها، كالنفس الناطقة أو القوة السياسية التي هي سبب أوّل للحركات الإرادية، فقد يجوز أن يتناول الإنسان باختياره طعامًا من الأطعمة / أو دواءً من الأدوية يجني عليه علة تغيّر الفهم، فيكون حينئذ قد ا-٤٦ عاد التغيير إلى السبب الأول، ولم يضره. وذلك أنه سبب أول. وفي هذا المعنى أمثلة كثيرة نظائر لهذا المثال. والذي نرد به هذا الاعتراض هو أن السبب الأول [لا] يقال فيه إنه لا يعود التأثير إليه على الجهة التي كان هو سبب علته بعينها، وأما على غير تلك الجهة فقد يجوز أن يستدير الأمر حتى يعود إليه. فإن النفس أو القوة السياسية هي سبب أول للحركات الإرادية على غير الجهة التي كان الغذاء عليها سبب التغيير اللاحق للفهم، بل الغذاء سبب أول آخر لما أثر ذلك التغير. وعلى هذا السبيل، فليس بمنكر أن تعود التغييرات إلى الأسباب الأوَل. فأما على الجهة بعينها التي عليها يفعل السبب الأوّل ما يفعله ويؤثر ما يؤثره فليس يمكن أن يدور التأثير فيعود إليه، لأنه ينتقض حينئذ أن يكون سبباً أوّل كما بيّنا فيما تقدم.

[١٦] وأما عند من يرى أن هاهنا أسباباً أوَل أغيره لحركات وأفعال كثيرة، كالذين يقولون بالتفويض والاختيار / وهم المخالفون للمجبرة، فليس من ل-٢٧ هذه الجهة يجب عندهم نفي التغيير، بل من جهة أن نفس جوهره وطبع

3 والتغيرات: والتغييرات [ل] – 4-5 كان الأمر قد عاد: مكررة [ا، ل] – 5 هو علة: هؤلاء [ا] – 8 أول: أولاً [ا، ل] – 12 للحركات: الحركات [ا، ل] – 13 تغيّر: فوق السطر [ل] – 16 هو: أثبتها فوق السطر [ل] – 17 علته: علتها [ا، ل] / تلك: هذا [ا] – 18 يعود: يعوّد [ل] تعود [ا] – 22 يؤثره: يؤثر [ا، ل] – 23 أول: أولاً [ا، ل] – 25 كالذين: كاللذين [ا] – 26 وطبع: وطبعه [ا، ل]

recevoir un effet et qu'aucun effet absolument ne L'affecte, cela étant aussi impossible en Lui qu'est impossible à la chaleur d'accueillir la blancheur, ou au nombre d'accueillir la chaleur, la froideur, les couleurs, les formes et d'autres qualités ; ou plutôt, comme il est impossible à de nombreuses substances d'accueillir certains types de changements. Car la substance du ciel et de tous les corps supérieurs ne peut accueillir quoi que ce soit des changements qui affectent ce qui est soumis à la génération et à la corruption, excepté le mouvement local. Si quelqu'un médite aussi sur l'essence du temps et du lieu selon la doctrine de Galien, il trouvera que l'un et l'autre sont dans l'impossibilité d'accueillir quoi que ce soit des changements. En outre, il est nécessaire que les substances incorporelles soient davantage dans l'impossibilité d'accueillir cela, et soient plus éloignées d'être affectées par, ou sujettes à, quoi que ce soit de cela, du fait que le temps ne leur ressemble que faiblement – celui-ci est comme la voie menant à leur représentation dans l'estimative selon ce que nous avons mentionné – du point de vue de l'impossibilité d'accueillir les changements.

<Sur le nombre des espèces et leur rapport aux espèces homogènes>

[17] Nous questionnâmes Abū al-Ḥasan sur ce que disent la majorité des commentateurs, à savoir que les espèces sont finies et que parmi elles, celles qui sont à un même degré sous un genre unique ne sont pas antérieures par nature l'une à l'autre ni se requièrent l'une l'autre. Nous ne l'avons pas trouvé de cet avis. Il mentionna au contraire que nous connaissons l'erreur de ces deux propositions de près, dans le cas des espèces du nombre et des figures. Car elles sont infinies, chacune d'elles est antérieure à celle qui la suit par nature et la seconde d'entre elles requiert dans sa constitution celle qui la précède.

<Qu'un infini peut être plus grand qu'un autre infini>

[18] Et nous questionnâmes aussi sur la proposition utilisée par nombre de commentateurs fameux, à savoir : l'infini ne peut pas être plus grand que l'infini. Il nous mit en garde contre l'erreur de celle-ci aussi à partir du nombre. Car le nombre lui-même est infini, et les pairs, dans le nombre, sont à eux seuls infinis, et de même les impairs, or ces deux classes sont égales et chacune d'elles est la moitié du nombre tout entier. Pour ce qui est de leur égalité, il est en effet clair que pour tout couple de nombres successifs, l'un est pair et l'autre est impair. Et pour ce qui est du fait que le nombre est le double de chacune d'elles, cela vient de ce qu'elles sont égales, qu'elles l'épuisent et qu'il n'a pas d'autre partie qu'elles. Par conséquent, chacune d'elles est la moitié du nombre. On a montré aussi que l'infini est un tiers de l'infini, un quart, un cinquième, et toute partie qu'on supposera du nombre en soi : les nombres qui ont un tiers sont infinis et sont le tiers du nombre tout entier, les nombres qui ont un quart sont un quart du nombre tout

جوهره [وطبع] لا يمكن أن يقبل التأثير ولا يلحقه تأثير من التأثيرات أصلاً، بل يمتنع ذلك فيه كامتناع الحرارة من قبول البياض، والعدد من قبول الحرارة والبرودة والألوان والأشكال وغير ذلك من الكيفيات، بل كامتناع كثير من الجواهر من قبول أصناف من التغييرات؛ فإن جوهر السماء وجميع الأجرام العالية ممتنع من قبول شيء من التغييرات اللاحقة لما تحت الكون والفساد ما خلا الحركة المكانية. فإن تأمل أيضاً متأمل ذات الزمان والمكان الذي يذهب إليه جالينوس وجدهما ممتنعين من قبول شيء من التغييرات أصلاً. ويجب أن تكون الجواهر التي هي غير أجسام أشد امتناعاً من قبول ذلك وأبعد كثيراً من أن يلحقها أو يعرض لها شيء منه، إذ كان الزمان إنما يشبهها شبهاً ضعيفاً – وهو كالمطرق إلى تصورها في الوهم على ما ذكرنا – من الامتناع من قبول التغييرات.

[١٧] سألنا أبا الحسن عما يقوله أكثر المفسرين من أن الأنواع متناهية، وأن منها ما كان في مرتبة واحدة تحت جنس واحد، فليس يتقدم بعضها بعضاً في الطبع، ولا يحتاج بعضها إلى بعض. فلم نجده يرى ذلك، بل ذكر أنا نعلم بطلان هاتين القضيتين من / قرب في أنواع العدد والأشكال، وأنها غير ا-٤٧ متناهية، وأن كل واحد منها أقدم من الذي يليه بالطبع والثاني منها يحتاج في كونه إلى الذي يتقدمه.

[١٨] وسألنا أيضاً عن قضية يستعملها كثير من أجلّة المفسرين وهي: أن ما لا نهاية له لا يكون أكثر مما لا نهاية له. فنبهنا على بطلان هذه أيضاً من العدد، فإن العدد نفسه لا نهاية له، والأزواج منه على حدتها لا نهاية لها، ثم كذلك الأفراد، وهذان الصنفان متساويان، وكل واحد منهما نصف العدد بأسره. أما تساويهما فبيّن من أن كل عددين متواليين، فأحدهما زوج والآخر فرد. وأما أن العدد ضعف كل واحد منهما، فمن قِبل أنهما متساويان وهما يستغرقانه، وليس له قسم غيرهما. فكل واحد منهما إذاً نصف العدد. وقد تبيّن أيضاً أن ما لا نهاية له يكون ثلث ما لا نهاية له وربع وخمس وأي جزء فرض من العدد بعينه، فإن الأعداد التي لها ثلث غير متناهية، وهي ثلث العدد بأسره، والأعداد التي لها ربع ربع العدد بأسره

1 جوهره: جوهر [ا، ل] – 4 قبول: فنون [ا، ل] / الأجرام: الاجزا من [ا، ل] – 5 تحت: يحث [ل] – 12 متناهية: المتناهية، ثم ضرب على اللام ألف بالقلم [ل] المتناهية [ا] – 13 تحت: بحب [ل] – 15 هاتين: هذين [ا] – 18 كثير: كثيراً [ا، ل] / أجلّة: جله [ل] – 24 غيرهما: غيرها [ا]

entier, les nombres qui ont un cinquième sont un cinquième du nombre tout entier, et ainsi de suite pour toutes les parties. En effet, nous trouvons pour tout triplet de nombres successifs un nombre qui a un tiers, pour tout quadruplet de nombres successifs un nombre qui a un quart, pour tout quintuplet de nombres successifs un nombre qui a un cinquième et, pour tout groupe de nombres successifs, en quelque multiplicité qu'ils soient, un seul nombre parmi eux qui a une partie dénommée selon cette multiplicité.

<L'accident est-il le genre des catégories non-substantielles ?>

[19] Nous questionnâmes Abū al-Ḥasan sur l'accident et sur la raison pour laquelle il n'est pas posé comme genre des neuf catégories, alors qu'elles sont toutes nommées par son nom et toutes définies par sa définition.

[20] Il dit : l'accident est un nom qui signifie une relation, car il signifie seulement une chose qui survient à un chose en lui étant suspendue. Et s'il signifie seulement une relation des catégories à la substance et non leur essence, il n'est pas possible qu'on le pose comme un genre pour elles. En confirmation de ce propos, il y a le fait que quand nous voulons proférer un énoncé sur l'essence de chacune d'elles, nous n'avons pas besoin pour cela de mentionner qu'elle est accident. Bien plutôt, nous proférons un énoncé sur la quantité en disant qu'elle est susceptible de l'égal et de l'inégal, sur la qualité en disant qu'elle est ce par quoi les choses sont dites semblables, sur toutes les autres catégories au moyen des définitions connues pour elles.

<Les catégories non-substantielles relèvent-elles toutes de la relation ?>

[21] Nous lui dîmes : si l'accident appartient à la catégorie de la relation, il est une espèce parmi ses espèces, et tu as subordonné les neuf catégories à cette espèce qui appartient à l'une d'entre elles.

[22] Il dit : je ne nie pas que le genre soit un individu à tel ou tel point de vue, *a fortiori* une espèce. Car les dix catégories, du point de vue qu'elles sont dix, sont seulement un individu parmi les individus de la dizaine, qui est l'une des espèces du nombre. Et ces catégories sont si étroitement entrelacées qu'on ne peut isoler l'une de telle manière qu'il n'y ait plus rien d'elle dans les catégories restantes. Platon a assimilé cet entrelacement à la situation de *u*, *a* et *i* dans les lettres du dictionnaire à partir desquelles cet entrelacement se produit, mais lorsque quelqu'un veut le proférer en l'abstrayant d'elles, cela lui est impossible et il doit impérativement, pour le rendre audible, recourir à certaines d'entre elles afin de le manifester en elles.

<Sur le nombre des catégories>

[23] Nous le questionnâmes sur la dissension au sujet du nombre des catégories, et s'il était d'avis qu'elles sont dix comme l'a dit Aristote, ou plus que cela, ou moins. Et s'il était d'avis que toutes les choses en relèvent. Nous avons vu qu'il inclinait à penser qu'elles étaient plus de dix et qu'il

والتي لها خمس خمس العدد بأسره، وكذلك يجرى الأمر في سائر أجزائه. وذلك أنا نجد في كل ثلاثة أعداد متوالية واحداً له ثلث، وفي كل أربعة أعداد متوالية واحداً له ربع، وفي كل خمسة ⟨أعداد متوالية⟩ عدداً له خمس، ⟨وفي كل أعداد⟩ متوالية، أي عدة كانت، عدداً واحداً منها له جزء مسمى بتلك العدة./

[١٩] سألنا أبا الحسن عن العرض، ولِمَ ⟨لم⟩ يجعل جنسًا للتسع ل-٢٨ المقولات، وهي كلها مسماة باسمه ومحدودة بحده.

[٢٠] فقال: العرض إنما هو اسم يدلّ على إضافة، لأنه إنما يدل على شيء عارض بشيء متعلقًا به. وإذا كان إنما يدلّ على إضافة المقولات إلى الجوهر لا على ذاتها، لم يجز أن يجعل جنسًا لها. ومما يصحح هذا القول: أنا إذا أردنا أن نخبر عن ذات كل واحدة منها، لم نحتج في ذلك إلى ذكر أنها عرض. بل أخبرنا في الكمية بأن نقول إنها التي تحتمل المساوي وغير المساوي، وفي الكيفية بأنها التي تقال الأشياء: متشابهة بها، وفي سائرها بالحدود المشهورة لها.

[٢١] فقلنا له: فإن كان العرض من مقولة المضاف، فهو نوع من أنواعها، وقد جعلت المقولات التسع تحت هذا النوع من واحدة منها.

[٢٢] فقال لست أنكر من أن يكون الجنس شخصًا من جهة وجهة فضلاً عن نوع، فإن العشر المقولات من جهة أنها عشر إنما هي شخص من أشخاص العشرة التي هي نوع من أنواع العدد. وهذه المقولات تشتبك اشتباكًا شديداً لا يمكن معه تخليص الواحدة منها حتى لا يوجد منها في سائر الباقية شيء. وقد شبه أفلاطون/ هذا الاشتباك فيها بحال الضم والفتح ا-٤٨ والكسر في حروف المعجم، الذي يُعلم أنه عنها، لكنه متى أراد مريد أن يلفظ به مخلصًا منها لم يمكنه ذلك ولم يكن له بد في إظهاره باللفظ من بعضها ليظهره فيها.

[٢٣] سألناه عما اختلف فيه من عدد المقولات، وهل يرى أنها عشر كما قال أرسطوطاليس، أو أكثر من ذلك أو أقل؛ وهل يرى أيضًا أن جميع الأشياء داخلة فيها؟ فرأيناه يميل إلى أنها أكثر من عشر، ويذكر أن قول

1 وكذلك: كررها في بداية السطر التالي [ل] – 2 نجد: نجدنا [ا] – 3 واحداً: واحد [ا، ل] – 5 العدة: العدد [ا] – 6 يجعل: نجعل [ا، ل] – 7 المقولات: مقولات [ا، ل] – 9 متعلقًا: هذا صواب محض – 11 واحدة: واحد [ا، ل] – 12 أخبرنا: اجترينا [ا، ل] – 13 الأشياء: للأشياء [ا، ل] – 16 واحدة: واحد [ا، ل] – 18 العشر المقولات: العشرة مقولات [ا، ل] – 19 وهذه: وهي [ا، ل] – 25 أنها: أنه [ا]

rappelait que le propos d'Aristote aussi, à ce sujet, n'entraînait pas nécessairement qu'elles soient seulement dix. Et qu'il était d'avis qu'il n'est pas nécessaire pour toute chose de rentrer dans l'une des catégories qu'il a dites, car les choses qui rentrent dans les catégories sont seulement les choses qui ont des espèces et des genres. Quant aux choses singulières comme le point unique et l'instant de temps, elles ne rentrent en aucune façon dans une catégorie.

<Sur les espèces de la quantité>

[24] Nous trouvâmes qu'Abū al-Ḥasan ne partageait pas l'opinion fameuse sur la quantité des espèces de la quantité, qu'elles sont sept, mais inclinait à penser qu'il y a des espèces nombreuses de la quantité qui existent dans des choses variées. Et il mentionna que ce par quoi on qualifie la qualité, lorsqu'on dit qu'elle est plus intense ou plus faible ou égale, est l'un des modes de la quantité. Il dit : on peut trouver problématique que cette notion soit une quantité du fait que ne se manifeste pas là un rapport entre deux grandeurs, de manière à ce que l'on dise moitié, ou double, ou quelque chose de ce type, alors que la seule chose qui indique qu'on a des quantités, c'est l'égalité et l'inégalité. Toutefois, que dira-t-il au sujet de ce qu'il y a dans la voix comme égal dans l'aigu et le grave et comme inégal, et les proportions diverses ? Et nous sera-t-il possible d'y mettre en doute, malgré cela, la présence de la quantité ? Il dit : peut-être existe-t-il d'autres espèces de la quantité, si tu médites sur les choses et que tu considères, dans leur multitude, ce qui est qualifié par l'égalité et l'inégalité, en plus de ce qui a déjà été recensé de ses espèces connues à propos desquelles il a été dit qu'il n'y en avait pas d'autres.

<Distinction entre la différence spécifique et l'espèce>

[25] Nous le questionnâmes sur la distinction entre la différence essentielle et l'espèce, car c'est là une difficulté où s'égarent de nombreuses personnes, et nous lui avons demandé de nous donner une indication sur ce point.

[26] Il nous donna alors une sentence appropriée, disant : la différence, dans la plupart des cas, son nom est le nom de la qualité ; tandis que l'espèce, son nom est dérivé du nom de la qualité qui est la différence, c'est-à-dire le séparateur entre ce qui est dérivé et ce dont on le dérive.

<Existence réelle du nombre>

[27] Abū al-Ḥasan mentionna qu'on est d'avis que le nombre n'a pas d'existence dans les choses comme tous les accidents, et qu'il n'est pas un état supporté dans le nombré, mais qu'il est seulement une chose conservée dans l'âme ; et qu'il a été mentionné aussi qu'il en va de la sorte pour toutes les relations qui relèvent de la quantité, comme la moitié, le double et les autres proportions, le plus grand, le plus petit, l'égal, le plus long, le plus

أرسطوطاليس أيضًا فيها ليس يوجب أن تكون عشراً فقط. ويرى أنه ليس يجب في كل واحد من الأشياء أن يدخل في مقولة من المقولات التي قال، لأن الأشياء الداخلة في المقولات إنما هي الأشياء التي لها أنواع وأجناس. فأما الأشياء المفردة مثل النقطة الواحدة والآن من الزمان فلا تدخل في مقولة من جهة من الجهات.

[٢٤] وجدنا أبا الحسن لا يرى الرأي المشهور في عدة أنواع الكمية وأنها سبعة، بل يميل إلى أن هاهنا أنواعًا كثيرة للكمية توجد في أشياء مختلفة. وذكر أن ما توصف به الكيفية من أنها أشد أو أضعف أو مساوية، ضرب من ضروب الكمية. قال وقد يشكل في أن هذا المعنى كمية لأنه لا يظهر فيه نسبة بين مقدارين حتى يقال نصف أو ضعف أو ما أشبه ذلك، وإنما فيه مما يدلّ على أنها كمية المساواة وغير المساواة. ولكن ما الذي [أن] يقول فيما يوجد في الصوت من التساوي في الحدة، / والثقل وغير التساوي والنسب ل-٢٩ المختلفة، وهل يمكننا أن نجحد الكمية فيه مع ذلك؟ قال: ولعله توجد أنواع أخر للكمية إذا تأملت الأشياء ووقفت في كثرتها على ما يوصف بالمساواة أو غير المساواة سوى ما قد أحصى من أنواعها المشهورة التي قيل إنها لا يوجد غيرها.

[٢٥] سألناه عن التمييز بين الفصل الذاتي والنوع، فإنه مشكل يغلط فيه كثير من الناس، وسألناه أن يعطينا العلامة في ذلك.

[٢٦] فأعطانا جملة حقيقية وقال: إن الفصل في أكثر الأمر يكون اسمه اسم الكيفية، والنوع فاسمه مشتق من اسم الكيفية التي هي الفصل، والفرق بين المشتق وما اشتق منه.

[٢٧] ذكر أبو الحسن أنه يُرى أن العدد ليس <له> وجود في الأشياء كسائر الأعراض، ولا هو حال محمولة في المعدود بل إنما هو أمر يحفظ في النفس؛ وأنه ذُكر أيضًا أن هذه سبيل كل الإضافات التي تقع في الكمية، مثل النصف والضعف وغيرهما من النسب، والأعظم والأصغر، والمساوي، والأطول والأقصر، وأنها هي أشياء تحدث في النفس عند مقايستها بين المقادير.

1 أن تكون: فوق السطر [ل] – 2 أن: التي [ا، ل] – 7 أنواعًا: انواع [ا، ل] / للكمية: الكمية [ا، ل] – 9 لأنه: انه [ا، ل] – 11 الذي [أن] يقول: مطموسة [ل] – 13 نجحد: نجد [ا] – 14 أخر للكمية: اجزا الكمية [ا، ل] / المساواة: المساوات [ا] – 15 أو غير: وغير [ا، ل] / المساواة: المساوات [ا] – 17 بين: عن [ا، ل] – 19 حقيقية: خفيفه [ل] – 22 أبو: ابا [ا، ل]

court : ce seraient là des choses qui se produisent dans l'âme quand elle compare des grandeurs.

[28] Il écarta ce propos et dit : que non ! Au contraire, tous ces *items* ont une existence dans les choses, et une réalité, et il en va pour eux comme pour les accidents inhérents aux substances, qu'existe ou non quelqu'un pour les connaître. La preuve en est que s'il n'y avait pas *dans* les nombrés un nombre par lequel leur multiplicité est bien la leur, il ne serait pas possible que s'accordent ceux qui les dénombrent pour parvenir tous à un même total dans leur décompte, toujours et de tout temps, tous ensemble et chacun séparément. Au contraire, selon l'un leur nombre serait différent de ce qu'il est selon l'autre et, selon un troisième, un nombre encore différent de celui des deux premiers. Or nous ne constatons pas qu'il en aille ainsi. Au contraire, nous voyons que quand se trouve là une chose parmi les choses susceptibles d'être comptées, comme par exemple des noix, ou autre chose qu'on peut compter, leur nombre ne varie pas suivant ceux qui le comptent, mais tous les dénombrent de manière unique. Si leur nombre est, par exemple, dix, tous trouvent dix, et il en va de même qu'elles soient plus ou moins que ce montant. Et il en va de même pour le plus court, le plus long, le plus grand et le plus petit. En effet, la plus longue de deux choses est la plus longue, qu'existe ou non celui qui les compare ; de même, la chose double est la chose double, la moitié la moitié, même s'il n'y a personne du tout pour les connaître. Et si la chose n'est pas telle, la catégorie de la relation s'effondre tout entière. Il dit : le nombre est, par conséquent, une forme supportée dans les nombrés. Dans les deux qui sont le nombré, il y a *deux*, et il en va de même pour tous les nombres.

[29] On lui dit : s'il en allait comme tu l'as mentionné, et que la forme du deux, celui qui est le nombre, est un *item* qui existe dans les choses, supporté dans le deux qui est le nombré, et que ce deux-ci était différent de ce deux-là, il faudrait alors que ces deux items, dont l'un est le nombré et l'autre le nombre, ait un autre nombre, en vertu duquel ils sont deux, en sorte qu'ils deviennent trois ; et il faudrait à ces trois-là un quatrième nombre en vertu duquel ils sont trois, en sorte qu'ils deviennent quatre, etc. à l'infini en suivant la suite des nombres. En sorte que, quand on pose deux des nombrés, les suivent des choses infinies en nombre en acte simultanément.

[30] La conversation se prolongea sur ce point et j'eus une controverse avec Abū al-Ḥasan, au cours de laquelle il y eut un grand nombre d'échanges, qui prit fin avec ce que dit Abū al-Ḥasan : je n'ai exigé des choses qu'elles soient nombrées et qu'elles aient un nombre autre qu'elles, que lorsqu'elles étaient distinctes et séparées les unes des autres. Mais quand ces choses sont rassemblées dans un endroit unique, à la façon des accidents existant dans un individu unique, qui forment, eux tous avec l'individu, une

[٢٨] فدفع هذا القول: وقال لا، بل هذه كلها أمور لها وجود في الأشياء وحقيقة، وسبيلها سبيل الأعراض المحمولة في الجواهر كان / العَالِمُ بها أو لم ا-٤٩ يكن. والدليل على ذلك أن المعدودات لو لم يكن فيها عدد به، صارت عدتها العدة التي عليها، لما أمكن أن يتفق العادون لها جميعًا على مبلغ واحد في عددها دائمًا وأبداً جميعًا أو شتّى، بل كان الواحد يرى أن عددها غير ما يراه الآخر والثالث غير ما يرى الاثنان الأولان، ولسنا نرى الأمر كذلك، بل نرى أنه إذا كان بالحضرة شيء من الأشياء المعدودة كالجوز مثلاً أو غيره مما يعد، لم يختلف عده على العادين له، بل عده كلهم شيئًا واحداً. فإن كان عدده مثلاً عشرة، وجد جميعهم عشرة. وكذلك إن كان أكثر أو أقل من هذا المبلغ، فإن هذه سبيل الأقصر والأطول والأعظم والأصغر. فإن الأطول من الشيئين هو أطولهما كان من يقيس بينهما أو لم يكن، وكذلك الضعف منهما ضعف، والنصف منهما نصف، لو لم يكن عَالِمٌ يعلم ذلك أصلاً، ولولا أن الأمر على هذا، لبطلت مقولة المضاف بأسرها. قال: فالعدد إذاً صورة محمولة في المعدودات، ففي الاثنين اللذين هما المعدود اثنين وكذلك سائر الأعداد.

[٢٩] فقيل له: إن كان الأمر على ما ذكرت، وكانت صورة الاثنين اللذين هما العدد أمراً موجوداً في الأشياء محمولاً في الاثنين اللذين هما المعدود / وكانت غيرهما، فإنه يجب أن يكون لهذين الأمرين، اللذين أحدهما ل-٣٠ المعدود والآخر العدد، عدد آخر به صارا اثنين، فتصير ثلاثة؛ ثم لهذه الثلاثة عدد رابع به صارت ثلاثة، فتصير أربعة، ويخرج الأمر في ذلك إلى غير نهاية لخروج العدد. فيكون متى وضع اثنان من المعدودات تبعتهما أمور لا نهاية لعددها بالفعل معًا.

[٣٠] فطال الكلام في ذلك واختلفت بيني وبين أبي الحسن مناظرة، فيه جوابات كثيرة، واستقر آخرها على أن قال أبو الحسن: إني إنما أوجبت في الأشياء أن تكون معدودة، ويكون لها عدد سواها متى كانت متباينة، منحاز بعضها من بعض. فأما إذا كانت مجتمعة في حيّز واحد بمنزلة الأعراض الموجودة في شخص واحد من الأشخاص التي هي بأسرها مع الشخص قطعة واحدة، فلست أوجب لها عدداً سواها، وإن كان كل واحد

6 يرى: يراه [ل] – 7 بالحضرة: الحضرت [ا] / شيء: شيئًا [ا، ل] / كالجوز: كما يجوز [ا، ل] – 12 عالم: عالمًا [ا، ل] – 19 صارا اثنين: جاز الاثنين [ا، ل] – 23 أبي: ابا [ا، ل] – 24 أبو: ابا [ا، ل] / إنما: لما [ا، ل] – 25 عدد: عددا [ا] – 26 منحاز: متحاز [ل] متجاوز [ا] – 28 فلست: فليست [ا، ل] / عدداً: عدد [ل]

pièce unique, je n'exige pas d'elles qu'elles aient un nombre à part de cette dernière, même si chacune d'elles est autre que celle qui l'accompagne. Bien plutôt, je dis seulement que cette pièce est composée de choses dont, si elles étaient séparées et distinctes, le nombre serait tel ou tel. Nous séparons seulement ces choses à la façon dont on découpe dans l'estimative un corps un, qui est unifié, en des morceaux ; s'il était séparé en ces morceaux dans le réel, leur nombre subsisterait en acte. Mais ils sont dans l'estimative, en sorte qu'ils n'ont pas un nombre en réalité, mais la chose est une et non séparée ; par conséquent, le nombre dans le nombré n'est pas distinct ni séparé de lui : au contraire, ils sont tous deux ensemble dans un endroit unique, et c'est pour cette raison qu'il n'est pas nécessaire qu'ils aient un troisième nombre.

<Sur l'équivocité>

[31] Thābit dit : le nom équivoque est de trois types. – (1) Il y a ce dont chacun des nommés par lui est étranger à l'autre, sans communauté avec lui autre que le nom qu'ils ont en partage. Ce type est celui que la plupart des gens connaissent, comme *source*. – (2) Il y a ce dont l'un des nommés englobe l'autre, comme *différence* qui dénomme la différence commune, la différence propre et la différence qui est la plus propre. De fait, la différence commune englobe les deux autres, et la différence propre englobe la différence la plus propre. (3) Il y a ce dont tous les nommés sont une chose unique en soi, comme quand nous disons *arcs semblables*. Car on peut comprendre sous ce nom les arcs qui admettent des angles égaux, mais on peut aussi comprendre les arcs qui sous-tendent des angles égaux à la circonférence ou au centre et on peut aussi comprendre les arcs dont le rapport à leur cercle respectif est égal. Il en va de la sorte pour tout nom commun quand ce qui est nommé par lui peut être défini par sa définition ou ses définitions. Ce qui est tel qu'il est dénommé par le nom commun, conformément au fait que sa définition est l'une des définitions qui définissent ce dénommé, quelle qu'elle soit, sa définition n'est pas l'objet d'une démonstration, mais il est nécessaire, pour qu'il soit qualifié par les autres définitions, que cela se montre par une démonstration. Car si nous voulons dire, par « arcs semblables », les arcs qui admettent des angles égaux, cette définition dispense de fournir une démonstration ; mais il est nécessaire qu'il y ait une démonstration qu'ils sous-tendent des angles égaux au centre et à la circonférence et que leur rapport à leur cercle respectif est égal. Ainsi, si l'on pose l'une de ces définitions comme première, il est nécessaire de recourir à une démonstration pour les deux autres, en sorte qu'on revienne à la définition qui ne faisait pas l'objet d'une démonstration et qu'elle nécessite à son tour la démonstration. Il en va de la sorte pour de nombreuses choses de la géométrie, des mathématiques et d'autres disciplines.

Les questions sont achevées, louange à Dieu et à Son aide. À Lui la louange toujours éternellement sempiternellement qui Lui est due.

منها غير صاحبه؛ بل إنما أقول: إن تلك القطعة مؤلفة من أشياء لو كانت مفترقة متباينة، لكان عددها كذا وكذا، وإنما نفصل تلك الأشياء كما ينقطع الجسم الواحد الذي هو متحد في الوهم بقطع لو تفصل بها في الفعل لكان لها عدد بالفعل قائمًا، وهي في الوهم فليس لها عدد على الحقيقة، بل الأمر واحد لا تفصل فيه، فالعدد في / المعدود ليس بمباين له ولا منحاز عنه، بل ا-٥٠ هما جميعًا في حيز واحد، ولذلك لا يجب أن يكون لهما عدد ثالث.

[٣١] قال ثابت: الاسم المشترك ثلاثة أضرب، منه ما كل واحد من مسمياته غريب من الآخر غير مشارك له إلا في الاسم العام لهما، وهذا الضرب هو الذي يعرفه أكثر الناس، مثل العين؛ ومنه ما بعض مسمياته يعمّ بعضًا، مثل الفصل الذي يسمى به الفصل العام والفصل الخاص والفصل الذي هو خاص الخاص. فإن العام من هذه يعم الآخرين، والخاص يعم خاص الخاص؛ ومنه ما مسمياته كلها هي شيء واحد بعينه، مثل هذا قولنا: القسي المتشابهة. فإن هذا الاسم يجوز أن يفهم من معناه القسي التي تقبل زوايا متساوية؛ ويجوز أن يفهم منه القسي التي توتر زوايا متساوية عند المحيط أو المركز، ويجوز أن يفهم منه القسي التي نسبتها إلى دوائرها متساوية. وهذه سبيل كل اسم مشترك يمكن أن يحد المسمي به بحدّه وحدوده، وما كانت هذه سبيله حتى سمي باسمه المشترك على أن حده أحد الحدود التي نحد بها ذلك المسمى، أيها اتفق، كان ذلك الحد غير مبرهن، واحتيج في وصفه بالحدود الباقية إلى أن يُبيّن ببرهان. فإنا إن عنينا بالقسي المتشابهة القسي التي تقبل زوايا متساوية، كان هذا الحد ‹هو› الذي يستغنى عن إقامة البرهان عليه، واحتيج إلى أن يقام البرهان على أنها توتر زوايا متساوية عند المركز والمحيط،/ وعلى أن نسبتها إلى دوائرها متساوية. ل-٣١ وكذلك لو وضع أحد هذين الحدين أولاً لكان يحتاج إلى إقامة البرهان على الحدين الآخرين، حتى يعود الحد الذي كان غير مبرهن، فيصير محتاجًا إلى البرهان. وهذه حال توجد في كثير من أمور الهندسة والرياضة وغيرها.

تمت المسائل بحمد اللّه ومعونته وله الحمد دائمًا أبداً سرمداً، فهو له أهل.

2 لكان: لكانت [ا، ل] / نفصل: نفضل [ل] يفصل [ا] – 3 متحد: متخذ [ل] / لو: او [ا، ل] – 6 لهما: لها [ا، ل] – 7 ثابت: ناقصة [ا] – 9 ما: فوق السطر مع «صح» [ا] – 12 هذا: ناقصة [ل] – 14 التي ... المحيط: مكررة وأشار إليها [ا] – 16 يحد: بجد [ا] – 18 نحد: بجد [ا] / بها: فيها [ا] – 22 دوائرها: ذواتها [ا، ل] – 27 أهل: نجد بعدها في [ا]: كاتبه الفقير إلى الله الآنس بالله الآيس عمن سوآه ابن أحمد محمد [...] نصره الله في الدارين وجعل الجنة مثواه محمد بن محمد وولاية علي وآله وأولاده عليهم السلام والتحية والإكرام في يوم الأربعاء ٢٩ شهر رمضان ١٠٣٨.

COMMENTAIRE

Commentaire des §§ [1]-[4] : l'existence de l'infini actuel

On a présenté plus haut les difficultés que présente cette introduction *in medias res* quant au statut du texte[1]. Pour en revenir à l'argument, on peut supposer qu'Ibn Usayyid partait de la conjonction des deux prémisses suivantes :

(1) l'univers est éternel *a parte ante* ;
(2) l'âme survit à la dissolution du corps.

Il en concluait à l'infinité du nombre des actes existant aujourd'hui en acte, donc à l'existence de l'infini actuel. Pressé de répondre à cet argument, Thābit aurait énoncé que l'existence de l'infini actuel ne lui paraissait pas absurde, bien au contraire. Ce qui aurait donné lieu à l'échange conservé dans les deux manuscrits.

On doit se demander qui, à l'époque de Thābit, pouvait se sentir mis en danger par l'argument sous-jacent à la première phrase du traité d'Ibn Usayyid. L'aristotélicien le plus considérable du temps, al-Kindī, avait déjà renoncé à la première prémisse, l'éternité *a parte ante* de l'univers[2]. Les théologiens métempsycosistes disciples d'al-Naẓẓām[3] semblent avoir adopté cette thèse dans le contexte de leur théodicée et non en raison d'une difficulté cosmologique – que d'ailleurs ils n'éprouvaient guère, puisqu'ils admettaient un commencement temporel de l'univers. Peut-être est-ce dans le contexte des doctrines sabéennes que la réfutation par Thābit de la métempsycose s'expliquerait le mieux. Même si le statut exact de l'éternité du monde est complexe dans le cadre d'une doctrine de la Grande Année, elle était facilement dérivable de l'idée d'une religion astrale. Plusieurs sources intègrent par ailleurs la transmigration des âmes dans le dogme ḥarrānien[4]. On ne peut enfin exclure que l'argument ait été développé

[1] Cf. *supra*, p. 619-624.

[2] Voir, dans les *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī*, vol. II : *Métaphysique et cosmologie*, par R. Rashed et J. Jolivet, Leyde / Boston / Cologne, 1998, les épîtres n° 1 (en part. p. 28-30), 2, 3 et 4 (cf. *Introduction*, p. XI). Cf. *infra*, p. 657, n. 28.

[3] Cf. J. van Ess, *Theologie und Gesellschaft im 2. und 3. Jahrhundert Hidschra. Eine Geschichte des religiösen Denkens im frühen Islam*, t. III, Berlin / New York, 1992, p. 430-445.

[4] Voir Shahrastānī, *Kitāb al-Milal wa-al-niḥal*, ed. M. F. Badrān, 2 vol., 1947-1955, Le Caire, t. II, p. 785 (cf. Shahrastani, *Livre des religions et des sectes*,

davantage pour lui-même que dans le cadre d'une polémique historique déterminée.

Le premier paragraphe consiste à donner un exemple supplémentaire d'ensemble infini, celui des éclipses qui ont eu lieu de toute éternité et qui auront lieu à l'avenir. Dans l'hypothèse d'un monde de durée infinie, celles-ci sont en nombre infini. Ainsi, de deux choses l'une : soit Dieu connaît toutes ces éclipses et il connaît un ensemble de cardinal infini ; soit Dieu ne connaît que la définition générale de l'éclipse et le fait qu'il y a des éclipses, mais sans jamais les associer à une indexation temporelle.

L'argument implicite sous-jacent est qu'il serait absurde que Dieu connaisse certaines indexations temporelles et en ignorent certaines autres, car cela supposerait que sa puissance ne peut s'exercer que sur n et non sur $n + 1$ cas d'éclipse ; or ce mode d'imperfection par limitation d'une puissance ne saurait affecter qu'une créature et non pas Dieu : soit donc il y a une impossibilité logique à ce que Dieu connaisse la moindre indexation, soit Il les connaît toutes. Mais si Dieu ne connaît aucune indexation temporelle, il est de ce point de vue inférieur à l'astronome, qui en connaît au moins quelques-unes. Ce qui est absurde. Il faut donc qu'Il les connaisse toutes. Un ensemble de cardinal infini est donc connu de Dieu. L'infini actuel est donc réel. *A fortiori*, l'infini actuel n'est pas impossible.

Les historiens qui se sont intéressés au présent traité n'ont pas noté que Thābit se sert d'un exemple utilisé par Aristote dans un contexte voisin. *Metaph.* K 8 est consacré à reprendre des résultats de *Metaph.* E 2 sur les sens de l'être, et se concentre sur l'être par accident et l'être comme vrai. Voici ce qu'écrit le Stagirite :

> Que l'être par accident n'a pas de causes et de principes du type de ceux de l'être par soi, c'est manifeste. Sinon, tout sera en effet de nécessité. Si en effet cela existe pour peu que cela existe, et cela pour peu que cela et si celui-ci n'est pas au hasard mais de nécessité, alors ce dont ce dernier était cause et jusqu'à celui qu'on appelle le dernier causé seront de nécessité – mais celui-ci était censé être par accident – en sorte que tout sera de nécessité et le hasard, la possibilité de venir à l'être ou non, seront radicalement exclus des choses qui se produisent. Et si l'on suppose que la cause n'est pas quelque chose qui est mais quelque chose qui devient, les mêmes choses se produiront, tout se produira en effet de nécessité. De fait, l'éclipse demain se produira si telle chose se produit, telle chose si encore telle autre, et cette dernière si une autre encore. Et de cette manière, un temps étant retranché à la durée finie allant de maintenant à demain, on aboutira à un certain moment à l'existant, en sorte que puisque celui-ci est, tout ce qui

---

traduction avec introduction et notes par J. Jolivet et G. Monnot, t. II, 1993, p. 169). Résumé dans D. Chwolsohn, *Die Ssabier und der Ssabismus*, t. I, p. 772-779, p. 773-774 en particulier.

vient après lui se produira de nécessité, en sorte que toutes les choses se produiront de nécessité[5].

Le cas de l'éclipse illustre ici ce que peut être le type de chaîne causale où Aristote refuse d'insérer l'être par accident. Si l'être par accident obéissait aux mêmes règles que l'être par soi, il serait aussi prévisible qu'une éclipse et ne serait donc plus « accidentel ». La nécessité hypothétique du futur, dans le cas de l'éclipse, se mue en nécessité absolue[6]. Il y a donc une malice certaine, de la part de Thābit, dans le choix de son exemple. Aristote lui-même ayant reconnu la nécessité de la venue à l'être de l'éclipse, un aristotélicien admettant l'idée d'un Dieu omniscient est confronté à un dilemme : – soit il admet que des événements qui, selon Aristote lui-même, se produisent nécessairement (et non accidentellement) ne sont pas connus de Dieu. Mais que serait cette connaissance divine qui n'engloberait pas les productions nécessaires ? – Soit il admet que Dieu connaît toutes les éclipses. Mais alors, du fait que, dans l'éternité du temps, le nombre des éclipses est infini, Dieu connaît une infinité actuelle d'événements.

À ce premier exemple, Thābit en joint un second, celui des classes d'objets géométriques et arithmétiques, qui doit dans son esprit illustrer le fait que non seulement les réalités particulières, mais même les réalités universelles sont en nombre infini. À quel mouvement de l'adversaire répond-il ainsi ? Sans doute à une tentative pour distinguer malgré tout, dans le cas l'éclipse, une forme universelle unique – correspondant à la définition – et une infinité d'instanciations particulières échappant tout autant à l'intellect que l'infinité, par exemple, de tous les êtres humains ayant vécu dans le passé (sous l'hypothèse d'un univers éternel *a parte ante*). Soulignons tout d'abord encore une fois que le recours de Thābit à *Metaph.* K 8 rend cette échappatoire difficile car Aristote suggère assez clairement que c'est *telle* éclipse (en l'occurrence, celle de demain) dont l'astronome peut dès aujourd'hui affirmer la production. Ce n'est pas la définition de l'éclipse qui est nécessaire, mais bien l'éclipse de demain[7]. Cependant, même si l'on accorde une telle distinction douteuse à l'adversaire, Thābit réplique que

[5] Aristote, *Metaph.* K 8, 1065a 6-21 (je ne rentre bien sûr pas ici dans les discussions sur l'authenticité de ce livre de la *Métaphysique*).

[6] Cf. J. Vuillemin, *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris, 1984, p. 119-120, avec référence au texte de *Métaphysique* K 8.

[7] C'est toute l'ambiguïté de la science aristotélicienne du supralunaire. Cf. *Génération et corruption* B 11, 337b 10-13, passage qui affirme la nécessité de la *venue à l'être* du solstice : « Semblablement dès lors au domaine de l'être, où il est impossible que certaines choses ne soient pas tandis que c'est possible à d'autre, en ira-t-il ainsi dans celui de la génération (καὶ περὶ τὴν γένεσιν) ? Sera-t-il par exemple nécessaire que le solstice soit engendré et exclu que cela soit impossible ? ».

l'infini actuel se loge également dans les universaux. Les classes d'objets mathématiques sont infinies.

L'intérêt de la discussion n'est alors pas tant d'user de réalités mathématiques pour contredire une thèse aristotélicienne bien connue, que de se placer au niveau de la connaissance divine pour trancher en faveur du réalisme la question de l'*existence* des objets mathématiques. Le premier exemple, celui de l'éclipse, était de ce point de vue déjà instructif. Dans la *Physique*, Aristote avait dénié que l'infinité temporelle *a parte ante* puisse être considérée comme une infinité actuelle. Du fait que le temps et les événements qu'il « contient » sont des réalités évanouissantes, elles ne coexistent jamais toutes ensemble[8]. Il n'y a donc jamais, à quelque date que ce soit, un nombre infini de réalités existant ensemble. Le recours à la connaissance divine permet donc d'effectuer une transformation du temporel dans l'instantané similaire à celle produite par l'admission de la survie des âmes après la mort. Quelque chose qui, chez Aristote, relevait exclusivement de l'infini par succession, est transformé en un infini actuel. Dans le cas des éclipses, c'est la *connaissance* divine qui joue ce rôle de « transformateur ».

Envisagé à cette lumière, le platonisme mathématique de Thābit apparaît plus subtil. Thābit n'avait guère besoin de l'esprit de Dieu pour se convaincre de l'existence *mathématique* de l'infinité actuelle des « espèces » d'objets géométriques ou arithmétiques. Ces objets existent en tant qu'ils sont tous des structures parfaitement intelligibles et atteignables par la démonstration. L'activité du mathématicien ne les crée pas mais se borne à les découvrir. Toute la difficulté tient plutôt à ce qu'on entend ici par *existence*. La connaissance divine supprimée, un adversaire pourrait en effet soutenir une thèse *grosso modo* aristotélicienne. Car si l'infini existe « en puissance », cela ne signifie pas qu'il n'existe pas du tout, mais que certains ensembles ont la caractéristique de pouvoir être *indéfiniment* augmentés. *Toute* espèce mathématique, au sens de Thābit, est donc bien susceptible d'existence, mais l'on ne saurait prétendre réaliser l'existence de *toutes* les espèces mathématiques simultanément (que ce soit dans notre esprit ou à l'occasion d'une démonstration extrêmement compliquée). Le recours à la connaissance divine est un coup de force philosophique, qui permet de bloquer à la racine une interprétation conceptualiste de l'infini mathématique. On peut cependant se demander si les arguments en faveur de l'infinité actuelle par le biais de la connaissance de Dieu font autre chose que de redoubler le postulat de l'infinité actuelle propre au *mathématiques*.

[8] Aristote, *Physique* Γ 6, 206a 25-b 3.

Commentaire des §§ [5]-[12] : La connaissance divine du contingent

On ne saurait comprendre la discussion entre Thābit et Ibn Usayyid sur la connaissance divine du contingent si on ne la rapporte pas à la tradition grecque antérieure. La discussion antique part des remarques célèbres d'Aristote, *De interpretatione*, chap. IX et trouve son premier grand moment dans la controverse engagée par Alexandre d'Aphrodise contre la théorie stoïcienne[9]. Trois éléments à première vue inconciliables sont en jeu :

(1) l'immutabilité des dieux ;
(2) l'omniscience des dieux ;
(3) la contingence du monde.

Si un événement est contingent, les dieux eux-mêmes n'en ont, avant qu'il vienne à l'être, qu'une connaissance indéterminée, celle, en d'autres termes, de sa possibilité. Même si l'on suppose que la connaissance indéterminée du contingent ne contredit pas (2), elle contredira (1), car la réalisation de l'événement produira un changement dans la connaissance des dieux. Pour éviter cet écueil, les Stoïciens préférèrent renoncer à la contingence. Alexandre, pour sauver la contingence, abandonne l'immutabilité divine[10]. À la suite de Jamblique, Proclus reformule le sens de la « contingence » – c'est-à-dire la conçoit comme une déficience interne de la substance sublunaire alors même qu'elle est, plutôt qu'un événement qui aurait pu ne pas se produire dans le cadre du même monde que celui où il s'est produit[11], thèse qui est en gros celle d'Alexandre. Ce faisant, Proclus conserve des Stoïciens l'idée de l'immutabilité divine. Le sublunaire est contingent en tant qu'il participe, dans toutes ses manifestations, de l'indétermination de la matière. Mais en tant qu'il ne s'agit que du produit ultime de l'émanation, les dieux le connaissent éminemment. À la différence d'Aristote qui accorde une substantialité réelle au sensible, c'est-à-dire pour qui une substance sensible est nécessairement lorsqu'elle est, le platonisme nie la nécessité conditionnelle : alors même qu'elle est, une chose sensible n'est pas *nécessairement*, car elle n'est qu'une image évanescente et aléatoire de la réalité véritable[12].

[9] La bibliographie sur ce sujet est abondante. Voir surtout M. Mignucci, « Logic and Omniscience : Alexander of Aphrodisias and Proclus », *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, 3, 1985, p. 219-246.

[10] Cf. Alexandre, *De fato*, chap. 30 en part., sur la prescience divine.

[11] Cf. Proclus, *De providentia*, III, §§ 9-14. Proclus affirme suivre Jamblique en III, § 5.

[12] Les théologiens chrétiens de la fin de l'Antiquité et du début de la période arabe ne pouvaient qu'être intéressés par un tel débat. Il n'est peut-être pas indifférent que Jean Damascène puis Théodore Abū Qurra aient l'un et l'autre soutenu la thèse « mu'tazilite » de la prescience divine du vrai et de l'absence de prédétermination de la cause. Cf.

Quelle est la position de Thābit dans ce débat ? On ne peut que la deviner, car notre auteur ne rappelle pas tous les termes historiques de la question. Il ne prend même pas le soin de réfuter la doctrine d'Alexandre, tant sans doute il lui paraît absurde que Dieu ne puisse prévoir tous les événements du futur. Sa thèse se situera donc quelque part du côté du stoïcisme et du platonisme, ce qui laisse la place à tout un éventail de doctrines possibles. De fait, sa solution se distingue de celles qu'on trouve dans les sources antiques. À la différence des Néoplatoniciens, Thābit n'élève pas la connaissance divine au-delà de la temporalité : la question se pose effectivement pour lui de savoir ce qui se passe dans l'esprit de Dieu lorsque de futur, un événement devient passé. Mais à la différence des Stoïciens, il ne semble pas fonder la prescience divine dans la nécessité ontologique de l'événement. Le cas de l'éclipse, en d'autres termes, n'est sans doute pas applicable à absolument tout événement. Si on jette un regard sur d'autres textes de Thābit, on peut remarquer qu'il professe à plusieurs reprises, au niveau général, une doctrine du meilleur des mondes[13], mais qu'il ne se prononce nulle part sur le statut de nos actes. Non qu'il ignore le problème : c'est lui-même qui nous présente, dans une synthèse magistrale, les deux grandes positions théologiques auxquelles il est possible de se ranger : soit un Déterminisme absolu, soit une doctrine du choix et de la « délégation », c'est-à-dire du libre-arbitre humain[14]. Thābit se refuse toutefois à prendre lui-même position dans un tel débat, même si certains indices invitent à le ranger dans le camp des partisans du « choix »[15]. Dans ces conditions, on peut lui prêter deux théories distinctes du meilleur des mondes. Soit Dieu

---

Joannis Damasceni, *Expositio Fidei*, § 44, dans B. Kotter, *Die Schriften des Johannes von Damaskos*, 5 vol., t. II, Berlin / New York, 1973, p. 103 : « Il faut savoir, que Dieu connaît à l'avance (προγινώσκει) toutes choses, mais qu'Il ne prédétermine (προορίζει) pas toutes choses : Il connaît en effet à l'avance les choses qui dépendent de nous (τὰ ἐφ' ἡμῖν), mais Il ne les prédétermine pas ; car Il ne souhaite pas que le mal se produise et Il ne violente pas la vertu » ; et G. Graf, *Die arabischen Schriften des Theodor Abû Qurra Bischofs von Ḥarrân (ca 740-820)*, Paderborn, 1910, p. 52-53 et 233-238. Pour une étude du thème, voir W. Lackner, *Nikephoros Blemmydes Gegen die Vorherbestimmung der Todesstunde*, Athènes / Leyde, 1985, p. XLIII-LXXXIV ainsi que Ch. Garton et L. G. Westerink, *Germanos on Predestined Terms of Life*, New York, 1979, Introduction, *passim*. La distinction entre prescience et prédétermination était déjà acquise chez al-Ḥasan al-Baṣrī (cf. van Ess, *Anfänge muslimischer Theologie*, p. 97), antérieur d'une génération à Jean Damascène, qui était lui aussi en rapport direct avec la cour omeyyade. Il faut donc compter avec la possibilité d'influences croisées islamo-chrétiennes. Je compte revenir ailleurs plus précisément sur toute cette question.

[13] Cf. *infra*, p. 699-713.

[14] Cf. §§ 14-16.

[15] Non seulement on voit mal Thābit se ranger à la thèse d'un déterminisme absolu, mais Tawḥīdī lui prête des sympathies mu'tazilites. Voir la référence *infra*, p. 713, n. 91.

détermine entièrement – que ce soit directement ou indirectement – nos volitions et nos actes ; soit Il s'arrête à l'ordonnance de la nature mais nous « délègue » notre seule conduite. La seconde solution, encore une fois, nous paraît la plus probable. Dans ces conditions, et contre Proclus, il faut distinguer entre prédétermination du vrai et prédétermination de la cause. Dieu connaît nécessairement quels seront nos actes futurs, mais il ne les cause pas, même médiatement. C'était la thèse de Jean Damascène et ce sera celle d'Ockham[16].

On peut se demander, si Dieu connaît des événements futurs sans que leur cause soit déjà donnée, ce qui permet, dans Son esprit, la cohérence et l'unité de l'état du monde présent et futur. C'est le rapport de succession temporelle lui-même. En d'autres termes, Thābit amoindrit autant qu'il le peut la dissymétrie entre passé et futur, pour ne voir dans tout le flux temporel qu'un seul axe homogène du point de vue des modalités. Le passé n'est pas plus nécessaire que le futur, il est simplement irrévocable. Si le changement temporel des énoncés (de « X aura lieu » à « X a eu lieu ») n'implique pas de changement en Dieu, c'est parce qu'il ne s'agit là que d'un faux changement, qui n'affecte que la surface de l'énonciation humaine[17]. Sur un axe temporel infini, chaque événement possède son indexation relativement à tous les autres, et cette indexation ne change pas avec l'écoulement du temps[18].

[16] Pour une analyse philosophique de la position d'Ockham, voir J. Vuillemin, *Nécessité ou contingence*, en part. p. 95-96 : « Quant à la prédétermination, elle est donc purement logique. On pourrait parmi toutes les propositions futures, également déterminées au point de vue logique, distinguer le sous-ensemble propre des propositions qui sont, de plus, causalement vraies et déterminées en ce qu'existent déjà les causes actuelles ou passées de leur vérité. Rien n'oblige, en tout cas, à poser que ce sous-ensemble est coextensif avec l'ensemble des futurs ». En note à ce passage, Vuillemin souligne bien comment une telle prédétermination est moins forte que la prédétermination leibnizienne.

[17] Thābit prend ainsi position contre une thèse que la doxographie plus tardive attribue à Jahm ibn Ṣafwān et à Hishām ibn al-Ḥakam. Cf. en particulier Fakhr al-Dīn al-Rāzī, *al-Maṭālib al-ʿāliyya*, t. III, p. 157 et 159.

[18] Cet aspect de la doctrine de Thābit est peut-être celui qui a exercé l'influence la plus profonde sur l'histoire de la philosophie. Le point a été pressenti par H. Zghal, « La connaissance des singuliers chez Avicenne », dans R. Morelon et A. Hasnawi (éds), *De Zénon d'Élée à Poincaré. Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, Les Cahiers du MIDEO 1, Louvain / Paris, 2004, p. 685-718, en part. p. 690-693. Avicenne (cf. entre autres passages *al-Ishārāt wa-al-tanbīhāt*, 3 vol., Qom, 1375 H., t. III, l'« Indication » aux p. 307-308) développe une distinction entre connaissance universelle et connaissance particulière du particulier, pour reverser au compte de l'universalité de la connaissance conceptuelle ce que Thābit théorise comme connaissance des particuliers sans davantage de précisions (Avicenne va jusqu'à reprendre l'exemple de l'éclipse). L'idée est développée par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī dans son commentaire (*ibid.*, p. 308-311)

Commentaire des §§ [13]-[16] : La question de l'influence du causé sur la cause

Dans un long excursus, accompli à la demande expresse d'Ibn Usayyid, Thābit se livre à une clarification des raisons pour lesquelles les théologiens *peuvent* éprouver de la répugnance à l'idée d'un changement dans la science de Dieu. Eux-mêmes, précise-t-il, n'ont cependant souvent pas une conscience claire de ces raisons. Thābit oppose deux intuitions théologiques fondamentales, le déterminisme divin et le libre-arbitre humain, surgies du conflit entre les exigences contradictoires de la toute-puissance et de la bonté divines, et montre comment chaque camp doit revendiquer à un titre différent l'immutabilité divine.

Le cas le plus délicat est celui des Déterministes (*al-mujbira*). Ceux-ci considèrent Dieu comme la cause de tous les mouvements et de tous les actes, y compris – tout est là – ceux qu'on pourrait attribuer à une volonté prétendument libre. Rien de ce qui se produit n'a de cause autre que l'acte divin. Si donc, argumente Thābit, les Déterministes admettaient que Dieu est sujet au changement, ils seraient confrontés à un cercle qui, incluant Dieu et d'autres êtres, ne partirait pas plus de Lui que de ceux-ci. Pour comprendre l'argumentation de Thābit, il faut bien voir que ce vice ne serait pas

---

et dans la seconde partie de la *Risāla fī kayfiyyat ṣudūr al-mawjūdāt 'an al-mabda' al-awwal*, éd. M. R. Anṣārī, dans *Mīrāth Māndgār*, 1, 2003, p. 227-238, en part. p. 236-238. Cette récupération – qui entérine le bien-fondé de l'argument de Thābit – suppose, à un niveau étroitement polémique, une discrétion au moins verbale sur la question de l'infinité actuelle et, plus profondément, une notion pré-leibnizienne de monde possible. Avicenne reste silencieux sur le premier point (pour ses tiraillements sur la question de l'infini, voir M. Rashed, « Natural Philosophy », dans P. Adamson et R. C. Taylor (éds), *The Cambridge Companion to Arabic Philosophy*, Cambridge, 2005, p. 287-307, en part. p. 298-302) et Ṭūsī, quand il le commente, est poliment implicite. Cette retenue ne doit cependant pas être mésinterprétée : contraint, dans sa réfutation de Shahrastānī à propos de la connaissance divine des particuliers, d'expliciter tous les éléments de la théorie, Ṭūsī professe alors avec vigueur l'infinité des éclipses connues de Dieu : cf. Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, *Maṣāri' al-Muṣāri'*, ed. Ḥ. Al-Mu'izzī, Qom, 1405 H, p. 134 (voir aussi *infra*, p. 659, n. 33). Pour le second point, il est notable que la nécessité de faire accéder le particulier à une certaine existence formelle amène Ṭūsī à mieux dégager l'idée logico-métaphysique de monde possible en germe dans l'« Indication » d'Avicenne. Il introduit, aussi bien dans le commentaire d'*Ishārāt*, p. 310, l. 4 et en *Fī kayfiyyat ṣudūr* ..., p. 236, l. 18, les « mondes », *'awālim*, en un sens qui n'a rien de physique, mais correspond à l'ensemble de toutes les relations temporelles et spatiales dans *une* histoire cosmique donnée. Est-ce là l'apparition de ce terme dans l'histoire de la métaphysique formelle ? Je reviendrai ailleurs sur ce dossier. Pour la théorie avicennienne du meilleur des mondes et la connaissance médiée qu'en avait Leibniz, voir M. Rashed, « Théodicée et approximation : Avicenne », *Arabic Sciences and Philosophy* 10, 2000, p. 223-257.

simplement logique, mais empêcherait la production des choses telles qu'elles sont. On reviendra plus bas sur ce point.

Quelqu'un, ajoute-t-il, pourrait cependant s'opposer à cette reconstruction de l'argument déterministe en arguant du fait que nous voyons, dans le cas de l'homme qui décide de prendre une drogue qui l'affecte, un « cercle » avoir lieu, qui ne met aucunement en péril le statut de cause première accordé à la faculté décisionnelle (l'hégémonique). Il serait absurde, en d'autres termes, de considérer la drogue affectant l'hégémonique sur un même pied que l'hégémonique recourant à la drogue. Si donc un cercle de causes-effets, dont l'un des termes est indubitablement premier, a bel et bien lieu, un tel cercle est *a fortiori* possible (dans le cas de Dieu). Et dans ce cas, l'extrapolation proposée par Thābit au rapport Dieu-créatures est erronée.

Thābit réfute cette objection en soulignant précisément que dans le cas de l'homme qui prend une drogue aliénant sa raison, on a affaire à deux ordres de causalités. L'action du choix et l'action physiologique sont hétérogènes. Mais s'il s'agissait exactement du même aspect de l'homme, on aurait une impossibilité.

Thābit ne précise pas exactement en quoi cette situation, qui ne remet pas en cause, de son propre aveu, le statut de cause première de l'hégémonique, n'est pas semblable à celle d'un état du monde créé par Dieu et affectant en retour la connaissance de Dieu, mais non Son statut de cause première et créatrice. La raison en est sans doute que dans l'hypothèse d'un déterminisme absolu, il n'y a aucun sens à distinguer différents aspects de Dieu dont *certains* pourraient être affectés par un acte, aussi innocent soit-il, de la créature. Car il y aurait là une contradiction dans les termes, la créature par définition n'*agissant* pas. Il ne resterait plus donc qu'à affirmer que Dieu serait, du même point de vue, à la fois agent et patient, ce qui est absurde : Dieu ne peut pas S'informer Lui-même des péripéties du monde ; Il en *est* informé.

L'argument des tenants du libre-arbitre humain ne sera pas cosmologique – car du fait qu'ils admettent de toute façon des actes indépendants à l'égard de Dieu, ils ne sont pas menacés par une « boucle » dans le programme des événements du monde – mais dicté par la dignité divine. Dieu ne saurait être affecté. Selon Ibn Usayyid, Thābit aurait opposé aux déterministes « ceux qui professe la délégation et le choix » (*al-ladhīna yaqūlūna bi-al-tafwīḍ wa-al-ikhtiyār*). Cette désignation renvoie aux tenants du libre-arbitre, le second se spécialisant peut-être légèrement pour désigner les Mu'tazilites[19]. Il est notable que l'opposition, reprise ici par

[19] A. Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite », p. 23, n. 12 voit curieusement là une désignation de la secte shi'ite extrême des *mufawwiḍa*, qui postulait une délégation par Dieu à Muḥammad et/ou à 'Alī de la création et de l'ordonnance du monde (secte attestée uniquement, et de manière bien évasive, par al-Ash'arī, *Maqālāt al-Islāmiyyīn*,

Thābit, entre *jabr* et *tafwīḍ*, est attestée dans les sources hérésiographiques anciennes[20]. Il est particulièrement intéressant, dès lors, que Thābit confirme leur exclusion du changement en Dieu par des exemples tirés de la cosmologie aristotélico-ptoléméenne et par la conception que se faisait Galien du temps et du lieu. C'est dire combien sa lecture des différentes options théologiques ne se borne pas à y voir une donnée ethnographique au sens étroit. Les deux positions que le débat islamique a contribué à dégager – déterminisme ou libre-arbitre – sont deux réponses universelles à une aporie qui l'est aussi : l'opposition entre la toute-puissance et la bonté divines.

On doit dire ici un mot de la référence aux thèses de Galien sur le lieu et le temps, qui n'a jamais été exploitée par les historiens. Le seul passage où Galien semble avoir développé de manière conjointe une discussion du lieu et du temps est le livre VIII de son *De demonstratione*. C'est en tous cas dans cet ouvrage que les commentateurs grecs anciens – Alexandre et, à sa suite, Thémistius et Simplicius – ont puisé les éléments de la théorie galénique du lieu et du temps qu'ils ont critiquée[21]. Par ailleurs, Alexandre, selon le *Fihrist* d'al-Nadīm, avait rédigé une monographie consacrée à la réfutation des thèses de Galien sur le temps et le lieu[22]. Ce texte, au moins dans sa totalité, est perdu, et nous ne disposons aujourd'hui à son sujet que d'un résumé problématique rédigé par Ibn Abī Saʿīd dans sa correspondance avec Ibn ʿAdī[23] :

éd. H. Ritter, Wiesbaden, 1980, p. 16 et d'autres hérésiographes à sa suite). Mais le mot est d'usage courant pour désigner les tenants du libre-arbitre, en ce qu'ils professent que Dieu délègue aux hommes la puissance d'accomplir eux-mêmes leurs actes. Pour une liste d'attestations, cf. n. suivante.

[20] Cf. J. van Ess, *Theologie und Gesellschaft*, t. I, p. 20, 205-206, 341, 409, t. IV, p. 489-490. Voir aussi, du même, *Anfänge muslimischer Theologie. Zwei antiqadaritische Traktate aus dem ersten Jahrhundert der Hijra*, Beyrouth, 1977 [= *Beiruter Texte und Studie*, 14], les nombreuses références à la racine *fwḍ* dans l'index. *Id.* pour *ikhtiyār*, déjà utilisé par al-Ḥasan al-Baṣrī, l'un des trois grands hommes de l'Islam selon Thābit « cité » par al-Tawḥīdī (cf. *supra*, p. 651, n. 15).

[21] Voir l'ensemble des fragments et leur discussion dans I. von Müller, « Ueber Galens Werk vom wissenschaftlichen Beweis », *Abhandlungen der ersten Classe der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften*, t. XX, 1897, Munich, p. 467-471. Riccardo Chiaradonna et moi-même préparons une nouvelle édition des fragments du *De demonstratione* de Galien.

[22] Cf. Abū Isḥāq al-Nadīm, *Kitāb al-Fihrist*, éd. Tajaddud, p. 313 : *Kitāb al-Raddi 'alayhi fī al-zamān wa-al-makān, maqāla.*

[23] Bibliographie et discussion de ce passage dans M. Rashed, « Alexandre d'Aphrodise et la 'Magna Quaestio'. Rôle et indépendance des scholies dans la tradition byzantine du corpus aristotélicien », *Les Études classiques*, 63, 1995, p. 295-351, p. 324-325.

> Le temps possède une nature existante, il est une substance subsistant par soi et le mouvement se contente de le mesurer et d'en estimer la grandeur, à la façon dont on mesure la terre au moyen d'une coudée. C'est, de fait, l'opinion de Galien, d'après ce qu'en a dit Alexandre dans le traité où il le réfute à propos du lieu et du temps. Selon Galien, le temps subsiste par soi et son existence ne nécessite pas le mouvement ; il affirme aussi que Platon avait la même opinion, je veux dire que selon lui, le temps était une substance (il signifie par là la durée) et que le mouvement ne fait que le mesurer et en estimer la grandeur. Galien, en effet, a dit que le mouvement ne produit pas le temps pour nous, mais seulement le jour, le mois ou l'année ; quant au temps, il est existant par soi et c'est par accident qu'il est lié au mouvement.

Cette citation d'Ibn Abī Saʿīd, en accord avec les allusions des commentaires grecs de Thémistius et de Simplicius, insiste sur le fait que Galien voyait dans le temps un être indépendant du mouvement. C'est sans doute en raison de cette indépendance que le temps est considéré comme une « substance », puisqu'il s'agit là comme on sait de l'un des critères fondamentaux de la substantialité selon les aristotéliciens. Le temps existe « par soi » et n'est pas un simple aspect du mouvement. On retrouve donc ici exactement le premier point qui intéressait Thābit chez Galien : la substantialité du temps. Quant au second aspect de la doctrine selon Thābit, à savoir le fait que le temps (et peut-être aussi le lieu) n'accueille aucun changement, on peut tout d'abord s'interroger sur son statut : s'agit-il d'un élément authentiquement galénique, ou d'une inférence tirée par Thābit ? On répondra que la distinction, pour un auteur de l'acuité de Thābit, n'a qu'une importance assez relative : c'est toute la logique de l'argument de Galien telle qu'il la reconstruit qui invite à exclure le changement, c'est-à-dire en fait la possibilité d'une affection externe, du temps. Pourquoi, demandera-t-on peut-être, attribuer cette thèse à Galien plutôt qu'à Aristote, par exemple ? C'est tout simplement parce qu'il faut comprendre cette affection externe comme englobant jusqu'au rapport de dépendance : Thābit a perçu que dériver le temps du mouvement de la sphère des fixes revenait à admettre que ce mouvement, en tant qu'il le détermine, « affecte » le temps. L'indépendance du temps galénique protège contre une telle liaison[24].

[24] En ce sens, je ne suivrais pas R. Sorabji, *Time, Creation and the Continuum*, Londres, 1983, p. 82-83, lorsqu'il affirme que le témoignage d'Ibn Abī Saʿīd est douteux. Galien a dû affirmer contre Aristote que le temps était indépendant du mouvement, quel qu'il soit (céleste ou autre). C'est parce qu'il avait parfaitement saisi ce point que Thābit recourt ici à Galien. Il faut noter que la traduction latine de la paraphrase par Galien du *Timée*, dont le texte n'est conservé qu'en arabe, par P. Kraus et R. Walzer (cf. *Galeni Compendium Timaei Platonis aliorumque dialogorum synopsis quae extant fragmenta*, éd. P. Kraus et R. Walzer, Londres, 1951), commet une imprécision dans la description de la doctrine du temps. Les deux érudits rendent en effet *thumma takallama baʿda dhālika fī ṭabīʿati al-zamāni fa-qāla innahu yuqaddaru bi-adwāri al-kawākibi al-*

Au niveau philologique, ce passage de Thābit est un indice précieux de l'existence historique de la réfutation de Galien par Alexandre. La mention conjointe du temps et du lieu rend en effet probable que Thābit a pris connaissance des thèses de Galien *via* cette dernière, plutôt qu'exclusivement en lisant le *De demonstratione*. Cela signifierait que le titre transmis par al-Nadīm est exact[25].

Commentaire du § [17] : Sur le nombre des espèces et leur rapport aux espèces homogènes

La majorité des commentateurs d'Aristote, dit Ibn Usayyid, pense que le nombre des espèces est fini. Il s'agit là d'une thèse qu'on discerne en filigrane dans l'un des passages les plus difficiles des *Analytiques seconds*[26]. Mais c'est surtout dans l'*Isagogê* de Porphyre qu'on la trouve exprimée noir sur blanc[27] et c'est dans ce contexte qu'elle est reprise par les Alexandrins[28]. Il va de soi, du fait que les espèces, à la différence des individus

---

mutaḥayyirati wa-jamī'i al-falak (p. 8, l. 6-7) par « Deinde postea de natura temporis disseruit, quod stellarum errantium et totius sphaerae conversionibus determinari affirmavit » (p. 47, l. 1-2). On pourrait penser, à la lecture du latin *determinari*, que Galien se borne à reprendre le « διορισμός » de *Timée* 38c 6 dans le sens d'une définition, ou d'une quasi-définition, du temps. Il s'agit en fait bien plutôt d'une estimation (cf. *yuqaddaru*) des durées temporelles (ce que Platon appelle les « nombres du temps ») à l'aide des cycles astraux.

[25] L'opuscule d'Alexandre *Sur le temps* conservé en arabe et en latin est-il une portion de ce texte ? Cela pourrait expliquer qu'alors que la traduction du texte est attribuée à Ḥunayn ibn Isḥāq dans le manuscrit, certains choix terminologiques semblent caractéristiques d'une époque antérieure. Cf. F. Zimmermann et H. Brown, « Neue arabische Übersetzungstexte aus dem Bereich der spätantiken griechischen Philosophie », *Der Islam*, 50, 1973, p. 313-324, p. 315.

[26] *A. Po.* I, 19-23.

[27] Cf. Porphyre, *Isagogê*, 6.11-13 Busse : « dix sont les genres suprêmes, tandis que les espèces dernières sont en un certain nombre, mais pas infinies ». Voir sur ce point J. Barnes, *Porphyry : Introduction*, Oxford, 2003, p. 126-127, qui imagine un contre-exemple assez proche de ceux de Thābit.

[28] Ammonius, *In Isagogem* 85.12-87.11 radicalise la thèse de Porphyre en démontrant (85.19-21), à l'aide du « petit lemme évident » (λημμάτιόν τι ἐναργές) qu'*il n'existe pas de multitude plus grande que l'infini* (τοῦ ἀπείρου μεῖζον οὐκ ἔστι πλῆθος), que les individus eux-mêmes ne peuvent pas être en nombre infini (contre Aristote, cf. n. suivante). Nous sommes déjà très proches des remises en cause philoponiennes. On peut d'ailleurs remarquer que le passage du développement d'Ammonius consacré à l'infinité temporelle (86.27-87.1) malheureusement mal transmis, témoigne d'une gêne évidente, Ammonius admettant à la fois que le nombre des individus dans l'éternité du temps est infini et se gardant bien *alors* de revenir sur son λημμάτιον : « ... le nombre des individus est donc fini, mais par le fait de toujours venir à l'être *pour le tout, qui est éternel* [variante : *si le tout est éternel*], elle possède l'infinité, à la

qu'elles contiennent[29], existent simultanément, qu'elles ne peuvent être en nombre infini.

On peut s'interroger sur la mention, par Ibn Usayyid, de l'indépendance des espèces l'une par rapport à l'autre. Le cas décrit – « les espèces qui sont à un même degré sous un genre unique ne sont pas antérieures par nature l'une à l'autre ni ne se requièrent l'une l'autre » – fait référence aux deux classes constituées l'une contre l'autre à l'aide de deux différences spécifiques. Par exemple, le genre « animal » se divise en « ailé » et en « aquatique ». Ces deux espèces sont à un même degré sous le genre animal et sont indépendantes l'une de l'autre. Thābit oppose le contre-exemple des figures et des nombres. L'idée est sans doute la suivante. Le triangle, le rectangle, le pentagone, etc. sont des espèces du genre polygone. Elles sont à un même degré sous ce genre, car aucune n'est une sous-espèce d'une autre. Par exemple, le triangle n'est pas une sous-espèce des rectangles ni les rectangles des triangles. En outre, la réunion de toutes ces sous-espèces produit le genre des polygones, sans manque ni redite. Or les espèces de polygones ont beau être « à un même degré » sous le genre polygone, elles n'en sont pas moins reliées entre elles selon l'antériorité et la postériorité : le triangle est antérieur au rectangle et le rectangle, en un sens, requiert le triangle pour exister[30]. Tout rectangle est décomposable en deux triangles. Le genre des polygones se divise par conséquent en une infinité d'espèces de même degré reliées entre elles par une relation d'antériorité-postériorité[31]. Les deux thèses aristotéliciennes sont donc contredites.

---

façon dont le nombre est dit infini par le fait de pouvoir toujours être augmenté et de ne pas faire défaut, tandis cependant que celui qui est pris en acte est toujours fini ». La première variante, dont le grec apparaît maladroit, prête à Ammonius la thèse de l'éternité du monde, tandis que la seconde, dont le grec est plus naturel, implique une certaine prise de distance. Dans un cas comme dans l'autre, Philopon et al-Kindī n'avaient plus qu'un pas à faire pour s'en prendre à l'éternité du monde : il suffisait de remarquer que le λημμάτιον d'Ammonius s'appliquait aussi bien aux ensembles d'événements ou d'objets passés qu'aux ensembles d'objets présents simultanément.

[29] Pour l'infinité des individus, voir *Métaphysique* B 4, 999a 26-29.

[30] C'est ce qu'Aristote, *De anima* B 3, 414b 20-32, veut dire en soulignant que dans le cas des polygones, le triangle est contenu « en puissance » (δυνάμει) dans le rectangle. Aristote se sert de la comparaison des figures pour montrer qu'une définition générale de l'âme est aussi peu utile en physiologie qu'une définition générale du polygone en géométrie.

[31] L'argument de Thābit est efficace : si le Stagirite lui-même (cf. n. précédente) place l'objet de la géométrie non dans l'étude du polygone en général mais dans celle des propriétés du triangle, du rectangle, du pentagone, etc., Dieu devra nécessairement connaître les propriétés de *chacune* des figures, ces dernières étant pourtant en nombre infini.

Le contre-exemple des nombres fonctionnera exactement de la même façon, dès lors que Thābit considère chacun des entiers comme une espèce (« un » est l'espèce de tous les ensembles à un élément, « deux » l'espèce de tous les ensembles à deux éléments, etc.)[32]. De manière encore plus évidente que dans le cas des polygones, les entiers naturels sont reliés entre eux par une dépendance selon l'antériorité et la postériorité[33].

Commentaire du § [18] : Qu'un infini peut être plus grand qu'un autre infini

A. Sabra, qui intitule pourtant son article « Thābit ibn Qurra on the Infinite and Other Puzzles » ne dit pas le moindre mot sur le paragraphe consacré à la comparaison d'ensembles infinis. Pines est plus disert mais ne rentre pas non plus dans le détail de l'argument[34]. Dans une note à la

[32] Aristote n'assimile qu'exceptionnellement chaque nombre à une espèce. Pines, « Thābit b. Qurra's Conception of Number », mentionne *A. Po.* B 13, 96b 15-17. On peut ajouter, dans un contexte un peu différent, *Poétique* 21, 1457b 9-13, où le nombre « 10 000 » est décrit comme une espèce de la quantité.

[33] Il est révélateur qu'Aristote se servait de la relation d'antériorité-postériorité dans les nombres pour réfuter, contre les Platoniciens, qu'il existât un « Nombre en Soi ». Cf. *Éthique à Nicomaque* A 4, 1096a 17-23 (parallèle en *Éthique à Eudème* A 8, 1218a 1-15). Thābit, envisageant le nombre en termes de classes, ne voit aucune contradiction entre les deux principes. Retrouve-t-on sa théorie de l'infinité actuelle plus tard chez les philosophes arabes ? Bien que dans sa réponse à Qūnawī sur la question de l'infini, Ṭūsī se contente de rappeler la doctrine avicennienne, il est clair qu'il choisit ses expressions pour ne pas donner l'impression qu'il s'empresse de la reprendre à son compte : « les choses ordonnées dont les individus existent simultanément doivent, selon les sages (*'inda al-ḥukamā'*), être finies. Quant à celles qui ne sont pas ordonnées, comme les âmes humaines demeurant après la mort du corps et celles dont les individus n'existent pas simultanément comme les événements passés, *ils* acceptent qu'elles soient infinies, et même *ils* l'imposent, en se fondant sur *leurs* principes. Et les rapports entre les existants sont de cette sorte, ainsi que les configurations et les positions astrales, et les mélanges issus des éléments, et les choses infinies en puissance comme la multiplication des grandeurs et leur division, etc. » (*al-Murāsalāt bayna Ṣadr al-Dīn al-Qūnawī wa-Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī* [= *Annäherungen, Der mystisch-philosophische Briefwechsel zwischen Ṣadr ud-Dīn-i Qūnawī wa-Naṣīr ud-Dīn-i Ṭūsī*], éd. G. Schubert, Beyrouth, 1995, p. 126-127, je souligne). « Les configurations et les positions astrales » incluent évidemment les éclipses. Si réserve il y a de la part de Ṭūsī, elle porte donc sur la première catégorie, celle des choses ordonnées, ce qui correspond chez Thābit aux classes des nombres et des figures.

[34] Cf. Pines, « Thābit b. Qurra's Conception of Number », p. 165. L'auteur ne signale pas, à la différence des auteurs de l'étude mentionnée n. suivante, le vice caché dans l'argumentation de Thābit. Voir aussi G. Lucchetta, *La natura e la sfera* [p. 622, n. 7], p. 261-270.

traduction russe de A. Yu. Sansur, celui-ci et B. A. Rosenfeld remarquent qu'« établissant une correspondance bi-univoque entre les multiplicités de nombres pairs et impairs, qui peut être exprimée par la formule $y = x - 1$, Thābit ne voit pas la correspondance bi-univoque entre chacune de ces multiplicités et toute la suite naturelle, qui peut être exprimée par les formules $x = 2z$, $y = 2z - 1$, par suite de quoi il considère la multiplicité des nombres pairs et impairs comme égale à la moitié de "tout le nombre" »[35]. De fait, Thābit, après avoir établi la correspondance bi-univoque entre les pairs et les impairs, affirme seulement que chacune de ces deux classes est une partie de l'ensemble du nombre, et plus précisément sa moitié. Ce qui est indéniable. Son erreur est de ne pas reconnaître que dans le cas de l'infini, une telle *partie* n'est pas *moindre* que le tout.

[35] Sabit ibn Korra, *Matematiceskiye Traktaty*, Moscou, 1984, p. 366, n. 15. Les auteurs ajoutent : « Apparemment, précisément la découverte du fait que, pour les multiplicités infinies, "le tout est égal à la partie" fut la raison pour laquelle les recherches de Thābit ne trouvèrent pas de développement conséquent dans l'Orient médiéval. En Europe, ce paradoxe fut découvert par Galilée ». Mais les sources sont encore inexploitées. Citons, parmi bien d'autres, Fakhr al-Dīn al-Rāzī, *al-Maṭālib al-'āliyya*, éd. A. Ḥ. al-Saqqā, t. IV, p. 261 : « La preuve par le pair et l'impair est faible à l'extrême. Car le nombre duquel on prédique qu'il est pair ou impair, c'est le nombre fini. Car sous la stipulation que le nombre est infini, il est impossible de prédiquer de lui qu'il soit pair ou impair. Par suite de quoi on peut prédiquer du nombre qu'il est pair ou impair seulement s'il est fini. Mais vous, vous montrez qu'il est fini d'après le fait qu'il est pair ou impair, ce qui induit un cercle vicieux. Cela est également l'objection au propos qu'il tient : "tout nombre, sa moitié est moindre que son tout". En effet, le nombre qui a une moitié, c'est le nombre fini. Dès lors, tant que le fait que le nombre est fini n'est pas établi, il est impossible qu'on lui suppose une moitié. Mais vous, vous établissez le fait qu'il est fini en vous fondant sur l'établissement de sa moitié, ce qui entraîne nécessairement un cercle vicieux ». L'argument apagogique contre l'infinité du nombre, auquel Rāzī s'oppose, est le suivant : *Supposons que* N *soit infini et considérons* N/2 *; On a* $2 \cdot \mathrm{N}/2 = \mathrm{N}$ *; Donc* N/2 *est infini (car le double d'un nombre fini est fini) ; Or* $\mathrm{N}/2 < \mathrm{N}$ *(car « la moitié du nombre est moindre que le tout ») ; Donc un infini est plus grand qu'un infini, ce qui est faux ; Donc l'hypothèse initiale est fausse ; Conclusion : aucun nombre ne peut être infini.* Rāzī localise l'erreur de l'argument dans l'affirmation $N/2 < N$. Cette proposition n'est vraie que si N est fini. L'argument est donc invalide. Une telle objection prouve que les philosophes arabes avaient identifié la difficulté de l'axiome du tout et de la partie appliqué à l'infini. Certes, Rāzī ne dit pas positivement que dans le cas de l'infini, la partie est égale au tout ; il nie cependant que la partie soit alors moindre que le tout.

Un tel glissement a pu être favorisé par la polémique philosophique, née avec Philopon[36] et d'actualité au IX^e^ siècle, dans laquelle Thābit s'insère ici. Pour les Aristotéliciens l'impossibilité qu'un infini soit plus grand qu'un autre infini est une proposition fondamentale pour démontrer *apagogiquement* l'impossibilité de l'infini actuel[37]. Cela ressort aussi bien des nombreuses versions de la démonstration d'al-Kindī[38], qui portent toutes sur des grandeurs, que de la démonstration sur des nombres d'Ammonius ou de celle, anonyme, rapportée par Fakhr al-Dīn al-Rāzī[39]. Ces démonstrations admettent que même dans le cas de l'infini, la partie est toujours moindre que le tout. Elles font alors jouer la prémisse qu'un infini ne peut être plus grand qu'un infini, pour conclure à l'impossibilité d'une grandeur ou d'un nombre infinis. C'est donc influencé par ce type d'arguments et mathématiquement convaincu de l'existence de l'infini actuel que Thābit aurait retourné l'argument en ne considérant plus la prémisse initiale comme une hypothèse, mais comme un fait : *il y a un* N *(actuellement) infini ;* N/2 *sera donc infini (car sinon* N = 2 · N/2 *serait fini) ; or* N/2 < N *; donc un infini est plus grand qu'un infini ; C.Q.F.D.*[40]. La défense de l'infini actuel par Fakhr al-Dīn al-Rāzī, en pointant le vice logique dans l'argumentation des finitistes, mais en s'appliquant par là-même à l'argument de Thābit, prouve que dès le XII^e^ siècle, les infinitistes avaient pris acte de l'impossibilité d'appliquer l'axiome du tout et des parties à une quantité infinie.

Commentaire des §§ [19]-[26] : Questions sur les catégories

Ibn Usayyid enchaîne sur une série de questions concernant les catégories aristotéliciennes :

[1] pourquoi l'accident n'est-il pas le genre des neuf catégories autres que la substance ?
[2] comment l'accident pourrait-il être une relation ?
[3] pourquoi les catégories sont-elles dix ?
[4] pourquoi la quantité se divise-t-elle en sept espèces ?
[5] comment distinguer différence essentielle et espèce ?

[36] Voir Philopon, *De aeternitate mundi contra Proclum*, éd. H. Rabe, Leipzig, 1899, 10.2-6 : « et si, l'univers étant sans commencement, le nombre des gens jusqu'à Socrate, par exemple, se trouvait devenir infini, et qu'on lui ajoutait le nombre des gens à partir de Socrate jusqu'à maintenant, il y aura quelque chose de plus grand que l'infini, ce qui est impossible ».
[37] Cf. *supra*, n. 28.
[38] Cf. *supra*, n. 2.
[39] Cf. *supra*, n. 35.
[40] Argument qu'on comparera à la preuve apagogique des adversaires citée n. 28.

Aucune de ces questions n'est neuve. Elles apparaissent en effet dans les commentaires néoplatoniciens aux *Catégories* qui dérivent, d'une manière ou d'une autre, du grand commentaire de Porphyre *À Gédalios*. Porphyre y avait regroupé les très nombreuses objections adressées à la théorie aristotélicienne des catégories remontant aux premières générations de professeurs après l'édition d'Andronicos : Athénodore, Cornutus et, bien sûr, Lucius et Nicostrate[41]. Il ne fait aucun doute qu'Ibn Usayyid connaissait cette ancienne tradition de critiques aux *Catégories*.

L'élément inédit réside par conséquent moins dans les questions que dans les réponses, et ce pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, parce que nous disposons effectivement de réponses. Les philosophes critiques que nous venons de mentionner se contentaient d'ébranler l'aristotélisme en soulignant ses points délicats. Il est cependant très difficile, voire impossible, de restituer la façon dont eux-mêmes interprétaient les difficultés ontologiques qu'ils soulevaient – si tant est qu'ils le fissent.

En second lieu, Thābit est de toute évidence extérieur aux discussions de la tradition aristotélicienne au sens étroit. Cette situation lui permet une liberté de critique mais également d'exégèse – au sens moderne du terme – sans équivalent dans la tradition grecque, toujours écartelée entre partisans et adversaires d'Aristote. Remarquable est de ce point de vue la profondeur avec laquelle Thābit explique une thèse d'Aristote pour ensuite non pas tant la « critiquer » que lui opposer un simple contre-exemple. Le rapport de Thābit à Aristote, même dans les moments où son style se rapproche le plus de celui de l'exégèse, est moins celui d'un « commentateur » que d'un historien au sens moderne du terme. Ne pas voir ce point conduirait à de graves erreurs dans l'appréciation de sa position, telle qu'en particulier elle s'exprime dans sa *Synopsis de la « Métaphysique » d'Aristote*[42]. Pour tout dire, on sent Thābit parfois plus intéressé par la place d'Aristote dans l'histoire de la culture que par sa contribution au savoir universel.

Enfin, le troisième élément marquant réside dans l'unité des réponses de Thābit, systématiquement orientées par un platonisme mathématique sous-jacent.

[1] La question du caractère accidentel des catégories non-substantielles a de vieilles lettres de noblesse. C'est la thèse de certains auteurs évoqués, mais non nommés, par Simplicius[43]. Il est intéressant que, chez le commentateur néoplatonicien, cette référence apparaisse au cours de la discussion du

[41] Cf. Simplicius, *Commentaire sur les* Catégories *d'Aristote, Chapitres 2-4*, trad. Ph. Hoffmann, commentaire par C. Luna, Paris, 2001, p. XVIII.

[42] Cf. aussi *infra*, p. 675.

[43] Simplicius, *In Cat.* 63.24 : « D'autres divisent <les genres> en substance et accident ».

nombre des catégories, car ce problème fait l'objet de la question [3]. On a là, comme on l'a dit, un ensemble cohérent d'apories anciennes dirigées contre l'ontologie aristotélicienne. Cette bipartition est bien sûr recensée comme l'une des positions affirmant la redondance de la table aristotélicienne[44]. Thābit répond par une allusion au caractère de « relatifs » des catégories accidentelles : ces dernières sont des attributions que l'on fait à la substance mais ont une existence « entitative » en dehors du fait d'être dites *en relation à* la substance (on a là une anticipation de la théorie de l'*esse essentiae*)[45]. C'est la raison pour laquelle on ne peut ranger les catégories secondaires sous un éventuel genre de l'« accidentalité ».

[2] La réponse de Thābit à la première question suggère à Ibn Usayyid une seconde critique : si l'accident, comme il vient de le soutenir, est un relatif, il est inclus dans la catégorie de la relation. C'est Andronicos lui-même qui proposait, dans un passage immédiatement antérieur du commentaire de Simplicius[46], de diviser les catégories en deux, le par-soi d'un côté (la substance), le relatif de l'autre (les neuf catégories restantes). Ibn Usayyid, répétons-le, se meut dans un univers exégétique bien déterminé. Mais si la catégorie de la relation, comme les huit autres catégories non-substantielles, est une catégorie relative, l'extension du relatif sera à la fois supérieure et inférieure à celle de la catégorie de la relation, ce qui est absurde.

Thābit répond en deux temps. Il montre tout d'abord qu'on pourrait faire exactement le même type de critique en observant que le nombre des catégories est de dix. Ainsi, les catégories participeraient de la dizaine alors même que celle-ci est subsumée par la seule quantité.

Thābit ajoute à cet exemple une référence à Platon, pour justifier l'imbrication des catégories les unes dans les autres, semblable au mariage, en grammaire, des voyelles et des consonnes. Tout le monde reconnaîtra ici une allusion à *Sophiste* 253A-B. Dans ce passage fameux où Platon discute la combinaison mutuelle des cinq genres de l'être – cinq genres que la tradition unanime a interprétés comme les « catégories » de Platon par

[44] Cf. n. suivante.

[45] Ou, pour être plus précis, de la distinction avicennienne entre deux manières de considérer le relatif. H. Zghal, « La relation chez Avicenne », *Arabic Sciences and Philosophy*, 16, 2006, p. 237-286, analyse en détail la position avicennienne et son rapport au commentaire aux *Catégories* de Simplicius. Pour une étude de la théorie simplicienne de la relation, voir C. Luna, « La relation chez Simplicius », dans I. Hadot (éd.), *Simplicius, sa vie, son œuvre, sa survie*, Berlin / New York, 1985, p. 113-147, en part. p. 119.

[46] *In Cat.* 63.21-24 : « Xénocrate et Andronicos semblent tout embrasser dans le par soi et le relatif ». Simplicius ajoute peu après que les deux thèses, celle des anonymes et celle d'Andronicos, reviennent au même : cf. 63.24-25.

opposition à celles d'Aristote[47] – on trouve tout d'abord caractérisées, comme par Thābit, les voyelles comme ce sans quoi les consonnes sont imprononçables : « Mais les voyelles, assurément, se distinguent des autres lettres en ce qu'elles circulent comme un lien à travers toutes ; aussi, sans quelqu'une d'elles, est-il même impossible que les autres se combinent une à une »[48]. Quelques lignes plus bas, Platon compare, à cet entrelacement, celui des genres de l'être : « Eh bien, puisque les genres, nous en sommes convenus, sont, eux aussi, mutuellement susceptibles de pareils mélanges, n'aura-t-on pas nécessairement besoin d'une science [semblable à la grammaire] pour se guider à travers les discours, si l'on veut indiquer avec justesse quels genres sont mutuellement consinants et quels autres ne se peuvent souffrir ? »[49]. Nous trouvons donc exactement la thèse prêtée par notre texte à Platon, à ceci près que Thābit ne mentionne pas que les catégories aristotéliciennes dont il est question ne sont pas celles que Platon évoque dans le *Sophiste*[50].

Sous quelle forme Thābit a-t-il pris connaissance de ce passage important du *Sophiste* ? Il est probable qu'il connaissait le résumé de Galien à cette œuvre, que nous savons avoir été traduit par Ḥunayn ibn Isḥāq. Thābit a d'ailleurs rédigé un *Traité pour élucider les symboles du livre de la République*, et un *Livre sur la République*[51]. Il était donc informé des œuvres de Platon au moins *via* les résumés de Galien, et il n'est nul besoin de supposer une source néoplatonicienne grecque tardive pour expliquer ces données[52].

[47] Cf. par exemple Simplicius, *In Cat.* 83.27-29. Il va de soi que cette thèse ne présume pas du domaine de validité des catégories. Alors qu'un courant concordiste a confiné les « genres de l'être » aristotéliciens au sensible et les genres de l'être du *Sophiste* à l'intelligible, un auteur comme Plotin a bien vu qu'il fallait choisir. Voir, pour cette intuition systémique qui parcourt *Ennéades* VI 1-3, K. Wurm, *Substanz und Qualität. Ein Beitrag zur Interpretation der plotinischen Traktate VI 1, 2 und 3*, Berlin / New York, 1973 et R. Chiaradonna, *Sostanza movimento analogia. Plotino critico di Aristotele*, Naples, 2002.

[48] Platon, *Sophiste*, 253A 4-6.

[49] Platon, *Sophiste*, 253B 9-13.

[50] Philopon, *In Cat.* 190.8-191.14 oppose les catégories d'Aristote, qui seraient subsistantes de manière mutuellement indépendante, des genres de l'être du *Sophiste*, qu'on peut « observer dans tous les êtres, mais qui ne subsistent pas en soi de manière indépendante » (190.19-20). Par conséquent, même pour un néoplatonicien comme Philopon, Thābit « platoniserait » les catégories aristotéliciennes. Simplicius choisit prudemment de passer ce point délicat sous silence.

[51] Cf. al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, p. 120.

[52] C'est l'hypothèse de A. Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite », p. 25, n. 17, qui s'explique du fait que son auteur n'a pas reconnu le passage du *Sophiste* comme source de Thābit.

[3] La question du nombre des catégories est classique dans les introductions alexandrines à l'œuvre d'Aristote. Pour citer Simplicius : « Beaucoup d'autres exégètes [qu'Herminus] ont adressé des objections à cette division en dix genres, en critiquant, sur la base de ces considérations, le fait que la division aboutisse à un tel nombre »[53]. Il s'agit donc d'une critique banale des philosophes anti-aristotéliciens. Encore faut-il distinguer entre ce type d'attaques lorsqu'il est motivé seulement par le désir d'ébranler l'autorité d'Aristote ou qu'il s'intègre dans une position théorique différente et cohérente. La relativisation, par Thābit, du fait qu'elles soient dix n'est pas purement polémique mais participe de son projet général de remise en cause du caractère normatif de l'ontologie substantialiste du Stagirite[54].

L'idée que le point et l'instant sont des entités non catégoriales est d'une certaine manière aristotélicienne[55]. Mais alors que pour le Stagirite, elle contribue sans doute à disqualifier le caractère réel de l'existence du point, Thābit en tire la confirmation de l'existence de réalités non catégoriales, et en particulier géométriques. Nul besoin d'insister sur le fait que ce décalage est conscient, et dicté par l'ontologie mathématique de l'auteur.

[4] La question du nombre des espèces de la quantité donne l'occasion à Thābit d'étendre celle-ci à des domaines que les Aristotéliciens réservaient à la qualité. Il développe là aussi des renseignements qui se trouvent dans les

[53] Simplicius, *In Cat.* 62.24-25.

[54] La position de Thābit a cependant été réintégrée par les exégètes d'Aristote. Voici ce qu'écrit Ibn Abī Sa'īd dans l'une des questions de son épître à Yaḥyā ibn 'Adī : « Et apprends-moi aussi pourquoi les catégories se trouvent être dix, ni moins ni plus. Et quelle chose est la cause de cela, puisqu'Aristote n'a pas fourni de cause à ce sujet et de même Porphyre et Thābit dans ce que lui a demandé Ibn Usayyid. Ce dernier lui a dit : de quelle opinion es-tu au sujet des catégories, sont-elles dix comme l'a mentionné Aristote ? Et 'Īsā ibn Usayyid de rapporter : nous avons vu qu'il inclinait à penser qu'elles étaient plus de dix ... » (dans Yaḥyā ibn 'Adī, *The Philosophical Treatises*, éd. S. Khalifat, Amman, 1988, p. 324 ; le recours de Khalifat, en plus du manuscrit de Londres, aux deux manuscrits iraniens permet de résoudre le petit problème textuel auquel s'était trouvé confronté Sh. Pines, « A Tenth Century Philosophical Correspondence », *Proceedings of the American Academy for Jewish Research* 24, 1955, p. 103-136, p. 121 et n. 74). Bien qu'elle ne brille pas par sa clarté, la mention de Porphyre montre que les lecteurs anciens de notre correspondance avait saisi le contexte scolaire des questions d'Ibn Usayyid sur les catégories.

[55] Aristote soutient la thèse voisine que l'unité de la substance exige une différence, dont témoigne la structure même de la définition ; elle n'est pas radicalement simple comme celle de la monade et du point. Cf. *Métaphysique* H 3, 1044a 5-9 : « La définition, elle aussi, est une, mais semblablement, pas même elle, ils ne peuvent l'exprimer. Cela se produit inévitablement, la raison étant la même : la substance est une chose une ainsi, et non pas, comme le disent certains, comme une monade et un point, mais comme une entéléchie et une nature déterminée ».

commentaires néoplatoniciens aux *Catégories*. Celui de Simplicius est le plus intéressant, car il nous donne des noms. Voici ce qu'il écrit[56] :

> <Lucius et Nicostrate> critiquent également le fait que la division ait été faite en deux. Il fallait en effet, après le nombre et la grandeur, établir une troisième espèce, à savoir le poids ou l'impetus, comme Archytas, et comme plus tard Athénodore l'a établie, ainsi que Ptolémée le mathématicien.

Le pivot du raisonnement de Thābit consiste dans une insistance sur le critère de l'égal et de l'inégal pour *définir* ce qu'est une quantité – alors qu'en *Cat.* 6, 6a 26-35, il s'agissait d'un *propre* de tous les types de quantité et, en *Metaph.* Δ 15, 1021b 8-11, d'un *relatif* numérique. Il est vrai que dans le cadre ontologiquement neutre de Thābit, il suffit que le critère de l'égal-inégal soit un propre pour pouvoir être considéré comme une définition. Cela autorise finalement le mathématicien à affirmer que tout ce qui est susceptible d'égalité et d'inégalité est une quantité. L'argumentation sous-jacente est bien entendu de faire passer l'intension et la rémission des qualités dans le registre de la quantité. L'exemple des sons musicaux, où ce « passage au quantitatif » a réussi, doit inciter à étendre la méthode à d'autres types de qualités. Le précédent ptoléméen, si tant est qu'il l'ait connu, pour un aussi grand théoricien de la statique que l'était Thābit, ne pouvait pas ne pas le conforter dans son intuition[57].

[5] La dernière question, comment distinguer différence essentielle et espèce, est elle aussi classique chez les commentateurs d'Aristote. Elle pourrait sembler purement exégétique et ainsi moins « profonde » que celles qui la précèdent. Une considération attentive de la tradition exégétique suggère en réalité le contraire. Car dans une Quaestio d'Alexandre d'Aphrodise conservée seulement en arabe, intitulée *Sur la différence*, une liaison était faite entre le problème des espèces premières des genres catégoriels (substance, quantité, qualité, etc.) et celui de la distinction entre espèce et différence spécifique[58]. La théorie d'Alexandre est en effet la suivante :

[56] Simplicius, *In Cat.* 128.5-8 (voir aussi 151.32-152.31). Voir également Olympiodore, *In Cat.* 82.33-36 : « Mais ils opposent tout de suite à la division l'aporie qu'elle n'a pas englobé toutes les espèces. Car de fait, l'impulsion, bien qu'étant une espèce de la quantité, en ce que nous disons 'un talent', 'un demi-talent', n'a pas été incluse » (je rajoute οὐ devant περιλέλειπται).

[57] Voir aussi le texte sur la forme géométrique des cellules des ruches traduit *infra*, p. 703-704.

[58] Cf. A. Dietrich, « Die arabische Version einer unbekannten Schrift des Alexander von Aphrodisias über di Differentia specifica », *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen I. Philologisch-historische Klasse*, 1964, p. 88-148. Le texte édité par Dietrich est selon moi une traduction plus ancienne de la seconde partie du traité *Sur la différence* édité, dans la traduction d'Abū 'Uthmān al-Dimashqī, par A. Badawi, *Arisṭū 'inda al-'Arab, Dirāsa wa-nuṣūṣ ghayr manṣūra*, Le Caire, 1947, p. 302.14-308. Pour une traduction française commentée, effectuée sur la base d'une

quand l'espèce renvoie à des réalités qui ne sont pas des composés de matière et de forme, mais qui demeurent des *abstracta*, alors l'espèce se confond avec la différence spécifiante. Quand en revanche l'espèce renvoie à des individus composés, alors l'espèce est différente de la différence spécifiante. L'exemple d'Alexandre est alors celui des deux espèces de la quantité, la quantité discrète et la quantité continue. Dans ce cas, où nous sommes encore à un haut degré de généralité, l'espèce se confond avec la différence. « Continu » est tout autant ce qui opère une différenciation dans le genre « quantité » qu'une espèce de la quantité[59].

Dans ces conditions, la liaison entre cette question et celle qui la précède pourrait être la suivante : après avoir interrogé Thābit au sujet du nombre des espèces de la quantité, Ibn Usayyid lui poserait entre les lignes la question de savoir si toutes ces quantités seront aussi « abstraites » que celles apparaissant dans la Quaestio d'Alexandre. Ces espèces de la quantité sont-elles en même temps des différences de la quantité, ou devons-nous distinguer entre espèce et différence ?

Thābit se contente d'une réponse brève. Soit la définition de l'homme comme « animal rationnel ». La différence spécifiante « rationnel » est une qualité (représentée grammaticalement par un adjectif *qualificatif*) du genre « animal ». C'est en ce sens que la différence est la « séparation » entre l'espèce et le genre, car c'est elle qui permet de détacher l'espèce sur le fond *indifférencié* du genre. Le nom de l'espèce est « dérivé » de celui de la qualité en ce que notre désignation de « l'homme » comme « le rationnel » est une substantivation de la qualité « rationnel ». Bref, l'*espèce* est la substance produite par cette qualification déterminative du genre qu'est la différence[60]. Thābit, ainsi, ne mentionne pas le distinguo d'Alexandre. C'est

---

nouvelle collation des manuscrits, voir M. Rashed, *Essentialisme. Alexandre d'Aphrodise entre logique, physique et cosmologie*, Berlin / New York, 2007, p. 53-79.

[59] Cf. A. Badawi, *Arisṭū 'inda al-'Arab*, p. 306-307 et A. Dietrich, « Die arabische Version einer unbekannten Schrift des Alexander von Aphrodisias über di Differentia specifica », p. 126-127, § 8.

[60] A. Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite », p. 13 et 26-27, édite et traduit : « [...] differentia most often bears the name of quality and species, for its name derives from the name of quality which is the differentiation and separation between what is set apart and that from which it is set apart ». Ce qui est erroné : jamais la différence ne porte le nom de l'espèce, ou alors tout l'aristotélisme ne vaudrait pas mieux que ses caricatures les plus outrées : Pierre serait un « homme » en fonction d'une différence « humanité », Thābit anticipant ainsi la vertu dormitive de l'opium du Diafoirus de Molière. En outre, Ibn Usayyid s'était enquis d'une distinction entre « différence spécifiante » et « espèce », qu'on chercherait en vain dans une telle réponse. Mais il faut marquer un temps d'arrêt après *al-kayfiyya*, interpréter le *wa* de manière forte (*tandis que* et non pas *et*) et comprendre que le pronom affixe de *fa-ismuhu* renvoie à l'espèce. Enfin, il ne faut pas rendre les différentes formes du même *ishtaqqa* d'abord par « derives », puis par « set apart ».

sans doute qu'il juge que même dans les cas « abstraits », où le nom de la différence et celui de l'espèce sont identiques, il subsiste une différence fonctionnelle entre différence et espèce.

On peut revenir brièvement sur ces cinq questions logiques. Bien comprises, elles infléchissent le sens général du traité dans une direction plus ontologisante que ce qu'on aurait pu penser. Car il ne s'agit ni d'une discussion technique de la question de l'infini proprement dit, ni selon nous non plus d'une simple démonstration d'érudition helléniste. Ibn Usayyid et Thābit ibn Qurra semblent ne jamais perdre de vue que la question de l'infini actuel a partie liée avec celle du « platonisme » mathématique. Il est donc nécessaire, pour affirmer l'*existence* (forte) des entités mathématiques, de s'interroger de près sur la dichotomie aristotélicienne substance-accident, pour voir dans quelle mesure le nombre peut échapper à un statut de simple accident. D'où les doutes exprimés par Thābit à l'encontre de la validité des distinctions aristotéliciennes mettant en jeu les catégories secondaires. Les cinq questions logiques sont par conséquent préparatoires, dans une certaine mesure au moins, au long développement sur le statut ontologique du nombre.

Commentaire des §§ [27]-[30] : Le statut ontologique du nombre

Les paragraphes consacrés au statut ontologique du nombre sont intéressants et difficiles[61]. De manière schématique, on peut résumer les choses ainsi : Thābit affirme que contrairement à l'opinion prévalante, le nombre n'est pas une simple façon de considérer des objets. Il a une existence réelle en dehors de l'âme, supportée par ces objets, à l'instar d'une qualité inhérente à une substance. Ibn Usayyid lui oppose alors une objection, dont le texte est à la fois mal transmis et elliptique. On peut imaginer deux arguments, le premier (1) identique à un « troisième homme » classique, le second (2) différent[62] :

[61] Sh. Pines, « Thābit b. Qurra's Conception of Number », p. 162, n. 14 évoque la discussion de Plotin, *Enn.* VI 6 [34], *Des nombres*, pour suggérer que Thābit pourrait dépendre ici d'une source néoplatonicienne. On ne le croit pas. Le platonisme de Thābit n'est pas historique mais dérive, surtout sur des questions telles que le nombre, de son activité de mathématicien. Que Thābit retrouve des problèmes platoniciens n'a dans ce contexte rien pour nous surprendre. Si inspiration il y a, c'est en un sens épistémologiquement plus raffiné. Cf. par exemple P. Bernays, « Über den Platonismus in der Mathematik », *Das Universalien-Problem* [= *Wege der Forschung* 83], hrsg. W. Stegmüller, Darmstadt, 1978, p. 64-83, p. 65.

[62] Sh. Pines, « Thābit b. Qurra's Conception of Number », p. 162, rapproche le texte du « "well-known third man" (*tritos anthropos*) argument ». A. Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite », p. 28, n. 24, lui emboîte le pas (« As Pines has remarked, this is the famous "third-man" argument against Plato's theory of Forms ») mais

(1) Le *deux-nombré* est dénombré par un *deux-nombrant.* Mais le *deux-nombré* étant différent du *deux-nombrant*, nous avons besoin d'une troisième *Deux* qui les subsume l'un et l'autre ; puis d'un quatrième *Deux* qui subsume les trois premiers ; etc. à l'infini[63].

(2) Le *deux-nombré* et le *deux-nombrant* ont besoin d'un troisième *Deux* qui les subsume. Nous avons donc trois entités. Celles-ci constituent par définition un *trois-nombré.* Ce dernier sera dénombré par un *trois-nombrant.* Ce *trois-nombrant* est une quatrième entité ; etc. à l'infini.

Il est à première vue difficile de décider quel argument Ibn Usayyid entend faire jouer. Le second apparaît quelque peu malhabile car il reconnaît plus d'entités au niveau des *deux* qu'à ceux qui le suivent. Ainsi, alors qu'on distingue l'entité *deux-nombré* et l'entité *deux-nombrant* puis l'entité *Deux* qui les subsument l'une et l'autre, on ne prend plus en considération, au niveau des *trois*, que le *trois-nombrant.* Le trois-nombré est négligé et l'on ne cherche donc pas à passer du *trois-nombré* et du *trois-nombrant* à un troisième *Trois.* À cette imperfection se joindrait l'apparente maladresse qu'il y aurait à opposer à Thābit, qui s'est déjà prononcé en faveur de l'infini actuel, ce type inoffensif de régression.

Le premier argument évite à la fois cette dissymétrie interne et cette maladresse dans la considération de l'infini. Car la régression qu'il met en jeu n'est pas par succession, mais par insertion perpétuelle d'un moyen terme qui seul permet la liaison désirée entre les deux premiers. Ainsi, pour dire que les *deux-noix* sont bien *deux*, il nous faut introduire un troisième *Deux* qui unisse les deux premiers, puis un quatrième qui unisse les trois premiers, etc. Cette cascade infinie bloque le mécanisme de l'attribution. Le danger n'est donc pas seulement celui de l'infini, mais il menace la mise en relation effective du nombré et du nombrant.

La réponse de Thābit pourrait nous aider à trancher. Sans expliciter le rapport à la question posée, Thābit se contente de dénier qu'on puisse établir une distinction réelle entre un accident inhérent à une chose et cette chose. Mais si, comme il est vraisemblable, l'« accident » fait ici référence au nombre (le nombre *deux* étant d'après Thābit « inhérent » aux *deux-noix*),

---

n'explique malheureusement pas pourquoi. Toutefois, comme on va le voir, il est probable que la régression à l'infini proposée par l'argument n'est pas assimilable à celle des arguments du type du « troisième homme ». La différence tient au fait que ces derniers construisent la régression sur l'homonymie de l'Idée et de ce qui en participe. Or si cette homonymie apparaît au départ de l'argument d'Ibn Usayyid, la régression à l'infini qui s'enchaîne pourrait ne pas tirer d'elle son principe.

[63] On peut comparer cet argument aux différentes versions de l'argument du « troisième homme » que l'on trouve chez Platon, Aristote et Eudème. Cf. G. Fine, *On Ideas, Aristotle's Criticism of Plato's Theory of Forms*, Oxford, 1993, p. 203-241.

Thābit soulignerait que l'on ne peut considérer le nombre d'un côté, la chose de l'autre, comme deux entités, dès lors qu'ils sont imbriqués l'un dans l'autre, c'est-à-dire que leur distinction n'est pas réelle – pas plus qu'on ne peut considérer qu'une chose et l'un de ses accidents sont réellement *deux* choses. Comme il l'écrit :

> je n'ai exigé des choses qu'elles soient nombrées et qu'elles aient un nombre autre qu'elles, que lorsqu'elles étaient distinctes et séparées les unes des autres. Mais quand elles sont rassemblées dans un endroit unique, à la façon des accidents existant dans un individu unique, qui forment, eux tous avec l'individu, une pièce unique, je n'exige pas d'elles qu'elles aient un nombre autre qu'elles [...][64].

La relative obscurité de l'exemple provient de ce que le nombre à la fois y dénombre les accidents et est un accident lui-même. Prenons un cas où l'accident n'est pas un nombre, rouge pour une pomme par exemple. Thābit explique qu'on ne peut dire alors qu'il y a deux choses, la pomme d'une côté, le rouge de l'autre. Le nombre demeure celui de l'unité objectale : un seul item (et non pas deux) s'il n'y a qu'une seule pomme, deux items (et non pas quatre) s'il y a deux pommes, etc. Soit maintenant le cas où l'accident est un nombre, deux pour les deux-noix par exemple. Dans la terminologie de Thābit, le nombré est les « deux-noix », le nombrant le « deux ». Si l'analogie avec la pomme rouge est valide, Thābit dirait qu'on ne peut séparer le deux-nombrant (qui joue le rôle du rouge) du deux-nombré (qui joue le rôle de la pomme). Il n'y a là deux entités que pour l'imagination, non en réalité.

Dans ces conditions, l'argument n'est pas un « troisième homme » classique. Reste à expliquer pourquoi Ibn Usayyid pense qu'il peut mettre en danger l'ontologie mathématique de son maître. C'est sans doute qu'en laissant proliférer à l'infini le nombre d'entités présentes dans tout « couple » d'objets, la régression, sans être logiquement contradictoire dès lors qu'on admet l'actualité de l'infini, est néanmoins ontologiquement dévastatrice. Elle met en péril de l'intérieur l'identité des objets. C'est pourquoi, en dernière instance, Thābit prend soin de bloquer la régression à la racine en affirmant l'unité réelle de l'objet et de ses accidents.

[64] Il s'agit du même argument modal que celui transmis par Abū Bakr al-Rāzī, où l'on voyait Thābit refuser qu'on puisse conclure de notre « imagination » *des* mouvements célestes à leur existence réelle (cf. *supra*, p. 623) : de même qu'il n'y a en réalité qu'un seul mouvement, de même il n'y a dans les objets nombrés, en réalité, qu'un seul nombre à la fois nombré et nombrant. Il n'y a donc pas de régression à l'infini.

Commentaire du § [31] : Les équivoques

L'argument précédent mettait en jeu l'homonymie. « Deux » peut désigner aussi bien le nombre-nombré que le nombre-nombrant, voir le nombre qui les subsume l'un et l'autre. C'est sans doute la raison pour laquelle Thābit, après avoir expliqué l'unité indissociable du nombre et du nombré, propose une clarification de la notion d'équivoque. Traditionnellement, les aristotéliciens discutent ce point dans leur commentaire du premier chapitre des *Catégories*. Simplicius propose ainsi un très long commentaire des premières phrases de l'opuscule (*Cat.* 1a 1), où il rappelle les très nombreuses conceptions de ses prédécesseurs au sujet des homonymes, synonymes, paronymes, etc.[65] Quel que soit l'auteur mentionné par Simplicius, on ne trouve jamais remise en cause l'idée que la définition, ici le *logos tês ousias*, soit unique. C'est donc une véritable rupture qu'introduit Thābit, sinon dans l'histoire de la philosophie aristotélicienne – qui continuera encore longtemps à commenter les *Catégories* dans une optique traditionnelle –, du moins dans celle de la philosophie tout court.

L'exemple des arcs semblables soulève la question du caractère premier des définitions. Dans le présent contexte, Thābit semble nier qu'une définition doive exprimer la caractéristique « première » de l'objet. Il suffit qu'elle en donne un propre. La question de l'essence se dilue. On ne saurait en outre exiger d'une définition qu'elle soit démontrée. La seule démonstration requise est celle de l'équivalence entre toutes les définitions – c'est-à-dire tous les propres – du même objet. Ces deux thèses (équivalence logique des définitions, évacuation du caractère « premier » et « essentiel » de l'un des prédicats) apparaissent ici pour la première fois en combinaison. Elles sont en général associées aux débats du XVII^e^ siècle européen et plus particulièrement, dans les histoires de la philosophie[66], aux réflexions de Pascal dans *De l'esprit géométrique*, commentant le caractère « libre » des définitions[67].

[65] Simplicius, *In Cat.* 21.1-40.13. Cf. *infra*, p. 689-694.

[66] Voir par exemple A. Abelson, art. « Definition », *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 1 & 2, Londres, 1967 (repr. 1972), p. 314-324 : « the rebirth of science in the seventeenth century was accompanied by a sweeping rejection of medieval thought, in particular the medieval concept of definition as the penetration by metaphysical intuition into a realm of changeless forms ».

[67] Pascal, *De l'esprit géométrique*, Section I : « [...] les définitions sont très libres, et [...] elles ne sont jamais sujettes à être contredites ; car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée un nom tel qu'on voudra. Il faut seulement prendre garde qu'on n'abuse de la liberté qu'on a d'imposer des noms, en donnant le même à deux choses différentes ». Et plus loin : « Ainsi si l'on avance ce discours : "Le temps est le mouvement d'une chose créée", il faut demander ce qu'on entend par ce mot de temps, c'est-à-dire si on lui laisse le sens ordinaire et reçu de tous, ou si on l'on dépouille pour lui donner en cette occasion celui de mouvement d'une chose créée. Que si on le destitue de tout autre sens, on ne peut contredire, et ce sera une

Le rapprochement entre Thābit et ces lointains successeurs n'est pas purement analogique. Le thème parcourt les commentaires à Euclide et se trouve exprimé dans celui, particulièrement diffusé, de Clavius. Tout se passe donc comme si, dès le IX^{e} siècle, la désaffection de l'essentialisme aristotélicien avait puisé dans la neutralité ontologique de la définition mathématique son intuition primitive.

Conclusion

Des textes de ce calibre – ils se comptent sur les doigts des deux mains dans l'histoire de la philosophie – n'ont guère besoin qu'on s'appesantisse sur leurs mérites. On se bornera, en manière de conclusion, à souligner que l'ensemble formé par les questions d'Ibn Usayyid n'est ni parfaitement unitaire, ni gratuit et éclaté. Qu'elles soient anciennes ou contemporaines, directement liées à l'exégèse aristotélicienne ou de ce point de vue périphériques, ces questions ont toutes un point commun, celui de permettre à Thābit de développer les fondements systémiques d'une ontologie qui n'est pas celle d'Aristote. Thābit comme Ibn Usayyid ont perçu que dans ce cadre, la position qu'on adopte quant à l'existence de l'infini actuel et à celle de *classes* d'objets était discriminante. En se prononçant en faveur de l'existence de l'infini actuel et des classes d'objets mathématiques, Thābit est-il pour autant « platonicien » ? Oui, mais non pas au sens de la tradition platonicienne antique, qu'elle soit pure – Plotin – ou éclectique – les néoplatoniciens syncrétistes de l'école d'Athènes. Car Thābit ne suggère nulle part qu'il faudrait postuler des Idées « statiques » pour expliquer le monde. Si l'exigence des chaînes finies est le fondement du dogmatisme aristotélicien de la substance monadique, « la thèse de Platon – comme le souligne P. Natorp – est l'exact opposé de cette exigence : la connaissance consiste dans la détermination successive d'un item à déterminer *à l'infini*, qui n'est

---

définition libre en suite de laquelle, comme j'ai dit, il y aura deux choses qui auront ce même nom. Mais si on lui laisse son sens ordinaire, et qu'on prétende néanmoins que ce qu'on entend par ce mot soit le mouvement d'une chose créée, on peut contredire. Ce n'est plus une définition libre, c'est une proposition qu'il faut prouver, si ce n'est qu'elle soit très évidente d'elle-même ; et alors ce sera un principe et un axiome, mais jamais une définition, parce que dans cette énonciation on n'entend pas que le mot de temps signifie la même chose que ceux-ci : le mouvement d'une chose créée ; mais on entend que ce que l'on conçoit par le terme de temps soit ce mouvement supposé ». Pascal exprime parfaitement ici des thèses qu'on retrouve dans les discussions des commentateurs d'Euclide de son temps. Cf. l'excursus de Borelli, qui discute les thèses de Clavius sur la définition, dans : *Euclides restitutus, siue Prisca geometriae elementa, breuius, et facilius contexta, in quibus praecipue proportionum theoriae noua, firmiorique Methodo promuntur* a Io. Alphonso Borellio, Pisis, ex officina Francisci Honophri, 1658, p. 14-17.

donc tout simplement pas atteignable par une quelconque détermination effective. Selon ce point de vue, la déduction, qui a pour but l'objet de l'expérience, est certes bornée quant au point de départ de la pensée, mais se trouve être fondamentalement infinie du côté de son but, l'objet empirique »[68]. Qu'en gros personne, jusques et y compris dans les rangs de l'Académie, n'ait saisi ce point fondamental[69] montre assez comment Thābit, privilégiant les opérations sur les individus, retrouve moins une thèse historique qu'il n'aboutit à une position philosophique. Une telle lucidité ne saurait s'expliquer seulement par un talent exégétique hors du commun. Plotin, Syrianus ou Proclus pouvaient, par leur connaissance du texte de Platon, en remontrer à n'importe qui. L'élément qui distingue Thābit est alors sans aucun doute son néo-archimédisme et ses recherches massives sur les procédés infinitésimaux, qu'on retrouve, outre dans trois écrits mathématiques conservés, dans son astronomie et dans sa statique[70]. C'est avant tout une pratique de mathématicien qui peut convaincre de la réalité du processus d'approximation, dont la poursuite *à l'infini* permet seule la *réalisation* de l'objet mathématique. L'identification, par Thābit, du meilleur des mondes à un *extremum* de bien[71] montre qu'une telle structure est pour lui le fondement architectonique de l'univers.

[68] P. Natorp, *Platos Ideenlehre. Eine Einführung in den Idealismus*, 1922 (repr. Hambourg, 2004), p. 393.

[69] Cf. Natorp, *ibid.*, p. 385.

[70] Cf. R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I : *Fondateurs et commentateurs*, Londres, 1996, p. 145-146.

[71] Cf. *infra*, p. 699-713.

THĀBIT IBN QURRA, LA *PHYSIQUE* D'ARISTOTE ET LE MEILLEUR DES MONDES

Marwan RASHED

Autant l'activité mathématique de Thābit ibn Qurra peut être reconstituée, dans certains de ses chapitres tout au moins, avec exactitude, autant nous nous trouvons, pour ce qui concerne sa contribution à l'histoire de la philosophie, dans le flou le plus complet. Une première explication, qui n'est bien sûr pas fausse, expliquerait ce flou par la perte massive de ses œuvres philosophiques. Il n'est jamais facile, on le sait, d'interpréter des fragments d'authenticité plus ou moins douteuse transmis dans des contextes parfois fort différents. Mais une considération plus attentive de ce matériau conduit à se demander si l'indécision n'est pas aussi, d'une certaine manière, inhérente à la façon même dont Thābit pratique la philosophie. Son approche semble dictée par des situations différentes. Il y a loin de telle discussion épistémologique née d'une réflexion mathématique[1] à un commentaire d'un traité d'Aristote rédigé sur commande[2], à la rédaction d'un entretien avec un disciple[3], etc. Par exemple, ce n'est pas parce que Thābit rédige un abrégé de la *Métaphysique* d'Aristote qu'il souscrit à ses thèses – pas plus en tout cas que si n'importe lequel d'entre nous se livrait à un tel exercice. Mais ce n'est pas non plus parce qu'il adresse telle critique ponctuelle à Aristote qu'il faudra s'empresser de l'ériger en porte-étendard d'un « anti-aristotélisme » intemporel. Et pourtant : une considération attentive des textes montre que dans le domaine de la philosophie naturelle, Thābit a pris le contre-pied de la *Physique* d'Aristote d'une manière extrêmement cohérente et systématique. Quel que soit le chapitre en jeu, Thābit s'est opposé au primat de la substance, ainsi qu'à la cosmologie qui en décrivait le

[1] Voir par exemple le *Livre de Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra à Ibn Wahb, Sur le moyen de parvenir à déterminer la construction des problèmes géométriques*, dans R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. IV : *Ibn al-Haytham, Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, 2002, p. 743-765.

[2] Voir ici même D. Reisman et A. Bertolacci, « Thābit Ibn Qurra's *Concise Exposition of Aristotle's Metaphysics* : Text, Translation and Commentary ».

[3] Voir M. Rashed, « Thābit ibn Qurra sur l'existence et l'infini : les *Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid* », ici même, p. 619.

comportement. On le montrera dans la première partie de ce travail. Toute la question est dès lors de savoir comment interpréter ces critiques : s'agit-il de piques ponctuelles, ou du revers d'une doctrine positive que Thābit entendrait substituer à l'aristotélisme ? La seconde partie présentera quelques éléments en faveur de la seconde lecture : Thābit concilie une doctrine abstraite des êtres à une théorie concrète du meilleur des mondes.

I. THĀBIT CRITIQUE DE LA *PHYSIQUE* D'ARISTOTE

Dans l'esprit d'Aristote, les huit livres que nous désignons depuis l'Antiquité sous le nom de *Cours de physique* (Φυσικὴ 'Ακρόασις) avaient sans doute vocation à servir de fondement à l'ensemble de la recherche en philosophie naturelle, en particulier aux recherches biologiques que le Stagirite, dans le prologue des *Météorologiques*, place à la suite des recherches plus abstraites[4]. Ce qui veut dire que les huit livres actuels constituent moins une science autonome (à la manière des physiques pré-classiques) qu'une mise en place des concepts et des outils qu'emploiera toute recherche sur telle ou telle catégorie d'êtres naturels. Plus que le mouvement pour lui-même, Aristote y étudie le processus sous-jacent à tout phénomène naturel – cosmologique ou biologique. Il serait intéressant de savoir à partir de quand on a lu la *Physique* indépendamment de la longue chaîne des traités qui la suivent ; plus généralement, la physique d'Aristote indépendamment de sa biologie. On peut en particulier s'interroger sur la paternité de la lecture « pré-classique » de la *Physique* : faut-il l'imputer aux aristotéliciens réputés orthodoxes[5], ou à des auteurs plus sensibles aux paradigmes mathématiques d'explication de la nature, tels qu'on les trouve développés dès l'Antiquité dans « les branches les plus mathématiques de la physique », pour citer Aristote lui-même[6], l'optique, l'harmonique, la statique et l'astronomie ?

Quoi qu'il en soit, on peut montrer, en dépit du caractère extrêmement lacunaire des sources, que c'est dans l'œuvre de Thābit ibn Qurra que l'on trouve pour la première fois réunis les éléments d'une remise en cause de *toutes* les pièces de la *Physique* d'Aristote réutilisables dans le cadre d'une doctrine autonome du mouvement. Si en effet on laisse de côté les deux premiers livres, qui développent une ontologie du sensible et non une phy-

[4] Cf. *Meteor.* A 1.

[5] Je tente ailleurs de montrer qu'Alexandre entérine la séparation du corpus aristotélicien en une « physique » et une « biologie », la physique se bornant à la tétralogie *Physique*, *Du ciel*, *De la génération et la corruption*, *Météorologiques*, auxquels il faut ajouter le traité *De l'âme*. Voir M. Rashed, *Essentialisme. Alexandre d'Aphrodise entre logique, physique et cosmologie*, Berlin / New York, 2007.

[6] Cf. *Phys.* B 2, 194a 7-8.

sique (même générale)[7], on peut identifier, comme éléments fondamentaux d'une science du mouvement, les grandes unités thématiques suivantes : *l'infini* (III, 4-8) ; *le lieu* (IV, 1-5) ; *le temps* (IV, 10-14) ; *la structure logique du mouvement* (V) ; *la continuité* (VI) ; *la commensurabilité des mouvements* (VII, 4) ; *le premier moteur* (VIII). Car la question de l'infini est au fondement de la science des grandeurs, du mouvement et du temps[8] ; le lieu et le temps sont des conditions intrinsèques du mouvement[9], qui se définit par son aboutissement-achèvement, ce qui exclut qu'il y ait un « mouvement du mouvement »[10] ; cerner sa continuité en dévoile le *modus essendi*[11] ; l'incommensurabilité des différents mouvements constitue le signe *a posteriori* de l'incomparabilité cosmologique des différents mus[12] ; l'étude du premier moteur achève la cinématique aristotélicienne en expliquant comment se clôt la chaîne finie des moteurs. On tentera de restituer, sur chacune de ces parties de la *Physique*, la position explicite ou implicite de Thābit.

1. *L'infini*

Thābit traite *ex cathedra* de l'infini dans ses *Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid*[13]. Il faut d'entrée noter comment sa défense de l'infini en acte est moins une critique ponctuelle d'Aristote qu'un choix délibéré de se placer sur un autre terrain. Pour Aristote, la question de l'infini est intimement liée à celle de la structure du cosmos, « locale » aussi bien que « temporelle », et de la composition du continu. Au plan cosmique, toute la difficulté de sa position tient à son besoin d'exclure l'infinité de la grandeur spatiale tout en la maintenant au niveau temporel. C'est en s'engouffrant dans cette brèche que Philopon avait porté les attaques les plus percutantes contre l'infinité temporelle du monde[14]. Al-Kindī, à la même époque que Thābit, avait entériné cette rupture philoponienne avec Aristote, en renonçant à l'infinité temporelle[15]. Il est dès lors remarquable que jamais, dans sa discussion de l'infini, Thābit ne fasse la moindre mention du flotte-

[7] Encore que, comme on le verra, le finalisme thābitien s'oppose directement à la théorie de l'immanence naturelle développée dans le livre II de la *Physique*.

[8] Cf. *Phys.* Γ 4, 202b 30-36.

[9] Cf. *Phys.* Γ 1, 200b 20-21 ; Δ 1, 208a 27-29.

[10] Cf. *Phys.* E 2, 225b 33-35.

[11] Cf. *Phys.* Γ 1, 200b 16-18.

[12] Cf. *Phys.* H 4, 249b 12-14.

[13] Cf. « *Réponses* », p. 627-645 pour le texte arabe.

[14] Cf. R. Sorabji, « Infinity and the Creation », dans R. Sorabji (éd.), *Philoponus and the Rejection of Aristotelian Science*, Londres, 1987, p. 164-178.

[15] Voir *Philosophie Première*, p. 30-31 et p. 38-39, dans *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī*, vol. II : *Métaphysique et cosmologie*, par R. Rashed et J. Jolivet, Leyde / Boston / Cologne, 1998.

ment aristotélicien. Thābit, encore une fois, se place délibérément sur un autre terrain, celui des objets mathématiques :

> Et nous questionnâmes aussi sur la proposition utilisée par nombre de commentateurs fameux, à savoir : l'infini ne peut pas être plus grand que l'infini. Il nous mit en garde contre l'erreur de celle-ci aussi à partir du nombre. Car le nombre lui-même est infini, et les pairs, dans le nombre, sont à eux seuls infinis, et de même les impairs, or ces deux classes sont égales et chacune d'elles est la moitié du nombre tout entier. Pour ce qui est de leur égalité, il est en effet clair que pour tout couple de nombres successifs, l'un est pair et l'autre est impair. Et pour ce qui est du fait que le nombre est le double de chacune d'elles, cela vient de ce qu'elles sont égales, qu'elles l'épuisent et qu'il n'a pas d'autre partie qu'elles. Par conséquent, chacune d'elles est la moitié du nombre. On a montré aussi que l'infini est un tiers de l'infini, un quart, un cinquième, et toute partie qu'on supposera du nombre en soi : les nombres qui ont un tiers sont infinis et sont le tiers du nombre tout entier, les nombres qui ont un quart sont un quart du nombre tout entier, les nombres qui ont un cinquième sont un cinquième du nombre tout entier, et ainsi de suite pour toutes les parties. En effet, nous trouvons pour tout triplet de nombres successifs un nombre qui a un tiers, pour tout quadruplet de nombres successifs un nombre qui a un quart, pour tout quintuplet de nombres successifs un nombre qui a un cinquième et, pour tout groupe de nombres successifs, en quelque multiplicité qu'ils soient, un seul nombre parmi eux qui a une partie dénommée selon cette multiplicité[16].

Avant de s'interroger sur la valeur de ce type d'exemples, on peut remarquer une absence à première vue troublante : celle de toute allusion aux grandeurs continues. C'était pourtant la seconde contradiction, après celle de la structure du cosmos, que devaient affronter les Aristotéliciens : s'il n'y a pas de grandeurs insécables et que tout est plein, comment ne pas postuler une infinité en acte de positions dans la translation d'un point A à un point B ? Or, pas plus que dans le cas de la structure du cosmos, Thābit ne cherche à exploiter cette faiblesse de la position adverse. Lui qui pourtant, en tant que géomètre infinitésimaliste, devait avoir médité sur la structure du continu, refuse de s'appuyer sur la divisibilité à l'infini des grandeurs géométriques pour prendre le contrepied de la position des philosophes.

L'interprétation de la position de Thābit ne pourra venir qu'une fois les autres cas examinés. Bornons-nous donc pour l'instant à quelques remarques. On s'aperçoit, après considération attentive, que le caractère hétéroclite de la discussion aristotélicienne vient de ce que l'infini n'est jamais abordé pour lui-même, comme objet théorique « pur », mais comme le résidu problématique de l'établissement d'êtres véritables. En d'autres termes, Aristote cherche toujours à montrer que l'infinité en apparence indissociable

[16] « *Réponses* », § 18, p. 636-638.

de certains phénomènes, que lui-même tient pour bien fondés, n'est jamais tout à fait *réelle*, mais relève d'un mode dégradé d'existence. L'infinité temporelle n'affecte pas *un* être au sens fort, mais s'alimente à un évanouissement permanent de son substrat. L'infinie divisibilité des grandeurs dit moins quelque chose de ces dernières que du mode selon lequel nous les imaginons. Tous les points matériels d'un organe biologique affecté en tant que totalité à une certaine fonction sont aussi peu subsistants par soi que ne le sont tous les points d'une trajectoire en direction d'un aboutissement, qui donnera le sens de tout le mouvement. Aristote s'en prend donc moins à l'infini qu'à l'idée qu'une *substance* véritable puisse être infinie.

L'élément sous-jacent le plus profond au rejet aristotélicien de l'infini actuel est donc la conception monadique de l'οὐσία. Aristote veut rejeter l'infini loin de l'être substantiel parce qu'il refuse que l'on érige les classes d'êtres en êtres. Celles-ci ne sont rien d'autres que la réunion de leurs individus substantiels, et c'est précisément la raison pour laquelle on ne retrouve dans un syllogisme que ce qu'on y a mis au départ. C'est peut-être le sens d'une allusion énigmatique à Platon dans la discussion canonique de l'infini : « pour Platon, en revanche, deux sont les infinis, le grand et le petit »[17]. Il a fallu attendre les plus perspicaces des modernes pour voir là une allusion aux ensembles infinis de nombres multiples dont la manipulation permettait l'approximation des racines irrationnelles[18]. Même donc si ce passage a pu frapper Thābit, ç'aura davantage été comme le rappel d'une idée propre que comme la découverte d'horizons nouveaux. La simplicité avec laquelle Thābit développe le thème de l'infinité actuelle des nombres multiples souligne davantage son platonisme mathématique que son insertion pour ainsi dire folklorique dans la lignée platonicienne. D'autant plus que Thābit – à la différence bien sûr de Platon – ne semble absolument pas se préoccuper de l'existence d'autres classes que de celles d'objets mathématiques. Que nous ayons affaire à une ontologie de mathématicien n'explique pas tout : il y a un refus *positif* d'accepter le problème dans les termes où le posent les Aristotéliciens, c'est-à-dire de se placer au plan des genres et des espèces *biologiques*. Cette position est bien mise en lumière par une distorsion terminologique, par Thābit, dans l'emploi du mot « espèce ». À Ibn Usayyid qui lui demandait, en aristotélicien, si les espèces peuvent être infinies, Thābit répond en lui parlant d'« espèces » non pas biologiques, mais mathématiques :

> Nous questionnâmes Abū al-Ḥasan sur ce que disent la majorité des commentateurs, à savoir que les espèces sont finies et que parmi elles, celles

[17] *Physique* Γ 4, 203a 15-16.

[18] Voir J. Vuillemin, « La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques », dans *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes*, Paris, 2001, p. 107 pour ce texte d'Aristote.

qui sont à un même degré sous un genre unique ne sont pas antérieures par nature l'une à l'autre ni se requièrent l'une l'autre. Nous ne l'avons pas trouvé de cet avis. Il mentionna au contraire que nous connaissons l'erreur de ces deux propositions de près, dans le cas des espèces du nombre et des figures. Car elles sont infinies, chacune d'elles est antérieure à celle qui la suit par nature et la seconde d'entre elles requiert dans sa constitution celle qui la précède[19].

On fera crédit au commentateur de l'*Organon* que fut aussi Thābit[20] d'avoir eu pleine conscience du décalage de sa réponse. Il s'agit d'une redistribution du champ ontologique et, partant, d'un déplacement de son point d'équilibre. Thābit ne peut ignorer qu'à la fin du livre Γ de la *Physique*, Aristote avait insisté sur le fait que l'infini utilisé par les mathématiciens n'était jamais actuel. Ceux-ci postulent seulement que toutes les opérations mathématiques de division et de multiplication peuvent être itérées autant que l'on voudra[21]. Leur existence se déploie dans des limites qui sont au moins en partie dictées par notre activité imaginative et discursive[22] – thèse que Thābit refuse, explicitement cette fois[23] :

> Abū al-Ḥasan mentionna qu'on est d'avis que le nombre n'a pas d'existence dans les choses comme tous les accidents, et qu'il n'est pas un état supporté dans le nombré, mais qu'il est seulement une chose conservée dans l'âme ; et qu'il a été mentionné aussi qu'il en va de la sorte pour toutes les relations qui relèvent de la quantité, comme la moitié, le double et les autres proportions, le plus grand, le plus petit, l'égal, le plus long, le plus court : ce seraient là des choses qui se produisent dans l'âme quand elle compare des grandeurs.
>
> Il écarta ce propos et dit : que non ! Au contraire, tous ces *items* (*umūr*) ont une existence dans les choses (*fī al-ashyā'*), et une réalité, et il en va pour eux comme pour les accidents inhérents aux substances, qu'existe ou non quelqu'un pour les connaître. La preuve en est que s'il n'y avait pas *dans* les nombrés un nombre par lequel leur multiplicité est bien la leur, il ne serait pas possible que s'accordent ceux qui les dénombrent pour parvenir tous à un même total dans leur décompte, toujours et de tout temps, tous ensemble et chacun séparément. Au contraire, selon l'un leur nombre serait différent de ce qu'il est selon l'autre et, selon un troisième, un nombre encore différent de celui des deux premiers. Or nous ne constatons pas qu'il en aille ainsi.

19 « *Réponses* », § 17, p. 636.

20 Thābit a abrégé les *Catégories*, le traité *De l'interprétation* et les *Premiers Analytiques*.

21 *Physique* Γ 7, 207b 27-34.

22 *Ibid.*, Γ 8, 208a 14-23.

23 Cf. « *Réponses* », § 27-28, p. 640-642.

Il est révélateur que Thābit conserve la catégorie de l'accident mais non celle de la substance. Partout où un Aristotélicien aurait été tenté de parler de l'inhérence de l'accident à la *substance*, Thābit substitue l'idée d'une présence de l'accident dans les *choses* (*fī al-ashyā'*). Ce changement est d'autant moins anodin que l'on confère en outre une *existence* et une *réalité* (*wujūdun* [...] *wa-ḥaqīqatun*) aux êtres modaux. Il ne s'agit pas à proprement parler du platonisme critiqué par Aristote, puisque les Idées ne sont pas des réalités séparées, mais d'une doctrine inédite où la détermination devient finalement plus « réelle » que le substrat indéterminé (la « chose ») auquel elle adhère. Il y a donc une inversion de l'ordre aristotélicien des priorités ontologiques.

2. *Le lieu*

Le lieu est encore plus lié, chez Aristote, aux seuls êtres qui, pour lui, *sont* véritablement, les substances sensibles. On retrouve à nouveau un problème cosmologique et une discussion sur la cohésion interne des substances et de leurs actes. Tout d'abord, au plan cosmologique, la théorie des lieux naturels assure de la cohérence du cosmos et permet d'expliquer les mouvements des corps premiers. C'est en particulier parce que l'univers possède un haut et un bas naturels que l'on peut expliquer le mouvement des corps vers ce « haut » et ce « bas » et, surtout, leur arrêt une fois ces régions atteintes. Au plan cette fois des substances individuelles, en tant qu'il est la limite interne du corps englobant, le lieu constitue le négatif de l'être dans le lieu. Le lieu est l'empreinte, dans un milieu, d'une silhouette provoquée par un composé de matière et de forme. C'est donc le reflet d'un être à substantialité forte[24]. Cette dernière théorie a pour fonction, aux yeux d'Aristote, de permettre aussi bien la localisation « cosmique » d'une substance en mouvement – le corps englobant étant alors, en un sens, le reste de l'univers, que d'assurer sa stabilité formelle à l'aide d'une invariance de sa configuration spatiale, dont témoignent les adaptations successives du « milieu », ontologiquement moins dense.

Nous avons conservé une critique implicite de Thābit à l'encontre du lieu « cosmologique » d'Aristote, soit sa théorie des lieux naturels, elle-même dirigée contre le *Timée* de Platon. Ici comme ailleurs, Thābit prend donc parti pour celui-ci contre celui-là[25]. Pour expliquer l'existence éminente et la causalité des lieux naturels (et dénier du même coup qu'ils ne soient qu'une façon de décrire les mouvements des corps simples), Aristote leur

[24] Je me suis expliqué sur cette question dans mon compte rendu de B. Morison, *On Location, Aristotle's Concept of Place*, Oxford, 2002, paru dans *Elenchos*, 24, 2003, p. 161-166.

[25] Cf. *infra*, p. 701.

attribue tout d'abord, sur un mode général et dialectique, une « certaine puissance »[26] (*Physique* Δ 1, 208b 8-22) :

> De plus, les transports des corps naturels simples, par exemple du feu, de la terre et des corps de ce genre, non seulement montrent que le lieu est une certaine chose, mais aussi qu'il a une certaine puissance (τινὰ δύναμιν). Chacun, en effet, est transporté vers son lieu quand il n'en est pas empêché, l'un vers le haut, l'autre vers le bas. Or ce sont là des parties et des espèces de lieu, le haut, le bas et le reste des six directions. Mais celles-ci, le haut et le bas, la droite et la gauche, n'existent pas seulement par rapport à nous. Pour nous, en effet, elles ne sont pas toujours les mêmes, mais elles dépendent de la position suivant la manière dont nous nous sommes tournés [...] ; dans la nature, par contre, chacune des directions est définie séparément (χωρὶς). En effet, le haut n'est pas n'importe quoi, mais là où se transportent le feu et le léger ; de la même manière le bas non plus n'est pas n'importe quoi, mais là où se transportent les choses qui ont du poids et les composés de terre, conformément au fait que ces directions ne diffèrent pas seulement par la position, mais aussi par la puissance.

Aristote revient sur cette idée de façon plus précise et scientifique dans le traité *Du ciel* Δ 3, 310b 1-5, où il recourt à l'expérience de pensée suivante : supposons, nous dit-il, que la Terre soit déplacée à l'endroit où se trouve maintenant la Lune. Elle n'y demeurera pas, mais cherchera d'elle-même à regagner son lieu naturel, le centre du monde :

> Cette interprétation donne un sens acceptable à la thèse des Anciens selon laquelle le semblable se porterait vers le semblable. En effet, ce phénomène ne se produit pas dans tous les cas : si l'on plaçait la Terre à l'endroit où se trouve maintenant la Lune, chaque particule de terre ne se porterait pas vers la terre elle-même, mais vers l'endroit où la terre se trouve maintenant.

Thābit, dans un long fragment conservé par Fakhr al-Dīn al-Rāzī, se sert de la même expérience de pensée pour soutenir la thèse opposée[27]. En voici le début :

[26] P. Pellegrin, *Aristote : Physique*, Paris, 2000, p. 203, n. 1, à la suite de E. Hussey, *Aristotle's Physics III and IV*, Oxford, 1983, p. 101, remarque que le terme δύναμις « semble être en contradiction avec ce qu'A[ristote] dira plus bas en 209a22, à savoir que le lieu 'ne meut pas les étants' ». Il ne s'agit bien sûr pas de faire de cette puissance un être concret aimantant à lui tel ou tel type de corps. Aristote parle d'ailleurs seulement d'une « certaine puissance » ; il faut sans doute comprendre cette atténuation comme visant l'expression sublunaire du « désir » qui pousse les astres à se mouvoir en cercle. Les corps sublunaires « désirent » *quelque chose*, leur lieu.

[27] Fakhr al-Dīn al-Rāzī, *al-Mabāḥith al-mashriqiyya*, Hyderabad, 1343 H., vol. II, p. 63-65. Ce texte est bien connu depuis les recherches de S. Pines, *Beiträge*, p. 42, n. 2 [traduction arabe par M. Abū Rīda, *Madhhab al-dharra 'inda al-Muslimīn*, Le Caire, 1946, p. 43, n. 5]. Traduction anglaise dans Sabra, « Thābit ibn Qurra on the Infinite », p. 30-33 (même diagnostic que Pines quand à l'originalité du texte, sans

Les savants sont tombés d'accord sur ce point, si ce n'est que j'ai vu, dans des sections attribuées à Thābit ibn Qurra, une thèse étonnante, à laquelle il a choisi de se rallier. Je vais commencer par la transcrire avant de mentionner la preuve amendée de la doctrine des savants.

Thābit ibn Qurra a dit : celui qui a l'opinion que la terre tend vers le lieu dans lequel elle est se trompe, car on ne saurait imaginer dans rien des lieux un état qui distingue ce lieu à l'exception d'un autre ; au contraire, si l'on imaginait tous les lieux vides, puis que la terre tout entière survenait dans l'un d'eux, n'importe lequel, il serait nécessaire qu'elle s'y tienne immobile sans se déplacer vers un autre lieu, car ce lieu et tous les autres sont sur un même pied. La cause du fait que, quand nous lançons la motte de terre vers un côté, elle revient du côté de la terre, est que la partie de tout élément tend vers toutes les parties de cet élément par soi, à la façon dont le semblable tend vers le semblable. Car si tu imagines les lieux vides, conformément à ce que nous avons dit, puis qu'on pose une partie de la terre dans un endroit de ce vide et le reste dans un autre endroit de lui, il sera nécessaire que la grande partie attire la petite ; si donc la terre était en deux moitiés et que chacune des deux moitiés était mise d'un côté différent, chacune tendrait également vers l'autre, en sorte qu'elles se rencontreraient au milieu. Bien plus, si on imaginait que toute la terre était élevée au niveau la sphère du soleil, puis qu'on lâchait de l'endroit où elle se trouve maintenant une pierre, cette pierre s'élèverait vers elle en raison du fait qu'elle tend vers la grande chose semblable.

On le voit, cette hypothèse est le contre-pied exact de celle d'Aristote, à ceci près que Thābit substitue le soleil à la lune du traité *Du ciel*.

Bien que, par certains aspects, Thābit semble n'opérer qu'un retour à une thèse pré-aristotélicienne, platonicienne en particulier (cf. *Timée* 63A-D et *infra*, p. 701), on décèle cependant dans son texte des échos indéniables de ses recherches statiques. La première expérience de pensée, qui consiste à éparpiller des fragments de terre dans l'espace vide et à postuler qu'ils se rejoindront tous en un certain point, associée à la seconde, où Thābit affirme que deux masses égales de terre à une certaine distance l'une de l'autre se rejoindront au point médian, laisse apercevoir l'idée statique de barycentre au fondement de la cosmologie de Thābit[28]. La chute des graves n'est aux yeux de Thābit qu'un *cas* illustrant cette loi d'attraction. L'idée présocratique d'une attirance du semblable par le semblable n'est donc qu'une partie de la théorie : car pour Thābit, non seulement la terre attirera la terre, mais l'intensité de l'attraction croîtra avec la masse des corps en jeu. Ce qui incite

---

référence toutefois au chercheur allemand). Voir aussi *A Commentary on Avicenâ's al-Ishârât wa al-Tanbîhât by Fakhr al-Dîn al-Râzî*, éd. A. Najafzâdâ, 2 vol., Téhéran, 2005, t. II, p. 128 qui confirme l'attribution à Thābit de cette théorie.

[28] Cf. M. Rashed, « Kalām e filosofia naturale », *Storia della scienza*, vol. III : *La civiltà islamica*, Rome, 2002, p. 49-72, p. 63-65.

à détacher cette théorie de son arrière-plan « psychologisant ». Quoi qu'il en soit, une chose ici nous importe : l'écho aristotélicien ne saurait être fortuit. Or, en choisissant la conclusion opposée à celle d'Aristote, Thābit refuse toute la théorie du lieu d'Aristote et le moteur « biologisant » de sa cosmologie. C'est donc encore une fois d'une critique ontologique qu'il s'agit, Thābit visant la construction élémentaire du sublunaire aristotélicien.

3. *Le temps*

Pas davantage que pour le lieu comme corps englobant, Thābit ne s'aventure à critiquer la *définition* du temps proposée par Aristote comme « nombre (ἀριθμός) du mouvement selon l'avant et l'après »[29]. Il est cependant très probable qu'il n'ignore pas la longue tradition, inaugurée par le Livre VIII du *De demonstratione* de Galien, des critiques à cette définition, visant son aspect tautologique et sa dépendance trop étroite de la cosmologie[30]. On peut de fait affirmer que le temps (χρόνος), pour Aristote, est toujours lié au mouvement (κίνησις) ayant lieu dans le sensible. Le Stagirite montre une certaine tendance à aligner son traitement du temps sur celui du lieu, au sens où le temps de quelque chose, d'une certaine manière, englobe ce quelque chose, à la façon dont le lieu de quelque chose englobait spatialement ce quelque chose[31]. C'est ce qui a conduit les commentateurs d'Aristote à affirmer que le temps et le mouvement se mesuraient l'un l'autre.

Une thèse différente apparaît dans le traité de Thābit sur l'infini. La discussion se noue autour de la question de la connaissance divine des particuliers. Selon Ibn Usayyid, la considération d'un événement tout d'abord comme futur, puis comme passé, implique nécessairement un changement dans l'état de notre science[32]. Pour Thābit en revanche, l'indexation temporelle « absolue » d'un événement fait partie du contenu « informatif » rattachable à cet événement, et ne varie pas lorsque de futur, cet événement devient passé. Dieu sait et, dans certains cas (comme celui de l'éclipse), nous savons, que tel événement commencera à tel moment, durera tel laps de temps, et finira à tel moment. En d'autres termes, le temps est un simple

[29] Cf. *Physique* Δ 11, 219b 1-2, 220a 24-25 etc.

[30] Voir la mise au point de R. Chiaradonna, « Il tempo misura del movimento ? Plotino e Aristotele (*Enn.* III 7 [45]) », dans M. Bonazzi et F. Trabattoni (éds), *Platone e la tradizione platonica*, Milan, 2003, p. 221-250.

[31] J'ai insisté sur la liaison des deux réseaux aporétiques dans la critique de Galien : cf. M. Rashed, « Alexandre d'Aphrodise et la *Magna Quaestio*. Rôle et indépendance des scholies dans la tradition byzantine du corpus aristotélicien », *Les études classiques*, 63, 1995, p. 295-351.

[32] « *Réponses* », § 5, p. 628.

axe, ontologiquement neutre, c'est-à-dire non déterminé par une réalité physique telle que le mouvement du ciel[33] :

> Il dit alors : si la connaissance que la chose aura lieu n'était pas auparavant dans le connaissant, puis se produit ultérieurement, il y aurait bien ma foi un changement en lui. Mais s'il n'a pas cessé de connaître que la chose aurait lieu, le moment où elle a lieu, l'état dans lequel elle se trouve, la durée de sa persistance, le moment de sa disparition et l'ensemble du temps dans sa totalité, ainsi que ce qui a lieu dans chacune de ses portions, alors le changement ne l'affecte pas en cela, du fait qu'il n'a jamais cessé de savoir que cette chose est et existe à tel moment du temps. De sorte que cette connaissance ne cesse en lui d'être dans un état unique, avant l'existence de la chose, pendant son existence et après son existence. Seules changent à son propos les expressions « existera » et « a existé », en raison de la chose en elle-même et non du connaissant. Notre proposition, seulement, qu'Il connaît que cette chose existera ou qu'elle a existé, voilà des relations entre la chose et le connaissant du point de vue du temps, tandis que la connaissance en elle-même est seulement que la chose est existante dans telle portion du temps. Si la chose fait l'objet d'une mise en relation antérieure à elle, il est dit qu'elle existera, tandis que si elle fait l'objet d'une mise en relation postérieure à elle, il est dit qu'elle a existé.
>
> Il dit : cela se passe comme cela, dans notre cas – pour ne rien dire de qui est au-dessus de nous – à propos de ce pour quoi nous possédons une connaissance antécédente. De fait, notre connaissance que le soleil se lèvera demain ne change pas, pour moi, après son lever, sous prétexte que nous acquérons alors la connaissance que le soleil s'est levé. Et, pour ce qui relève du chapitre de la connaissance, absolument aucune altération ne nous affecte sous ce rapport.

Une objection que se pose Thābit à lui-même confirme ce détachement du temps du mouvement. Quelqu'un en effet pourrait dire que considérer un événement dans tel ou tel temps est certes possible dans la majorité des cas, mais non si cet événement est lui-même un temps. Cette objection ne se comprend qu'en rapport à la doctrine aristotélicienne, selon laquelle justement le mouvement astral permet de bloquer la question du « temps du temps » à la racine. Thābit répond en disant qu'il suffit de modifier légèrement la définition du segment temporel, en y voyant non pas une structure contenant-contenu, mais une simple position dans un ordre de succession : le segment temporel n'est pas « dans le temps », mais il succède à un autre segment temporel[34] :

> Il dit : peut-être notre contradicteur dira-t-il : « cette rectification vous est permise dans le cas des choses qui se produisent dans le temps, mais que

[33] « *Réponses* », § 9-10, p. 630-632.
[34] « *Réponses* », § 11-12, p. 632.

direz-vous au sujet du temps lui-même ? Comment pourrez-vous dire, à propos de l'un de ses segments, qu'Il n'a jamais cessé de connaître qu'il est existant dans telle portion de temps, à la façon dont cela vous était permis dans le cas des choses qui ont lieu dans le temps ? ». Nous pouvons lui dire que si une telle chose est difficile dans le cas du segment de temps, nous pouvons le définir au moyen d'une autre définition. Nous disons donc : Il n'a cessé de connaître que ce segment de temps est existant à la suite de tel segment et de tel segment de temps. Cette proposition se substituera pour nous à l'autre.

Ce que nous disons au sujet de la connaissance a un équivalent dans le cas de la sensation. Car si nous observons une pierre qui tombe, nous la voyons une fois plus haut que nous, puis une fois au niveau de nos yeux, puis une fois plus bas que nous, sans que se produisent pour nous, dans ces états, des actes visuels différents, ni des objets vus différents. De même, notre connaissance de la pierre quand elle est plus haut que nous, puis à notre niveau, puis plus bas que nous a lieu sans que se produisent pour nous, dans ces états, des actes visuels différents, ni des objets vus différents. Pour cette raison, notre connaissance de la pierre quand elle est plus haut que nous, puis à notre niveau puis plus bas que nous est une connaissance unique. Rien d'elle ne se produit que nous ne possédions pas dès que nous avons vu la pierre tomber.

L'argumentation de Thābit conduit donc à renoncer à un temps ontologiquement nourri d'un mouvement réel, un temps donc qui possède un rythme fondé dans les choses mêmes, pour adopter un temps vide et « abstrait » : un axe linéaire où il n'y a de place que pour un rapport de succession entre événements, indépendamment de leur statut de mus.

4. *La structure logique du mouvement*

Au cinquième livre de la *Physique*, Aristote prend grand soin à établir qu'il n'y a pas de mouvement de mouvement. Cette affirmation exclut donc que l'on puisse conférer à l'accélération un autre statut que celui d'une qualité, dans le meilleur des cas. Cette impossibilité n'est d'ailleurs pas un handicap aux yeux d'Aristote, puisque justement sa théorie du mouvement exclut à la base l'idée d'une vitesse instantanée et ne conçoit le mouvement qu'en fonction de son aboutissement-accomplissement (*telos*). Il en va tout autrement pour Thābit, que ses modèles astronomiques obligent à accorder une place de plein droit aux phénomènes d'accélération et de décélération. On a ainsi conservé son traité *Ralentissement et accélération du mouvement <apparent d'un mobile> sur l'écliptique selon l'endroit où ce mouvement* *se produit sur l'excentrique*[35]. Ce changement de point de vue est rendu possible par l'abandon du référent substantialiste dans la formalisation du changement. Le jeu à trois termes aristotélicien (substrat, forme, privation) est remplacé par une simple observation du mouvement local phénoménalement décrit. Dire que la vitesse du mouvement change ne revient plus alors qu'à dire que certaines des mesures constitutives de ce mouvement observé varie, sans qu'il faille se prononcer sur l'attribution à la substance mobile d'un tel « mouvement » de son mouvement.

Le traité *Sur le ralentissement et l'accélération* montre, à l'aide d'une démonstration purement géométrique, qu'on peut concevoir le ralentissement et l'accélération du mouvement apparent d'un mobile sur l'écliptique et que « le mouvement le plus lent » et « le mouvement le plus rapide » se produisent *à* l'apogée et *au* périgée[36]. Thābit détermine les *points* de vitesse moyenne (les deux points de l'excentrique situés à un quart de cercle, par rapport au centre du monde où se tient l'observateur, depuis l'apogée ou le périgée) non pas, comme les *calculatores* latins, en usant de la coïncidence entre la vitesse au milieu d'une trajectoire uniformément accélérée et la vitesse moyenne, mais, ce qui n'a rien à voir, en faisant tendre vers zéro les arcs de mouvement apparent. Certes, il ne s'agit là que de mouvements célestes. La condition intrinsèque de cette première apparition de l'idée de vitesse ponctuelle appelle cependant déjà une reformulation du statut du continu.

5. *La continuité*

Thābit s'accorde bien sûr avec Aristote dans l'idée que le continu est infiniment divisible et, dans un passage cité par Abū Bakr Muḥammad ibn Zakariyyā al-Rāzī, paraît également admettre que l'unité du mouvement vient du fait qu'il est encadré par deux repos mais qu'il n'en contient en lui-même aucun[37] :

> Thābit ibn Qurra a prétendu que le mouvement du ciel est un mouvement unique qui n'a jamais cessé ni ne cessera jamais, et qu'il n'est *des* mouve-

[35] Cf. R. Morelon, *Thābit ibn Qurra. Œuvres d'astronomie*, Paris, 1987, p. 68-82 pour le texte arabe et la traduction. On lira l'analyse historique de la position de Thābit dans l'*Introduction*, p. LXXVII-LXXIX.

[36] La nouveauté de la position de Thābit apparaît bien si on compare ce texte avec la description du même mouvement excentrique décrit par Proclus dans son *Hypotypose des Hypothèses astronomiques* (cf. *Procli Diadochi Hypotyposis Astronomicarum Positionum*, éd. C. Manitius, Leipzig, 1909, 32.22-34.10) : le platonicien n'envisage jamais que la vitesse moyenne sur des arcs de cercle.

[37] Abu Bakr Mohammadi Filii Zachariæ Raghensis (Razis), *Opera philosophica fragmentaque quae supersunt*, coll. et ed. P. Kraus (Universitatis Fouadi I litterarum facultatis publicationum Fasc. 22), Le Caire, 1929, p. 129.

ments qu'en fonction de ce que nous imaginons et savons à son sujet. Et il a surtout dit cela pour éviter que ce mouvement tombe sous le coup du nombre en sorte d'être soit pair soit impair, car il y aurait eu là des questions qui l'auraient forcé à admettre la finitude. Et il a prétendu qu'il se produit toujours et que son appellation de mouvement (au singulier) provient du fait – dit-il – que c'est un mouvement éternel. Car comment y aurait-il *des* mouvements s'il n'y a pas de repos pour les distinguer ?

Toute la différence entre Thābit et Aristote tient dans le rapport du mouvement abstrait au mouvement concret qu'ils instaurent ou, plus exactement, à l'absence chez Aristote d'une théorie du mouvement abstrait, dictée encore une fois par les présupposés substantialistes de son ontologie. Il n'y a pour Aristote que des mouvements concrets, c'est-à-dire des mouvements où le mobile lui-même doit posséder une certaine étendue – donc n'être pas réduit à un point géométrique – pour pouvoir se mouvoir. L'idée d'Aristote est en effet la suivante : si le mobile était sans parties, l'idée même de la continuité et de la divisibilité du mouvement serait perdue, car le point auquel se résumerait le mobile serait d'abord à la position A, puis à la position B, sans que l'on puisse comprendre le processus sous-jacent au mouvement, *i. e.* le *passage* de A à B. En revanche, dès que le mobile est étendu, on peut admettre qu'une partie soit déjà en B, une autre encore en A, et que la question du passage se dilue dans une limite fluante et surtout potentielle traversant le mobile.

Le passage canonique d'Aristote est *Physique* Z 4, 234b 10-20[38]. Il a donné lieu à une grande controverse, à la fin de l'Antiquité et au Moyen-Âge, sur la possibilité du mouvement des âmes, assimilées à des points sans dimension. Tout semble commencer avec Alexandre d'Aphrodise qui, comme en témoigne un fragment de son commentaire perdu transmis par le *Paris Suppl. gr.* 643, utilise le texte d'Aristote contre les médio-platoniciens postulant selon lui la translation locale des âmes[39]. Simplicius lui répond dans son propre commentaire[40] et l'on trouve des traces de la discussion chez

[38] « Toute chose qui change doit être divisible. En effet, puisque tout changement se produit de quelque chose vers quelque chose et que ce qui change, quand il est dans ce vers quoi il devait changer, n'est plus en train de changer, et quand il est dans ce d'où il avait à changer, à la fois lui-même et toutes ses parties, n'est pas encore en train de changer (car ce qui demeure identique, lui-même et toutes ses parties, n'est pas en train de changer), il est donc nécessaire que l'une des parties de ce qui est en train de changer soit dans l'un des deux termes, et l'autre dans l'autre. Car elle ne peut être à la fois dans les deux ou dans aucune. Je veux dire par "ce vers quoi il est en train de changer" le premier dans le changement : par exemple, à partir de blanc, gris, non pas noir. Car il n'est pas nécessaire pour ce qui est en train de changer d'être dans l'un ou l'autre des extrêmes ».

[39] Cf. M. Rashed, « A "New" Text of Alexander on the Soul's Motion », dans R. Sorabji (éd.), *Aristotle and After*, Londres, 1997, p. 181-195.

[40] Simplicius, *In Phys.* 964.9-965.30.

Albert le Grand et ses successeurs latins[41]. Or Thābit, qui probablement connaissait le commentaire d'Alexandre, est néanmoins partisan de la translation des âmes, et ne semble guère inquiété par l'argumentation de l'Exégète. Voici du moins ce que nous en dit Avicenne dans un passage de la *Risālat al-aḍḥawiyya fī al-ma'ād*[42] :

> <Les partisans de la transmigration> se sont étonnés de Thābit ibn Qurra dans son affirmation que l'âme ne transmigre pas parce que si elle transmigrait, elle serait, durant la période où elle se trouverait entre les deux corps, déficiente, et qu'il n'y a pas de déficience dans la nature. Et cela interdit que l'âme soit déficiente durant un temps fini, mais nécessite que l'âme demeure déficiente durant un temps infini. Encore plus étonnant est son propos que se dissocie du corps un corps subtil qui ne ressemble pas aux corps, et qui ne se débarrasse pas de la matière d'un seul coup, mais après un moment. Ce corps n'est-il pas déficient ? Et quelle est la signification de ce corps subtil ? Sa subtilité provient-elle de ce qu'il serait diaphane ou dispersé lisse ? Et quoi qu'il soit, c'est un corps naturel, obligatoirement, support de l'âme, et il est donc animal ni rationnel ni non rationnel, ce qui est absurde.

Thābit s'oppose donc seulement à l'idée que l'âme puisse demeurer sans corps un moment – car, étant par définition la forme d'un corps, elle serait alors « déficiente » – mais non, comme les Péripatéticiens, à l'idée qu'un être sans partie (c'est-à-dire en fait un point) puisse se mouvoir. Le mouvement, rattaché au réel par Aristote, passe ainsi sous la juridiction d'un imaginaire bien fondé.

6. *La commensurabilité des mouvements*

Aristote tente de démontrer, au septième livre de la *Physique*, l'incommensurabilité des mouvements rectilignes et circulaires. Il paraît professer que le mouvement circulaire et le mouvement rectiligne ne sont pas homonymes, mais que la différence qui scinde leur genre commun suffit à affirmer

[41] Cf. Albertus Magnus, *Summa de creaturis*, Tract. IV, Quaest. 59 (*De motibus Angelorum*), éd. S.C.A. Borgnet, *Opera Omnia* XXXIV, Paris, 1895, p. 621-626 (je dois cette référence à M. Henryk Anzulewicz, Albertus-Magnus-Institut, Bonn, que je remercie vivement). J. Murdoch, « Infinity and Continuity », dans N. Kretzmann, A. Kenny, J. Pinborg (éds), *The Cambridge History of Later Medieval Philosophy*, Cambridge / Londres / New York, 1982, p. 564-591, p. 576, cite des auteurs plus tardifs mais ne mentionne pas Albert le Grand. Étant donné la présence d'une discussion identique dans le commentaire à la *Physique* d'Alexandre et de Simplicius, on pourrait légitimement supposer qu'Albert et, *via* celui-ci, les Latins postérieurs, ont eu accès à une source grecque ou arabe évoquant le mouvement de l'âme ou des anges dans le contexte de *Physique* Z.

[42] Cf. Avicenna, *Epistola sulla vita futura*, éd. F. Lucchetta, Padoue, 1969, p. 114-115.

leur incommensurabilité – et ce, même s'ils relèvent bien du même genre. Autrement dit, même si l'on peut repérer des différences de vitesse entre un mouvement circulaire *rectifié* et un mouvement rectiligne, on ne peut comparer la vitesse d'un mouvement circulaire *en tant que tel* et celle d'un mouvement rectiligne *en tant que tel.* C'est ce qu'Aristote veut dire en admettant l'homonymie de la « vitesse » attribuée à un mouvement rectiligne et à un mouvement circulaire.

Nous avons la chance d'avoir conservé un développement de Thābit sur les termes ambigus[43]. Dans son traité sur l'infini, il en propose en effet une classification sans équivalent dans la tradition péripatéticienne – grecque, arabe et latine. La méthode de Thābit consiste à se placer clairement à trois niveaux, celui de l'appellation, celui de la signification et celui de la dénotation. Rarement la distinction *Sinn-Bedeutung* a été aussi bien illustrée avant Frege. Ce fait apparaîtra d'autant plus clairement qu'on prendra la peine de comparer la description dépouillée de Thābit aux classifications luxuriantes des lecteurs d'Aristote et de Porphyre[44]. (1) Alors que Porphyre distingue cinq classes d'homonymes, l'une due au hasard et les quatre autres intentionnelles – à savoir : selon la ressemblance, selon l'analogie, à partir d'un terme, en direction d'un terme – Thābit les range toutes sous une description unique : le terme dénote des *items* différents dont les définitions sont différentes, comme, en arabe, *'ayn* signifiant « source » et « œil ». (2) La deuxième classe de Thābit contient tout terme dénotant des *items* inclus les uns dans les autres dont les définitions sont différentes, comme *différence* pour la différence, la différence propre et la différence la plus propre. Elle correspond en gros à ce que les commentateurs appellent « les noms qui se disent selon la généralité et la particularité ». (3) La troisième classe est la plus originale : lui appartient le terme dénotant des *items* identiques dont les définitions sont différentes. Elle ne correspond ni à la catégorie scolastique des polyonymes (une signification unique, plusieurs noms), ni à celle des homonymes (plusieurs significations, un seul nom), parce que dans ce cas, les trois moments terme/signification/dénotation ne peuvent être recouverts par la sémantique péripatéticienne. De manière révélatrice quant à ses motivations profondes, Thābit donne l'exemple de deux définitions différentes des arcs semblables. On pourra en choisir une et démontrer que l'autre renvoie à tous les objets auxquels renvoie la première et à eux seuls. Les cas de ce type sont nombreux, précise Thābit, en géométrie et dans les autres

[43] Cf. « *Réponses* », § 23, p. 638-640.

[44] Voir la synthèse proposée par A. Hasnawi, « Réflexions sur la terminologie logique de Maïmonide et son contexte farabien : le *Guide des perplexes* et le *Traité de logique* », dans T. Lévy et R. Rashed (éds), *Maïmonide Philosophe et Savant*, Louvain, 2004, p. 39-78, p. 62-68.

branches des mathématiques[45]. On se rappelle que pour Aristote, la définition, à la différence du propre, est unique, parce qu'elle est « la formule de l'essence » et que l'essence est bien évidemment unique[46]. Le troisième cas discuté par Thābit ne pouvait donc pas prendre place dans une réflexion se plaçant sous le patronage du Stagirite.

Ainsi, la classification des termes ambigus proposée par Thābit, entre autres éléments qui la séparent de celle des philosophes anciens, s'en distingue par le peu d'importance qu'elle accorde au statut ontologique des *items* auxquels se rapportent les termes. Ce ne sont rien d'autres que des choses, des objets, et non des êtres au sens fort. C'est ce qui explique que la catégorie aristotélicienne des synonymes passe à la trappe, puisque l'« animal » qu'est le cheval et l'« animal » qu'est le chien sont une seule et même chose, ce à quoi renvoie la définition de l'animal : il n'est pas nécessaire de descendre au niveau des sujets premiers (substances premières ou secondes) des attributions pour déployer ensuite à partir d'elles la structure des attributions. Car il n'y a pas là deux « animaux », mais un seul. Ce platonisme logicisant est corroboré par le troisième exemple, celui des « arcs semblables », puisque l'*item* en question est non seulement mathématique, mais qu'il est même constitué par le couplage d'au moins deux objets mathématiques, les arcs reliés par la relation « être semblable à ». On comprend donc comment Thābit devait lire un texte comme celui de *Physique* H 4 : comme imposant à la seule appréhension légitime de l'homonymie, celle de la syntaxe, des considérations sémantiques hors de propos dictées par un cadastre substantialiste : si l'on définit la vitesse comme un certain espace parcouru, alors il n'y a pas lieu de déclarer incomparables la vitesse d'un mobile sur un cercle et celle d'un mobile sur une droite. Car l'*objet* pris en considération ne doit pas nécessairement être la *substance* en déplacement, mais peut tout à fait être la vitesse en tant que telle, même s'il ne s'agit que d'une relation.

C'est justement que la classification implicite d'Aristote aboutissait à un problème dès qu'il s'agissait de définir le statut exact des attributs par soi des genres subsumant plusieurs espèces. On peut, par exemple, affirmer que toute couleur est susceptible d'être plus ou moins claire ; en revanche, on ne peut affirmer qu'un rouge est plus clair qu'un bleu, parce que rouge et bleu ressortissent à deux espèces différentes. Bien qu'Aristote ne le dise pas, on ira jusqu'à affirmer que c'est cette incomparabilité des attributs par soi du genre qui fonde la distinction des espèces. Pourquoi Aristote ne le dit-il pas explicitement ? Parce qu'il est en train, dans la *Physique*, de défendre la non-appartenance du mouvement circulaire et du mouvement rectiligne à

[45] Cf. « *Réponses* », § 31, p. 645.

[46] Cf. Aristote, *Topiques* Z 4, 141a 35-b 1, H 4, 154a 31-32, *Métaphysique* Z 12.

une espèce unique « déplacement ». Or s'il s'avérait que tous les attributs par soi du mouvement, appliqués à ces deux déplacements, ne s'opposent jamais à leur comparaison réciproque, il n'y aurait finalement plus aucun critère valable pour séparer mouvement circulaire et rectiligne. L'exigence d'y voir deux espèces de déplacement excède, chez Aristote, une simple considération des attributs géométriques de la droite et du cercle. Elle s'enracine plutôt dans un réseau esthético-symbolique, confirmé par la cosmologie.

Cette théorie formelle, résolument non ontologisante, de l'ambiguïté, défendue par Thābit, trouve sa mise en pratique effective dans un texte perdu, cité par al-Ṣāghānī, consacré aux distances astrales, dont on doit la découverte à Régis Morelon[47]. Thābit tente d'apprécier la vitesse du déplacement circulaire de la sphère des fixes en la comparant à la vitesse moyenne du pas moyen d'un animal. On échappe à l'homonymie pour se retrouver dans le cas non pas de la synonymie au sens aristotélicien – puisque ce serait encore trop accorder à la différence des substrats – mais de l'identité foncière de l'*item* considéré (la *vitesse*). La vitesse, en tant que telle, relève d'une catégorie parfaitement unitaire, que l'on peut considérer abstraitement des objets mus.

Mais là aussi, pour mieux saisir la position exacte de Thābit dans l'histoire du problème, il faut revenir aux discussions de la tradition aristotélicienne. Les commentateurs grecs d'Aristote voyaient en effet une véritable aporie dans la question de la vitesse des sphères célestes. Le point de départ est la phrase de la *Physique* où se trouve affirmé que « tout mobile peut se mouvoir plus rapidement et plus lentement » (πᾶν δὲ τὸ κινούμενον ἐνδέχεται καὶ θᾶττον κινεῖσθαι καὶ βραδύτερον)[48]. Cette phrase, dès lors qu'elle était rapportée au mouvement des astres, posait cependant un problème, qui n'a pas échappé à Alexandre. Voici ce que nous en dit Simplicius[49] :

> Alexandre se pose à bon droit le problème suivant : « comment est-il vrai que le corps mû circulairement, bien qu'il se meuve de manière régulière, *puisse* se mouvoir plus rapidement et plus lentement ? ». La première solution qu'il donne est à mon avis assez lâche : il dit qu'Aristote « n'a pas dit que la même chose se meut, mais qu'elle peut se mouvoir plus rapidement et plus lentement, ce qui d'après lui s'applique également au corps mû circulairement, du fait qu'il se meut ainsi par volonté propre et non de manière imposée ou sous prétexte qu'autre chose l'empêcherait de se mouvoir autrement. Car ce n'est pas non plus parce qu'ils en sont dans la nécessité,

[47] « Ṯābit b. Qurra and Arab Astronomy in the 9th Century », *Arabic Sciences and Philosophy*, 4, 2004, p. 129-130.

[48] *Phys.* Z 2, 232b 21-22.

[49] Simplicius, *In Phys.* 941.21-942.2. Cf. Averroes, *In Phys.* 255I-256A.

dit-il, que les gens de bien accomplissent de bonnes actions ; et même si celles qu'ils accomplissent sont toujours bonnes, ils ont malgré tout la puissance des opposés ».

Cette comparaison des êtres divins avec les « gens de bien » ne convainc pas Simplicius. Si en effet ceux-ci pèchent parfois et donnent donc un sens à la puissance des contraires[50], ceux-là, en revanche, ne changent *jamais* de vitesse. Quel sens peut-il y avoir dans ce cas à parler de puissance du plus et du moins ? La solution de Simplicius est la suivante : de même que la nécessité est double, l'une positive, à laquelle les êtres divins se conforment d'eux-mêmes, et l'autre qui contraint des êtres récalcitrants, de même la puissance sera double : l'une achevée, et l'autre inachevée, et pour ainsi dire en puissance. Alexandre ne ferait donc ensuite que gloser cette *dunamis* qui n'est pas une puissance, mais une simple potentialité[51] :

> Il élucide ensuite bien la puissance au sens de potentialité, en disant que « le mouvement a le même intervalle que la grandeur sur laquelle il a lieu. Donc l'intervalle du mouvement qui se produit sur un stade ou sur un degré du zodiaque peut être parcouru par ce qui va plus vite ou plus lentement, dans moins ou plus de temps ».

Il n'est guère besoin d'insister sur les motivations théologiques d'une telle discussion. Pour Simplicius, lorsqu'Aristote dit que les astres *peuvent* aller plus vite ou plus lentement, il ne fait que souligner la suréminence de leur puissance positive tout entière dirigée vers une régularité parfaite. En revanche, des mobiles de rang ontologique inférieur peuvent, en tant que mobiles, être contraints d'aller plus ou moins vite. En d'autres termes : si un mobile sublunaire était placé sur le zodiaque, on pourrait le contraindre à se déplacer à plus ou moins grande vitesse. Mais il ne s'agit là que d'une expérience de pensée parfaitement gratuite. Car ce sont les êtres divins qui sont à cet endroit, dont la puissance est une force suréminente, non une potentialité marquée au sceau de l'imperfection.

Nous ne nous sommes un peu attardé sur ce débat que pour mieux faire saisir le dépouillement presque barbare de la position de Thābit, qui vide *de facto* le problème de tout enjeu théologique. Voici le texte d'al-Ṣāghānī[52] :

> Thābit mentionne qu'il a trouvé par expérience que la vitesse moyenne du trot des chameaux, chaque fois que les étoiles fixes parcourent un degré, est mille coudées. Si un chameau au trot fait mille coudées en quatre cent cinquante pas – car un pas fait à peu près deux coudées un quart –, la

[50] Sur la puissance des contraires, cf. D. Lefebvre, « Comment bien définir une puissance ? Sur la notion de puissance des contraires (Aristote, Métaphysique, Θ 2) », *Philosophie antique* 3, 2003, p. 121-144.

[51] Simplicius, *In Phys.* 942.14-18.

[52] Morelon, « Arab Astronomy », p. 130.

distance que les étoiles fixes parcourent durant un pas de chameau est de 2490 milles.

On remarque la proximité de la situation décrite par Thābit avec le texte de Simplicius : il s'agit dans les deux cas de la vitesse d'un mouvement parcourant un degré de la circonférence céleste. Les divergences n'en sont que plus criantes : Thābit a négligé la discussion sur le problème des différentes acceptions de la puissance et sur l'ontologie des contraires qu'elle présuppose. Plus grave : il ne rappelle même pas ce que ce rapprochement entre vitesse céleste et terrestre peut avoir de choquant, voire d'absurde, pour ses prédécesseurs. En somme, c'est tout le débat entre aristotéliciens et néoplatoniciens qu'il efface par un calcul[53].

[53] Un peu plus haut dans son traité, al-Ṣāghānī avait attribué à Thābit une série de valeurs pour les distances cosmiques et les tailles des astres. Il est certain qu'il ne cite pas l'*Almageste simplifié* mais un autre traité cosmologique, aujourd'hui perdu, où les données numériques étaient plus précises. Présentons les différentes données dans un tableau :

	Ptolémée, *Livre des Hypothèses*	Thābit, *Almageste simplifié*	Thābit cité par Ṣāghānī
Distance Terre-			
Lune	33	Environ 33	33 + 1/2 + 1/10 (= 106 721 m.)
Mercure	64	Environ 64	64 + 1/6 (= 205 825 m.)
Vénus	166	166	166 (= 532 445 m.)
Soleil	1079	Environ 1079	1079 (= 3 406 890 m.)
Mars	1260	1260	1260 (= 4 041 480 m.)
Jupiter	8820	8820	8820 (= 28 290 150 m.)
Saturne	14187	14187	14188 + 2/3 (= 45 510 241 m.)
sphère des fixes	19865	19865	19864 + 1/6 (= 63 714 339 m.)
Taille :			
Soleil	166 + 1/3	Environ 166	166 + 1/4 + 1/8
Lune	1/40	1/40	1/ (39 + 1/4)
Saturne	79 + 1/2	Environ 79	79 + 1/2
Jupiter	82 + 1/2 + 1/4 + 1/20	Environ 82	81 + 1/2 +1/4
Mars	1 + 1/2	1 + 1/2	1 + 1/2
Vénus	1/44	1/37	1/44
Mercure	1/19683	1/19683	†1/12000† (peut-être faut-il lire 1/20000)

7. *Le Premier Moteur*

On ne se plongera bien entendu pas ici dans une synthèse, nécessairement illusoire, des nombreux problèmes suscités par la théorie aristotélicienne du Premier Moteur. Notons seulement qu'un ensemble des caractéristiques du Moteur immobile (éternité, immutabilité, unicité) s'explique *pour nous* par celles de la sphère des fixes qu'il met en mouvement (mouvement éternel, régulier, simple). En retour, l'homogénéité absolue du Premier Moteur explique la nécessité d'un mouvement céleste un et continu. Car s'il y avait des interruptions dans le mouvement cosmique, il faudrait alors un principe supérieur au Premier Moteur expliquant le retour au mouvement après la période (ou même l'instant) de repos. Il y a donc une liaison intrinsèque, dans la cosmologie aristotélicienne, entre la continuité et l'unicité du mouvement circulaire et la causalité du Premier Moteur. Supposons en effet un mouvement rectiligne continu. Celui-ci nécessiterait soit un univers infini – ce qui n'est pas le cas – soit qu'il n'y ait pas d'instant d'arrêt entre deux mouvements rectilignes de même direction et de sens contraire – ce qui n'est pas non plus le cas selon Aristote.

Si donc on admet la finitude de l'univers et l'arrêt du mobile entre tout couple de mouvements de sens opposé, seule la circularité du mouvement permet d'accréditer la théorie aristotélicienne du Premier Moteur. Dès lors en revanche que l'on nie la *quies media*, les mouvements circulaires perdent leur propriété fondamentale d'être les seuls déplacements simples continus. Bien sûr, le mouvement circulaire l'emporte sur le mouvement rectiligne brisé, même continu, en raison de sa plus grande simplicité, qui paraît mieux refléter celle du Premier Moteur. Mais il n'y a plus là que des analogies assez vagues, et le seul critère véritablement cinétique d'Aristote, celui de la continuité, a disparu.

Il est dès lors remarquable que Thābit ait rédigé un traité malheureusement perdu contre la *quies media*, préfigurant ainsi dès le IX^e siècle un

---

Le principe de parcimonie suggère que ces données et le calcul de la vitesse de la sphère des fixes qui les suit immédiatement sont des éléments puisés par al-Ṣāghānī à une même œuvre, aujourd'hui perdue, de Thābit. Ce dernier y aurait proposé des valeurs plus précises que dans l'*Almageste simplifié* et il aurait également indiqué une méthode et son résultat pour déterminer la vitesse du ciel. Notons qu'un texte préservé dans le BN Ar. 4821, fol. 82^{r-v} (cf. R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, t. III, Londres, 2000, p. 649-653, en part. p. 652 [n° 13]), présenté comme une traduction par Yaḥyā ibn 'Adī d'un opuscule rédigé originellement en syriaque, constitue une évidente adaptation de l'argument de Thābit. Voir aussi Fakhr al-Dīn al-Rāzī, *Kitāb Ma'ālim Uṣūl al-Dīn*, éd. S. Dughaym, Beyrouth, 1992, p. 79-80 : « Il a été établi en géométrie qu'entre le temps où le cheval au trot rapide lève la patte et celui où il la repose, la plus grande sphère parcourt 3000 lieues ; c'est donc qu'un mouvement aussi rapide est possible ». Avons-nous là des vestiges du traité perdu de Thābit *Sur le cosmos* (*Fī al-hay'a*) ?

engagement mathématico-physique anti-aristotélicien, illustré un siècle plus tard par al-Qūhī puis par les prédécesseurs italiens de Galilée[54]. On peut reconstituer le titre comme suit : *Kitāb fī nafyi wujūb sukūnin bayna ḥarakatayn mutaḍāddatayn*, « Livre de la réfutation de la nécessité d'un repos entre deux mouvements opposés »[55]. Le titre transmis par al-Qifṭī, *Kitāb fi sukūn bayna ḥarakatay al-shiryān*, « Livre au sujet d'un repos entre les deux mouvements de l'artère »[56] est non seulement maladroit (on attendrait *fī* al-*sukūn* ...) mais, pour tout dire, absurde : on ne voit pas pourquoi il serait question de deux mouvements *de l'artère* ni comment, à supposer même qu'on désigne ainsi fort maladroitement son *battement*, un auteur pourrait se mettre en tête d'établir ou de réfuter l'existence d'un repos intermédiaire entre deux pulsations. En outre, alors qu'on comprend immédiatement que Thābit ait pu vouloir taquiner al-Kindī[57] en attaquant une thèse aristotélicienne d'une telle importance, puis, pour la même raison, qu'Ibn Karnīb ait à son tour pris position sur la question contre Thābit, autant il est invraisemblable qu'une telle polémique ait réuni ces grands esprits autour du repos prenant prétendument place dans le mouvement des artères. C'est de la *quies media* qu'il s'agissait. Il apparaîtra d'autant moins probable que Thābit le fasse innocemment que dans son exposition de la *Métaphysique* d'Aristote, il interprète clairement la « théologie » d'Aristote dans le sens d'un système du monde, le Premier Moteur étant avant tout le principe au fondement du mouvement local[58].

Nous avons d'ailleurs la preuve, dans un texte jusqu'ici peu exploité – les *Questions* (*Masā'il*) du philosophe kindien du X^e siècle al-Isfizārī[59] –,

[54] Cf. R. Rashed, « Al-Qūhī *vs* Aristotle : on Motion », *Arabic Sciences and Philosophy*, 9, 1999, p. 7-24.

[55] Les éditions du *Fihrist* citent le titre sous la forme fautive *wujūb wujūd sukūnayn* etc. Il ne s'agit à l'évidence que d'une erreur paléographique due aux duels apparaissant immédiatement ensuite.

[56] Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, éd. J. Lippert, Leipzig, 1903, p. 116. Le commentaire sur ce traité porté par al-Muḥassin est intéressant : « Il a composé ce livre en syriaque car il y répondait à mots couverts à al-Kindī. Un élève à lui l'a traduit en arabe, du nom de ʿĪsā ibn Usayyid al-Naṣrānī, Thābit en a corrigé l'arabe. Certains disent que le traducteur de ce livre fut Ḥubaysh ibn al-Ḥasan al-Aʿsam. C'est erroné. Abū Aḥmad al-Ḥusayn ibn Isḥāq, communément appelé Ibn Karnīb, a répondu à ce livre de Thābit après le décès de Thābit, sans rien d'utile ni de bien marquant. Il avait envoyé ce livre, après sa composition, à Isḥāq ibn Ḥunayn, qui s'en était grandement émerveillé, écrivant à la fin de l'exemplaire, de sa propre main, pour louer Abū al-Ḥasan Thābit, le complimenter et lui souhaiter tout le bien ».

[57] Cf. note précédente.

[58] Voir Reisman et Bertolacci, « Thābit Ibn Qurra's *Concise Exposition of Aristotle's Metaphysics* ».

[59] Ces questions sont éditées par D. Gimaret, « Un traité théologique du philosophe musulman Abū Ḥāmid al-Isfizārī », *Mélanges de l'Université Saint-Joseph*, 50, 1984,

que Thābit ne croyait pas au caractère contraignant de la prétendue démonstration aristotélicienne. Dans sa *Question* n° 8, l'auteur s'interroge implicitement sur la contradiction entre le *De caelo* d'Aristote, qui ne mentionne pas le Premier Moteur immobile et qui paraît expliquer le mouvement des astres par une cause qui leur serait purement interne, et la théorie du Premier Moteur de *Physique* Θ[60]. Al-Isfizārī commence par réfuter le modèle du *De caelo*, en arguant du fait que les sphères célestes ne peuvent être mues ni par une « nature », ni par une « âme ». Il reste donc qu'elles soient mues par un moteur *externe*. C'est, souligne-t-il, la thèse de Ptolémée au début de l'*Almageste*. Al-Isfizārī suggère alors que c'est également la doctrine à laquelle s'est rangé Thābit « dans son livre des *Questions* » (*fī kitābihi fī al-masā'il*)[61]. Voici une traduction du passage[62] :

> C'est aussi ce à quoi Thābit ibn Qurra de Ḥarrān a incliné. Voici ce qu'il a littéralement dit dans son livre des *Questions* : « je ne montre pas, dans le présent développement, que l'agent de cet acte est un corps ou bien un incorporel, et je ne me soucie pas, eu égard à mon objectif, de savoir ce qu'il en est de ce point-là, car je ne cherche qu'à montrer que le monde possède quelque chose d'antérieur à toutes les causes du monde et qui les lie[63]. Quant à la preuve qu'il s'agit d'un corps ou d'un incorporel, elle requiert un autre développement ». Et il a dit : « Cet acte ne peut pas ne pas être dû ou bien à un agent incorporel et insensible, par lequel ces planètes se meuvent en un sens contraire à leur mouvement propre[64], ou bien à une sphère

---

p. 209-252, sur la seule base du manuscrit d'Istanbul Ragıp Pasha 1463. Il faut aussi prendre en compte le manuscrit de Damas Ẓāhiriyya 4871. Cf. D. Reisman, « Plato's *Republic* in Arabic : A Newly Discovered Passage », *Arabic Sciences and Philosophy*, 14, 2004, p. 276-279 ainsi que *id.*, « An Obscure Neoplatonist of the Fourth/Tenth Century and the Putative Philoponus Source », dans P. Adamson (éd.), *In the Age of al-Fārābī : Arabic Philosophy in the Fourth/Tenth Century*, Londres / Turin, 2008, p. 239-264.

[60] Traduction anglaise dans Reisman, « An Obscure Neoplatonist », p. 255-257.

[61] Le seul titre approchant, dans la bibliographie connue de Thābit, est celui des « Questions pour donner le désir des sciences », *al-Masā'il al-mushawwiqa ilā al-'ulūm*. Mais le passage que l'on va traduire ici n'apparaît dans aucun des deux témoins conservés, Téhéran Malik 6188 et Rampur II 808.

[62] Pour le texte arabe, voir Gimaret, « Un traité théologique », p. 223, que j'ai collationné avec l'exemplaire de la Ẓāhiriyya, fol. 136v-137 (où le début de la citation est presque illisible ; la partie lisible se distingue par quelques divergences, dont une seule importe à la signification du passage, cf. *infra*, n. 65). Traduction anglaise de Reisman, « An Obscure Neoplatonist », p. 257.

[63] Cette proposition causale (depuis « car je ne cherche ... », qui énonce le but de Thābit, bien que présente dans les deux témoins manuscrits, est sautée par Reisman, « An Obscure Neoplatonist », ce qui rend l'ensemble du développement, dans sa traduction anglaise, assez abscons.

[64] Reisman, « An Obscure Neoplatonist », traduit *al-khāṣṣa lahā* par « their own unique », ce qui confine au contresens. Il s'agit bien sûr du mouvement *propre* de

– la plus haute des sphères – qui se livre à cet acte en vertu d'une âme qui lui est inhérente, et[65] il est alors dû à une substance insensible qui le produit en une sphère – la plus haute des sphères – par voie de mouvement, de telle sorte que le mouvement de tout ce qui est à l'intérieur d'elle suive son mouvement à elle[66] ». Et il a dit : « Et l'on a là, selon moi, la plus vraisemblable des divisions[67] ». Voilà le propos de Thābit ibn Qurra de Ḥarrān.

Force est pourtant de constater que la citation de Thābit faite par al-Isfizārī prouve que celui-là disait le contraire de la thèse que celui-ci lui attribue. Loin d'admettre l'existence d'un Premier Moteur du type de celui de *Physique* Θ, Thābit a délibérément laissé la question ouverte : la cause du mouvement des corps célestes peut être soit un moteur externe incorporel mouvant chaque sphère céleste, soit la sphère la plus englobante, elle-même mue par une âme. Encore ne s'agit-il pas là d'une division parfaitement exhaustive et assurée, mais de celle qui n'apparaît à Thābit que « la plus vraisemblable ». Il semble donc à peu près certain que l'aporie au *départ* de la *Question* 8 d'al-Isfizārī était le point d'*arrivée* de Thābit dans ses propres *Questions*. Thābit, après avoir instruit le problème cosmologique

---

chaque planète d'Ouest en Est – le mouvement annuel du soleil sur l'écliptique par exemple –, qui est contraire au mouvement d'Est en Ouest du Tout – dont participe le mouvement diurne du soleil. Ce qui explique, par symétrie de la relation de contrariété, que le mouvement du Tout soit dit ici « contraire » à celui des planètes.

65 On a la conjonction « et » (*wa*) chez Gimaret, tantis que l'on trouve la disjonction « ou » (*aw*) dans le manuscrit de la Ẓāhiriyya, que Reisman, « An Obscure Neoplatonist », paraît suivre, sans cependant signaler cette importante divergence. Je préfère, en l'état, conserver le texte édité, car l'énoncé de cette nouvelle hypothèse serait bancal. L'âme, pour Thābit, est en effet, sinon incorporelle, du moins, comme il est dit ici, insensible (c'est-à-dire imperceptible aux sens), il y aurait donc quelque chose de très maladroit à opposer la seconde branche à la prétendue troisième. Cette dernière, en d'autres termes, ne fait que développer la seconde, en explicitant la situation en jeu : l'âme qui meut la sphère des fixes sera la réalité insensible (mais pas forcément incorporelle, à la différence du Premier Moteur séparé de la première branche de l'alternative) qui, par l'intermédiaire de ce mouvement, meut les autres sphères. On remarquera de plus que le *wa* est suivi d'un *yakūnu*, ce qui n'était pas le cas après le *aw* de l'alternative à la ligne précédente.

66 Il faut évidemment vocaliser : *fa-yatba'u ḥarakatahu ḥarakatu kulli mā fī dākhilihi*. Reisman, « An Obscure Neoplatonist », en traduisant « and then its motion follows the motion of everything in its interior », présuppose *fa-yatba'u ḥarakatuhu ḥarakata kulli mā fī dākhilihi*.

67 Et non pas « the most likely divisions » (cf. Reisman, « An Obscure Neoplatonist »). En d'autres contextes, cette nuance pourrait ne faire aucune différence. Ici, elle est importante, car le pluriel au lieu du duel pourrait sembler un argument contre une alternative double (avec *wa*) et non triple (avec *aw*) dans le développement qui précède, si l'on ne voit pas que Thābit désigne par « divisions » non pas les branches des arbres classificatoires, mais ces arbres eux-mêmes (qui peuvent être, comme le plus « vraisemblable » d'entre eux, réduits à *deux* branches).

fondamental de l'aristotélisme et souligné (au moins implicitement) la tension entre le *De caelo* et la *Physique*, aurait conclu à l'impossibilité de trancher démonstrativement entre les deux doctrines. Si, par conséquent, Thābit se rapproche ici d'un texte antique, c'est davantage des apories de Théophraste à l'encontre du Premier Moteur (le texte communément appelé « Métaphysique », et traduit en arabe) que des preuves aristotéliciennes de *Physique* Θ ou *Métaphysique* Λ 7. Comme Théophraste, Thābit part de l'évidence d'une connexion (cf. *rābiṭ*) des causes de l'univers, mais revendique de suspendre son jugement sur la question de la nature exacte de cette connexion.

En conclusion : de *Physique* Θ, Thābit ne recevait ni la cinématique (doctrine de la *quies media*) ni la dynamique (doctrine de la causalité externe du mouvement de la première sphère).

II. THĀBIT IBN QURRA ET LE MEILLEUR DES MONDES

Il convient de dire un mot sur la question du finalisme qui, sans être à proprement parler partie intégrante d'une théorie du mouvement, est néanmoins envisagée par Aristote dans le cadre de sa physique. Il est particulièrement frappant que plusieurs fragments d'origine très différente mettent en œuvre un même type d'argumentation physique, qui constitue une variation sur l'idée, énoncée dans le *Timée* de Platon, que les productions naturelles sont le fruit d'une imbrication du principe du Bien et de celui de nécessité. À trois reprises, Thābit explique que la sphère, qui représente la perfection dans l'ordre des figures, doit être soumise à une certaine déformation pour permettre un maximum de bien dans une structure donnée : cette exigence explique l'attraction *universelle* (et pas seulement élémentaire) ; la forme hexagonale des cellules des abeilles ; la forme montagneuse de la terre et la salinité de la mer.

1. *L'attraction universelle*

Dans son texte sur le lieu cité par Fakhr al-Dīn al-Rāzī, Thābit, après avoir présenté son idée d'attraction des corps homogènes les uns par les autres et expliqué ainsi la forme sphérique de la terre, se demande comment il se fait qu'il n'y ait pas quatre sphères élémentaires dans l'univers. La raison, nous dit-il, est l'*horror vacui* éprouvée par la nature (*al-ṭabīʿa*) : quatre sphères tangentes impliquant nécessairement des interstices vides entre elles, la nature a préféré contrebalancer l'attraction exclusive propre à chaque parcelle élémentaire pour le corps homogène par une attraction plus générale, où les corps en tant (simplement) que corps s'attirent tous, quoiqu'à un moindre degré, les uns les autres[68] :

> Il a dit : parce que toute partie tend vers toutes les parties de terre uniformément, et puisqu'il est impossible qu'une seule partie rencontre toutes les parties, il s'ensuit nécessairement qu'elle tend à ce que la proximité de toutes les parties soit une proximité unique, égale, ce qui revient à tendre vers le milieu. En outre, toutes les parties font cela par nature. S'ensuit donc la forme arrondie de la terre et sa sphéricité : chacune de ses parties tend vers le centre jusqu'à ce que s'égalise sa proximité de l'ensemble.
>
> Puis il s'est posé à lui-même des questions, auxquelles il a répondu :
>
> – La première question est qu'il faudra faire un raisonnement semblable pour les parties de chacun des éléments, en sorte que chacun d'eux sera une sphère compacte. Il a répondu que s'il n'existait pas un empêchement, la chose en irait ainsi. Et ce qui montre cet empêchement est ceci : les corps divers sont égaux quant à leur corporéité. Dès lors, leur propriété de tendre les uns vers les autres en raison de cette similitude *est* cette propriété des parties de l'élément unique de tendre les unes vers les autres. Et pour cette raison, le vide est impossible entre les corps, et leurs surfaces coïncident. Par conséquent, il y a là deux choses qui se contredisent, l'une étant l'attraction à soi par toute partie de l'élément unique de toutes les parties de cet élément, en sorte que tout élément devienne une sphère compacte, et l'autre qu'il n'en aille pas ainsi. Or de la première éventualité, il suit deux conséquences fâcheuses, la première étant le vide, du fait qu'il doit nécessairement y avoir, entre les deux sphères séparées, une fois en contact, un vide ; la seconde, que l'attraction produite par certains éléments sur d'autres en raison du fait qu'ils ont en commun la corporéité pure et simple serait sans efficace.
>
> Or puisque s'ensuivaient de cette situation ces deux conséquences fâcheuses, la nature s'est détournée de cette situation et elle a fait ce qui était le plus proche de la conciliation entre ces deux choses, c'est-à-dire qu'elle a réuni les parties de chaque élément dans son unicité en raison de ce qui unit ces parties en fait de ressemblance, puis elle a circonscrit l'un à l'autre en raison de ce qui unit ces éléments en fait de ressemblance du point de vue de la corporéité et afin qu'il n'y ait pas là de vide. Au surplus, le plus parfait des éléments, en ce sens, est le plus proche du centre, car lorsqu'il se trouve plus proche du centre, il est plus proche, quant à son rapport, de tous les corps. Mais comme il était nécessaire que ces corps se circonscrivent les uns les autres, pour les raisons que nous avons mentionnées, il s'est produit que certains de ces corps se sont trouvés extrêmement éloignés de certains autres.

On peut noter, en confirmation de ce refus de Thābit, que Maïmonide, dans le *Guide des égarés*, argumente contre le vide en faisant

[68] *Al-Mabāḥith al-Mashriqiyya*, vol. II, p. 64-65.

fond sur les recherches pneumatiques des Banū Mūsā[69]. C'est donc là probablement une thèse partagée par Thābit et par ses maîtres, appuyée sur toute une catégorie de phénomènes physiques semblant réfuter le vide. Le plus important pour nous n'est cependant pas là, mais réside dans la réinterprétation en termes à la fois géométriques et statiques de la théorie des lieux naturels qui était celle de Platon. Plus philologiquement, Thābit a dû être sensible à la façon dont la réflexion platonicienne, dans le *Timée*, expliquait le mouvement naturel par l'attraction du même par le même. Voici en effet ce qu'écrivait Platon (*Timée*, 63B-D, je traduis) :

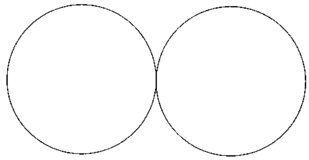
> Si quelqu'un, dans le lieu du Tout où est primordialement échue la nature du feu, là où pourrait bien se trouver sous forme hautement condensée ce vers quoi il se porte, après s'être juché là-bas, et doué de la capacité d'agir ainsi, parvenait à se tenir debout en ôtant des parties du feu pour les placer sur les plateaux d'une balance, il est clair que, luttant pour soulever le fléau et tirer le feu vers l'air dissemblable, il luttera plus facilement pour contraindre le petit que le plus grand. Si de fait, d'un même élan, deux corps sont jetés simultanément en l'air, il est nécessaire, sans doute, qu'au moment de l'impulsion, le plus petit cède davantage, le plus grand dans une moindre mesure, à la contrainte, et que l'abondant soit appelé « lourd » et en transport vers « le bas », tandis que le petit soit appelé « léger » et en transport vers « le haut ». C'est précisément à cette opération qu'il faut se rendre compte que nous nous livrons en ce lieu qui est le nôtre. Lorsqu'en effet, nous qui foulons la terre, nous en séparons des lignées terreuses, et parfois de la terre elle-même, c'est par contrainte et de manière contre nature que nous les tirons vers l'air qui leur est dissemblable, ces deux corps qui tendent vers celui de même lignée, et que le plus petit, qui s'offre plus aisément que le plus grand à la contrainte que nous exerçons en direction du corps dissemblable, y cède en premier.

On voit immédiatement que ce passage de Platon est la source immédiate, et sans doute directe, de la théorie de Thābit. La mention de la « balance » ne pouvait qu'alerter le spécialiste de statique archimédienne qu'était ce dernier. Ces points communs rendent les différences entre les deux textes encore plus sensibles. Le mathématicien reformule en effet le passage du *Timée* en y introduisant des considérations dictées par une idée très exigeante de compossibilité et de meilleur des mondes. Plus précisément, le cercle devient, en soi et pour soi, une perfection – évidemment formelle – et tout le travail du principe démiurgique consiste à calculer le minimum de « décircularisation » pour permettre au maximum de perfections – ici : le plein – de se produire. Bien sûr, Thābit s'inscrit dans le projet même du *Timée* – concilier le Bien et la Nécessité – qu'il rappelle lui-même explicitement (cf. section suivante, « Les cellules hexagonales des

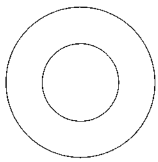
[69] Cf. p. 199, l. 21-24 H. Atay.

abeilles »). Il l'infléchit cependant dans un sens plus formaliste, qui annonce des thématiques leibniziennes. Le raisonnement de Thābit, qu'on cherchera en vain chez Platon, est en effet le suivant.

<P1> La sphère est la plus parfaite des figures ;
<P2> Toute parcelle des deux éléments est attirée par l'élément semblable.
<C1> Indépendamment de toute autre considération, la situation la plus parfaite serait donc la suivante :



Cette situation entraîne cependant avec elle l'existence nécessaire du vide. Puisque deux sphères sont tangentes en un seul point, il y a en effet nécessairement du vide autour de leur point de contact. Il faut donc trouver une disposition permettant d'amoindrir minimalement la sphéricité et de supprimer le vide. La solution la meilleure est donc de rendre les deux sphères concentriques :



L'une des deux sphères sera certes évidée en son centre et sera donc, pour cette raison, moins parfaite qu'une vraie sphère, mais c'est là un amoindrissement minimal de perfection pour aboutir à une perfection générale aussi complète que possible.

2. *Les cellules hexagonales des abeilles*

La même tendance de la nature à « tempérer » le cercle pour paver l'espace apparaît ailleurs. Elle est en effet partie intégrante de l'explication proposée par Thābit de la forme hexagonale des cellules des ruches, selon un propos rapporté par al-Sijistānī[70]. Interrogé sur le principe du pythago-

[70] Voir Abū Sulaymān al-Sijistānī, *Muntakhab Ṣiwān al-Ḥikma*, éd. D.M. Dunlop, The Hague / Paris / New York, 1979, p. 124-125, § 254 = Abû Sulaymân al-Sijistâni, *Muntakhab Siwân al-hikmah* et trois traités publiés, annotés et préfacés par 'A. Badawi, Téhéran, 1974, p. 301-303. J'ai puisé aux deux éditions pour mon essai de traduction, sans m'astreindre à signaler toutes les incohérences de chacun des textes imprimés.

risme, Thābit aurait abondé dans le sens d'une telle lecture mathématique du monde :

> Il se produisit qu'en présence d'Abū al-Ḥasan Thābit ibn Qurra, on mentionna ce qui était raconté de Pythagore et de sa secte : leur admiration pour le nombre, l'ascendant qu'ils lui conféraient, leur recours à lui dans leurs propos et dans leur façon de démontrer les choses, malgré l'éloignement de ces dernières de lui, malgré aussi l'écart les séparant de lui, malgré enfin ce qui survient à l'esprit en fait d'obstacles à ce qu'il ait un rôle en elles. Nous lui avons donc demandé quelle était son opinion sur ce sujet, et s'il l'acceptait d'une façon ou d'une autre. Il rappela donc que cet homme et sa secte étaient trop savants et supérieurs pour être soupçonnés d'insuffisance et d'erreur en leur science. Il dit aussi qu'il ne niait pas qu'ils avaient considéré la nature du nombre et qu'ils avaient connu, parmi les secrets qu'il recèle, des choses qui rendent nécessaire ce qu'on raconte à leur propos, choses qui ne nous sont parvenues ni à nous ni à qui précède notre époque de deux-cents ans. Car leurs sciences ont disparu sans que ne nous en soit parvenu la moindre lettre. Il dit aussi qu'il n'y avait rien d'invraisemblable à ce que les nombres et les figures jouent un rôle dans les choses, au point que soient reliés par cela beaucoup de leurs aspects naturels, par une liaison non manifeste[71].
>
> Il dit : nous avons trouvé qu'une certaine figure déterminée, dans un certain humble objet naturel, avait un rôle remarquable. Nous avons ainsi montré que cette figure était attachée à cette chose, malgré le caractère infime de sa nature pour ce qui regarde les traces de visée, de providence, de sagesse et de ce qui à proprement parler n'est pas subordonné à une fin : il s'agit de la figure hexagonale. Nous avons en effet considéré les cellules que produisent les abeilles avec la cire, et nous avons constaté qu'elles étaient toutes hexagonales. Quand nous y avons réfléchi et que nous avons pensé à la raison d'un tel fait, nous avons trouvé que la chose était des plus merveilleuses, et nous y avons vu l'indice de la providence la plus parfaite. Car il est requis par ces cellules qu'elles soient égales, qu'elles soient le plus vaste possible, que leur figure soit telle qu'elle comble[72] et remplisse l'espace sans qu'il y ait entre elles d'interstices perdus. Ainsi, le réquisit que ces cellules soient vastes entraînait que leurs figures fussent circulaires, puisque la figure circulaire est plus vaste que toute figure polygonale de périmètre égal[73] ; cependant, si les figures de ces habitations avaient été faites circulaires, elles n'auraient pas rempli l'espace ni ne l'aurait comblé, et il y aurait eu une perte, entre un certain nombre d'entre elles, sous la forme d'un interstice non utilisé. C'est la raison pour laquelle on est revenu, de cette figure circulaire, à la prise en compte des figures qui remplissent l'espace. Or

[71] En lisant *ghayra ẓāhir* pour *'an ẓāhir* Dunlop.

[72] En supprimant *bi-hi*.

[73] Problème textuel. Je conjecture : *li-anna al-shakla al-mudawwara awsa'u min kulli shaklin dhī zawāyā muḥītuhu yusāwī muḥītahu*. Le sens est clair.

> puisque le résultat se concrétise en nombre de types de figures, comme le triangle, le carré et l'hexagone, c'est l'hexagone qui parmi eux fut choisi, du fait qu'il combinait, en plus de ce qu'il partageait avec les autres – complétion et exhaustion de l'espace – d'être la figure la plus vaste d'entre elles. Ce choix, qui a été visé parce qu'il réunissait des avantages autant et aussi bien qu'il était possible, est au nombre des preuves les plus claires de la sagesse de celui qui choisit et de sa prise en compte du Bien. L'exclusion du cercle et de toutes les figures qui sont plus vastes que l'hexagone et le pentagone ***[74]. Cela s'accorde à ce que dit Platon, que les choses naissent d'une combinaison de providence et de nécessité. Thābit a dit : observe ce qui a été requis, maintenant, comme science géométrique supérieure pour connaître ce qu'il en était des maisons des abeilles et de l'utilité de leur position, malgré leur importance piètre et restreinte à nos yeux : il a été requis que l'on apprenne que parmi les polygones réguliers de périmètre égal, ceux qui ont le plus de côtés ont la plus grande aire[75]. Or la preuve de cela est très difficile. Et quant à celui qui nie, malgré ce que tu as vu au sujet de cette figure dans cette humble question relevant des choses naturelles, que[76] d'autres figures et nombres ont des rôles subtils, c'est qu'il n'a pas considéré ces figures et ces nombres dans toutes les réalités naturelles et au-dessus de la nature.

Ce témoignage est remarquable et, à la différence de tant d'affabulations peuplant la littérature biographique, peut être crédité d'une certaine authenticité. Si l'exemple lui-même, la structure hexagonale des cellules des ruches, n'a rien de particulièrement original, le traitement qui en est fourni trahit son auteur. L'intérêt qu'il éprouve pour la question mathématique des isopérimètres est révélateur. Sur un plan historique, la déclaration selon laquelle les auteurs de deux siècles antérieurs – il s'agit sans doute des derniers professeurs d'Alexandrie – étaient aussi peu informés que lui du pythagorisme, la profonde référence à Platon pour justifier l'imbrication de la providence et de la nécessité, la certitude enfin de l'importance du rôle des nombres et des figures dans de multiples questions physiques et métaphysiques, corroborent l'attribution : nous avons bien affaire à une thèse au moins globalement thābitienne.

Soulignons que l'importance dévolue par Thābit aux structures mathématiques, et la façon qu'il a de les rattacher à une Providence d'allure théiste, ne le fait pas verser dans un « géométrisme » naïf, mais que la théorie implicite qui est la sienne, celle du meilleur des mondes, ne néglige pas le critère de compossibilité. De ce point de vue, la lecture que fait Thābit du principe fondamental de la physique du *Timée* paraît plus logiciste que

[74] Texte arabe incompréhensible.

[75] En rajoutant <*awsaʿuhā*> devant le mot *aktharuhā* et en supprimant *fa-yatbaʿuhā* après lui.

[76] En remplaçant *li-an* par *an*.

simplement physique : la « nécessité » (*al-ḍarūra*) est moins une simple séquelle de la *matière* qu'une indication de la difficulté à combiner un maximum de *formes* données.

3. *La salinité de la mer et les bienfaits des montagnes*

Une dernière trace de ce « finalisme de la forme » professé par Thābit, moins connue, s'exprime dans deux traités qu'on peut qualifier, eu égard à la tradition où ils s'insèrent, sinon aux idées qu'ils défendent, de « météorologiques », et qui comme on va le voir font système. Le premier, conservé en un seul manuscrit et encore inédit, est consacré, comme son titre l'indique, à expliquer « pour quelle raison les eaux de la mer ont été faites salées »[77]. On sait que le thème a excité la verve des naturalistes, des Présocratiques jusqu'aux aristotéliciens postérieurs de quelques siècles à Thābit[78]. Or, dans toute cette tradition sans exception, la salinité de la mer est expliquée en termes exclusivement matérialistes. On cherche à déterminer en raison de quel contact, ou de quelle transformation, l'eau présente dans les océans n'est pas de l'eau pure, mais s'imprègne de sel. Il est donc particulièrement révélateur que Thābit consacre tout son traité à montrer exclusivement *à quelle fin* la sagesse de Dieu (*ḥikmat Allāh*) a fait en sorte que la mer soit salée. Tout ce que les Aristotéliciens théorisent comme cause matérielle relève, chez Thābit, du domaine du *fait* et en aucun cas de la *causalité* véritable, qui ne peut être située que dans le dessein de Dieu. Expliquer le phénomène, dans ce cadre naturel, c'est expliquer son utilité et sa beauté. Car, comme il le précise lui-même – et c'est l'axiome qui oriente toute sa recherche – Dieu ne fait rien en vain[79] :

> Nous disons qu'il appartient à la sagesse merveilleuse de Dieu – qu'il soit exalté – d'avoir créé les quatre natures, qui sont le feu, l'air, l'eau et la terre. Il a donc ménagé leur subsistance en sorte qu'elles s'équilibrent et s'égalisent, chacune résistant à chacune selon une mesure précise, afin qu'aucune d'elles ne sorte victorieuse ni ne triomphe d'une autre en la transformant au cours des jours jusqu'à ce qu'elle la tourne en sa nature et que l'autre cesse d'être. Car c'est là une chose qui, si elle venait à se réaliser, mettrait fin à la subsistance des hommes, des animaux, des plantes et des autres êtres qui sont sur la terre, parce que Dieu a ménagé la subsistance de tous ceux-là à partir des quatre natures, desquelles ils tiennent leur constitution et leur

[77] Ms. Topkapı Saray, Ahmet III 3342, fol. 195^{v}-201^{v} : *Qawl fī al-sabab al-ladhī ju'ilat la-hu miyāh al-biḥār māliha li-Thābit b. Qurra.*

[78] Cf. Resianne Fontaine, « Why is the Sea Salty ? The Discussion of Salinity in Hebrew Texts of the Thirteenth Century », *Arabic Sciences and Philosophy*, 5, 1995, p. 195-218 et P. Lettinck, *Aristotle's Meteorology and its Reception in the Arab World*, Leyde / Boston / Cologne, 1999, p. 120-155.

[79] Topkapı Saray 3342, fol. 195^{v}-196.

préservation. Puis, Dieu a placé ces natures dans les endroits qui leur convenaient et qui leur étaient utiles, en mettant celle d'entre elles qui était légère au-dessus de celle qui était lourde, celle qui était subtile au-dessus de celle qui était grossière, en sorte de la circonscrire de manière sphérique. Il a donc posé la nature du feu, qui est la plus légère, le plus en haut, et la nature de la terre, qui est la plus lourde, le plus en bas, et il a placé la nature de l'air plus bas que celle du feu. Et il était nécessaire, eu égard à la gradation de ces natures, d'après la considération la plus externe de cette analogie et avant même toute recherche, que l'eau soit au-dessus de la terre, entre celle-ci et l'air, circonscrite à la terre. Et il appartenait aux merveilles de la sagesse de Dieu ainsi qu'aux preuves de Sa puissance que, puisqu'il était le plus utile et le meilleur, dans le cas de cette seule nature entre toutes, je veux dire de la nature de l'eau, que les choses abandonnent le cours naturel qu'elles suivent dans les autres cas, Il en ait pris acte et qu'Il n'ait pas mis l'eau au-dessus de la terre de la même façon qu'il a circonscrit par l'air l'eau et la terre et l'air par le feu, afin de l'écarter d'une grande portion de sa surface. Aussi l'a-t-il rassemblée et placée dans des cavités et des cours, dont certains lieu sont profonds sous sa surface – ce sont ceux qu'on appelle les mers et les fleuves. Et il a placé la surface de la terre plus haut que toutes ces eaux, dont il a placé certaines également dans ses arcanes. Or si nous avons dit qu'il s'agissait là « du plus utile et du meilleur », c'est qu'il fallait que cette nature, je veux dire la nature de l'eau, reflue et s'écoule de la surface de la terre : car du fait que la terre était instaurée comme habitat des animaux et support des plantes, qui constituent les uns et les autres son ornement et sa beauté, et qui sont fixés sur elles, la sagesse incita à ce que l'eau s'écoule des endroits de la terre d'où elle s'écoule.

L'argument principal de Thābit, qui reviendra à la fin de son traité, est celui de la nécessité de l'équilibre entre les quatre éléments. Mais la réalisation de cette forme (la coexistence de quatre sphères concentriques), qui représente le dessein premier de Dieu, doit prendre en compte d'autres perfections formelles, comme la vie sur la terre, qui ne sont pas entièrement compatibles avec elle. La compossibilité dans le cadre du meilleur des mondes implique donc que le dessein premier soit tempéré : il est minimalement amoindri pour que le maximum des *autres* perfections (ici : la vie) se produise. Le fait que la masse de l'eau soit salée permet qu'elle ne se corrompe pas, à la façon de l'eau douce qui croupit dans les marécages. Ainsi, non seulement la symétrie élémentaire perdure, mais le cycle de l'eau est rendu possible, donc la vie végétale et animale. On retrouve cette sorte de calcul de la forme-fin à laquelle Thābit nous a maintenant habitués : sous sa forme la plus pure, la masse aqueuse du monde aurait dû être de l'eau douce. Mais cela aurait entraîné la corruption du tout. C'est donc pour remédier à cette imperfection de la perfection « brute » que Dieu a minimalement tempéré son plan absolu, afin de permettre, en composant avec le principe de nécessité, que le meilleur se produise.

Le traité *Sur l'utilité des montagnes* confirme pleinement, dans le cadre des mêmes schèmes météorologiques, ce parti pris finaliste et théologique. On pouvait le croire entièrement perdu. Un condensé nous a en fait été préservé par le *Kitāb al-hawāmil wa-al-shawāmil*, recueil où, comme on sait, al-Tawḥīdī a consigné les réponses de Miskawayh à de nombreuses questions qu'il lui avait posées. À la fin d'un long développement sur le thème de l'utilité des montagnes, l'historien des Bouyides renvoie à un traité (*maqālat*) de Thābit sur la question, qui coïncide aussi bien avec la ligne théorique du traité sur la salinité de mer qu'avec la référence bibliographique de la liste d'al-Ṣābi' transmise par al-Qifṭī[80]. Voici une traduction de ce texte[81] :

– Question : [al-Tawḥīdī] posa la question de la justification de l'existence des montagnes.

– Réponse : Abū ʿAlī Miskawayh, Dieu l'ait en Sa miséricorde, dit :

« Les bienfaits des montagnes et leur disposition sur la surface de la terre sont très nombreux. Car si elles n'existaient pas, n'existeraient ni plantes ni animaux sur la surface de la terre. La cause en effet de l'existence des plantes et des animaux, ainsi que de leur subsistance par la suite, est l'eau douce qui s'écoule sur la face de la terre. Et la cause de l'eau douce qui s'écoule, c'est le resserrement des vapeurs dans l'atmosphère, je veux dire les nuages et ce qu'ils subissent comme compression due au froid, jusqu'à ce qu'il en sorte soit de la pluie, soit de la neige, soit de la grêle. Et si tu te représentais les montagnes supprimées de la face de la terre et que tu imaginais la terre comme un globe circulaire sans cavités ni protubérances, les vapeurs qui se seraient élevées de ce globe ne seraient pas resserrées dans l'atmosphère, ni comprimées, et il n'en sortirait pas de l'eau douce. Dès lors, la fin de cette vapeur serait d'être dissoute et de se transformer en air avant que s'accomplisse à partir d'elle ce qui est la raison du peuplement de la face de la terre : car cela a lieu parce que la vapeur ascendante issue de la terre se concentre dans les creux de la terre, entre les montagnes qui en empêchent l'écoulement, en raison de la soumission au mouvement du ciel, et en raison des causes du vent[82], qui constitue le mouvement de l'air. Je veux dire que les poches des hautes montagnes préservent l'air bloqué dans leurs vallées du mouvement que tend à lui imposer le ciel dans sa totalité, ainsi que les astres qu'il contient et leurs rayons influents et subtils qui tend à leur imposer de s'écouler. Si donc l'air se concentre ainsi dans les montagnes, la vapeur ascendante qu'il contient est elle aussi préservée de la dislocation et du mouvement qu'il y aurait si l'air se mouvait, en sorte qu'une partie du froid que les montagnes emmagasinent en elles durant le

[80] Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, p. 117.

[81] Abū Ḥayyān al-Tawḥīdī wa-Miskawayh, *al-Hawāmil wa-al-Shawāmil*, éd. A. Amīn et S. Saqr, Le Caire, 1951, p. 354-356 (*Question* n° 165).

[82] En lisant *al-rīḥ*.

temps de l'hiver condense et concentre cette vapeur, puis la pressure. Elle devient donc de l'eau par transformation, ou quelque autre corps semblable.

Et si les montagnes n'existaient pas, les eaux soumises au régime que nous avons décrit ne circuleraient pas à la surface de la terre, du moins pas avant que la pluie ne survienne puis que la terre l'absorbe ; en suite de quoi, il se produirait que les plantes et les animaux seraient privés d'eau au fort de l'été, au moment même où ils en ont un besoin impératif pour leur subsistance. On ne pourrait alors se la procurer que comme on le fait dans les déserts éloignés des montagnes, je veux dire en creusant des puits dont la profondeur atteint les cent et les deux-cents coudées. Mais maintenant, avec l'existence des montagnes, les pluies et les neiges demeurent sur ces montagnes. Aussi, quand les montagnes les ont absorbées, sur-le-champ ou après un certain temps, les sources surgissent-elles à leurs pieds ; en procèdent les fleuves et les rivières, qui s'écoulent sur la surface de la terre, pour finalement se jeter dans la mer, du nord vers le sud. Et lorsque s'épuise ce que les cours d'eau ont employé comme pluie durant l'été, ils bénéficient du retour de l'hiver et des pluies, et le cycle recommence.

Le signe que les sources, les fleuves et les rivières proviennent tous des montagnes est que tu ne remontes jamais un fleuve ou une rivière sans aboutir à une montagne. Quant aux sources, elles ne se trouvent jamais qu'à proximité des montagnes. Il en va de même pour ce qu'on peut induire des petits canaux, et de ce qui y ressemble.

Les montagnes jouent le rôle, pour ce qui est de faire couler sur la terre l'eau provenant des pluies, des éponges ou des laines qu'on imbibe d'eau et qui en supportent une grande quantité, puis desquelles, quand on les pose sur un endroit, l'eau coule peu à peu, jusqu'à ce que, une fois qu'elles sont devenues sèches, on les imbibe et on les abreuve à nouveau d'eau. Ainsi, l'humidité qui en ruisselle sur la surface de la terre se perpétue, et ce régime est la raison du peuplement du monde et de l'existence en lui des plantes et des animaux.

Les montagnes présentent de nombreux bienfaits. Nous n'avons mentionné que les plus considérables d'entre eux, et qu'on se borne à cela. Cela étant, on doit à Thābit un traité sur les bienfaits des montagnes. Que celui qui désire maîtriser exhaustivement ce chapitre en fasse des lectures, s'il plaît à Dieu ».

Certains éléments stylistiques et doctrinaux corroborent l'attribution à Thābit. Si en effet, de manière générale, ce texte (comme d'ailleurs le traité sur la salinité de la mer) fait sienne l'explication aristotélicienne du cycle de l'eau telle qu'on la trouve exposée dans les *Météorologiques* (première partie du chap. A 13) – il est intéressant que nous ayons affaire à l'un des rares cas où une explication aristotélicienne d'un phénomène atmosphérique soit reconnue encore aujourd'hui comme parfaitement valable – sa mise en rapport du mouvement de l'air avec des influences célestes rappelle un passage du *Livre des Hypothèses* de Ptolémée, que Thābit connaissait mieux que quiconque : « Les sphères qui sont proches de l'air se meuvent de façon très variée, et ressemblent en cela à la nature de l'élément qui est en contact avec elles »[83]. Plus décisif encore, le texte de Miskawayh présente une distinction entre la substance de la sphère céleste (*al-falak*) et celle des astres en tant que tels (*al-kawākib*), qui est caractéristique de la physique céleste de Thābit ibn Qurra. Elle apparaissait en effet dans le livre *De l'excentricité des orbes*, selon un passage, exhumé par Régis Morelon, du commentaire aux *Sentences* d'Albert le Grand[84]. Dernier point, notre texte admet une influence des astres sur l'air par des rayons décrits comme des corps subtils (*mulaṭṭafa*). Cette épithète s'explique sans doute du fait qu'un tel rayonnement a la capacité de traverser des substances qui ne peuvent pourtant, par leur nature propre, être ni divisées ni altérées. Elle rappelle la description du véhicule de l'âme dans le fragment cité par Avicenne : ce support était un corps subtil (*jism laṭīf*), pourvu lui aussi d'une certaine aptitude à interpénétrer d'autres corps.

Bien que la présence des mathématiques soit moins marquée, dans ces deux études météorologiques jumelles, que dans le cas de l'étude du cosmos et des cellules de cire, on reconnaît la même idée sous-jacente. Aristote se contentait de mentionner les montagnes dans son traitement des cours d'eau, celles-là étant la cause *matérielle* de ceux-ci. En se focalisant maintenant sur les montagnes, l'argument souligne automatiquement la présence d'une finalité et fait ainsi couple avec l'explication des causes de la salinité de la mer. L'hypothèse de la suppression des montagnes de la surface du globe, de ce point de vue, est fort intéressante. Nous obtiendrions certes alors une figure géométrique parfaite, mais inapte à conserver la vie, qui est elle aussi une perfection. De même, dans le traité sur la salinité de la mer, l'englobement sphérique parfait de la terre par l'eau empêcherait l'existence des animaux et des plantes, qui constituent « l'ornement et la beauté » de notre monde. La présence des montagnes, comme celle des mers sur une partie seulement du globe, relève donc à sa manière d'un calcul du meilleur, la Providence ayant altéré aussi peu que possible la forme sphérique de notre planète et le caractère globulaire de la sphère aqueuse pour permettre que la

[83] Cf. R. Morelon, « La version arabe du *Livre des Hypothèses* de Ptolémée », *MIDEO*, 21, 1993, p. 7-85, p. 69, l. 7-8 (traduction française p. 68).

[84] Cf. R. Morelon, « Arab Astronomy », p. 127. Cette distinction apparaît également dans le *Diwān* de Nāṣir Khosraw : voir S. Pines, *Beiträge zur islamischen Atomenlehre*, Gräfenhainischen, 1936, p. 87. C'est tout au plus en ce sens qu'il faut interpréter la citation (à supposer qu'elle soit authentique *et* assumée, ce dont je doute fort), par le même auteur, *Kitāb-e Jāmi' al-hikmatayn*, trad. Isabelle de Gastines, Paris, 1990, p. 156 de la thèse de la rationalité des astres, et non dans le sens angélologique suggéré (il faut de plus corriger, dans la traduction française, « parlant » en « rationnel » : on a affaire au calque de l'arabe *nafs nāṭiqa*).

vie se développe[85]. On peut donc lire, ici encore, deux textes physiques de Thābit comme une prise en compte du principe de compossibilité dans le meilleur des mondes.

4. *Les enfants de sept mois*

Mentionnons un cinquième et dernier exemple, à peine différent, celui de la réflexion biologico-mathématique de Thābit sur les périodes de gestation. Nous avons en effet conservé au moins un traité médical où Thābit expose le rôle que peuvent jouer les mathématiques dans une étude de la nature : son soi-disant « abrégé »[86] du livre de Galien *Sur l'enfant de sept mois*. En réalité, on s'aperçoit vite qu'il s'agit de toute autre chose que d'un résumé du médecin de Pergame. Après avoir exposé la structure arithmétique sous-jacente à la description embryologique de Galien, Thābit met en lumière le mécanisme cosmologique de cette inhérence des nombres dans les processus de génération biologique. On peut traduire ce passage[87] :

> Le fondement dans ce que nous avons mentionné au sujet des enfants de sept mois est que la nature, dans ses actions, a des mouvements qui suivent les mouvements célestes. C'est ainsi déterminées qu'ont lieu les maladies (pour ne rien dire du reste), et ce malgré ce qui, dans les maladies, survient à la fois de la contribution de la maladie aux mouvements de la nature et de son opposition à eux, par son mouvement propre, malgré aussi le coup d'arrêt qu'elle porte maintes fois aux actions de la nature, en sorte de les faire dévier de leur cours. Toutefois, dans la plupart des cas, ce sont les mouvements de la nature, qui suivent les mouvements célestes, qui l'emportent. Et quand les mouvements naturels ne sont pas en eux-mêmes raison de maladie, il est vraisemblable qu'ils suivent le cours des mouvements célestes ; or les mouvements de la nature, dans le cas des embryons, ne sont pas des mouvements de maladie ; par conséquent, il est sous ce rapport plus fondé en raison qu'ils soient attachés aux cycles des choses célestes, et qu'ils les suivent ; en particulier, qu'ils procèdent du soleil et de la lune. La question de la génération des embryons est liée à ces deux astres à la fois, et se trouve être fonction de leurs mouvements.

[85] On pourra comparer la position de Thābit au matérialisme raffiné d'Avicenne mis en lumière par A. Hasnawi, « Avicenne et le livre IV des *Météorologiques* d'Aristote », dans C. Viano (éd.), *Aristoteles chemicus. Il IV libro dei Meteorologica nella tradizione antica e medievale*, Sankt Augustin, 2002, p. 133-143, p. 140-141. En termes historiques, la position de Thābit s'oppose à celle d'al-Kindī et de son école. Voir al-Masʿūdī, *Murūj al-dhahab*, éd. C. Barbier de Meynard et M. Pavet de Courteille, Paris, 1861, t. I, p. 275 sqq.

[86] Notons tout de même qu'al-Qifṭī, p. 118.11 signale un *livre* de Thābit sur ce sujet.

[87] Cf. U. Weisser, « Thābit ibn Qurra's Epitome of Galen's Book on Seven-Month Children », *Journal for the History of Arabic Science*, 7, 1983, p. 141-151, p. 147.

Il nous paraît peu probable, à la différence de ce que soutient Ursula Weisser[88], qu'il s'agit pour Thābit d'un simple prétexte à exercice arithmétique. Même si, comme elle le souligne judicieusement, le calcul mis en place par Thābit est dépourvu d'une réelle utilité pratique, sa signification relève plutôt de la philosophie naturelle. L'idée d'une imitation, dans les gestations sublunaires, des cycles astraux n'était certes pas inconnue d'Aristote[89]. Mais il s'agissait davantage, chez le Stagirite, d'une position générale, procédant de la ressemblance immédiate qu'entretiennent différents phénomènes périodiques. Le développement, par Thābit, des détails du calcul montre que l'approche de la question n'est plus la même. Conformément à ce qu'il ressortait du témoignage de Sijistānī sur le « pythagorisme » de Thābit, celui-ci redistribue les instances de ce qui était pour les aristotéliciens le réel (la substance objet de la physique) et ses modes (les propriétés étudiées par les mathématiques). La substance disparaît du paysage ontologique et, pour ce qui est de la théorisation scientifique, cède la place à ses modes.

L'exégèse de Galien permet ainsi à Thābit de prendre position dans un débat qui s'était noué autour, là encore, du chapitre 4 du livre H de la *Physique* d'Aristote. Après avoir envisagé la commensurabilité de deux translations puis de deux altérations, Aristote en était venu à évoquer celle de deux générations (249b 19). Voici le commentaire d'Alexandre préservé par l'une des scholies inédites du manuscrit de Paris (fol. 119^{v}) :

> Après avoir distingué, dans le cas de la translation et de l'altération, les mouvements commensurables, il affirme maintenant au sujet de la génération que sont commensurables celles qui appartiennent à des êtres de même espèce. Par exemple, un homme né au bout de neuf mois a une génération égale à un homme né au bout de neuf mois, mais inégale à un homme né au bout de sept mois ; mais dans le cas d'un bœuf ou d'un cheval, les générations ne seront pas commensurables les unes aux autres. Peut-être pourrait-on dire, dans le cas des chiots, que la génération est plus rapide quand l'un est mis bas au bout d'un temps égal, tandis que l'autre non seulement est mis bas, mais arrive à voir. Il a dit que ce cas était autre chose en ce sens qu'il n'a pas de nom.

Aristote n'avait pas évoqué les enfants de neuf et de sept mois dans son argument. Il s'agit donc d'un ajout d'Alexandre qu'on ne retrouve pas tel quel dans le commentaire de Simplicius. En revanche, Simplicius consacre à cet endroit une notice doxographique aux Pythagoriciens, et à leur thèse que tout est nombre. Voici ce qu'il dit[90] :

[88] *Art. cit.*, p. 144.

[89] Voir *Génération et corruption* B 10, *Génération des animaux* Δ 10, 777b 16-778a 9.

[90] Simplicius, *In Phys.* 1102.17-26 Diels.

Il a dit que la substance était nombre soit pour emboîter le pas aux Pythagoriciens qui disent que les nombres sont principes des choses,

> « Exauce, ô Nombre illustre, père des bienheureux, père des hommes »

et

> « Il a fait tous les êtres à la semblance du Nombre »,

soit parce que les générations et les constitutions des éléments et de toutes les parties sont achevées en fonction de certains nombres déterminés. C'est la raison pour laquelle aucune des techniques humaines parmi celles qui imitent la démiurgie de l'univers ne peut subsister indépendamment du nombre.

L'idée qu'Aristote puisse vouloir « emboîter le pas aux Pythagoriciens » n'a pu germer dans l'esprit d'Alexandre. Il s'agit bien plutôt d'un infléchissement néoplatonisant de Simplicius. En revanche, la seconde branche de l'alternative se rapproche de la scholie du *Parisinus* qu'on vient de citer. Si elle ne lui est pas identique, c'est encore parce qu'elle conserve en elle quelque chose du pythagorisme théologique. La comparaison de la position de Thābit à celle de ses devanciers est assez instructive. S'il ne se range pas au pythagorisme « pur et dur » évoqué par Simplicius, où un caractère divin est dévolu au nombre, il est malgré tout plus sensible à la présence de nombres régissant les cycles des générations que ne l'était Alexandre. Au plan théorique, la position de Thābit ressemble donc plutôt à l'Alexandre pythagorisé qui apparaît dans la seconde branche de l'alternative de Simplicius. Toutefois, la véritable différence apparaît avec la mise en application de ces principes généraux. Car Thābit construit un véritable algorithme permettant de déterminer la viabilité d'une naissance en fonction de certains paramètres numériques. Il s'agit donc moins d'une position de principe, comme dans la tradition philosophique aristotélicienne ou platonicienne, que d'une thèse ne valant que par la possibilité effective d'une application d'un savoir mathématique à une situation physique donnée. Or cette application implique ici encore que la nature atténue le principe de perfection circulaire – il s'agit dans le cas présent non plus de cercles dans l'espace, mais des cycles astraux, au fondement des périodes de gestation – dans une certaine indétermination sensible : il était plus adapté à la reproduction de l'espèce que des nourrissons nés à certaines dates différentes, situées dans un voisinage plus ou moins lâche d'une date idéale donnée par les mouvements réguliers des périodes astrales, soient tous viables. Mais cette indétermination est, en droit, « formulable » grâce au calcul.

On peut maintenant revenir à l'idée qui ouvrait les réponses aux questions d'Ibn Usayyid, l'admission, par Thābit, avec les théologiens rationnels et contre les philosophes dans la tradition hellénistique, de la connaissance divine des particuliers. Ce fait, bien évidemment remarqué mais non point expliqué par A. Sabra, peut, semble-t-il, être replacé dans son contexte exact. La doctrine de la Providence défendue par Thābit s'enracine dans un schème d'explication formelle du monde, dont l'idéal est l'analyse proprement mathématique, comme dans le cas des cellules des abeilles. Même si l'approche mathématique est parfois plus discrète, elle ne disparaît jamais complètement, et incline la lecture faite par Thābit du finalisme platonicien dans une direction leibnizienne – l'intrication du Bien et de la Nécessité, de la matière et de la fin, est lue comme un calcul formel des compossibles. La matière n'est plus une réalité physique à part entière complémentaire de la forme, mais un résidu de notre formulation scientifique des choses.

CONCLUSION

Ce qui nous est apparu des thèses philosophiques *positives* de Thābit ibn Qurra pourrait expliquer que ses réfutations de la *Physique* n'aient pas réussi à ébranler la suprématie de l'aristotélisme dans le champ philosophique. Que Thābit ait systématiquement vidé la physique aristotélicienne de sa teneur ontologique, passe encore : les philosophes étaient sans doute prêts à excuser ses arguments soit comme des erreurs vénielles, soit comme de simples *expressions* mathématiques de ce dont une théorie physique constituait le lieu véritable. Mais que, avec les Mutakallimūn[91], il ait opté pour un Dieu choisissant (*mukhtār*)[92], contre l'intuition la plus essentielle des théoriciens de l'émanation – et, en corollaire, qu'il ait admis la connaissance divine des particuliers –, c'en était trop. Les philosophes évitèrent donc de se réclamer de Thābit, tout helléniste et hellénophile qu'il ait été, parce que sa théorie de la Providence faisait trop bon ménage avec celle des théologiens, et les théologiens n'accueillirent jamais Thābit parce que ce Sabéen faisait manifestement autre chose que du *kalām*. Non qu'il n'ait pas été *lu* par les plus grands penseurs de l'Islam classique : on pourrait au contraire montrer – mais ce serait l'objet d'une autre étude – que la théorie avicennienne de la Providence, dans son traitement de l'indétermination[93], n'est que la récriture en termes émanatistes du formalisme thābitien du meilleur

[91] La tradition rapportée par al-Tawḥīdī, *al-Baṣā'ir wa-al-zakhā'ir*, éd. W. al-Qāḍī, Beyrouth, s. d., t. I, p. 189-191, selon laquelle Thābit aurait placé la supériorité de l'Islam sur toutes les autres nations dans le fait de compter au rang de ses fidèles ʿUmar ibn al-Khaṭṭāb, al-Ḥasan al-Baṣrī et Abū ʿUthmān al-Jāḥiẓ – les deux derniers constituant comme on sait le père fondateur et l'un des représentants les plus éminents de l'*iʿtizāl* –, bien que d'authenticité douteuse, pourrait s'expliquer au moins comme mythe dans ce contexte.

[92] Cf. Sijistānī, *Muntakhab Ṣiwān al-Ḥikma*, 125.9 Dunlop.

[93] Cf. M. Rashed, « Théodicée et approximation : Avicenne », *Arabic Sciences and Philosophy*, 10, 2000, p. 223-257 (cf. p. 233).

des mondes. L'apparent porte-à-faux de la position de Thābit explique cependant, le temps aidant, la disparition de ses œuvres philosophiques des rayons des bibliothèques mameloukes et ottomanes[94].

[94] Que le traité *Sur la raison de la salinité de l'eau de mer* ait été conservé dans un recueil exclusivement mathématique (*Topkapı Saray* 3342) et qu'il ne soit *jamais* cité par les Aristotéliciens ultérieurs, n'est sans doute pas un hasard.

THĀBIT IBN QURRA'S *CONCISE EXPOSITION OF ARISTOTLE'S METAPHYSICS*: TEXT, TRANSLATION, AND COMMENTARY*

David C. REISMAN and Amos BERTOLACCI

INTRODUCTION

Thābit ibn Qurra (d. 901) is not widely known as the author of a short work in the field of Greek philosophy entitled (in brief) *The Concise Exposition of Aristotle's Metaphysics*. Medieval authors writing in Arabic, and whom we might expect to have had some acquaintance with the work, uniformly ignore it (with the interesting exception of Ibn Taymiyya), as do the majority of the biographers and bibliographers who turned their attention to Thābit's life and work. While it has been known that a copy of the work exists in the Ayasofya 4832 codex at least since 1943, when Carl Brockelmann included it in the list of Thābit's works he compiled for the first supplemental volume to his *Geschichte der arabischen Litteratur*,[1] modern scholars largely have followed their medieval counterparts in overlooking it. This state of affairs is perhaps not surprising. Thābit is rightly more famous for his work in astronomy and mathematics, and so it is more in these areas that his contributions have been evaluated by modern scholarship. It may also be remarked that the first known exemplar of Thābit's *Concise Exposition* shares space in the Ayasofya codex with an impressive company of texts on science and philosophy which collectively might be seen to overshadow its significance. In a broader sense, the relatively minor status of Thābit's *Concise Exposition* in relation to his other works may also account for the silence about it from the medieval bibliographers. This possibility certainly warrants more consideration than any questions about its correct attribution to Thābit.

* The authors would like to thank Dimitri Gutas, Ahmed Hasnaoui and Marc Geoffroy for their comments and corrections.

[1] Carl Brockelmann, *Geschichte der arabischen Litteratur*, Supplemental Volume I, Leiden, E.J. Brill, 1943, p. 384. Hellmut Ritter and Martin Plessner had catalogued earlier only the second part of the codex in "Schriften Ja'qūb ibn Isḥāq al-Kindī's in Stambuler Bibliotheken," *Archiv Orientální*, 4, 1932, pp. 363-372.

Despite the lack of attention directed toward it, Thābit's *Concise Exposition* is of considerable importance for our understanding of the development of Graeco-Arabic philosophy and, in particular, the knowledge Thābit and his scholarly contemporaries had of Aristotle's *Metaphysics* and other works. The full title of the work, in the most reliable manuscript and in keeping with the somewhat convoluted articulations of ninth-century philosophical writing, is *Maqālat Thābit ibn Qurra fī talkhīṣ mā atā bihi Arisṭūṭālīs fī kitābihi fī Mā ba'd al-ṭabī'a mimmā jarā al-amr fīhi 'alā siyāqat al-burhān siwā mā jarā min dhālika majrā al-iqnā'*, or *Thābit ibn Qurra's Treatise on the Concise Exposition of what Aristotle presented in his book Metaphysics of [topics] that proceed according to the method of demonstration, not persuasion.*[2] We also learn from the title portion that Thābit wrote his treatise for Abū al-Ḥusayn al-Qāsim ibn 'Ubayd Allāh [ibn Sulaymān ibn Wahb al-Ḥārithī] (258-291/872-904), the unscrupulous vizier of two 'Abbāsid caliphs with whom Thābit also had a brief and guarded correspondence on astronomical research.[3]

[2] Compare the translation by D. Gutas in "Aspects of Literary Form and Genre in Arabic Logical Works," in Charles Burnett (ed.), *Glosses and Commentaries on Aristotelian Logical Texts, The Syriac, Arabic, and Medieval Latin Traditions*, London, Warburg Institute, 1993, p. 41, n. 49: "Determination of the Unconvincing Apodeictic Arguments in Aristotle's *Metaphysics*". See *ibid.*, pp. 38-40 for a detailed discussion of the genre form *talkhīṣ*.

[3] Al-Qāsim succeeded his father in the post of vizier to the Caliph al-Mu'taḍid (r. 892-902) with the aid of Badr, the Chief of Police, whom he later had killed, and appears to have engineered al-Muktafī''s (r. 902-908) succession to the Caliphate. He and Badr were responsible for the execution of Thābit's acquaintance, the philosopher Aḥmad ibn al-Ṭayyib al-Sarakhsī (d. 286/899), who divulged an unspecified secret of theirs; see F. Rosenthal, *Aḥmad B. aṭ-Ṭayyib as-Sarakhsī*, New Haven, AOS, 1943, pp. 24-25, 27. For biographical information on al-Qāsim, see H. Bowen, *The Life and Times of 'Alī ibn 'Īsā, the Good Vizier*, Cambridge, 1928, pp. 57-64, and index; D. Sourdel, *Le Vizirat 'Abbāside*, Damascus, PIFD, 1959, vol. 1, pp. 345-357, with references, p. 346, n. 4, to which may be added: Ibn Khallikān, *Wafayāt al-a'yān wa-anbā' abnā' al-zamān* (edited by Iḥsān 'Abbās, Beirut, Dār al-Thaqāfa, 1968), vol. 3, pp. 361-362, who records the following description: "He was awe-inspiring, courageous, and bloodthirsty; both the great and humble stood in terror of him and none of the notables found favor with him"; al-Dhahabī, *Siyar I'lām al-nubalā'* (edited by Shu'ayb al-Arnā'ūt *et al.*, Beirut, Mu'assasat al-Risāla, 1990-1992), vol. 14, pp. 18-20, who says the people rejoiced at his death, collects the evidence of his heresy; Ibn Kathīr, *al-Bidāya wa-al-nihāya*, edited by Aḥmad Abū Mulḥim *et al.*, Beirut, Dār al-Kutub al-'Ilmiyya, 1988, vol. 11, pp. 98-99, 102, 105; and Ziriklī, *al-A'lām: Qāmūs tarājim li-ashhar al-rijāl wa-al-nisā' min al-'arab wa-al-musta'ribīn wa-al-mustashriqīn*, Beirut, Dār al-'Ilm li-al-Malāyīn, 1992, vol. 5, p. 177b-c. For Ṭabarī's records of al-Qāsim, see now Franz Rosenthal's translation in vol. 38 of *The History of al-Ṭabarī*, Albany, 1985, index. Al-Qāsim's brother Abū Muḥammad al-Ḥasan (d. 288/901) is credited with

Al-Qāsim is designated vizier in the title, which presents a minor chronological problem, since he was not appointed to that post until about a month after Thābit's death.[4] There are at least two possible explanations for this discrepancy: either the title was added to al-Qāsim's name by a later scribe; or al-Qāsim was accorded the title during one of the periods in which he served as his father's deputy.[5] That al-Qāsim would be interested in hearing from Thābit about Aristotle's *Metaphysics* need not strike us as unusual. Al-Qāsim was known for his scholarly interests; an incidental remark in the course of an evening's discussion may have elicited a request to Thābit for a *précis* of Aristotle's views. The important role that Graeco-Arabic philosophical texts often played in political contexts during the 'Abbāsid caliphate might also lead us to believe that al-Qāsim may have sought to employ Aristotelian metaphysics against one or another

a partial commentary on Euclid's *Elements* entitled *K. Sharḥ al-mushkil min Kitāb Uqlīdis fī al-nisba*; cf. GAS V, pp. 106 (no. 8), 264.

Part of Thābit's Letter to al-Qāsim ibn 'Ubayd Allāh is preserved in Ibn Yūnus's (d. 299/1009) *al-Zīj al-ḥakīmī*, and was translated by F. J. Carmody, *The Astronomical Works of Thabit B. Qurra*, University of California Press, 1960, p. 45, and R. Morelon, "Thābit b. Qurra and Arab Astronomy in the 9th Century," *Arabic Sciences and Philosophy*, 4, 1994, pp. 130-131 (both with references to the Arabic text); cf. GAS VI, p. 169 (no. 23). The letter deals with the results of the astronomical work undertaken by the Banū Mūsā and Thābit referred to as the *Verified Table*. Thābit expresses his reluctance to share his work-in-progress but nonetheless sent on some results for fear of offending the vizier. F. Sezgin, GAS VI, p. 169 (no. 23) suggests the letter is identical to a *R. ilā al-Qāsim ibn 'Ubayd Allāh fī raṣad aṣḥāb al-Mumtaḥan*. According to Ibn Abī Uṣaybi'a, *'Uyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'*, ed. A. Müller, Cairo, 1882, p. 219.20-21, Thābit also wrote a work entitled *Reporting that the discipline of medicine is the best discipline, al-Ikhbār anna ṣinā'at al-ṭibb ajallu al-ṣinā'āt*, for al-Qāsim (*wa-kataba bihi ilā al-wazīr Abī al-Qāsim 'Ubayd Allāh ibn Sulaymān* [*sic*]). In R. Morelon's list, in *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*, Collection sciences et philosophie arabes - Textes et études, Paris, Les Belles Lettres, 1987, p. xvii, no. 35, the explanation that he wrote this work for al-Qāsim is treated as a descriptive title of a posited other letter to al-Qāsim (Morelon perhaps assumed that this would refer to the letter preserved in Ibn Yūnus?). Thābit also wrote a brief tract for al-Qāsim's grandfather Sulaymān ibn Wahb entitled *K. ... fī al-ta'attī li-istikhrāj 'amal al-masā'il al-handasiyya*, edited by A. S. Sa'īdān in *Rasā'il Ibn Sinān*, Kuwait, 1983, pp. 325-336; cf. GAS V, p. 271.

[4] Thābit's date of death is given as 26 Ṣafar 288/19 February 901 in al-Qifṭī's biography (*Ta'rīkh al-ḥukamā'*, edited by J. Lippert, Leipzig, 1903, p. 122); but al-Qāsim was appointed vizier in Rabī' al-ākhir 288/March-April 901, according to Sourdel, *Le Vizirat 'Abbāside*, p. 345.

[5] During the years 282-3/895-6, his father the vizier 'Ubayd Allāh was often in the Jibāl, combatting the Dulafids; cf. Sourdel, *Le Vizirat 'Abbāside*, pp. 331-332, 347. If al-Qāsim held the nominal title vizier during these periods, Thābit's text may be dated earlier.

ideological opponent.[6] One of the major ideological threats to the ʿAbbāsid state at the end of the 3rd/9th century, and consequently of some concern to the vizier al-Qāsim ibn ʿUbayd Allāh, was the emergence of the Ismāʿīlī *daʿwa* in Iraq, Syria, and Iran and the specific military threat of its splinter group, the Qarmaṭians. Early Ismāʿīlī cosmology bears the gnostic strains which earlier in the century had posed a threat at the ʿAbbāsid court, but in Thābit's time it probably lacked the overtly Neoplatonic elements of later Ismāʿīlī theology.[7] This is but one political context in which Thābit's summary of Aristotelian metaphysics may have been solicited. We might also imagine that Thābit's text presented an antidote to the Neoplatonic elements in the works of the Kindī Circle, especially Kindī's pupil Aḥmad ibn al-Ṭayyib al-Sarakhsī (c. 833-899), tutor of the Caliph al-Muʿtaḍid whom al-Qāsim had executed. We are told that this was for personal and not ideological reasons,[8] but it is worth noting that al-Sarakhsī is credited with a work entitled *Kitāb fī al-radd ʿalā Jālīnūs fī al-muḥarrik al-awwal* (The Refutation of Galen concerning the First Mover).[9] It is conceivable that al-Qāsim sought Thābit's opinion on al-Sarakhsī's work, which led to Thābit's composition of the *Concise Exposition*.

Whatever the immediate historical context of the composition of the work, Thābit was certainly qualified to write an exposition of Aristotelian metaphysics. As a scholar with knowledge of Greek, Syriac, and Arabic, Thābit was involved in numerous translations of scientific and medical

[6] For the roles played by translations of Aristotle's *Topics* and *Physics* in ideological maneuvering during the early ʿAbbāsid caliphate, see Dimitri Gutas, *Greek Thought, Arabic Culture: The Graeco-Arabic Translation Movement in Baghdad and Early ʿAbbāsid Society (2nd-4th/8th-10th centuries)*, London / New York, Routledge, 1998, pp. 61-73.

[7] For early Ismāʿīlī cosmology, see H. Halm, "The Cosmology of Pre-Fatimid Ismāʿīliyya," in Farhad Daftary (ed.), *Mediaeval Ismaʿili History and Thought*, Cambridge, 1996, pp. 75-83; and for the overtly Neoplatonic character of 4th/10th century Ismāʿīlism, see the works of Paul E. Walker, especially his *Early Philosophical Shiism, The Ismaili Neoplatonism of Abū Yaʿqūb al-Sijistānī*, Cambridge, 1993, pp. 30-44.

[8] See the note above. However, to posit that any Aristotelianism on Thābit's part was employed as an ideological weapon against any Neoplatonism on al-Sarakhsī's part would be to make Thābit more of an Aristotelian than he was and al-Sarakhsī more of a Neoplatonist than any of his writings suggest (see the list of works in Rosenthal, *Aḥmad B. aṭ-Ṭayyib as-Sarakhsī*, esp. pp. 54ff.). For al-Sarakhsī's possible connections with Ismāʿīlism, see *ibid.*, p. 36.

[9] For Galen's work, see below. Al-Sarakhsī's work is recorded by Rosenthal, *Aḥmad B. aṭ-Ṭayyib as-Sarakhsī*, p. 57, no. 21, under the title *Kitāb ... fī* al-maḥall *al-awwal*, following Ibn Abī Uṣaybiʿa, *ʿUyūn al-anbāʾ*, vol. I, p. 215.20f. In a private communication, Franz Rosenthal noted that Joel Kraemer first suggested the correction *al-maḥall > al-muḥarrik*.

works through his association with Ḥunayn ibn Isḥāq's circle of translators, in addition to building a curriculum of summaries and compendia in those fields.[10] His knowledge of the Aristotelian corpus is evident in his compendia and abridgements of parts of the *Organon* (*Categoriae*, *De Interpretatione*, *Analytica Priora*) and his uncompleted (?) commentary of *Physica*.[11] His familiarity with Aristotle's *Metaphysics* and the neo-Aristotelian commentaries of it is indicated by his reported correction of Isḥāq ibn Ḥunayn's (d. 910) translation of Themistius' paraphrase of the *Metaphysics*.[12]

A brief characterization of Thābit's *Concise Exposition* will help to outline the intellectual allegiances of its author. The *Concise Exposition*, which in the present state of research appears to be the first extant Arabic commentary on Aristotle's *Metaphysics*, is Thābit's own reworking of the theological core of the *Metaphysics*, namely of chapters 6-9 of its twelfth book (Λ). Thābit selects the main doctrinal points of these chapters and discusses them at length. In focusing on the natural theology of Aristotle's *Metaphysics* (the so-called *metaphysica specialis*) and trying to reconcile it with Islamic, or at least monotheistic, tenets (for instance, when he attributes

[10] A rationalized bibliography of Thābit's works is going to be published by Dimitri Gutas.

[11] Thābit's own list of works, copied by his great-great-grandson al-Muḥassin ibn Ibrāhīm ibn Hilāl in 370/981 and preserved by al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, records his abridgments (*ikhtiṣār*) of the three logical works above (p. 120.7-8), as well as a synopsis (*jawāmi'*) of *De Interpretatione* (p. 118.2); Ibn Abī Uṣaybi'a, *'Uyūn al-anbā'*, records only the *Categoriae* abridgment (p. 220.24). Cf. F. E. Peters, *Aristoteles Arabus*, Leiden, 1968, pp. 10, 12. The title of another work in Ibn Abī Uṣaybi'a (p. 218.15), *K. fī aghāliṭ al-sūfisṭā'iyyīn*, may have been related to Aristotle's *Sophistica*. On the commentary of *Physica*, Ibn al-Nadīm (d. 990) knew only that Thābit commented part of the first book (cf. Peters, *Aristoteles*, p. 30). The list in al-Qifṭī (*ibid.*, p. 116.18), records generally a *Sharḥ al-Samā' al-Ṭabī'ī*; but Ibn Abī Uṣaybi'a (*ibid.*, p. 219.28) adds that the commentary was incomplete at his death (he may have extrapolated this from Ibn al-Nadīm's information).

[12] There is some confusion in the sources concerning the translation of Themistius' commentary. Ibn al-Nadīm says that Abū Bishr Mattā ibn Yūnus (d. 940) translated it, but the extant Hebrew translation by Samuel ben Tibbon states that Isḥāq translated it and Thābit corrected it. See S. Landauer's edition of the Hebrew in *Themistii: In Aristotelis Metaphysicorum librum Λ Paraphrasis, Hebraice et Latine*, Berlin, 1903 [= *Commentaria in Aristotelem Graeca* V, 5], v; 'A. Badawī, *Arisṭū 'inda al-'arab*, Cairo, Maktabat al-Nahḍa al-Miṣriyya, 1947, intro., p. 17; R. M. Frank, "Some Textual Notes on the Oriental Versions of Themistius' Paraphrase of Book I [*sic*!] of the *Metaphysics*," *Cahiers de Byrsa*, 8, 1958-9, p. 215, n. 2; and Peters, *Aristoteles*, 1968, p. 52. The Arabic of Themistius's paraphrase, comprising Book Lambda, was edited by Badawī, *Arisṭū*, pp. 12-21, and the whole was recently translated into French by Rémi Brague, *Thémistius, Paraphrase de la métaphysique d'Aristote (Livre Lambda) traduit de l'hébreu et de l'arabe, introduction, notes et indices,* Paris, J. Vrin, 1999. See further below.

will to the First Principle and calls Its unicity *tawḥīd*), Thābit appears to share the theologizing interpretation of the *Metaphysics* that was common in the Arab world until the time of al-Fārābī.[13]

The doctrinal correspondence between Thābit's *Concise Exposition* and chapters 6-9 of *Metaphysics* Λ is particularly evident in the last three sections (§§7-9) of the *Talkhīṣ*. These sections develop, respectively, the theme of Λ 7, 1073 a 5-11 (the First principle does not have magnitude), of Λ 8, 1074 a 31-38 (the First Principle is only one), and of Λ 9 in its entirety (the First Principle's substance is knowledge). The previous sections of the *Talkhīṣ*, on the other hand, are more original. Only in §2 (the First Mover is the cause of the corporeal substance's existence) and §4 (the First Principle is the cause of the existence of the universe from eternity) does Thābit deal with tenets that are, at least in part, Aristotelian and bear relation to *Metaphysics* Λ 6-9. The opening section (§1) is modeled according to the Greek Neoplatonic introductions to Aristotle; §3 and §§5-6 are a defense, respectively, of the Aristotelian doctrines of §2 and §4, from objections that Aristotle himself does not take into account.

Among other Aristotelian works, Thābit quotes the *Physics* (three times) and the *De Caelo* (twice). These two works lie in the background of Thābit's commentary, since some of the doctrines taken up again in *Metaphysics* Λ 6-7 first occur in them. As tools for interpreting Aristotle's *Metaphysics*, Thābit appears to adopt frequently Themistius' paraphrase of *Metaphysics* Λ and, occasionally, the Greek Neoplatonic texts translated into Arabic.

Thābit's knowledge of Greek, Syriac, and Arabic makes particularly difficult an investigation of his possible sources for the *Concise Exposition*. The following remarks are intended as a tentative outline only. If Thābit did in fact read Aristotle's *Metaphysics* in Arabic, he could have used the complete translation by Usṭāth (10th c.),[14] or the less extensive translation by

[13] See the comments of §1 below for details.

[14] Usṭāth's translation was made for al-Kindī directly from the Greek, according to its editor M. Bouyges. See *Averroès*, *Tafsir ma ba'd at-Tabi'at, Texte arabe inédit établi par M. Bouyges, Notice* (*Bibliotheca arabica scholasticorum*, Série arabe, V, 1, Beyrouth, 1952, pp. CLXXVI-CLXXVII. The original extent of this translation is uncertain. Ibn al-Nadīm's remark in the *Fihrist* (completed in 377/988) in this respect is not completely clear (ed. Flügel, pp. 251.25-252.1), although it has been interpreted by Bouyges (*ibid.*, pp. CXVIII-CXIX), Peters (*Aristoteles*, p. 50) and A. Martin ("Aristote de Stagire, La *Métaphysique*, Tradition syriaque et arabe," in R. Goulet (ed.), *Dictionnaire des Philosophes antiques*, Paris, CNRS, 1989, vol. I, pp. 528-534) to mean that Usṭāth's translation encompassed all the books of the work. A translation by Usṭāth of books Alpha Elatton, Beta-Iota and Lambda is preserved in the manuscript of Averroes' *Tafsīr* on the *Metaphysics* (*Averroès*, *Tafsir ma ba'd at-Tabi'at*,

Isḥāq ibn Ḥunayn.[15] Usṭāth's translation apparently contained Book Lambda;[16] whether or not Isḥāq's translation also contained this book is uncertain.[17] Thābit could also have used Shamlī's (9th c.) translation of Lambda.[18] Aside from these literal translations, Thābit could have employed the anonymous shortened paraphrase of chapters 6-10 of Book Lambda, particularly if Badawī's attribution of it to Isḥāq ibn Ḥunayn turns out to be correct.[19]

Of the commentaries on Aristotle's *Metaphysics*, Thābit may have known the Syriac version of Alexander of Aphrodisias' literal commentary on Book Lambda.[20] He surely knew Themistius' paraphrase of Lambda, at least in one of its two Arabic recensions. Both a full Arabic translation (quoted in Averroes' *Tafsīr*)[21] and an abbreviated version of this paraphrase

---

Texte arabe inédit établi par M. Bouyges; *Bibliotheca arabica scholasticorum*, Série arabe,V, 2, VI, VII; Beyrouth, Imprimerie Catholique, 1938-1948).

[15] It is uncertain if Isḥāq's translation was from the Greek or the Syriac; see Bouyges, *Notice*, pp. CLXXV-CLXXVI. The *Fihrist* describes this translation only as covering "several books." J. Tkatsch, *Die arabischen Übersetzungen der Poetik des Aristoteles*, Wien / Leipzig, 1928, vol. I, p. 83a.17, thought it to be complete, a hypothesis towards which Bouyges was not inclined (*Notice*, p. CXXI). One of these books of Isḥāq's translation is specified as book Alpha Elatton by the *Fihrist* (in Averroes' *Tafsīr* this is the main translation, except for the final lines 995 a 17-20, which are missing). The identity of the other books is uncertain (they possibly include books Gamma, Theta, Iota and Lambda). In fact, in commenting on them, Averroes quotes "another translation" in addition to the main translation he uses; this translation might be Isḥāq's.

[16] A translation of Lambda 1072b16-end, allegedly by Usṭāth, is extant in Averroes' *Tafsīr*.

[17] According to the *Fihrist* (p. 251.29), Isḥāq translated book Lambda into Syriac, and some of the translations Averroes quotes in his commentary of this book seem to derive from Syriac (cf. Bouyges, *Notice*, pp. CLXXIX-CLXXX). Bouyges, however (*ibid.*, p. CXXXII), regards as unlikely the presence of Lambda among the books translated by Isḥāq.

[18] *Fihrist*, p. 251.30; Bouyges, *ibid.*, p. CXXI.

[19] This paraphrase was first edited by Abū al-ʿAlā' ʿAfīfī in "Tarjama ʿarabiyya qadīma li-*Maqālat al-Lām* min *Kitāb mā baʿda al-ṭabīʿa* li-Arisṭū/An Ancient Arabic Translation of the *Book Lambda* of the *Metaphysics* of Aristotle," *Bulletin of the Faculty of Arts of the Egyptian University*, 5, 1937, pp. 89-138, and again ten years later by Badawī, *Arisṭū*, pp. 1-11; Badawī evaluates the possible authorial attributions, *ibid.*, introduction, pp. 12-15, and expresses his opinion that it be attributed to Isḥāq ibn Ḥunayn, p. 15.

[20] Abū Bishr translated this commentary (Alexander's original one) into Arabic (*Fihrist*, 251.28-29), apparently from Syriac (Bouyges, *Notice*, pp. CLXXVII-CLXXIX). The Arabic version is partially preserved in Averroes' *Tafsīr*.

[21] The beginning is preserved in MS Damascus, Ẓāhiriyya 4871, and published by Badawī, *Arisṭū*, pp. 329-333.

are extant.[22] According to the *Fihrist*, Themistius' paraphrase was translated into Arabic by Abū Bishr Mattā (d. 328/940).[23] This information possibly refers to the abbreviated version. The full translation, on the other hand, is attributed to Isḥāq ibn Ḥunayn in MS Damascus Ẓāhiriyya 4871 and MS Munich 108 of the Arabic-Hebrew translation[24] – in this latter manuscript Thābit is named as the revisor of the translation. Finally, we might mention Nicolaus Damascenus' summary of Aristotle's philosophy, including the *Metaphysics*, which was translated into Arabic from Syriac.[25]

Other works, tangentially related to Aristotle's *Metaphysics*, with which Thābit may have been acquainted are Theophrastus' *Metaphysics*,[26] the translation of which is attributed to Isḥāq ibn Ḥunayn in MS Tehran Malik 5925;[27] Alexander of Aphrodisias' *On the Principles of the Universe* (*Fī Mabādi' al-kull*), lost in the Greek but which circulated in Syriac and was translated into Arabic;[28] and Galen's *In primum movens immotum* (no lon-

[22] The final part is preserved in the MS Dār al-Kutub *ḥikma* 6M, ff. 206v16-210r7 (cf. D. Gutas, "Notes and Texts from Cairo Manuscripts, II: Texts from Avicenna's Library in a Copy by ʿAbd-ar-Razzāq aṣ-Ṣignākhī," *Manuscripts of the Middle East*, 2, 1987, p. 14, no. 12), and published by Badawī, *Arisṭū*, pp. 12-21. French translation of both recensions by R. Brague in *Thémistius*. The possibility of two Greek recensions cannot be excluded; cf. S. Pines, "Some Distinctive Metaphysical Conceptions in Themistius' Commentary on Book Lambda and their Place in the History of Philosophy," in J. Wiesner (ed.), *Aristoteles, Werk und Wirkung, Paul Moraux gewidmet, II: Kommentierung, Überlieferung, Nachleben*, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 1987; repr. in *The Collected Works of Shlomo Pines, III: Studies in the History of Arabic Philosophy*, Jerusalem, Magnes Press, 1996, p. 177 n. 3.

[23] *Fihrist*, p. 251.29-30.

[24] Badawī, *Arisṭū*, p. 329.2; Peters, *Aristoteles*, p. 52.

[25] See H. J. Drossaart Lulofs, *Nicolaus Damascenus on the Philosophy of Aristotle, Fragments from the First Five Books Translated from the Syriac with an Introduction and Commentary*, Leiden, E.J. Brill, 1965; repr. 1969.

[26] I. Alon, "The Arabic Version of Theophrastus' *Metaphysica*," *Jerusalem Studies in Arabic and Islam*, 6, 1985, pp. 163-217; M. Crubellier, "La version arabe de la *Métaphysique* de Théophraste et l'établissement du texte grec," *Revue d'histoire des textes*, 22, 1992, pp. 19-45; W.W. Fortenbaugh and D. Gutas (eds.), *Theophrastus of Eresus, His Psychological, Doxographical, and Scientific Writings*, New Brunswick / London, Transaction Publishers, 1992; forthcoming critical edition by D. Gutas.

[27] In the *Fihrist* (p. 252.9) it is attributed to Yaḥyā ibn ʿAdī (d. 363/974); cf. G. Endress, *The Works of Yaḥyā b. ʿAdī*, Wiesbaden, 1977, p. 28.

[28] *Maqālat al-Iskandar al-Afrūdīsī fī al-qawl fī mabādi' al-kull bi-ḥasab ra'y Arisṭāṭālis al-faylasūf*, ed. Badawī, *Arisṭū*, pp. 253-277. A more recent edition and translation (not seen for this study) is Charles Genequand's *Alexander of Aphrodisias on the Cosmos, Arabic Text with English Translation, Introduction and Commentary*, Islamic Philosophy, Theology and Science 44, Leiden, E.J. Brill, 2001. The Greek original of this work is not extant. The identity of the Arabic translator is uncertain. More

ger extant in Greek), the Arabic translation of which is documented in Ḥunayn ibn Isḥāq's list of translations under the title *Fī anna al-muḥarrik al-awwal lā yataḥarraku* (no Arabic manuscript of this translation has been discovered thus far).[29]

---

than one recension of this work existed in Arabic. A Syriac version is attested in Sergius of Resh'ainā; cf. H. Hugonnard-Roche, "Note sur Sergius de Resh'ainā, traducteur du grec en syriaque et commentateur d'Aristote," in G. Endress and R. Kruk (eds.), *The Ancient Tradition in Christian and Islamic Hellenism, Studies on the Transmission of Greek Philosophy and Sciences dedicated to H. J. Drossaart Lulofs on his ninetieth birthday*, Leiden, CNWS, 1997, p. 126. An epitome of Alexander's *Fī Mabādi' al-kull* has been edited by G. Endress in "Alexander Arabus on the First Cause, Aristotle's First Mover in an Arabic Treatise Attributed to Alexander of Aphrodisias," in C. D'Ancona and G. Serra (eds.), *Aristotele e Alessandro di Afrodisia nella tradizione araba*, Atti del colloquio *La ricezione araba ed ebraica della filosofia e della scienza greche, Padova, 14–15 maggio 1999*, Padova, 2002, pp. 19-74. An integral French translation of the published text is available in 'A. Badawī, *La Transmission de la philosophie grecque au monde arabe*, Études de philosophie médiévale 56, Paris, J. Vrin, 1968, pp. 121-139. See also the partial translations by F. Rosenthal, *The Classical Heritage in Islam*, London / New York, Routledge, 1975, pp. 146-149 (cf. Badawī, *Arisṭū*, pp. 266.23-270.13), and D. Gutas, *Avicenna and the Aristotelian Tradition: Introduction to Reading Avicenna's Philosophical Works*, Islamic Philosophy and Theology: Texts and Studies 4, Leiden, E.J. Brill, 1988, pp. 215-217 (cf. Badawī, *Arisṭū*, pp. 276.6-277.6). For the Arabic and Latin reception of this work, see C. Genequand, "Vers une nouvelle édition de la *Maqāla fī Mabādi' al-kull* d'Alexandre d'Aphrodise," in A. Hasnawi, A. Elamrani-Jamal and M. Aouad (eds.), *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*, Paris / Leuven, Peeters, 1997, pp. 271-276; and A. De Libera, "*Ex uno non fit nisi unum*, La lettre sur le *Principe de l'univers* et les condamnations parisiennes de 1277," in B. Mojsisch and O. Pluta (eds.), *Historia Philosophiae Medii Aevi, Studien zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters, Festschrift für Kurt Flasch zu seinem 60. Geburtstag*, Amsterdam / Philadelphia, B.R. Grüner, 1991, vol. I, pp. 543-560.

[29] For the title εἰς τὸ 'πρῶτον κινοῦν ἀκίνητον <αὐτό>', see Galen's own list of his works in περί τῆς τάξεως τῶν ἰδίων βιβλίων, ed. J. Marquardt, I. Müller, and G. Helmreich, *Claudii Galeni Pergameni Scripta minora*, Leipzig, B.G. Teubner, 1994-1893; repr. Amsterdam, 1967, vol. 2, pp. 123.4-5. In Ḥunayn's list of his translations (ed. G. Bergsträsser, *Ḥunain Ibn Isḥāq, Über die syrischen und arabischen Galen-Übersetzungen*, Leipzig, 1925; repr. Nendeln, Kraus, 1966, Arabic, p. 51.5-9) he records: "*That the First Mover is not moved*; this book is in one chapter (*maqāla*). I had translated it into Arabic during the Caliphate of al-Wāthiq for Muḥammad ibn Mūsā, and after that I translated it into Syriac. 'Īsā ibn Yaḥyā translated [the Syriac translation] into Arabic because the manuscript that I translated earlier was lost. [Then Isḥāq ibn Ḥunayn translated it into Arabic]"; cf. Bergsträsser's translation, *ibid.*, German, pp. 41-42, no. 125; and the English summary by Max Meyerhof in "New Light on Ḥunain Ibn Isḥāq and his Period," *Isis*, 8, 1926, p. 701, who interpolates the information that the first translation was done "about 845 A.D." (Al-Wāthiq reigned 842-847.) See also *id.*, "Über echte Schriften Galens, welche die Araber noch besaßen," in *Festschrift zur*

The fact that there is no contemporary or near-contemporary evidence in our sources for Thābit's composition of the *Concise Exposition* need not raise serious questions about its attribution to him. The earliest reference to the work may be the title *Ikhtiṣār Kitāb Mā ba'd al-ṭabī'a* listed among Thābit's works by Ibn Abī Uṣaybi'a (d. 668/1270).[30] There is no immedia-

---

Feier seines 60. Geburtstages am 8. Dezember 1928 Max Neuburger gewidmet von Freunden, Kollegen und Schülern, Internationale Beiträge zur Geschichte der Medizin., Wien, 1928, p. 259; M. Ullmann, *Die Medizin im Islam*, Handbuch der Orientalistik, Ergänzungsband VI,1, Leiden, E.J. Brill, 1970, p. 65, no. 116. R. Degen, "Galen im Syrischen: Eine Übersicht über die syrische Überlieferung der Werke Galens," in V. Netton (ed.), *Galen: Problems and Prospects*, London, The Wellcome Institute for the History of Medicine, 1981, p. 158, no. 118, notes the Syriac translation is "verschollen." The Arabic translation is also listed in Ibn Abī Uṣaybi'a, *loc. cit.* (where we must correct *al-maḥall* to *al-muḥarrik* as noted above), and al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, p. 131.18-19. Determining the nature of Galen's work is somewhat complicated by the disparate character of the citations of it in the literature. Ibn Abī Uṣaybi'a, *'Uyūn al-anbā'*, p. 77.11-25, quotes Ibn al-Maṭrān's (d. 587/1191) *Bustān al-aṭibbā'* to the effect that "Galen mentions Moses and Jesus in his treatise *On the First Mover*, saying: 'If I had in mind people who taught their pupils in the same way as the followers of Moses and Christ teach theirs – for they order them to accept everything on faith – I should not have given you a definition'" (transl. by R. Walzer, *Galen on Jews and Christians*, London, Oxford University Press, 1949, p. 15; see also, 48f., 87ff.). The extant remains of Ibn al-Maṭrān's work (the first volume only) do not contain this quotation; cf. the facsimile published by Mahdi Mohaghegh, *Bustān al-aṭibbā' wa-rawḍat al-alibbā'*, Tehran, Center for the Publication of Manuscripts, 1989. It may have been in the second volume, which appears to be lost; however, see M. R. al-Shabībī, "Bustān al-aṭibbā' wa-rawḍat al-alibbā' aw Dimashq fī 'aṣrihā al-dhahabī," *Majallat al-Majma' al-'Ilmī al-'Arabī bi-Dimashq*, 2, 1923, pp. 2-8. A refutation of Galen's work by Alexander of Aphrodisias may have been better known in the Arabic tradition; the quotations of it in the Jābirian Corpus present a picture of Galen's work that is to be contrasted with Ibn al-Maṭrān's putative quotation. The reference in the Jābirian corpus is found in *Kitāb al-Baḥth [fī ṣan'at al-ṭilasmāt]*, ed. by Paul Kraus in *Jābir Ibn Ḥayyān, Contribution à l'histoire des idées scientifiques dans l'Islam, I: Le Corpus des écrits Jābiriens*, Cairo, IFAO, 1942-3, p. 517.16 ff., where Galen is said to be the first to refute Aristotle, in his *On the First Mover*, on the contrary movements of the stars. Kraus (*ibid., II: Jābir et la science grecque*, p. 328) doubted that the author was citing Galen's argument directly from the Arabic translation of εἰς τὸ 'πρῶτον κινοῦν ἀκίνητον <αὐτό>'; rather he suggested that the quotation came through Alexander of Aphrodisias' refutation, since the author cites that refutation in his discussion. Kraus, II: 327, provides a French translation of the relevant passages. As we have seen, Aḥmad ibn al-Ṭayyib al-Sarakhsī appears to have followed Alexander in refuting Galen's work.

30 *'Uyūn al-anbā'*, vol. I, p. 218.14-15. Cf. H. Daiber, "New Manuscript Findings from Indian Libraries," *Manuscripts of the Middle East*, 1, 1986, p. 34 and n. 98, who says that the "summary [...] is not mentioned in any bio-bibliographical source," and was overlooked by Peters, *Aristoteles*, pp. 49-52. Peters, pp. 50-51, was aware of what he calls Thābit's "paraphrase-commentary" and makes reference to Ayasofya 4832

tely identifiable reference to or reliance upon a summary of the *Metaphysics* of any kind by Thābit in the writings of the major philosophers between Thābit's death and the thirteenth-century reference by Ibn Abī Uṣaybiʿa. Against this sort of negative evidence, we have the very presence of Thābit's *Concise Exposition* in a relatively early manuscript (AS 4832) of respectable pedigree which, moreover, contains numerous other authenticated treatises by Thābit. The extensive quotation and commentary of the work by the Damascene Ḥanbalī scholar Ibn Taymiyya (d. 728/1328), whose bibliographical acumen and faithfulness to his sources in general are always impeccable, further confirms a long history of the work's attribution to Thābit.

• The Manuscripts

A. Ayasofya 4832 (**A**)

The codex Ayasofya 4832, which forms the base manuscript for the edition below, is made up of two parts. The First Part (ff. 1-152) contains numerous scientific works by Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, his son Abū Isḥāq Ibrāhīm, al-Qabīṣī, al-Nayrīzī, and al-Kūhī. Thābit's *Concise Exposition*, ff. 60v-62r, stands out among these scientific texts. The Second Part of the codex (ff. 153-232) is almost exclusively made up of works by the philosopher al-Kindī, with a few works by al-Kūhī and the Banū Mūsā, to which were added in later hands works by Ibn al-Haytham, al-Dawānī, and ʿUmar ibn al-Muẓaffar.

A physical description of the manuscript is as follows.[31] 22 × 12.5 cm (text 18 × 9 cm), 232 ff., varying lines. Black leather and board fitted with green cheesecloth. Flap. Modern rebinding of 15 quires of 16 folios (with some irregular quires). Block has broken. Paper is a medium rag, brown

---

(*ibid.*, n. 12), but he appears to have thought it was Thābit's revision of Isḥāq ibn Ḥunayn's translation of Themistius (*ibid.*, p. 52).

[31] This is based on an autopsy completed in June 1998, and verified by a similar autopsy conducted by F. Jamil Ragep at the same time. Compare the descriptions by Ritter and Plessner, "Schriften Ja'qūb ibn Isḥāq al-Kindī's," p. 363; G. Celentano, *Due Scritti Medici di al-Kindī*, Supplemento n. 18 agli *Annali* 39, 1979, fasc. 1, Napoli, Istituto Orientale di Napoli, pp. 2-6, who worked from the microfilm [j 3626] of the First Part of the codex held in Dār al-Kutub, Cairo; Régis Morelon in *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*, p. 297; Roshdi Rashed and Jean Jolivet in *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī, Volume II: Métaphysique et cosmologie*, Islamic Philosophy and Science, Texts and Studies XXIX, Leiden, E.J. Brill, 1998, pp. x-xi; and Roshdi Rashed and Hélène Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān: Logique et géométrie au* X^e *siècle*, Islamic Philosophy, Theology and Science, Texts and Studies XLII, Leiden, E.J. Brill, 2000, pp. 335-336.

oriental. Black ink. There are a number of dates found throughout the codex, the earliest of which is 19 Rajab 568/6 March 1173,[32] but the manuscript is likely older.[33] Three hands. Script of original scribe is a superb *naskh*, with archaisms (in the *kāf* and *ṭā'*) that will be typical of the *maghribī* script and a left-slanting *tarwīs*. Diagrams. Blank folios between original works, some of which have been used by later hands. The second, later hand is a hurried *naskh,* at f. 57r-v for the treatise *Sabab ru'yat al-kawākib* (here in a still later hand ascribed to Ibn Sīnā),[34] dated 755/1354-5. The third, later hand, is a sloppy *naskh*, at ff. 226-7 (new foliation 74-75, for al-Dawānī's work). The second, later hand is found again at ff. 228-229 (new foliation 76-77, for Ibn al-Haytham's work). Yet another hand on the title page of the First Part of the codex has given the collection the title *Majmū'a min rasā'il fī al-ḥandasa wa-ghayrihā.*[35]

The title page of the First Part contains a number of interesting notes, beginning with the following.

قيل إنّ هذا الكتاب لابي على الحسين بن عبد الله ابن سينا وصنّف منه رسائل كثيرة والله أعلم

> It is said that this book belonged to ... Ibn Sīnā and that he arranged (?) many of its treatises. God knows best.

There is another related note found on the title page:

وذُكر أنّ هذا الخطّ خطّ الشيخ الرئيس حجة الحقّ شرف الملك أبي على الحسين بن عبد الله بن سينا
رحمه الله. كتبه أبو إسحق يحيى بن القاسم بخطّه.

What is to be understand from these notes? A simple interpretation, based on the first part of the first note, is that the manuscript was once part of Ibn Sīnā's library. More problematic is the phrase *ṣannafa minhu rasā'ila kathīratan.* The verb *ṣannafa* in its basic sense means "to compile,

[32] See the ownership note of Ibn al-Ḥamāmī below.

[33] Ritter, "Schriften Ja'qūb ibn Isḥāq al-Kindī's," p. 363, suggested that the codex be dated to the 5th/11th century; Rashed / Jolivet, *ibid.*, concur.

[34] GAL I, p. 460, lists a Berlin manuscript containing the work *R. fī sabab ẓuhūr al-kawākib laylan wa-khafā'ihā nahāran*, written by Abū al-Barakāt al-Baghdādī (d. 560/1165); Y. Mahdavī, *Fihrist-i nuskhah-hā-yi muṣannafāt-i Ibn Sīnā*, Tehran, 1954, p. 277, no. 171, also noted this ascription in other MSS, but overlooked the fact that the copy in AS 4832 is dated 755/1354-5.

[35] A photograph (of poor quality) of the title page of AS 4832 can be found in Dhabīḥ Allāh Ṣafā's *Jashn-nāmah-yi Ibn Sīnā, I: Sargudhasht va ta'līfāt va ash'ār va ārā'-i Ibn-i Sīnā*, Silsilah-yi Intishārāt-i Anjuman-i Āthār-i Millī; Yādgār-i Jashn-i Hizārah-yi Abū 'Alī Sīnā/Collection du millénaire d'Avicenne 26:1, Tehran, 1331Sh/1951, facing page 97; cf. in the same volume a purported autograph of Ibn Sīnā from MS Paris 2859, facing page 6. A negative image of the title page is also reproduced in Celentano, *Due scritti*, Tavola 1.

to arrange the constituent parts of s.th." especially a book, whence the sense of "to compose, write a book". The author of the note may have for some reason believed that Ibn Sīnā authored the works in AS 4832, but this is manifestly incorrect, if he did not simply mean that Ibn Sīnā composed many of his treatises from this book, i.e. taking this latter as source. It is unlikely that Ibn Sīnā copied the manuscript, and that is certainly not what is meant by the second note in which we are told that "this hand" is Ibn Sīnā's hand. The reference in this second note appears to be to roughly three lines of writing below the note that have been erased.[36] The likeliest interpretation (if the notes are in any way to be considered authentic pieces of information) is that Ibn Sīnā brought together a number of works that had previously existed in independent quires (or perhaps the two parts of the codex) to form a collection of scientific treatises. If this interpretation is a viable one, we have in AS 4832 a book that was once part of Ibn Sīnā's library. However, this is by no means certain, and it has been suggested that the notes are simply incorrect.[37]

There are also a number of miscellaneous notes in the codex. The most immediately recognizable is the *waqf* record of the Ottoman sultan Maḥmūd ibn Muṣṭafā II (r. 1143-1168/1730-1754) various versions of which are found in so many of the Arabic manuscripts held in the libraries of Istanbul:

قد وقّف هذه النسخة سلطانُنا الأعظم والخاقان المعظّم مالك البرَّين والبحرَين خادم الحرمَين الشريفَين
السلطان بن السلطان السلطان الغازى محمود خان وقفًا صحيحًا شرعيًا حرّره الفقيرُ أحمد شيخ زاده المفتي
بأوقاف الحرمَين الشريفَين غفر لهما

In addition to the Ibn Sīnā notes, the title page contains four ownership statements, one of which (3) is dated 19 Rajab 568/6 March 1173, the earliest date in the codex.

[36] There is a similar note concerning Ibn Sīnā's hand below the first one, in five lines written vertically.

[37] Rashed / Jolivet, *ibid.* The practice of falsely endorsing a manuscript with a famous author's name was not unknown. In al-Sakhāwī's biography of one Majd al-Dīn Abū al-Fatḥ Muḥammad al-Ḥarīrī (d. 864/1459), a book dealer of Cairo, we find the following: "He would buy a book for little money from someone unfamiliar with it, then write on it that it was in the handwriting of so-and-so, and resell it. It could be an honest mistake because of the writing's similarity, but frequently it was intentional..."; transl. Franz Rosenthal, "Ibn Khaldūn's Biography Revisited," in I. R. Netton (ed.), *Studies in Honour of Clifford Edmund Bosworth*, Volume I, Leiden, E.J. Brill, 2000, p. 45.

1. في نوبة محمد بن أبي القاسم الحسينى[38]
2a. في نوبة أبي الفتوح بن كاميار الآية[39]
2b. في نوبة أبي الفتوح بن كاميار برؤية فى نصح اتخذته[40]
3. صار لابن الحَمامى أبي زيد بن علي فى التاسع عشر من رجب سنة ثمان وستين وخمسمئة[41]

Finally, there is an interesting note, at the end of Ibrāhīm ibn Sinān's *Kitāb fī misāḥat al-qaṭ' al-mukāfi'* (79r) in the First Part of the codex:

كان فى صدره مكتوباً ما هذه حكايتُه: كان أبو اسحاق ابراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً ثم ذكر أنّه ضاع منه فعمل كتاباً أخر وذكر هذه النسخة فى صدر المقالة التي أعادها.

At the beginning of [this work] there was written [a note] a summary of which is [as follows]: Abū Isḥāq Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit made [i.e. authored] this book a long time ago. Then he said that he lost it and so he made another and he mentioned this [old] copy at the beginning of the treatise that he rewrote.

This note would suggest that the copy of Ibrāhīm's work in AS 4832 was made from a descendant of the author's second holograph, further confirming that this codex is an important repository of early copies.

B. Osmania University Library acq. 1408 (**O**)

A brief contents list of this codex was provided by Hans Daiber in 1986.[42] Daiber did not provide a detailed physical description, but he did

[38] Rudolph Sellheim, *Arabische Handschriften, Materialien zur arabischen Literaturgeschichte*, *Verzeichniss der Orientalischen Handschriften in Deutschland XVII, Reihe A, Teil I*, Stuttgart, Franz Steiner, 1975, records an ownership note by one Muḥammad ibn Abī al-Qāsim al-*Hasanī* al-Tunusī, dated 1142/1729 in a manuscript of al-Ashtarkūnī's (d. 538/1143) *al-Maqāmāt.*

[39] A Kāmyār is named as the ruler of Dihistān who defended his city against the Seljuk Tugril Beg in 434/1042-3 in Ibn al-Athīr, *al-Kāmil fī al-ta'rīkh* (ed. C. Tornberg, 1863, vol. 9, p. 329.12) and another Kāmyār is named as *amīr* of the Seljuk Muḥammad in Iṣfahān in 505/1112-13 (*ibid.*, vol. 10, p. 345.12). See F. Justi, *Iranisches Namebuch.*, Marburg, 1895, p. 154a. If either of these individuals was Abū al-Futūḥ's father, Ritter's proximate dating would be verified.

[40] "In the possession of [...] upon consideration of advice which I took." Cf. Ibn Manṣūr, *Lisān al-'arab*, Beirut, Dār al-Ma'ārif, s.n., *sub n.ṣ.ḥ.*

[41] The vocalization al-Ḥamāmī seems to be standard; cf. al-Zabīdī, *Tāj al-'arūs min jawāhir al-Qāmūs*, ed. 'Alī Shi'rī, Beirut, Dār al-Fikr, 1994, vol. 16, p. 174a, on Abū Sa'd ibn al-Ṭayūrī, also known as Ibn al-Ḥamāmī; and Ibn Khallikān's gloss on Ibn Durayd's name in *Wafayāt al-a'yān,* vol. 4, p. 328.

[42] "New Manuscript Findings," p. 34.

note that the manuscript is damaged by water stains and worming. While the manuscript appears to be undated, it cannot be much earlier than the eighteenth century.[43] Thābit's *Talkhīṣ* is found on folios 4v-7r.

The excessive damage suffered by MS O has affected the text in the inside margins of each folio. But because access to MS O for the present edition was limited to the photographs generously provided by Hans Daiber, it is difficult to determine what percentage of the damage is attributable to the physical damage of the manuscript itself and what percentage is attributable to problems with those photograph exposures. To list all of the damaged passages in the critical apparatus of the edition would make the apparatus excessively unwieldy, with no perceivable benefit to the reader. However, reference to these damaged passages has been made in the apparatus in those cases where the reading of MS A and Ibn Taymiyya's quotations (Δ) differ or where the reading of MS A is questioned, in order to signal to the reader that no evidence is available from MS O.

C. Ibn Taymiyya's Scholia (**Δ**)

The evidence from Ibn Taymiyya's *Dar' Ta'āruḍ al-'aql wa-al-naql*[44] is actually of two types, both subsumed under the general description of scholia. The first is what appears to be almost direct quotations of about half of Thābit's text (§§ 2-6 of the edition below). The second consists of Ibn Taymiyya's scholia (with lemmata) on Thābit's text. The two types differ from one another primarily in terms of how useful they are in establishing the original text of Thābit's *Talkhīṣ*. The direct quotations may actually be considered an additional witness in establishing the text, inasmuch as Ibn Taymiyya must have had a copy of Thābit's work from which he composed his refutation. However, these must be used with caution, since it is

[43]Sezgin, *GAS* V, p. 80, n. 4, gives the date 993 H., but the origin of this information is not clear since there is no catalogue of the Osmania University Library's Arabic manuscript holdings. In the same place, Sezgin records the manuscript's shelf number as 1402, but has the correct foliation for our manuscript.

[44] M.R. Sālim's edition (originally in the series *Maktabat Ibn Taymiyya, al-Qism al-Awwal 3*) has been reprinted numerous times. The publication used for this study is Beirut, Dār al-Kunūz al-Adabiyya, s.n. Ibn Taymiyya's quotations and scholia of Thābit's work are found in vol. 9, pp. 272-321. We can establish with relative certainty the dates between which Ibn Taymiyya must have composed the *Dar'*. As summarized by Sālim (introduction, 7-10): in the *Dar'* itself, Ibn Taymiyya mentions his stay in Egypt 705-712/1305-1312; Ibn Taymiyya later responded to a refutation of the *Dar'* by a certain al-Sharīshī who died in 718/1318. Thus, the *Dar'* must have been written between 712-718/1312-1318. Hans Daiber, in a private communication, first noted Ibn Taymiyya's refutation of Thābit's work. The refutation is a subject that lies beyond the scope of this paper, but Yahya Michot informs us that he has completed a translation of Ibn Taymiyya's refutation and hopes to publish it shortly.

impossible to determine to what degree Ibn Taymiyya (or his modern editor) may have "corrected" that posited witness. The scholia, which include repeated phrases or entire passages (lemmata) of Ibn Taymiyya's quotations of Thābit's text, must be considered less reliable because Ibn Taymiyya often alters parts of Thābit's text to make it more amenable to the grammatical and syntactical arrangement of his commentary. However, these scholia become useful in an unexpected manner. There is some evidence that M. R. Sālim, the editor of the *Dar'*, may have made editorial choices which are inconsistent with the manuscript readings of Ibn Taymiyya's quotations of Thābit's text.[45] These editorial choices appear to simplify the readings of the manuscripts of the *Dar'*. In some cases, Ibn Taymiyya's scholia suggest a reading closer to that of the quotation which was emended by Sālim. Two examples will suffice to make this point clear.

1.a. MS A reads: لم تُعَقْ من كلّ عائق
1.b. Ibn Taymiyya's quotation reads: لم يعتور ذلك شيء
1.c. Ibn Taymiyya's commentary includes the phrase: إلاّ لعائق

2.a. MS A reads: ينزل
2.b. Ibn Taymiyya's quotation reads: يترك
2.c. Ibn Taymiyya's commentary reads: نزل

These cases stand out because Ibn Taymiyya's quotations are, on the whole, very close to Thābit's text, discounting variants attributable to scribal error and other minor unnoted emendations by Sālim. This situation raises questions about the reliability of Sālim's edition of Ibn Taymiyya's text, but in lieu of examining all of the extant manuscripts of Ibn Taymiyya's *Dar'*, for now we must be satisfied with a record of the readings of Sālim's edition. To be sure, such emendations appear to be isolated instances, and Sālim was an otherwise cautious and reliable editor.

[45] In a note to his edition of the *Dar'* (p. 272, n. 1), Sālim recounted his unsuccessful efforts to locate a copy of MS A at the Arab League's Institute of Manuscripts (Maʿhad al-Makhṭūṭāt) in Cairo.

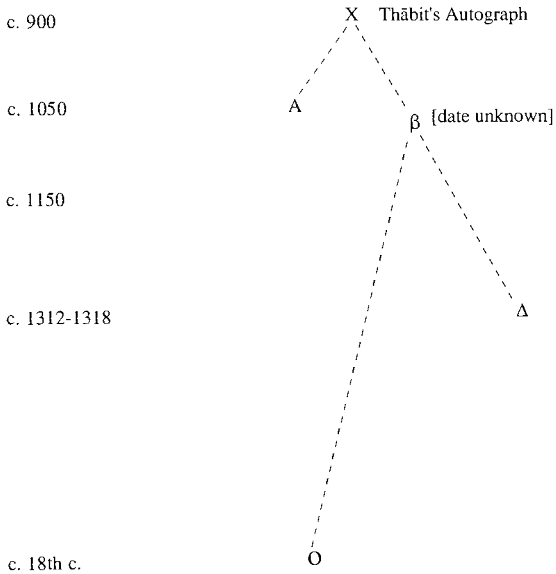
Collation of passages: Thābit's *Talkhīṣ* (edition below), Ibn Taymiyya's Quotations and Scholia

Talkhīṣ	Ibn Taymiyya Quotation	Ibn Taymiyya Scholia
737.18-20 + 737.5-6	272.5-8	
737.8-10	272.9-11	
737.21-739.11	272.12-273.10	273.11-14
739.12-17	273.15-20	
739.18-741.11	274.3-19	274.1-2 274.20-278.11
741.12-25	278.12-279.6	279.7-280.15
741.25-743.8	280.16-281.3	281.4-283.15
743.9-10	283.16-18	283.19-284.12
743.11-14	284.13-16	284.17-286.5
743.14-745.6	286.6-20	286.21-294.16
745.7-747.9	294.17-296.6	296.7-321.2

• The Stemma

The evidence available to us in constructing a stemma of the manuscripts is quite complicated for a number of reasons, including the relative paucity of manuscript exemplars; the great distance of time that separates the two manuscripts; and the problems involved in verifying the readings of Ibn Taymiyya's Scholia (**Δ**). Many of the variants displayed by **O** against **A** are attributable to scribal ignorance or error, although there are enough significant variants to rule out the possibility of a descent of **O** from **A** (to note just a few in the critical apparatus to the pages.lines of the edition below: 737.19; 739.1 [second entry]; 739.2 [second entry]; 741.4 [second entry]). The factors involved in determining the position of **Δ** in the stemma are too variable to allow precise comment. Its readings are certainly superior to **O**, a fact perhaps to be expected, considering the relative dating of the two exemplars. In the majority of instances **Δ** agrees with **A**. But there is some evidence that **Δ** and **O** may share a common ancestor separate from that of **A** (741.15 [both entries]; and 747.5). However, we can have no idea as to the precise nature of the exemplar available to Ibn Taymiyya nor to what degree he may have corrected it in the process of quotation. A second, modern layer of correction to Ibn Taymiyya's text has also been observed. The data, thus, have become too corrupted to allow certainty.

A serves as the base text in the edition below, with **O** in second place, and **Δ** in third place. A general picture of the manuscript stemma is presented here. Broken lines represent an unknown number of intermediary apographs.



Sigla and Other Abbreviations

A	MS Ayasofya 4832
O	MS Osmania University Library acq. 1408
Δ	Ibn Taymiyya's quotations, scholia, and lemmata

R/B	Reisman/Bertolacci
S	Sālim's edition of Ibn Taymiyya's *Dar'*

*	Before word in apparatus refers to numbered instances of word in the line
1, 2, 3	Before word in apparatus indicates which instance of variant
add[ed by]	
codd.	Codices agree in reading
conj[ectured by]	Conjectured reading, followed by identity of editor
corr[ected by]	Correction of the *rasm* (*ductus*) of a word or phrase
dam[aged in]	Passages in MS O lost to physical damage of the exemplar
lem[ma]	Identifies Ibn Taymiyya's lemma, followed by page.line numbers
om[itted in]	Text omitted in exemplar
read[ing by]	Reading of pointing, followed by identity of editor
rep[eated in]	Text is repeated in exemplar
ṣ[aḥḥa]	Scribe's correction in margin of exemplar
schol[ium]	Identifies Ibn Taymiyya's scholium, followed by page.line numbers
secl[uded by]	Seclusion of word in text, followed by identity of editor
ẓ[unna]	"presumably"; scribe's conjectural reading in margin of exemplar
voc[alized by]	Vocalization suggested by editors

< > In text: encloses conjectural addition to the text by editors.

[ ] In text: encloses word secluded by editors. In apparatus: encloses unreadable words represented by suggested number of letters or words. If letters, only number appears; if words, "words" follows. In translation: encloses explanatory additions to the text.

Note: Paragraph divisions and numbers, and punctuation have been added by the editors.

TEXT AND TRANSLATION

On the Concise Exposition of what Aristotle presented in his book Metaphysics *of [topics] that proceed according to the method of demonstration, not persuasion*

Fī talkhīṣ mā atā bihi Arisṭūṭālīs fī kitābihi fī Mā ba'd al-ṭabī'a mimmā jarā al-amr fīhi 'alā siyāqat al-burhān siwā mā jarā min dhālika majrā al-iqnā

In the name of God, the Merciful, the Compassionate.
There is no success except with God

Thābit ibn Qurra's Treatise on the Concise Exposition of what Aristotle presented in his book *Metaphysics* of [topics] that proceed according to the method of demonstration, not persuasion

Written for the Vizier Abū al-Ḥusayn al-Qāsim ibn ʿUbayd Allāh

[1. *Introduction*]

[Thābit ibn Qurra] said: Aristotle entitled this book of his *Metaphysics* both because his intention in it was to investigate a substance that is not in motion and insusceptible to desire for anything outside its essence, and because this is not the behavior of natural things, although, in order to explain that, he is forced to investigate, as he proceeds, many things about substance that is in motion.

Plato, on the contrary, raises that essence that is not in motion above substance and places substance under it, i.e. according to cause and caused, since in his opinion one concept does not encompass both. However, if we understand the actual doctrine that both these men follow, their differences on that [topic] need not prejudice us in what we want to learn about this essence that is not in motion. In sum, the only constraint is that [this study] is an investigation into what is really one, since nothing can be said about it but from the perspective of its action and relatively and from outside. Aristotle in this book of his presents obfuscatory statements in which he aims at one end which, once it receives full commentary and explanation, is stated in the following manner.

[2. *The First Mover is the cause of the corporeal substance's existence*]

All corporeal substance, both the kind that exists and the kind that is generable, subsists only through the nature proper to it; its proper nature subsists only through its proper form; and its proper form, which gives its

بسم الله الرحمن الرحيم
وما توفيق إلاّ بالله

٦٠-ظ

مقالة ثابت بن قرّة
في تلخيص ما أتى به أرسطوطاليس في كتابه فيما بعد الطبيعة
ممّا جرى الأمر فيه على سياقة البرهان
سوى ما جرى من ذلك مجرى الإقناع
كتبها للوزير أبي الحسين القاسم بن عبيد الله

١ . قال إنّما عَنْوَنَ أرسطوطاليس كتابَه هذا فيما بعد الطبيعة لأنّ قصده فيه البحث عن جوهر غير متحرّك وغير قابل للشوق الى شيء خارج عن ذاته ولأنّ ليس هذه سبيل الأمور الطبيعية وإنْ كان قد يضطرّه الأمر في تبيان ذلك الى أنْ يبحث في طريقه عن أمور كثيرة من أمور الجوهر المتحرّك .

على أنّ أفلاطن يرفع تلك الذات غير المتحرّكة عن الجوهر ويجعل الجوهر تحتها ، أي على جهة العلة والمعلول ، إذ كان ليس يعمّهما في رأيه معنى واحد أصلاً . فأما نحن فإنّا إنْ فهمنا نفس المعنى الذي يذهب اليه كلّ واحد من هذين الرجلين لم يَضُرَّنا إختلافُهما في ذلك فيما نريد أنْ نعلمه من أمر هذه الذات غير المتحرّكة إلاّ أنّه بالجملة بحث فيما كان واحداً بالحقيقة إذ لا يقال عليه شيء اللهمّ إلاّ من جهة فعله وبالإضافة ومن خارج . وإنّ أرسطوطاليس يأتي في كتابه هذا بأقاويل فيها إغماض يرمي فيها الى غرض واحد ، إذا وَفَى حقّه من الشرح والبيان ، قيل على هذه الجهة :

٢ . إنّ الجوهر الجسماني كلّه الموجود منه والمتكوّن إنّما قوامه بطبيعته الخاصّية به ، وطبيعته الخاصّية به إنّما قوامها بصورته الخاصّية به ، وصورته

هذه مقاله لثابت بن قرة في تلخيص ما أتى به أرسطو في كتابه ما بعد : A مقاله - الله **3-7**
om. Δ كتبها - الله **7** Δ صناعة : A, O سياقة **5** O الطبيعة مما جرى الامر فيه على سياقة برهانية
بحث - جهة **17-18** dam. O لما ذهب : A فأما - فهمنا **15** add. O ثابت بن قرة : A قال **8**
Δ قُبِل : A قيل **20** dam. O باقـ فيها في كتابه هذه : A في كتابه هذا بأقاويل فيها **19** om. O
الموجود منه **21** O يفى هذه الجهة الجوهر الجسماني كله [-3 words-] ان : A قيل - كله **20-21**
: A الخاصية 2* **22** om. O بطبيعته - قوامها **21-22** Δ الوجود مبتدأ لمتكون : A, O والمتكوّن
Δ الخاصة

essence subsistence, subsists only through its proper motion. – Everything that is in motion in a way proper to it moves only toward a perfection; the perfection of everything is suited and appropriate to its nature; everything that moves toward what is suited and appropriate to its nature does so through its desire, love, and yearning for it; and the desired thing is a cause of the motion of the thing moving toward it through desire, while the desiring thing is what is caused with respect to that cause. – In that motion and the motion of every body, every one of them is conveyed forward and ascends to a First Unmoved Mover, as he explained in his *Physics*. For, even if one [body] is found to move another, the highest thing in motion is so from a mover that is not in motion. – The First Mover is the cause of the form that gives subsistence to the substance of all the things that are in motion in their proper way. Thus, the subsistence of the substance of each one of them does not belong to it in itself, but rather is from something which is the first ground for its motion.

Therefore, what Aristotle says is that the motion of everything that is in motion is due to the desire for something, and the first form of what is generable and what exists is the motion proper to it. The First Mover, then, is the principle and cause of the existence and perdurance of the forms of all corporeal substances. For, when we imagine the removal of natural motion (or, if you want to say, the potencies of any body to which it belongs), their substance undoubtedly passes away.

[3. *Discussion of an objection*]

If someone thinks that when the natural form of this substance is deemed to cease from it, [the substance] then breaks up into something else simpler than it in whose nature there is no proper motion – at which point, [the simple thing] is not in itself caused, but rather what is made up of it is caused – then Aristotle says that this is an utterly false belief, because that simple thing then exists only in the imagination, whereas in itself, treated separately, it neither exists in reality nor does its essence subsist.

الخاصّية به المقوّمة لذاته إنّما قوامها بحركته الخاصّية به. وكلّ متحرّك بحركة خاصّية به فإنّما يتحرّك الى تمام، وتمام كلّ واحد من الأشياء ملائم لطبيعته وموافق لها، وكلّ متحرّك الى ما لاءمه ووافق طبيعته فبالشوق والمحبّة والتوق منه اليه يتحرّك، والشيء المتشوَّق اليه علة لحركة المتحرّك اليه بالشوق، والشيء المشتاق معلول له من جهة تلك العلة. وفي تلك الحركة وحركة كلّ واحد من الأجسام فتنساق كلّها وترتفع الى محرّك أول لا يتحرّك كما قد بيّن ذلك في كتابه في السماع الطبيعي لأنّه وإنْ وُجد بعضها يحرّك بعضًا فالمتحرّك الأقصى متحرّك عن محرّك غير متحرّك. والمحرّك الأوّل علّة الصورة المقوّمة لجوهر كلّ واحد من الأشياء المتحرّكة حركة خاصّية، فقوام جوهر كلّ واحد منها ليس هو له من ذاته، لكنّه من الشيء الذي هو السبب الأوّل في حركته.

ولذلك ما يقول أرسطوطاليس إنّ كلّ ما يتحرّك فحركته بالشوق الى شيء، والصورة الأولى فيما هو في الكون وفيما هو موجود الحركةُ الخاصّيةُ به. فالمحرّك الأوّل إذاً هو المبدأ والعلّة في وجود صور الجواهر الجسمانية كلّها وبقائها إذ كنّا متى توهّمنا ارتفاع وجود الحركة الطبيعية – وإنْ شئتَ أنْ تقول القوى من كلّ واحد من الأجسام التي هي له – فسد جوهرُه لا محالة.

٣. فإنْ ظنّ أحد أنّ هذا الجوهر إذا أُنْزِلت صورتُه الطبيعية باطلة منه انحلّ الى شيء آخر أبسط منه ليس في طبيعته حركة خاصّية به فيكون حينئذ في ذاته لا معلول لكنّ المركّب منه معلول، فأرسطوطاليس يقول إنّ هذا الظنّ باطل محال لأنّ ذلك البسيط إنّما يوجد حينئذ في الوهم الفكري فقط، فأما في خاصّة نفسه مفرداً فلا وجود له بالحقيقة ولا قوام لذاته.

فإنما | Δ خاصة : A, O خاصية 2 O هي : A, Δ إنما قوامها | Δ الخاصة : A, O الخاصية 1* 1
| O ايه : A, Δ اليه 1* | O التوق والمحبة : A, Δ المحبة والتوق 4 O اذا تحرك : A, Δ يتحرّك
: A فتتساق : Δ فتنساق 6 O بحركة : A, Δ لحركة | O دلك قُ عليه : A, Δ المتشوّق اليه علة
في | add. Δ أرسطو : A, O بين 7 O فيها فيرتفع كلها : A, Δ كلّها وترتفع | dam. O ـنتاق
منها : A, Δ الاقصى 8 Δ المعروف بالسماع الطبيعي : A, O في السماع الطبيعي | om. O كتابه
| Δ من الاشياء المتحركة : A, O منها | Δ خاصة : A, O خاصية 10 om. O حركة 9 add. O
: A, Δ الحركة 13 Δ كذلك : A, O لذلك 12 codd. في : corr. R/B من 1* | om. Δ هو
: A أنزلت 18 om. Δ هي | O الغربى : A, Δ القوى 16 Δ الخاصة : A, O الخاصية | O بالحركة
لا 20 Δ خاصة : A, O خاصية | om. O منه | O يتحلّ : A, Δ انحلّ 19 Δ قُدِّرت : dam. O
O هكذى : A, Δ الفكري | O محال : A باطلا : Δ باطل محال 21 O ولا معلولا : A, Δ معلول

But this is not the only way in which he understands this belief. Rather, he maintains that in that simple thing, into which it is imagined the corporeal substance breaks up when we imagine the corruption of that form it has, there is the reception of another form. Hence, [the simple thing] is caused, with respect to that reception, by the First Mover. If someone thinks that it is caused with respect to that reception alone, we would say that if we treat the cessation of that reception itself from it to be the same as it having ceased, then its essence would have to cease (i.e. its nature by which it is what it is at that time would pass away and break up), since that essence it has at that time is precisely the [essence] in whose nature the reception [occurs]. So if it is also said that it breaks up into something else, then the response is the same one we gave for the first breaking-up which preceded it. But this [simple thing] cannot break up continually, ad infinitum. From this it has become clear that every corporeal substance is caused in its substance, existence, and perdurance by the First Cause which is the First Principle of the motion of everything.

[4. *The First Principle is the cause of the existence of the universe from eternity*]

Because it does not necessarily follow that every non-existence is temporally prior to existence in anything whose cause of existence is something other than it, nor that every chaos is prior to order, nor that every simple thing is prior to the compound thing – since not everything that is prior to something else (because the subsistence of something else is through it, or by reason of it, or the existence of something else comes from it) must be prior to it in time – for this reason what Aristotle says is that the most excellent [state] for the First Principle is that in which It is the cause from eternity of the existence of everything that exists and the ground for the perdurance of everything that perdures, without having become like that only at some time or after It was not like that – since no existent, indeed nothing, perdures but by virtue of It.

He said: That is because neither the existence nor the subsistence of the heavens and the other natural bodies continue but through the First Principle, i.e. the First Mover. For the form of each one of them is the motion particular to it, and the motion particular to it is that which makes its substance subsist, [and] the removal of which removes its existence. Thus, the First is the cause of the existence of this motion.

He said: So this is more excellent than that the First Cause is the cause of the existence of the universe at some time. He said: This [i.e. "at some time"]

وليس بهذا المعنى فقط يدرك هذا الظنّ، ولكنّه يرى أنّه يوجد، في ذلك البسيط الذي ينحلّ اليه الجوهر الجسماني في الوهم، إذا توهّمنا فسادَ صورته تلك، قبولُ صورة أخرى، فهو معلول في ذلك القبول من المحرّك الأوّل. فإنْ ظنّ ظانّ أنّه معلول من جهة ذلك القبول فقط، قلنا فإنْ أنزلنا إزالةَ ذلك القبول نفسه منه أنّه قد بطل، وجب أنْ تبطل ذاته يعني تفسد وتنحلّ طبيعته التي بها هو حينئذ ما هو، إذ كانت ذاته تلك حينئذ إنّما هي التي في طبيعتها القبول. فإنْ قيل أيضًا إنّها تنحلّ الى شيء آخر، كان الجواب فيه كما أجبنا به في الانحلال الأوّل الذي من قبله. وليس يمكن أنْ ينحلّ / هذا دائمًا الى ما لا نهاية له. فقد تبيّن من هذا أنّ كلّ جوهر ٦١-و جسماني معلول في جوهره ووجوده و بقائه للعلة الأولى التي هي المبدأ الأوّل لحركة الجميع.

٤ . ولأنّه ليس يلزم أنْ يكون كلّ عدم أقدم بالزمان من الوجود فيما علّة وجوده شيء غيره، ولا كلّ لا نظام أقدم من النِّظام، ولا كلّ بسيط أقدم من المركّب لأنّه ليس كلّ ما كان تقدُّمه لغيره، بأنّ قوام غيره له أو بسببه أو وجود غيره عنه، وجب أنْ يكون قد تقدّمه في الزمان، ولذلك ما يقول أرسطوطاليس إنّ الأفضل في المبدأ الأوّل ما يوجد الأمر عليه من أنّه علّة وجود كلّ موجود وسبب بقاء كلّ باقٍ منذ الأبد من غير أنْ يكون إنّما صار كذلك في زمان وبعد أنْ لم يكن كذلك، إذ ليس موجود ولا شيء له بقاء إلاّ به.

وقال وذلك أنّه لم يزل ولا وجود ولا قوام للفلك ولسائر الأجسام الطبيعية إلاّ بالمبدأ الأوّل، يعني المحرّك الأوّل، إذ صورة كلّ واحد منها هي حركته الخاصّية به وحركته الخاصّية به هي المقوّمة لجوهره التي بارتفاعها يرتفع وجوده. فإذاً الأوّل علّة وجود هذه الحركة.

قال فهذا هو [الـ]أفضل من أنْ تكون العلّة الأولى علّة وجود العالم في زمان. قال وكان يجب من هذا أنّ الأشياء الموجودة لم يكن لها بتةً وجودٌ

1 يدرك : A, O يترك Δ | ولكنّه : A, O لكنّه Δ **3** صورته تلك : A, Δ تلك برك الصورة O | صورة - القبول om. O **4** قلنا om. O | **5** أنزلنا : A, Δ تركنا O القبول نفسه منه أنه : Δ القبول منه قد A, O | تفسد : A, O فتفسد Δ **6** طبيعته التي : A, Δ وطبيعته هي O **8** الأول om. O | الذي من قبله om. Δ **10** الأولى om. O, Δ **12** ولأنّه : A, Δ فلانه O **13** لا نظام : A, O الأنظام Δ **14** لغيره om. O | بأن : O فإن A, Δ | له : A, O به Δ **15** وجود : O, Δ وجوده A | يكون قد تقدمه : A يكون متقدمه O, Δ | لذلك : A, O كذلك Δ **17** منذ الأبد : A, Δ متل لابد O **18-19** له بقاء إلا به : A, Δ عمره بقاء O **22** به وحركته الخاصية به هي المقوّمة A, Δ : بهذ حركته الخاصية بهذه المقومة O **24** قال om. Δ would require that the existing things did not have any existence at all for an infinite period of time, and then were brought into existence. From that it would necessarily follow that the existence of the universe would have some other cause participating with the First Cause in [the existence of the universe], or above the First Cause. For, if the First Cause did not have some [other] thing in bringing the universe into existence, and there was no other cause to aid or prompt the First Cause to bring the universe into existence other than Itself, nor a cause to prevent It or hold It back, then there would be no reason to make the existence of the universe come after the existence of the First Cause Itself. So how could the existence [of the universe] be delayed for an infinite period of time and then be brought into existence, like someone sleeping who is then awakened? Aristotle denied that this is the conceivable view.

[5. *The Eternity of the universe does not entail that it be uncaused*]

The opinion that many people have, i.e. that Aristotle's view that the universe is eternal necessarily entails that it is not caused in its substance by a cause outside of it, is deliberately false.

Aristotle says: If the situation were such as is assumed by someone who maintains that the universe has a temporal beginning, then what would be the innovating cause that compelled or prompted the bringing of the universe into existence after it did not exist for an infinite period of time? What would be the cause that drove the First Cause to that? And what would be the organizing cause? – In fact, the advocates of this view are constrained to argue that within the Highest Principle, at which eternity ends in the beginning of any act, there is something potential. But anything potential is not brought [into act] by that to which it potentially belongs without the introduction of an external cause of which it [i.e. the thing to which something potential belongs] becomes an effect in that respect. For, if there is no ground other than its own essence for bringing into act what is has potentially, then the actual existence of that [potential] thing must be coterminous with the existence of that essence that brings it [into act], and that [potential] thing cannot be posterior to the existence of [that essence]. And then the First Cause and Principle would not really be a First Principle because then, if that were Its condition, It would need another principle. Moreover, if the First Cause had something potential at one time which is brought into act at another time, change would necessarily affect Its substance. But this is rejected by all the ancients. So, one should grant to

زماناً بلا نهـاية ثمّ أخرِجت الى الوجود . فيلزم من ذلك أنْ يكون لوجود العـالم علّة أخـرى مشـاركـة للعلّة الأولى فيـه أو فـوق العلّة الأولى لأنّه إنْ لم يكن للعلّة الأولى في إخراج العالم الى الوجود أمرٌ من الأمور ولا هاهنا علّة أخرى تُعين أو تدعو العلّة الأولى الى إخراج العالم الى الوجود غير ذاتها ولا علّة تعوّقها وتربّثها ، فليس لتأخّر وجود العالم عن وجود ذات العلّة الأولى سببٌ يوجبه . فكيف يمكن أنّ يتأخّر وجوده زمانـًا بلا نهاية ثمّ يخرج الى الوجود كحال من كان نائمًا فانتبـه؟ وأرسطوطاليس ينكر أنْ يكون هذا الرأى الجادّ .

٥ . والظنُّ الذي يظنّه كثير من الناس من أنّه يلزم من رأى أرسطوطاليس أنّ العالم أبديّ أنْ يكون غير معلول في جوهره لعلّة خارجة عنه ظنٌّ كاذبٌ.

وأرسطوطاليس يقول فإنْ كان الأمر كما يظنّ من رأى أن للعالم ابتداءً زمانيًا فما العلّة المتجدّدة التي أوجبت أو دعت الى إخراج العالم الى الوجود بعد أنْ لم يكن موجوداً زمانـًا بلا نهاية؟ وما هي العلّة الباعثة للعلّة الأولى على ذلك وما كـانت العلّة المرتّبـة؟ نَعَم ويلزم أهل هذا الرأى أنْ يكون في المبدأ الأقصى الذي عنده يتناهي الأبد في ابتداء كلّ فعلٍ ما هو بالقوة وما بالقوة ليس يخرجه ما هو له بالقوة بغير علّة داخلة عليه من خارج يصير معلولا لها من تلك الجهة لأنّه إنْ كان ليس لإخراج ما هو له بالقوة الى الفعل سببٌ غير ذاته فيجب أنْ يكون وجود ذلك الأمر بالفعل مع وجود تلك الذات المخرجة له وذلك الشيء غير متأخّر عن وجودها فإذاً تكون العلّة الأولى والمبدأ الأوّل ليس بمبدأ أول على الحقيقة لأنّه يحتاج حينئذ إنْ كانت تلك حالَه الى مبدأ آخر وأيضًا فيلزم جوهرَ العلّة الأولى – إنْ كان لها ما هو بالقوة حينًا ثمّ يخرج حينًا الى الفعل – تغيُّرٌ. وهذا أمر قد أضرب عنه

1 زمانًا بلا نهاية A : dam. O : om. Δ | الوجود A, Δ : لا وجود الوجود O 2 فيه أو فوق A, Δ : اوذت O 3 للعلة Δ : العلة A, O 4 أخرى om. Δ 5 تعوّقها وتربّثها read. R/B : تعوقها وترثّها A : تعوقها وثرتها O : ترتبها وتعوّقها Δ 6 وجوده A : dam. O : وجودٌ Δ 7 أرسطوطاليس Δ : أرسطاليس A : dam. O | أن يكون A : dam. O : om. Δ 8 الجادّ read. R/B : الحاد A, O : المجدَّد Δ 9 والظنّ A, Δ : هو الظن O | أرسطوطاليس A, O : أرسطو Δ 12 زمانيًا Δ : زماني A : زمانيً O | المتجدّدة om. Δ 13 زمانًا om. O | هي A : هذه add. Δ 14 نَعَم voc. R/B : نعم A : نَعْم O : om. Δ 16 *2 بالقوة – ليس A, Δ : يخرج O : هذه Δ ما هو | codd. في :corr. R/B 17 من O وما بالقوة لفعل ما هو له بالقوة بل شيء غير شيء 18 *1 وجود A, O: وجوب Δ 19 وجودها A, O : وإن كان O الشيء لما له يصير A, Δ : له A : dam. O : 22 ثم Δ وإن A, O : إن | O يلزم A, Δ : 21 فيلزم Δ add. له سبب غير ذاته Δ لم | حينًا الى الفعل A, O : الى الفعل حينًا Δ

Aristotle that the First Cause has the utmost perfection and completeness that it is possible to have.

And just as it is absolutely impossible that nature delay for so much as a moment any matter from being used in the best way suitable to its kind as long as there is no external cause to prevent it, so too does Aristotle maintain that this state is necessary with respect to the totality of the universe, i.e. in terms of its existence as a whole, since its possibility never ceases, and the possibility it possesses is equivalent to matter.

[6. *The First Principle is the cause of the existence of the universe by means of will*]

However, one group maintains that necessarily, on the basis of this (I mean the necessary co-existence of the universe and the First Cause), the First Cause has no wilful act of production in the existence of the universe, just as It has no act of production in the existence of Its substance. For the existence of the universe cannot be posterior to the existence of the substance of the First Cause. Thus, the existence [of the universe] must follow upon the existence of the First Cause. Therefore, the First Cause is a natural and perfective cause of the universe, the case here being analogous to the case of what the celestial sphere produces and affects through its nature, since the existence of that is coterminous with the existence of the substance of the celestial sphere – especially since Aristotle says that only through desire does the First Mover really move the first thing in motion, which itself is the cause of the motion of generable things. So it would appear most fitting that it would be by way of its nature that the thing desired be so desired and not by way of its will. For the loved and desired thing might very well be asleep or lacking any will when setting in motion whatever loves and desires it.

However, in terms of Its substance and Its other aspects, the state of the First Cause should be considered the most excellent state according to which a thing can ever exist. Thus, the substance of this Cause does not produce any effect or perform any action that would be at odds with Its intention and will or without Its will. [This is] because this essence neither contains a deficiency for which It would require perfection from outside, nor is there anything above Its substance from which It would seek an increase in any aspect of Its state, nor does there happen to It anything that It would need to repel. So, Its substance

سائر القدماء. فينبغي أنْ يسلّم لأرسطوطاليس أنّ العلّة الأولى على غاية ما يمكن من التمام والكمال.

وكما أنّه ليس يمكن بتةً في مادة من المواد أنْ تؤخّرها الطبيعة لحظةً عن أنْ يُعْمَل منها أجودُ ما ينعمل من مثلها ما لم يَعُقْ عن ذلك عائق من خارج، كذلك يرى أرسطوطاليس أنّ الأمر واجب في جملة أمر العالم أي في وجود جملته إذ كان إمكانه لم يزل والإمكان له بمنزلة المادة.

٦. إلاّ أنّ قومًا يرون أنّه يجب من هذا – أعني من وجوب وجود العالم مع العلّة الأولى – أنْ يكون لا صنع إرادي للعلّة الأولى في وجود العالم كما لا صنع لها في وجود جوهرها، إذ كان وجود العالم غير ممكن تأخّره عن وجود جوهر العلّة الأولى. فيكون وجوده لازمًا اتّباعَه لوجود العلّة الأولى. فتكون العلّة الأولى علّة طبيعية للعالم ومتمّمة له، ويكون القياس في ذلك كالقياس فيما يفعله الفلك ويؤثّره بطبيعته، إذ وجود ذلك مع وجود جوهر الفلك، ولا سيّما وأرسطوطاليس يقول إنّ المحرّك الأوّل إنّما يحرّك ‹المتحرّك› الأوّل الذي هو علّة حركة كلّ ما في الكون بالشوق. فالأولى على ظاهر الأمر أنْ يكون الشيء المتشوَّق إنّما يتشوّق بجهة طبيعته لا بإرادته / لأنّه قد يمكن أنْ يكون المعشوق والمتشوَّق نائمًا أو غير ذي إرادة وهو ٦١-ظ
يحرِّك المشتاقَ والعاشق له.

إلاّ أنّه ينبغي أنْ ينزَل أمرُ العلّة الأولى، في جوهرها وفي سائر أمورها، على أفضل ما يكون ممكن وجود شيء عليه. فإذاً ليس يؤثّر جوهر هذه العلّة أثراً ولا يفعل فعلاً منقلبًا عن قصدها وإرادتها ولا دون إرادتها، إذ ليس في هذه الذات نقصٌ تحتاج فيه الى تمام من خارج ولا فوق جوهرها أمر تقتبس منه ازدياداً في شيء من حاله ولا يعرض لها أمر تحتاج الى

2 التمام والكمال O, ṣ : الكمال والتمام A, Δ 3 بتة A : منه A, O : Δ | عن A, O : من غير Δ
4 يعمل A, Δ : تعمل O | يعق عن ذلك عائق conj. R/B : تعق عن كل عائق A : dam.
O : يعتور ذلك شيء conj. S? إلا لعائق cf. schol. 293.18 Δ 5 الامر A, Δ : هذا الامر O
6 إمكانه A, Δ : إمكان وجود O 8 لا يكون A, O : يكون لا Δ 9-10 إذ - الأولى 1* rep. O
10 جوهر العلة الاولى A, Δ : 2 جوهر العلة الاولى 1, جوهرها O | الأولى 1* ṣ A | – فيكون
جوهر العلة الاولى : A, Δ العلة الاولى 2* | O لازم اتباعه : A, Δ لازما اتباعه | A ṣ الأولى 2*
11 أمكن O [- ما ẓ + 4 words-] 13-14 الأول ‹المتحرّك› إنما يحرّك O, Δ فيكون : A ويكون
الذي conj. R/B : إنما يحرّك الأول الذي A : إنما يحرّك الأول وكل ما المحرك الذي O : om. Δ
14 بالشوق A : المشوق O : بالتشوق Δ 15 يتشوّق A : يشوق O : تشوّق Δ 16 والمتشوَّق A :
المشتاق A : dam. O : اليه add. Δ 17 المتشوق اليه Δ : والمشتاق اليه O 18 ينزل A, O :
يترك, نزل cf. schol. 305.12 Δ 19 أفضل – عليه A : [-3 words-] أفضل يكون, + ما
22 فيها O : فيه A, Δ 21 أفضل ما يمكن أن يكون وجود شيء عليه Δ : O ẓ يمكن أن يكون
منه om. O | يعرض لها أمر Δ : نقّص لها أمرا A : dam. O

contains neither a desire for anything, nor an aversion to anything, nor a receptiveness to any change or occurrence of some new condition. Thus, there is nothing that makes this essence [be and produce] naturally and unwillingly, and so there is nothing that drives this essence to a state or condition in which It would not be the First Principle and Cause.

In sum, in the substance of anything that has something by nature and according to its natural course there necessarily occurs a natural desire for a state that its will does not possess. Now, anything that desires is caused with respect to the desire it has for its desired object (the desired thing being a principle for it in that desire) and with respect to its having a perfective cause in one way or another. But this is something entirely inappropriate for the First Principle. Rather It is a principle for every nature, every desire, and every motion.

[7.] *That this Principle is not a body*

[7.1. *First proof*] Every body is either simple or composite. It is impossible to imagine that this Cause and Principle would be a body composed of bodies that are more simple [than It] and like [Its] elements.

As for assuming that [the First Cause] could be a simple body, it might be possible. However, what cannot be rejected is that every simple body has a simple motion that is natural to it and according to its substance. And this would require that the First Mover and First Principle be something in motion. Now, everything in motion is caused with respect to its motion, because Aristotle has explained in his *Physics* that everything in motion is so because of something other than itself. Thus, the First Principle would have another cause and principle, i.e. a perfective principle. But this is impossible according to what Aristotle explained in *De Caelo*, i.e. that no other body exists but those divided into the three motions, around the center, to the center, and from the center.

[7.2. *Second proof*] Thus, if it is assumed that this Cause and this Principle is a body, then the most truly plausible [body] would be the body of the celestial sphere. And the most appropriate [of the celestial spheres] for that would be the sphere that is first in motion according to the first motion [i.e. around the center], because this sphere is the most appropriate for this assumption.

However, either this sphere has a soul or it does not. If it does not have a soul, then the First Cause of this universe would have to be worse than the case

استدفاعه. فجوهرها إذاً ليس فيه شوق الى شيء، ولا منافرة لشيء، ولا قبول لتغيير ولا لحدوث شأن متجدّدة. فليس يوجد إذاً أمر يُحدث هذه الذات بالطبع وبغير إرادة، فليس يوجد إذاً أمر يدعو هذه الذات الى حال أو شأن ليس هي المبدأ الأوّل والعلّة فيه.

وبالجملة فكلّ ما كان له ما هو بالطبع وعلى الجهة الطبيعية التي ينحوها فإنّه يلزم أنْ يوجد في جوهره شوق بالطبع الى حال لا تملكها إرادته. والمشتاق معلول من جهة شوقه الى المتشوَّق له، والشيء المتشوَّق مبدأ له في ذلك الشوق، ومن جهة أنّه هو له علّة تمامية من جهة من الجهات. وليس يليق هذا الأمر بتةً بالمبدأ الأوّل، لكنّه مبدأ لكلّ طبيعة ولكلّ شوق ولكلّ حركة.

٧. في أنّ هذا المبدأ ليس بجسم: وكلّ جسم فإما أنْ يكون بسيطاً، وإما مركّباً. وليس يمكن أنْ يتوهّم على هذه العلّة وهذا المبدأ أنّه جسم مركّب من أجسام هي أبسط وكالأسطقسات.

فأما أنْ يظنّ أنّه قد يمكن أنْ يكون جسماً بسيطاً، فعساه. إلاّ أنّ ممّا لا يمكن دفعه أنّ لكلّ جسم بسيط حركةً بسيطة طبيعية له نحو جوهره. فيجب من ذلك أنْ يكون المحرّك الأوّل والمبدأ الأوّل متحرّكاً. وكلّ متحرّك معلول من جهة حركته لأنّ أرسطوطاليس قد بيّن في كتابه في السماع الطبيعي أنّ كلّ ما يتحرّك فعن شيء غيره يتحرّك. فإذاً للمبدأ الأوّل علّة ومبدأ آخر أي مبدأ متمّم. وهذا محال على حسب ما بيّن أرسطوطاليس في كتاب السماء أنّه ليس في الوجود جسمٌ آخر غير هذه الأجسام المقتسمة للثلاث الحركات التي هي على الوسط والى الوسط ومن الوسط.

فإذاً إنْ ظنّ أنّ هذه العلّة وهذا المبدأ جسم، فأقرب ما ظنّ به الى الحق جسم الفلك، وأولاها بذلك الفلك المتحرّك أوّلاً بالحركة الأولى لأنّ هذا الفلك هو أولى الأجسام بهذا الظنّ.

إلاّ أنّه إما أنْ يكون هذا الفلك ذا نفس أو يكون غير ذي نفس. فإنْ كان غير ذي نفس، وجب من ذلك أنْ تكون علّة هذا العالم الأولى هي أسوأ

2 متجددة A, O : متجدد له, متجددة cf. schol. 312.1 Δ | يحدث Δ, يجتذب cf. lem. 317.3 Δ, جاذبا cf. schol. 317.10 Δ, الجاذب cf. schol. 318.2 Δ : منحدّث A : dam. O **3** فليس A : dam. O : وليس Δ **4** الأول A : dam. O : له add. Δ **5** وعلى A : على O, Δ **6** تملكها A, Δ : ملكها O **7** والمشتاق A, Δ : فالمشتاق O | الى المتشوّق A : لشى المسوق م O : للشيء المشوق Δ | 2* المتشوّق A, O : المشوق Δ **8** أنّه هو له Δ : أن هو له A : اي معه له O **9** لكنه A, O : ولكنه Δ **11** أنّه A : انهم O **14** له om. O **15** ذلك A : هذا O | يكون A : لا يكون O **17** 1* يتحرّك A : متحرك O **18** محال om. O **20** التي A : om. O | الى الوسط ومن الوسط A : من الوسط والى الوسط O **25** هي om. O of the sleeper who is plunged into his sleep – even worse, who is not alive! If a man imagines this, he is, in my opinion, equivalent to someone lacking an intellect! Furthermore, it would necessarily follow that Its mover be something other than Itself, on the basis of what Aristotle explained. So, on this ground, it would be impossible for It to be the First Cause. Moreover, Its motion would necessarily come to an end by reason of the finitude of Its potency, since the power of every body is finite.

If [on the other hand] this sphere has a soul, then the same thing would happen: the finitude and abrupt stop of its motion would be by reason of the finitude of the power of its corporeal mass, not of the power of its soul. [In] everything whose power is one of the constitutive factors of its essence, and [in] every corporeal mass whose motion is finite, power is finite. Thus, [in this case], this Principle would be susceptible to corruption if It did not have something else whose power would support It and extend [Its] power in Its perdurance and motion.

[7.3. *Third proof*] Furthermore, in everything that has corporeal mass and magnitude there is something potential and something actual. But anything that has something potential cannot be a First Principle, according to what has just been explained.

[7.4. *Fourth proof*] Moreover, it is toward some perfection that everything in motion through a motion specific to it moves. Therefore, the First Principle would forever be going toward some perfection. Hence, it would be through desire that It moves toward that perfection.

If this perfective thing that It desires is external to It, then that thing truly would be more suitable as the First Cause that sets this corporeal mass in motion, and that would be the First Principle.

If [on the other hand] this cause were within Itself (I mean the cause that makes It desire and moves It through desire for it), then It would not need any motion, because whatever has its perfection in itself, not from something external to it, does not need to acquire [its perfection] through some change or motion. Therefore Its motion would not be through a cause. But this is impossible, because everything that is in motion moves either in acquiescence to its will, or naturally because of desire for something that perfects it or because of aversion to something that opposes it, or accidentally and by force.

Once you perceive the issue from the perspective of what Aristotle says in his *Physics*, you find it comes down to the fact that the cause of anything in

من حال النائم المستغرق في نومه، بل غير ذي حياة. وهذا شيء إذا توهّمه الإنسان كان عندي في حال من لا عقل له. وأيضًا فيلزم أنْ يكون محرّكه شيئًا آخر غيره على ما بيّن أرسطوطاليس. فيستحيل بهذا السبب أنْ يكون المبدأ الأوّل. وأيضًا فيجب أنْ تتناهي حركته بتناهي قوته إذ قوة كلّ جسم متناهية.

فإنْ كان هذا الفلك ذا نفس فمثل ذلك يعرض من تناهي حركته وانقطاعها بتناهي قوة جرمه لا قوة نفسه. وكلّ شيء قوته أحد مقوّمات ذاته، وكلّ جرم حركته متناهية، فقوته متناهية. فإذاً هذا المبدأ قابل للفساد إنْ لم يكن له شيء آخر قوته ترفده و تمدّه بقوة في بقائه وحركته.

وأيضًا فكلّ ذي جرم وعظم ففيه ما هو بالقوة وما هو بالفعل وما له <ما> هو بالقوة ليس يمكن أنْ يكون مبدأ أوّل على حسب ما تبيّن قبيل.

وأيضًا فكلّ متحرّك بحركة خاصّية به فإنّما يتحرّك الى تمام. فيكون إذاً المبدأ الأوّل دائمًا يسعي الى تمام. فهو إذاً بالشوق يتحرّك الى ذلك التمام.

فإنْ كان هذا الأمر المتشوّق المتمّم له خارجًا عن ذاته، فذلك هو على الحقيقة أولى بأنْ يكون هو العلّة الأولى المحرّك لهذا الجرم وهذا هو المبدأ الأوّل.

وإنْ كانت هذه العلّة في ذاته – أعني العلّة التي تشوّقه وتحرّكه بالشوق اليها – فليس يحتاج الى حركة، لأنّ ما كان تمامه بذاته لا من جهة شيء خارج عنها فليس يحتاج إذاً الى أنْ يكتسبه بنقلة ولا بحركة. فإذاً حركته حركة لا لعلّة. وهذا محال لأنّ المتحرّك إنّما يتحرّك إما طاعةً في إرادته أو طبيعةً للشوق الى أمر يتمّمه أو التنحّي عن أمر يخالف ذلك، وإما بالعرض وبالقسر.

وإذا تبيّنتَ الأمر من جهة ما قاله أرسطوطاليس في كتابه في السماع الطبيعي، وجدتَ الأمر ينتهي في أنّ علّة / كلّ متحرّك خارجة عنه، لأنّه ٦٢-و ليس يمكن في شيء من الأشياء أنْ يحرّك الجزء منه بعينه الذي به يتحرّك،

1 في نومه om. O | بل A : بله O | هذا om. O 2 فيلزم O : يلزم A 3 شيئًا corr. R/B : شيء codd. 6 فإن A : وان O | من om. O 8 وكل جرم حركته om. O 10 فكلّ A : فكان O 10-11 <ما> هو ما له conj. R/B : ما له A : ما هو O 13 يسعي A : يستعى O 15 هذا om. O 16 الأول om. O 18 يحتاج A : اذا add. O 19 إذاً om. O | بنقلة A : مـله O | حركته om. O 21 للشوق O : الى الشوق A 24 وجدتَ A : من وجدت O | متحرّك A : متحرك في O

motion is external to it. For the mover in anything cannot be the very part of [the thing] by which [the thing as a whole] is in motion. Because if [the thing as a whole] relies on the thing by which it does all of what it does, then if it turns that-by-which it is able [to do something] into that-upon-which it is able [to do something] and its ability [to do something] occurs in that thing, then from where would it obtain another ability? And how can something have an effect on that by means of which it produces an effect? So the issue undoubtedly comes down to the motion [that starts] at a mover which is not itself in motion.

Thus, the First Mover is neither possessed of magnitude nor clothed in matter.

[8. *The First Principle is only one*]

Once Aristotle concludes this topic, he says that in defining the First Cause necessity requires that there be one thing as the Principle. For the form with which matter in no way mixes cannot be multiple; therefore, one single concept cannot be multiple, unless it be by way of the matter set down for it, i.e. the terms. And every form that is multiple in a given matter is also multiple in a way commensurate with the extension of the matter set down for it. That is why Aristotle says in *De Caelo* that if the matter from which people are generated had been combined as a whole in such a way that one man were made from it, there could not be another man in addition to that man in the universe. This being the case with regard to whatever has matter, what would you assume about [the form] with which matter in no way mixes? This is why [Aristotle] says that necessity requires this with respect to the First Principle – I mean that It be One.

Aristotle says that one arrives at the correct [view about] Oneness only by way of negation, meaning that there is no beginning, matter, or motion to this unmoved Essence and this First Principle.

[9. *The Substance of the First Principle is knowledge*]

On the issue of knowledge, if someone seeks the contrary of negation, since it applies to this Essence by affirmation, Aristotle maintains that the substance of this First Principle is knowledge itself.

For, when an existent is neither matter nor possessed of matter, it is a form, because in his opinion, there is nothing else in the division (i.e. in the division of "principle" or "existent-through-itself"), since everything that exists through itself cannot but be either a matter or a form. [The First Principle] is not matter, because matter is intelligible on the basis of the form which combines with it. And since It is not matter, the remaining resolution is that It is a form.

ليس يمكن في شيء من الأشياء أنْ يحرّك الجزء منه بعينه الذي به يتحرّك، لأنّه إذا عمد الى الشيء الذي به يفعل كلّ ما يفعله، فإنْ أدار بعكس ما يمكنه به الى ما يمكنه فيه وإمكانه محصّل في ذلك الشيء، فمن أين له إمكان آخر؟ وكيف يمكن الشيء أنْ يؤثّر فيما به يؤثّر؟ فالأمر ينتهي لا محالة في الحركة عند محرّك غير متحرّك.

فالمحرّك الأوّل إذن ليس بذي عظم وغير ملابس للمادة.

٨. ولما فرغ أرسطوطاليس من هذا المعنى قال إنّ في حدّ العلّة الأولى ضرورة توجب أنْ يكون واحدٌ بمنزلة المبدأ، وذلك أنّ الصورة التي لا تشوبها المادة بتةً ليس يمكن أنْ تتكثّر. وكذلك المعنى الواحد ليس يمكن أنْ يتكثّر إلاّ من جهة مادته الموضوعة له التي هي الألفاظ. فكلّ صورة تتكثّر في مادة فبحسب اتّساع المادة الموضوعة لها أيضًا تتكثّر. ولذلك يقول أرسطوطاليس في كتاب السماء إنّه لو جمعت المادة التي يتكوّن منها الناس حتى يُعمل منها إنسان واحد، لما أمكن أن يوجد في العالم إنسان آخر غير ذلك الإنسان. فإذا كان هذا فيما له مادة، فما ظنّك بما لا تشوبه المادة بتةً؟ فلهذا ما ذكر أنّ الضرورة توجب هذا الأمر في المبدأ الأوّل – أعني أن يكون واحداً.

وأرسطوطاليس يقول إنّه إنّما يتوصّل الى صحّة التوحيد بجهة السلب، أي أنّ لا ابتداء لهذه الذات غير المتحرّك وهذا المبدأ الأوّل ولا مادة ولا حركة.

٩. فإنْ طالب مطالبٌ في باب العلم بخلاف السلب إذ هو لهذه الذات بالإيجاب، فأرسطوطاليس يرى أنّ جوهر هذا المبدأ الأوّل هو العلم نفسه.

وذلك أنّ الموجود إذا لم يكن مادة ولا ذا مادة فهو صورة، لأنّه ليس عنده أنّ في القسمة شيئًا آخر – أي في قسمة المبدأ أو الموجود بذاته – لأنّه ليس يخلو كلّ ما هو موجود بذاته من أنْ يكون إما مادة وإما [في] صورة وليس هو مادة، لأنّ المادة تتبيّن بحسب الصورة التي تركبها. وإذا لم يكن مادة فبقي يقرّ أنْ يكون صورة.

1 الاشياء : A لانه add. O **2** فإنْ أدار بعكس : A راذ ما لعكس O **5** غير : O عتر A **7** إنّ om. A **8** واحد : A واحدا O | أنّ om. O **10** فكل : A وكل O **11** لها om. O **15** الضرورة : A الصورة O **17** يقول : A يرى O **18-19** ولا مادة ولا حركة : A فلا حركة ولا مادة O **22** يكن : O له add. A **23** شيئا : A شيء O | قسمة : A القسمة O | أو : A فـ O **24-25** لأنه - صورة om. O **24** [في] secl. R/B **26** فبقي corr. R/B : فقى A

In his opinion, this form is the source of every form. So when It sees Itself, It has seen the other forms. When It has seen Itself, It is the act of seeing, because It does not see a given state as though It were to separate between [that state] and the substance of Itself. So Its substance is knowledge.

This is the extent of what Aristotle says on this subject in a summary fashion.

Thābit's treatise is concluded. May the praise be to God, Lord of the worlds, and the prayer on Muḥammad and all the members of his family.

وهذه الصورة عنده هي ينبوع كلّ صورة. فهي إذا رأت ذاتها فقد رأت سائر الصور. وإذا كانت ترى ذاتها فذاتها هي الرؤية، لأنّها ليس يرى حالا من الأحوال كأنّها تحجز بينها وبين جوهر ذاتها. فجوهرها هو العلم.

وهذا مبلغ ما يقوله أرسطوطاليس في هذا الأمر على طريق الجملة.

تمّت المقالة لثابت والحمد لله ربّ العالمين والصلوة على محمّد وآله أجمعين

1 وهذه : A فهذه O | ينبوع read. R/B : سنوع A : يتنوع O | رأت 2* A : دات O
2 الصور A : الصورة ع O | الرؤية A : dam. O | ليس A : انما add. O 3 تحجز read. R/B :
والحمد لله حتى حمدة والصلوة : A لثابت - أجمعين 5-6 O فهذا : A وهذا 4 O تجر : A نحجر
على نبيه محمد O

COMMENTARY

[**§1**] The introduction can be divided into two parts. The first part (737.8-12) is devoted to the explanation of the title of Aristotle's *Metaphysics*. In the second part (737.13-20) Thābit expounds the difficulties that the interpretation of this work presents. According to Thābit, some of these difficulties (such as the disagreement between Plato and Aristotle on the essence of the First Principle, 737.12-17) can be easily solved, while others (such as the difficulty of speaking of a First Principle that is absolutely simple, and the obscurity of Aristotle's discourse, 737.17-20) are more serious.

Most of the topics treated by Thābit in the introduction correspond to the preliminary questions to the study of Aristotle systematized by the Greek Neoplatonic commentators. There were two partially overlapping sets of such preliminary questions. The first set consisted of ten points and was intended to be an introduction to Aristotle's philosophy in general; consequently it was discussed before the commentary on the first work of the Aristotelian corpus, i.e. the *Categories*. The second set encompassed six or seven points, and functioned as an introduction to each work of Aristotle; therefore it was repeatedly discussed at the beginning of the single commentaries (beginning with the commentary on the *Categories*). For the Greek sources of these sets of questions, cf. Simplicius, *Commentaire sur les Catégories*, translated by I. Hadot, Fascicle I, Leiden, E.J. Brill, 1990, pp. 21-47, 138-160, and J. Mansfeld, *Prolegomena: Questions to be Settled before the Study of an Author, or a text*, Leiden, E.J. Brill, 1994, pp. 10-21. For some Arabic versions of this introductory scheme, cf. al-Fārābī, *Risāla fī mā yanbaghī an yuqaddam qabla ta'allum falsafat Arisṭū*, edited by F. Dieterici in *Alfārābī's philosophische Abhandlungen*, Leiden, E.J. Brill, 1890, pp. 49-55, German translation by F. Dieterici in *Alfārābī's philosophische Abhandlungen*, Leiden, E.J. Brill, 1892, pp. 82-89; al-Fārābī, *Kitāb al-Ālfāẓ al-musta'malah fī al-manṭiq*, edited by M. Mahdi, Beirut, Dār al-Mashriq, 1968, p. 93; Yaḥyā ibn 'Adī, *Maqāla fī al-buḥūth al-khamsa 'an al-rur'ūs al-thamāniya*, quoted by G. Endress, *The Works of Yaḥyā ibn-'Adī. An Analytical Inventory*, Wiesbaden, Reichert, 1977, p. 42; and Abū al-Faraj ibn al-Ṭayyib, introduction of *Tafsīr Kitāb al-Qāṭīghūrīyās li-Arisṭūṭālīs fī al-manṭiq*, MS Cairo, Dār al-Kutub *ḥikma* 1M, translated by F. Rosenthal in *The Classical Heritage in Islam*, London / New York, Routledge, 1975, pp. 70-72; cf. D. Gutas, "Paul the Persian on the

Classification of the Parts of Aristotle's Philosophy: A Milestone Between Alexandria and Baghdad," *Der Islam*, 60, 1983, pp. 231-267; *id.*, *Avicenna and the Aristotelian Tradition, Introduction to Reading Avicenna's Philosophical Wor*ks, Leiden, E.J. Brill, 1988, p. 227; *id.*, "The Starting Point of Philosophical Studies in Alexandrian and Arabic Aristotelianism," in by W.W. Fortenbaugh (ed.), *Theophrastus of Eresus: On His Life and Work*, New Brunswick, N.J., / Oxford, Transaction Books, 1985, pp. 115-123; A. Bertolacci, *The Reception of Aristotle's* Metaphysics *in Avicenna's* Kitāb al-Shifā': *A Milestone of Western Metaphysical Thought*, Leiden-Boston, Brill, 2006, pp. 169-170.

In the introduction Thābit deals with four such preliminary topics. Two of these (explaining the title of the commented work, 737.8, and elucidating the author's intention, 737.8-10) come from the second set of preliminary questions and are dealt with in the first part of the introduction. Two other themes in the second part of Thābit's introduction (solving the apparent disagreement between Plato and Aristotle, 737.15-17, and Aristotle's intended obscurity, 737.18-20), correspond to two questions of the first set.

737.8-10: **Aristotle entitled** (*'anwana*) **this book of his *Metaphysics* both because his intention** (*qaṣd*) **in it was to investigate a substance that is not in motion** (*ghayr mutaḥarrik*) **and insusceptible to desire for anything outside its essence, and because this is not the behavior of natural things**. The explanation of the 'title' (ἐπιγραφή) and of the 'intention' (σκοπός) of the book (or of its author) are two of the six (or seven) questions treated by the Neoplatonic commentators at the beginning of their commentaries on each of Aristotle's works (the number and *raison d'être* of these same questions were discussed also at the end of the general introduction to Aristotle's philosophy). *Ism* and *gharaḍ* are commonly used for the Greek terms ἐπιγραφή and σκοπός in this context. For *ism* ('name') and cognate terms, cf. al-Fārābī, *Mā yanbaghī*, pp. 54.22; and Ibn Sīnā, *Al-Shifā', al-Ilāhiyyāt*, ed. G. C. Anawati and S. Zayed, Cairo, 1960, p. 21.12. For *gharaḍ* ('purpose'), cf. al-Kindī, *Fī Kammiyyat kutub Arisṭāṭālīs wa-mā yuḥtāju ilayhi fī taḥṣīl al-falsafa*, ed. M. 'A. Abū Rīda in *Rasā'il al-Kindī al-falsafiyya*, Cairo, 1950, vol. II, pp. 363.10, and 378-384 *passim*, translated by M. Guidi and R. Walzer, in *Studi su al-Kindi I: Uno scritto introduttivo allo studio di Aristotele*, Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Morali, Storiche e Filosofiche, ser. VI, vol. VI, fasc. V, Roma, 1940, pp. 390.6, and 399-403 *passim*; al-Fārābī, *Mā yanbaghī*, p. 54.21; *id.*, *Fī aghrāḍ al-ḥakīm fī kull maqāla min al-Kitāb al-mawsūm bi-al-ḥurūf*, in *Alfārābī Philosophische Abhandlungen*, pp. 34-38 *passim*; and Ibn Sīnā, *Al-Shifā', al-Ilāhiyyāt*, pp. 10.4-5, and 16.11-12, cf. 29.4. *'Unwān* and *qaṣd* in Thābit's text apparently bear the same meaning.

The demonstration of the existence and the description of the nature of a substance that is eternal and unmoved (ἀκίνητος) is the target of book Λ of the *Metaphysics*; cf. Λ 1, 1069 a 30-33, Λ 6, 1071 b 3-5; Λ 7, 1073 a 3-5. In Abū Bishr Mattā's Arabic translation of the first two passages and in Usṭāth's translation of the third one, the Greek ἀκίνητος is rendered as *ghayr mutaḥarrik* (cf. Averroès, *Tafsir ma ba'd at-Tabi'at*, ed. M. Bouyges, 3 vols., Beyrouth, Imprimerie Catholique, 1938-1948: Abū Bishr Mattā's translation, 1419.5, 1556.1, 2-3; Usṭāth's translation, 1625.11; all of the following quotations of the Arabic translations of Aristotle's *Metaphysics* are taken from Bouyges's edition). In the anonymous paraphrastic version of *Metaphysics* Λ 6-10 edited by 'A. Badawī in *Arisṭū 'inda al-'arab*, Cairo, 1947, 3.5, 7.4, the same Arabic expression renders ἀκίνητος in the last two passages. (All the following quotations of this anonymous paraphrase are taken from Badawī's edition). Since Thābit restricts the aim and scope of the *Metaphysics* to the study of the First Principle, he appears to be one of the advocates of the "theological" interpretation of Aristotle's work, an interpretation common in the Arabic world until al-Fārābī's time (cf. A. Bertolacci, "From al-Kindī to al-Fārābī: Avicenna's Progressive Knowledge of Aristotle's *Metaphysics* according to his Autobiography," *Arabic Sciences and Philosophy*, 11.2, 2001, pp. 257-295).

737.9-10: **insusceptible to desire for anything outside its essence**. In applying to self-desire what Aristotle says about the self-thinking of the Unmoved Mover (*Metaphysics* Λ 9, 1074 b 33-35) Thābit might have been influenced by the Arabic translation of Themistius' paraphrase of *Metaphysics* Λ (of which he was reported to be the revisor). In commenting on this passage, Themistius introduces the example of a person having love (*maḥabba*) for himself (cf. Badawī, *Arisṭū*, p. 21.1-2; Thémistius, *Paraphrase de la Métaphysique d'Aristote (livre Lambda)*, transl. R. Brague, Paris, P. Vrin, 1999, p. 111; all the following quotations of Themistius' paraphrase are taken from Badawī's edition).

737.10-12: **although, in order to explain that, he is forced to investigate, as he proceeds, many things about substance that is in motion**. Aristotle deals at length with the demonstration of the existence of a First Unmoved Mover in the last book (Θ) of the *Physics*, and then provides it again briefly in *Metaphysics* Λ 6-7. In the *Metaphysics* itself, before the investigation of the unmoved substance in Λ 6-10, we find a summary of *Physics* Γ 1-5.7, E, 1-3 in chapters 9-12 of book K, and a discussion of sensible substance (i.e. substance subject to movement, Λ 1, 1069 b 1) and its principles in chapter 2-5 of book Λ. The propaedeutic character of the investigation of sensible substance with respect to the study of non-sensible substance is also stated in *Metaphysics* Z 2, 1028 b 27-32. The idea of the connection between the physical and metaphysical investigations of the First Mover is stated by Abū Sulaymān al-Sijistānī in his treatise *On the First Mover*, transl. J. Kraemer in *Philosophy in the Renaissance of Islam, Abū Sulaymān as-Sijistānī and His Circle*, Leiden, E.J. Brill, 1986, pp. 285, 291.

737.13-15: **Plato, on the contrary, raises that essence** (*dhāt*) **that is not in motion above substance and places substance under it, i.e. according to cause and caused, since in his opinion one concept does not encompass both**. The reference is probably to Plato's *Republic* VI, 509 b 6-10, where Socrates states that the objects of knowledge obtain from the Good not only their power of being known, but their very being (εἶναι) and substance (οὐσία), since the Good is not substance, but even beyond substance, surpassing it in dignity and power. Thus, in Plato's opinion, as reported by Thābit, the concept of substance does not encompass the unmoved essence (which is called "essence" [*dhāt*], not "substance"). An Arabic translation of Plato's *Republic* is attested in Ibn al-Nadīm's *Fihrist* (ed. G. Flügel, Leipzig, 1871, p. 246.5-6). Some fragments apparently belonging to this translation are preserved in Abū al-Ḥasan al-ʿĀmirī's *Kitāb al-Saʿāda wa-al-Isʿād*; cf. A. J. Arberry, "Some Plato in an Arabic Epitome," *Islamic Quarterly*, 2, 1955, pp. 86-99. For the Arabic translation of Galen's Synopsis of this Platonic dialogue, cf. P. Kraus and R. Walzer, *Galeni Compendium Timaei Platonis Aliorumque Dialogorum Synopsis Quae Extant Fragmenta*, Plato Arabus I [repr. Nendeln, 1973], 2-3, 99-100. The aforementioned passage of Plato's *Republic* is also quoted more than once by Plotinus in the *Enneads*; cf. C. D'Ancona Costa, "Il tema della *docta ignorantia* nel neoplatonismo arabo, Un contributo all'analisi delle fonti di *Teologia di Aristotele*, Mimar II," in G. Piaia (ed.), *Concordia discors, Studi su Niccolò Cusano e l'umanesimo europeo offerti a G. Santinello*, Padova, 1993, p. 6 and nn. 13-14. One of these quotations is preserved in the Arabic paraphrase of Plotinus' work; cf. *Enneads* V, 4 (7), 1, ed. P. Henry-H.-R. Schwyzer, Paris / Bruxelles, 1959, p. 332.10 = *Risāla fī al-ʿilm al-ilāhī*, ed. Badawī in *Aflūṭīn ʿinda al-ʿarab* (Second edition, Cairo, Wikālat al-Maṭbūʿāt, 1977), p. 178.9-10.

737.15-17: **However, if we understand the actual doctrine that both these men follow, their differences on that [topic] need not prejudice us in what we want to learn about this essence that is not in motion**. One of the ten points constituting the general introduction to Aristotle by the Neoplatonic commentators at the beginning of their commentaries on Aristotle's *Categories* is the description of the qualities the good interpreter of Aristotle must possess. The ability to show the inner agreement between the opinions of Aristotle and Plato is one such quality according to Simplicius' Commentary on Aristotle's *Categories* (123-130). For the transmission into Arabic of this topos of the Neoplatonic interpretation of

Aristotle (originating with Porphyry and required by a curriculum of studies in which Aristotelian philosophy served as an introduction to the Platonic system), cf. *Kitāb al-Jam' bayna ra'yay al-ḥakīmayn Aflāṭūn al-ilāhī wa-Arisṭūṭālīs*, traditionally attributed to al-Fārābī (ed. Dieterici, pp. 1-33; critical edition and French translation by M. N. Fawzī and D. Mallet in *Farabi, L'Harmonie entre les opinions de Platon et d'Aristote*, Damas, PIFD, 1999; new critical edition and Italian translation by C. Martini Bonadeo in Al-Fārābī, *L'armonia delle opinioni dei due sapienti, il divino Platone e Aristotele*, Edizioni Plus-Pisa University Press, 2008; the ascription of this work to al-Fārābī has been challenged by J. Lameer in *Al-Fārābī and Aristotelian Syllogistics, Greek Theory and Islamic Practice*, Leiden, E.J. Brill, 1994, pp. 30-39; M. Rashed, "On the Authorship of the Treatise *On the Harmonization of the Opinions of the Two Sages* attributed to al-Fārābī", *Arabic Sciences and Philosophy*, 19.1, 2009, pp. 43-82). The issue dealt with by Thābit, namely the divergence of opinions between Plato and Aristotle on the substantiality of the First Being, is not one of the topics treated in the *Kitāb al-Jam'*.

737.17-18: **In sum, the only constraint is that this [study] is an investigation into what is really one, since nothing can be said about it** [...]. In Plotinus' *Enneads* the unity and simplicity of the First Being entails the impossibility of any discourse and knowledge about It. Cf., for example, *Enneads* V, 4 (7), 1, p. 332.8-9 = *Risāla fī al-'ilm al-ilāhī*, p. 178.7-9.

737.18: [...] **but from the perspective of its action and relatively and from outside**. This expression apparently refers to the discussion of the First Mover as principle of the universe's existence which Thābit provides in the following §§ 2-6.

737.18-20: **Aristotle in this book of his presents obfuscatory statements** (*aqāwīl fīhā ighmāḍ*) **in which he aims at one end** (*gharaḍ wāḥid*). The intentional obscurity (ἀσάφεια) of Aristotle's speech is one of the ten topics treated by the Neoplatonic commentators in the general introduction to Aristotle's philosophy. For the Arabic reception of this idea, cf. al-Fārābī, *Mā yanbaghī*, p. 54.5-8; *Die Doxographie des Pseudo-Ammonios. Ein Beitrag zur neuplatonischen Überlieferung im Islam*, ed. U. Rudolph, Deutsche Morgenländische Gesellschaft, Stuttgart; Kommissionsverlag F. Steiner, Wiesbaden, 1989, p. 72, 11; *Kitāb al-Jam'*, pp. 5-7; and Gutas, *Avicenna*, pp. 225-234. In *Galeni Compendium*, pp. 3.11 (cf. 35-36), Aristotle's *ighmāḍ* is mentioned, but no allusion is made to its intentional character. Thābit's reference to the 'aim' (*gharaḍ*) appears rather to refer to this very point.

It is worth noting that terms stemming from the same root as *ighmāḍ* are employed by Usṭāth to translate ἀπορία and cognate terms in book B of

Aristotle's *Metaphysics* (cf. *Tafsir*, III, Table des parties de la *Métaphysique* d'Aristote, [71b], and Index D: Termes techniques, [258a]). Book B is a collection of problems to be solved in the remaining part of the work. Within book Λ, Aristotle deals with some additional problems, that are not listed in book B. Cf. Λ 2, 1069 b 26-27 (ἀπορήσειε δ' ἄν τις, Abū Bishr, 1448.2: *wa-li-al-insāni an yatashakkaka wa-yaqūla*; Usṭāth, 1448.1 at bottom of page: *wa-khalīqun an yas'ala aḥadun mas'alatan*); Λ 4, 1070 a 33 (ἀπορήσειε γὰρ ἄν τις, Abū Bishr, 1505.9: *wa-li-al-insāni an yatashakkaka*; Usṭāth, 1505.2 at bottom of page: *fa-khalīqun an yas'ala aḥadun mas'alatan 'awīṣan* [*sic*]); Λ 6, 1071 b 22 (ἀπορία, Abū Bishr, 1563.5: *shakk*; Usṭāth, 1563.4 at bottom of page: *taḥayyur*); Λ 9, 1074 b 15-17 (ἀπορία and δυσκολία, Usṭāth, 1691.3-4: *taḥayyur* and *'usr*) and 1075 a 5 (ἀπορία, Usṭāth, 1693.4: *taḥayyur*). Thus, we cannot exclude the possibility that Aristotle's obscurity in the *Metaphysics* might have been understood to be related somehow to the aporetic method he adopts in book B of this work and elsewhere, although there is no apparent sign of such an interpretation either in the Greek or the Arabic tradition.

[§2] This section can be divided into two parts. In the first part (737.21-739.11), Thābit proves that the First Mover, inasmuch as it is the cause of the motion of all corporeal substances, is also the cause of their existence. Thābit's proof consists of three steps. First (737.21-739.1), he clarifies that the corporeal substance's existence is caused by its motion through two intermediary causes, *viz.* its nature and its form. Second (739.1-5), he elucidates that motion also has a proximate cause, i.e. the perfection towards which the thing in motion is oriented; this latter is connatural to the nature of the thing in motion, and is desired by it. Third (739.5-8), he recalls that according to Aristotle's *Physics* the ultimate cause of all motion is a Mover that is not in motion. Finally (739.8-11), he draws the desired conclusion.

The second part of this section (739.12-17) is a summary of the first. It has the following structure: recapitulation of the second premise (739.12-13); recapitulation of the first premise (739.13-14); recapitulation of the conclusion (739.14-15); proof of the first premise (739.15-17) by means of a sort of *modus tollens* (motion is the cause of the subsistence of the corporeal substances since, if motion is removed, the corporeal substances pass away).

The identity Thābit establishes between cause of motion and cause of existence in the Unmoved Mover represents a significant development of Aristotle's doctrine of the Unmoved Mover as expounded in the *Metaphysics*. According to this work, the Unmoved Mover is a cause of motion only, not of existence. Although some intimations as to the status of the Unmoved Mover as cause of existence can be found in the *Metaphysics* itself (cf. the association between κινητικόν and ποιητικόν in *Metaphysics*

Λ 6, 1071 b 12, and the description of the heaven as that from which "derive the being and life that other things [...] enjoy" in *De Caelo* A 9, 279 a 28-30), the development found in Thābit's work is the result of the Greek Neoplatonic interpretation of the *Metaphysics*. The pseudo-Aristotelian *Theologia Aristotelis* (a paraphrase of Plotinus' *Enneads* IV-VI) contributed in the main to the spread of this non-Aristotelian doctrine in the Arab world under the guise of Aristotelian authorship. Some hints of this interpretation can also be found in Themistius' paraphrase of *Metaphysics* Λ (ed. Badawī, p. 18.4); cf. S. Pines, "Some Distinctive Metaphysical Conceptions in Themistius' Commentary on Book Lambda and their Place in the History of Philosophy," in J. Wiesner (ed.), *Aristoteles, Werk und Wirkung, Paul Moraux gewidmet, II: Kommentierung, Überlieferung, Nachleben*, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 1987, p. 188 (repr. in *The Collected Works of Shlomo Pines, III: Studies in the History of Arabic Philosophy*, Jerusalem, Magnes Press, 1996, p. 278).

737.21: **All corporeal substance, both the kind that exists and the kind that is generable [...].** This distinction probably reflects that between two kinds of sensible substance (eternal and corruptible), established by Aristotle in *Metaphysics* Λ 1, 1069 a 30-31 (cf. *Tafsir*, 1419.2-3). If this is the case, then the expression 'that exists' (*al-mawjūd*), applied in our text to the first kind of corporeal substance, is to be understood as 'that always exists.'

739.1-2: **Everything that is in motion in a way proper to it moves only toward a perfection** (*tamām*). Cf. *Metaphysics* Θ 8, 1050 a 7-8: "everything that comes to be moves toward a principle, i.e. an end (τέλος)" (the translations of the quotations from Aristotle are taken from *The Complete Works of Aristotle, The Revised Oxford Translation*, ed. by J. Barnes, 2 vols., Princeton, Princeton University Press, 1984). Usṭāth, 1186.6, translates τέλος in this passage as *tamām.*

739.5-8: **In that motion and the motion of every body, every one of them is conveyed forward and ascends to a First Unmoved Mover, as he explained in his *Physics*. For, even if one [body] is found to move another, the highest thing in motion is so from a mover that is not in motion.** The reference is to *Physics* Θ 5 (256 a 4-258 b 9). The same doctrine is summarized in *Metaphysics* Λ 7, 1072 a 24-25.

739.12-13: **what Aristotle says is that the motion of everything that is in motion is due to the desire for something**. The reference is to *De anima* Γ 10, 433 b 17: κινεῖται γὰρ τὸ κινούμενον ᾗ ὀρέγεται ("for that which is moved moves insofar as it desires"; cf. *De anima* Γ 9, 432 b 16-17). In this quotation, Thābit drops Aristotle's implicit reference to the case of the animals' movement.

739.13-14: **and the first form of what is generable and what exists is the motion proper to it**. In *Metaphysics* Λ 7, 1072 b 8-9 Aristotle describes motion as the first change (cf. *ibid.*, 1073 a 12 and *Physics* Θ 7, 260 a 26-261 a 26, where changes are called "movements"). According to *Metaphysics* Λ 2, 1069 b 9-13, changes are of four kinds: in substance (genesis and corruption), in quality (transformation), in quantity (augmentation and diminution) and in place (motion). Due to the priority of motion over the other changes, especially over the change in substance, Thābit is justified in regarding motion as the first "form" (in the sense of character) of what is generable and exists. Cf. *Physics* Θ 1, 250 b 13-15.

[§**3**] In this section, Thābit addresses a possible objection to the causality of the First Mover over corporeal substance. Given that the First Mover is the cause of the existence of every corporeal substance inasmuch as it is the cause of this latter's form, i.e. of its movement (as proved in §2), an opponent could argue (739.18-20) that the corporeal substance can be imagined as deprived of its form and as consisting only of its matter; this latter, thus, would lack any form as cause of movement, and therefore would not be an effect of the First Mover's causality. Thābit presents two possible responses. In the first (739.20-22) he states that according to Aristotle a matter lacking form does not exist in reality, but only in imagination.

The second reply (741.1-9) is more articulated. Thābit first (741.1-4) admits that, in Aristotle's opinion, the matter that constitutes a corporeal substance can exist on its own, by having a further form; because of this form, it is an effect of the Prime Mover. This being the case, a twofold possibility results. Either (741.4-7) the matter has only this further form, in which case, if it loses it, it will vanish, and there will be nothing escaping the Prime Mover's causality. Or (741.7-9) the matter has more than one such form, in which case it can be resolved into a more elementary composite of matter and a form. The matter of this composite is affected by the same alternative. But the second side of the alternative ultimately has to end up in the first, since the process of resolution of a more complex aggregate of matter and form into a simpler one cannot go on *ad infinitum*. The matter, therefore, never lacks a form.

739.20-22: **Aristotle says that this is an utterly false belief, because that simple thing then exists only in the imagination** (*fī al-wahm al-fikrī*)**, whereas in itself, treated separately** (*mufrad*)**, it neither exists in reality nor does its essence subsist**. In *Metaphysics* Λ 3, 1070 a 9-10, Aristotle states that matter is something determinate (τόδε τι) because it appears to be so (τῷ φαίνεσθαι; Abū Bishr, 1466.2-3: *hādhā al-shay' min ṭarīq mā yurā*; Usṭāth, 1466.2 at bottom of page: *hādhā al-shay' bi-annahu yurā*). In *De gen. et corr.* B, 329 a 24-25 (cf. *ibid.*, 332 a 35-b 1), the matter of the perceptible bodies is said to have no separate (i.e. autonomous) existence. For Aristotle's rejection of the theory of the so-called 'prime matter', namely of a matter totally deprived of form, cf. W. Charlton, "Did Aristotle Believe in Prime Matter?," in *Aristotle's Physics, Books I and II*, Oxford, Clarendon Press, 1970, pp. 129-145.

741.1-3: **Rather, he maintains that in that simple thing, into which it is imagined the corporeal substance breaks up when we imagine the corruption of that form it has, there is the reception of another form.** In *Metaphysics* H 4, 1044 a 21-22, Aristotle states that the matter of phlegm is the fat, and the matter of the fat is the sweet; in *Metaphysics* Θ 7, 1049 a 19-20, that the matter of the casket is the wood, and the matter of wood is earth (cf. *Metaphysics* Θ 7, 1049 a 26-27). This implies that fat and wood have, in their turn, a proper form.

741.9-11: **From this it has become clear that every corporeal substance is caused in its substance, existence, and perdurance by the First Cause** (*al-'illa al-ūlā*) **which is the First Principle** (*al-mabda' al-awwal*) **of the motion of everything**. Thābit now begins to call the First Mover "First Cause" and "First Principle." The first expression (*al-'illa al-ūlā*) occurs twice in the anonymous paraphrase of *Metaphysics* Λ 6-10, as a rendering of τὸ πρῶτον in Λ 6, 1072 a 14 (5.1-2), and as a rendering of ἀρχή; in Λ 7, 1072 a 30 (5.17-18). For the second expression (*al-mabda' al-awwal*), cf. *Metaphysics* Λ 8, 1073 a 23-24: ἡ μὲν γὰρ ἀρχὴ καὶ τὸ πρῶτον τῶν ὄντων ("The first principle or primary being"; Usṭāth, 1642.14-15: *fa-inna al-mabda'a wa-awwala al-huwiyyāti*; anonymous paraphrase, 7.15: *fa-naqūlu inna mabda'a al-mawjūdāti wa-awwalahā*). This expression also frequently occurs in Themistius' paraphrase of *Metaphysics* Λ (12.7; 19.17; 21.10, etc.). Cf. also *Physics* Θ 1, 251 a 7-8.

[§4] In this section Thābit proves that the First Principle is the cause of the universe's existence from eternity, not in time. The section can be divided into four parts. In the first part (741.12-15) Thābit states that, when something is brought into existence by something else, its non-existence is not necessarily prior in time to its existence (741.12-14). This is explained (741.14-15) with reference to the fact that the cause of something else's existence is not necessarily prior in time to its effect. In the second part (741.15-19), as a consequence of the first part, Thābit draws his main conclusion, namely that the First Principle brings the universe into existence from eternity. In the last two parts he makes two additional points. In the third part (741.20-23) he demonstrates that the First Principle is the cause of the universe's existence, while in the fourth part (741.23-743.8) he shows that the First Principle does not bring the universe into existence in time.

The inner logic of the section may be reconstructed as follows, providing the steps that Thābit assumes without explicitly formulating. (i) The cause of something else's existence is not necessarily prior in time to its effect, i.e. it is either prior in time to the effect, or coterminous with it; this entails that when something is brought into existence by something else, its non-existence is not necessarily prior in time to its existence (= first part of the section). (ii) The First Principle is the cause of the universe's existence (= third part of the section). (iii) The First Principle does not bring the universe into existence as a cause prior in time (= fourth part of the section). Therefore, (iv) the First Principle brings the universe into existence as a cause coterminous with it. But (v) the First Principle is eternal. Therefore, (vi) It brings the universe into existence from eternity (= second part of the section).

Thābit omits the intermediate conclusion (iv) and the further premise (vi), probably regarding the former as implicitly proved and the latter as in need of no proof.

In *Metaphysics* Λ Aristotle refers to the eternity of the first heavenly sphere (Λ 7, 1072 a 23; cf. *Physics* Θ 6, 259 b 33-260 a 1), and of all the spheres and heavenly bodies (Λ 8, 1073 a 31-32, 34-35). In *De Caelo* A 10-12, B 1, he proves that the universe is eternal by invalidating the previous theories purporting its generation and/or corruption. John Philoponus is generally credited with the thesis (contrary to the entire Aristotelian tradition before him) of the origination of the universe in time. Three works by Philoponus (known as *De Aeternitate Mundi contra Aristotelem*, *De Aeternitate Mundi contra Proclum*, *De Contingentia Mundi*) are representative of this trend. The first and the third of these works were known in the Arab world, the former through the refutation by al-Fārābī, the latter in an Arabic summary. Cf. M. Mahdi, "Alfarabi Against Philoponus," *Journal of Near Eastern Studies*, 26, 1967, pp. 233-260; *id.*, "The Arabic Text of Alfarabi's Against John the Grammarian," in S. A. Hanna (ed.), *Medieval and Middle Eastern Studies in Honor of A. S. Atiya*, Leiden, E.J. Brill, 1972, pp. 268-284; S. Pines, "An Arabic Summary of a Lost Work of John Philoponus," *Israel Oriental Studies*, 2, 1972, pp. 320-352 (repr. in *The Collected Works of Shlomo Pines, II: Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science*, Jerusalem / Leiden, The Magnes Press and E.J. Brill, 1986, pp. 294-352); A. Hasnawi, "Alexandre d'Aphrodise *vs* Jean Philopon: Notes sur quelques traités d'Alexandre 'perdus' en grec, conservés en arabe," *Arabic Sciences and Philosophy*, 4, 1994, pp. 53-109 [for *Contra Proclum*]; G. Troupeau, "Un épitomé arabe du *De Contingentia Mundi* de Jean Philopon," in E. Lucchesi, H. D. Saffrey (eds.), *Memorial A.J. Festugière, Antiquité païenne et chrétienne*, Geneve, Cramer, 1984, pp. 77-88; and H. A. Davidson, "John Philoponus as a Source of Medieval Islamic and Jewish Proofs of Creation," *JAOS*, 89, 1969, pp. 357-391; *id.*, *Proofs for Eternity, Creation and the Existence of God in Medieval Islamic and Jewish Philosophy* New York / Oxford, Oxford University Press, 1987, ch. IV. In al-Kindī's *Fī Kammiyyat kutub Arisṭāṭālīs* (ed. Guidi-Walzer, p. 397.40-48; ed. Abū Rīda, p. 375.9-18), we find the view that God brings the universe into existence not in time (where "not in time" means "all at once") and by means of His will (a thesis Thābit will uphold in §6). Al-Kindī, however, does not hold that the universe is eternal and eternally created, like Thābit (see *Kitāb al-Kindī ilā l-Mu'taṣim bi-llāh fī l-falsafa al-ūlā*, in *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī.* Volume II: *Métaphysique et cosmologie*, ed. R. Rashed, J. Jolivet, Leiden-Boston-Köln, Brill, 1998, pp. 27.7-39.21). Also Abū Bishr Mattā opposed the view of the creation of the universe in time; cf. S. Pines, "A Tenth Century Philosophical Correspondence", *Proceedings of the American Academy for Jewish Research*, 24, 1955, pp. 103-136 (repr. in *id.*, *Essays in Medieval Jewish and Islamic Philosophy*, 1977, pp. 357-390), pp. 117-118).

741.12-14: **Because it does not necessarily follow that every non-existence is temporally prior to existence in anything whose cause of existence is something other than it, nor that every chaos is prior to order, nor that every simple thing is prior to the compound thing**. The sense of Thābit's statement is that non-existence, chaos and element are not always and necessarily prior in time to existence, order and compound in the processes of generation, ordering and composition. This corresponds to Aristotle's denial of the priority of potency over actuality in *Metaphysics* Λ 6, 1071 b 22-1072 a 18 (cf. *Metaphysics* Θ 8). Aristotle denies the infinite existence of chaos in the same chapter, 1072 a 7-8.

741.14-15: **since not everything that is prior to something else (because the subsistence of something else is through it, or by reason of it, or the existence of something else comes from it) must be prior to it in time**. Thābit's statement can be reformulated as follows: the cause of something else's existence is not necessarily prior in time to its effect. Priority in time is only one of the different senses of priority Aristotle distinguishes (cf. *Metaphysics* Z 1, 1028 a 31-33, where he speaks of priority in definition, knowledge and time). The simultaneity between individual causes in act and their effects is stated by Aristotle in *Metaphysics* Δ 2, 1014 a 20-25.

741.15-18: **for this reason what Aristotle says is that the most excellent [state] for the First Principle is that in which It is the cause from eternity of the existence of everything that exists and the ground for the perdurance of everything that perdures, without having become like that only at some time or after It was not like that**. On the eternity of the universe, cf. *De Caelo* A 10-12; the first heaven (i.e. the sphere of the fixed stars) is declared eternal in *Metaphysics* Λ 7, 1072 a 23.

741.18-19: **since no existent, indeed nothing, perdures but by virtue of It**. This sentence and the following lines (741.20-23) are a summary of §2.

741.20-21: **He said: That is because neither the existence nor the subsistence of the heavens and the other natural bodies continue but through the First Principle, i.e. the First Mover**. Cf. *Metaphysics* Λ 7, 1072 b 13-14: ἐκ τοιαύτης ἄρα ἀρχῆς ἤρτηται ὁ οὐρανὸς καὶ ἡ φύσις ("On such a principle, then, depend the heavens and the world of nature"; Abū Bishr, 1608.8-1609.1: *fa-al-samā'u idhan wa-al-ṭabī'atu mutawāṭi'āni bi-mabda'in hākadhā fa-idhan al-samā'u wa-al-ṭabī'atu muta'alliqāni*; Usṭāth, 1608.4-1609.1 at bottom of pages: *fa-idhan yabdū* [pro: *bi-bad'in*?] *mithli hādhā 'aliqati al-samā'u wa-al-ṭabī'atu*; anonymous paraphrase, 6.10: *wa-bi-mithli hādhā al-mabda'i al-samā'u marbūṭatun, mu'allaqatun bi-al-ṭabī'ati al-faḍīlati* [MS; compare Badawī's hyper-correction: [...] *wa-mu'alliqatun al-ṭabī'atu. wa-al-faḍīlatu*, etc.]).

[§5] This section can be divided into four main parts. In the first part (743.9-10) Thābit states the *demonstrandum*, namely the compatibility between eternity of universe and the caused nature of its existence. The following three parts of the section are intended to support the *demonstrandum*, even though they in fact provide three arguments against the causation of the universe in time (a thesis that Thābit has already discarded in the last part of §4). The first two arguments have the form of a *reductio ad absurdum*. (i) If the First Principle brings the universe into existence in time, then a further cause is required to account for Its action. But this is impossible, because the First Principle has no cause (743.11-14). (ii) If the First Principle brings the universe into existence in time, It has in Itself something potential which is brought into act. But this is impossible, for two reasons: because bringing potency into act requires a cause, whereas the First Principle has no cause (743.14-21), and because the passage from potency into act entails change, whereas the First Principle is immutable (743.21-745.1). Therefore, the First Principle has no potentiality, but is perfect actuality (745.1-2). The third argument is based on an analogy: (iii) Just as nature does not delay the conferral of form to matter, so too the First Principle does not delay the conferral of existence to the universe (745.3-6).

743.11-14: **Aristotle says: If the situation were such as is assumed by someone who maintains that the universe has a temporal beginning, then what would be the innovating cause that compelled or prompted the bringing of the universe into existence after it did not exist for an infinite period of time? What would be the cause that drove the First Cause to that? And what would be the organizing cause?** Cf. above,

§4, 743.2-6. By "organizing cause" Thābit possibly means the final cause, as distinct from the efficient one (named "the cause that compelled or prompted" and "the cause that drove").

743.21-745.1: **Moreover, if the First Cause had something potential at one time which is brought into act at another time, change would necessarily affect Its substance. But this is rejected by all the ancients.** In *Metaphysics* Λ 7 Aristotle maintains that the Unmoved Mover can in no way be otherwise than as It is (1072 b 8) and that It is inalterable (1073 a 11).

745.1-2: **So, one should grant to Aristotle that the First Cause has the utmost perfection** (*tamām*) **and completeness** (*kamāl*) **that it is possible to have**. Cf. *Metaphysics* Λ 5, 1071 a 35-36: ἔτι τὸ πρῶτον ἐντελεχείᾳ ... ("further, that which is first in respect of fulfillment is the cause of all things ...."). The Greek ἐντελεχείᾳ ("fulfillment," as opposed to potency) in this passage is translated as *fī al-kamāl* by Abū Bishr (1549.7), and as *bi-al-tamām* by Usṭāth (1549.5 at bottom of page). In *De Caelo* A 9, 279 a 35 Aristotle says of the heaven that "it has no defect and lacks none of its proper excellences."

745.5-6: **so too does Aristotle maintain that this state is necessary with respect to the totality of the universe, i.e. in terms of its existence as a whole, since its possibility never ceases, and the possibility it possesses is equivalent to matter**. The link between matter and potency is a topos in the *Metaphysics*; as far as book Λ is concerned, cf. Λ 2, 1069 b 14; Λ 4, 1070 b 12; Λ 5, 1071 a 10; Λ 10, 1075 b 22-23.

[**§6**] This section can be divided into three parts. In the first (745.7-17) Thābit states the opinion he is going to invalidate, i.e. that the First Principle does not bring the universe into existence by means of Its will (745.7-9), along with two main arguments that can be adduced in support of this opinion: (i) the simultaneity between First principle and universe entails that the production of the latter by the former is necessary; this further entails that the First Principle brings the universe into existence by means of Its nature, not by means of Its will (745.9-13); (ii) according to Aristotle, the Unmoved Mover moves the First Sphere (which is the cause of generation) by being desired; but It is desired on account of Its nature, not on account of Its will (745.13-17).

In the second part of this section (745.18-747.4), Thābit positively proves that the First Principle brings the universe into existence by means of Its will. This depends on the First Principle's perfection, which excludes any action on Its part that would contradict or occur without Its will (745.18-747.1). An implicit assumption of Thābit's argument is that the First Principle does possess will. From the First Principle's perfection Thābit draws a further conclusion about Its essence, namely that It is not the subject of desire, aversion or change (747.1-2). This probably entails in Thābit's mind that the First Principle does not act by nature (cf. below, the third part). The final lines of this part (747.2-4) state the two conclusions Thābit has reached.

In the third part of this section (747.5-9) Thābit negatively demonstrates that the First Principle cannot bring the universe into existence by means of Its nature, since whatever is and acts by virtue of nature has desire (747.5-6), and whatever has desire is caused (747.6-8), something that the First Principle cannot be (747.8-9).

745.13-14: **especially since Aristotle says that only through desire** (*bi-al-shawq*) **does the First Mover really move** (*yuḥarrik*) **the first thing in motion, which itself is the cause of the motion of generable things**. For the First Mover moving as object of desire, cf. *Metaphysics* Λ 7, 1072 a 26: κινεῖ δὲ ὧδε τὸ ὀρεκτὸν καὶ τὸ νοητόν ("And the object of desire and the object of thought move in this way"; Abū Bishr, 1592.2: *wa-yuḥarriku kamā yuḥarriku al-mushtahā wa-al-ma'qūlu*; Usṭāth, 1592.1-2 at bottom of page: *wa-yuḥarriku bi-hādhā al-naw'i alladhī bihi yuḥarriku al-mushtahā wa-al-ma'qūlu*; cf. anonymous paraphrase, 5.14). Cf. *Metaphysics* Λ 7, 1072 b 3. Abū Bishr (1592.2) employs the term *mutashawwaq* to translate the Greek ἐπιθυμητὸν in *Metaphysics* Λ 7, 1072 a 27. For the first sphere as the object of the Prime Mover's moving activity, cf. *Metaphysics* Λ 7, 1072 a 23. In *Metaphysics* Λ 7, 1072 b 8-18, Aristotle refers to the first sphere as the direct cause of stability and as the indirect cause of the generation and corruption in the sublunar realm (cf. *De gen. et corr.* B 10, 336 a 23ff).

747.1-2: **nor a receptiveness to any change or occurrence of some new condition**. Cf. above, §5, 743.21-745.1.

747.5-8: **In sum, in the substance of anything that has something by nature and according to its natural course there necessarily occurs a natural desire for a state that its will does not possess. Now, anything that desires is caused with respect to the desire it has for its desired object (the desired thing being a principle for it in that desire) and with respect to its having a perfective cause in one way or another**. Cf. above, §2, 739.1-5.

[§7] The *demonstrandum* of this section, i.e. the fact that the First Principle is not a body (*jism*), is proved in four consecutive proofs (§7.1, 747.10-20; §7.2, 747.21-749.9; §7.3, 749.10-11; §7.4, 749.12-751.5), all of which have the structure of a *reductio ad absurdum*.

As is made clear by the reference to "magnitude" (*'iẓam*) in the conclusion ("Thus, the First Mover is neither possessed of magnitude nor clothed in matter," 751.6), this section of Thābit's commentary can be considered an expanded version of *Metaphysics* Λ 7, 1073 a 5-11, where Aristotle demonstrates that the Unmoved Mover does not have "magnitude" (μέγεθος; Usṭāth, 1625.12, and anonymous paraphrase, 7.5: *'iẓam*) and is without parts and indivisible. The argument Aristotle uses to prove the lack of magnitude in the First Mover is adopted by Thābit in the context of the second proof (cf. below, §7.2, 749.6-9).

In transforming the First Principle's lack of magnitude (the original Aristotelian view) into a lack of corporeity, Thābit may have been influenced by Themistius. In his paraphrase of *Metaphysics* Λ 7, 1073 a 5-11, Themistius adds the fact of not being a body (*jism*) to the Aristotelian list of the Unmoved Mover's characteristics (18.13). Averroes, when quoting Themistius' paraphrase in the exegesis of this Aristotelian passage, also reports Themistius as regarding magnitude (*'iẓam*) and body (*jism*) as equivalent (*Tafsir*, 1636.4-5).

(§7.1) 747.11-12: **It is impossible to imagine that this Cause and Principle would be a body composed of bodies that are more simple [than It] and like [Its] elements**. The impossibility is due to the fact thta, since the simple bodies are the principles of the composed body, the First Principle would lose Its status as primary cause.

(§7.1) 747.13-14: **However, what cannot be rejected is that every simple body has a simple motion that is natural to it and according to its substance**. The impossibility of rejecting this doctrine is explained further below (747.18-20) by means of a quotation from Aristotle's *De Caelo*.

(§7.1) 747.16-17: **because Aristotle has explained in his *Physics* that everything in motion is so because of something other than itself.** This is the topic of the first part of chapter Z 1 (241 b 34-242 a 50) and of the entire chapter Θ 4 (254 b 7-256 a 3) of Aristotle's *Physics*.

(§7.1) 747.18-20: **according to what Aristotle explained in *De Caelo*, i.e. that no other body exists but those divided into the three motions, around the center, to the center, and from the center.** This quotation from Aristotle is intended to explain one of the premises of the argument (747.13-14) more than the absurdity of its conclusion. In *De Caelo* A, 2, 268 b 22-24, Aristotle states that every simple movement is either from the center (ἀπὸ τοῦ μέσου), or toward the center (ἐπὶ τὸ μέσον), or around the center (περὶ τὸ μέσον). In *De Caelo* A, 3, 270 b 26-31, he states that the simple bodies are as many as the simple movements, and that these latter are (i) the circular movement and (ii) the rectilinear movement in its two directions, from the center (ἀπὸ τοῦ μέσου) and toward the center (ἐπὶ τὸ μέσον). Thābit broadens the scope of the Aristotelian doctrine by speaking of bodies in general, not of the five simple bodies (aether, fire, air, water and earth).

(§7.2) The structure of the second proof requires some explanation. Once it is established that, if the First Principle must be considered a body, the most suitable body to perform the function of First Principle is the body of the First Sphere (747.21-23), Thābit considers the following dijunction: either the First Sphere/Principle has a soul or it does not (747.24). The first disjunct (747.24-749.5) is rejected on the basis of three arguments. The first argument is the obvious absurdity of the case (747.24-749.2); the second argument is that an external cause would be required to account for the motion of the First Sphere/Principle, which therefore would lose its status as ultimate cause (749.2-4); the third argument is that (in the absence of an external cause) the motion of the First Sphere/Principle would come to an end on account of its finite power (749.4-5).

The second disjunct (749.6-10) is rejected on the basis of a single argument in three steps. (i) Thābit first gives the outline of the argument: even if the First Sphere/Principle had a soul, its motion would nonetheless come to an end on account of the finite power of its body; the soul of the First Sphere/Principle is neither responsible for the end of the movement, nor even capable of preventing it (749.6-7). (ii) He then focuses on the starting point of the argument and proves that the power of every body (therefore also the power of First Sphere/Principle) is finite (749.7-8). (iii) Finally, he draws out the implications of the conclusion: in the absence of an external cause, the motion of the First Sphere/Principle would come to an end, and this would entail the end of the First Sphere/Principle's existence (749.8-9).

§7.2, 747.21-22: **Thus, if it is assumed that this Cause and this Principle is a body, then the most truly plausible [body] would be the body of the celestial sphere**. The implicit assumption of Thābit's statement is that the closer a body is to the upper part of the universe (the sky), the more it shares of the First Principle's nature (cf. *De Caelo* B 12, 292 b 18-19). Therefore the body that is most entitled to be the First Principle (on the hypothesis that this latter is a body) is the heavenly body.

§7.2, 747.22: **And the most appropriate [of the celestial spheres] for that would be the sphere that is first in motion according to the first motion**. According to Aristotle the sphere that is first in motion is the sphere of the fixed stars (*Metaphysics* Λ 8, 1073 b 18-19; cf. *De Caelo* B 6, 288 a 15; B 12, 292 b 22). The first motion is the circular motion, or motion around the center (for the priority of this kind of motion over the others, cf. *Metaphysics* Λ 6, 1071 b 10-11; Λ 7, 1072 a 21-22; Λ 8, 1073 a 25; *Physics* Θ 7-8, 261 b 27-263 a 3; 264 a 7-265 a 12).

§7.2, 747.24-749.1: **If it does not have a soul, then the First Cause of this universe would have to be worse than the case of the sleeper** (*al-nā'im*) **who is plunged into his sleep – even worse, who is not alive!** In *Metaphysics* Λ 9, 1074 b 17-18, Aristotle uses the example of the sleeper (ὁ καθεύδων; Usṭāth, 1691.6: *al-nā'im*) to elucidate the state in which the Divine Intellect would be, were It thinking nothing. Thābit apparently regards the thinking of nothing in the case of the First Principle as equivalent to Its lacking intellect (which entails Its lacking both soul and life).

§7.2, 749.1-2: **If a man imagines this, he is, in my opinion, equivalent to someone lacking an intellect!** Note the subtle irony of Thābit's reply: whoever attempts to deprive the first sphere (and therefore the First Principle) of soul is himself deprived of intellect.

§7.2, 749.2-3: **Furthermore, it would necessarily follow that Its mover be something other than itself, on the basis of what Aristotle explained**. Cf. above, §7.1, 747.16-17).

§7.2, 749.4-5: **Moreover, Its motion would necessarily come to an end by reason of the finitude of Its potency, since the power of every body is finite**. Thābit now considers the case in which the First Sphere/Principle, besides lacking an internal cause of motion (i.e. a soul), also lacks an external cause. His statement is a reformulation of *Metaphysics* Λ 7, 1073 a 7-8, where Aristotle maintains that something cannot, at the same time, have magnitude and be an eternal mover (cf. *Physics* Θ 10, 266 a 24-b 6). Thābit introduces two main changes into this passage: (i) the hypothesis to be discarded is not the possession of magnitude, but the possession of corporeity (cf. above, introduction to §7); (ii) in such a hypothesis, what comes to an end is not the First Sphere/Principle's capacity to set something else in motion, but to move Itself. For a historical survey of the different interpretations of this Aristotelian doctrine, cf. C. Steel, "*Omnis corporis potentia est finita*, L'interprétation d'un principe aristotélicien: de Proclus à S. Thomas," in J. P. Beckmann, L. Honnefelder, G. Schrimpf, and G. Wieland (eds.), *Philosophie im Mittelalter, Entwicklunglinien und Paradigmen*, Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1987, pp. 213-224. For the argument from incorporeality in Proclus, Simplicius, John Philoponus, Averroes, and Crescas, see also H. Davidson, "The Principle That a Finite Body Can Contain Only Finite Power," in S. Stein and R. Loewe (eds.), *Studies in Jewish Religious and Intellectual History, Presented to Alexander Altmann on the Occasion of his Seventieth Birthday*, Alabama, The University of Alabama Press, 1979, pp. 75-92. Futher on in §7.2 (37.9-11), Thābit explains that the end of the First Sphere/Principle's motion would entail the end of its existence.

§7.2, 749.6-7: **If [on the other hand] this sphere has a soul, then the same thing would happen: the finitude and abrupt stop of its motion would be by reason of the finitude of the power of its corporeal mass, not of the power of its soul**. Thābit's discharging of the heavenly bodies' soul from being responsible for the cessation of the heavenly bodies' motion has a correlate in a digression occurring at the end of Themistius' paraphrase of *Metaphysics* Λ 7 (18.15-17). In this passage Themistius explains that the heavenly bodies' soul, far from determining the cessation of their movement, is one of the two possible causes (the other being the First Principle) for their infinite power (and consequently for their unending movement).

§7.2, 749.7-8: **[In] everything whose power is one of the constitutive factors of its essence, and [in] every corporeal mass whose motion is finite, power is finite**. Thābit elsewhere explicitly excludes the presence of potency in the First Principle (cf. §7.3). As Thābit will clarify (749.8-9), the power and the motion of the First Sphere (and of the other heavenly bodies), which in itself is finite, can be made infinite by an external agent.

§7.2, 749.8-9: **Thus, [in this case], this Principle would be susceptible to corruption if It did not have something else whose power would support It and extend [Its] power in Its perdurance and motion**. In this case, the "something else" to which Thābit refers (meant as a thing external to the First Sphere/Principle) would be more entitled to the status of First Principle than the First Principle itself. In this way Thābit appears to discard the heavenly bodies' soul as the cause of their endless movement, and to attribute this causal role to an external principle. In other words, he adopts the second possibility envisaged by Themistius in the passage of his paraphrase of *Metaphysics* Λ 7 quoted above (cf. the explanation of 749.6-7). For Thābit's opinion about the removal of motion as the cause of the end of existence, cf. above, §2, 739.15-17.

§7.3, 749.10-11. **Furthermore, in everything that has corporeal mass and magnitude there is something potential** (*mā huwa bi-al-quwwati*) **and something actual. But anything that has something potential** (*mā huwa bi-al-quwwati*) **cannot be a First Principle, according to what has just been explained**. Thābit refers to the last part of §7.2 (749.6-9), in which the impossibility of identifying First Principle and First Sphere is proved on account of the finite power of the First Sphere's body. In the present passage, the meaning of the term "potency" (*quwwa*) in the expression "something potential" (*mā huwa bi-al-quwwati*) shifts from "power" (*force*), as in §7.2, to "potentiality" (the metaphysical constituent of an object, opposite to actuality).

§7.4 The fourth proof can be divided into four parts. The first part (749.12-13) is introductory; in it Thābit uses an elliptical mode of expression. Its structure can be reconstructed as follows: if (i) the First Principle is a body (the hypothesis to be invalidated), if (ii) every body is in motion (cf. §2, 737.21-739.1, with regard to corporeal substance, and §7.1, 747.13-14, 18-20, with regard to the simple bodies), if (iii) every body moves toward a perfection, and if (iv) every body desires the perfection toward which it moves (cf. §2, 739.1-4), then (v) the First Principle will desire the perfection toward which It moves. (vi) This perfection can be either external or internal to the thing moving toward it. Thābit explicitly states only point (iii) at 749.12, and point (v) at 749.12-13.

The second part (749.14-16) of the proof deals with the former alternative in (vi) and shows its impossibility. The third part (749.17-22) does the same with the latter alternative. The fourth part (749.23-751.5) is intended to prove that the former alternative (when the alternative is not applied to the First Principle, conceived as a body) is the right one.

§7.4, 749.12: **Moreover, it is toward some perfection that everything in motion through a motion specific to it moves**. Cf. above, §2, 739.1-2.

§7.4, 749.20-22: **But this is impossible, because everything that is in motion moves either in acquiescence to its will** (*ṭā'atan fī irādatihi*) **or naturally** (*ṭabī'atan*) **because of desire for something that perfects it or because of aversion to something that opposes it, or accidentally and by force** (*qasr*). The four types of movement mentioned here (by will, by nature, by accident, by force) come from Arist., *De Anima* A, 3. For the opposition between "compulsion" (βία; Usṭāth, 515.14: *qahr*) and "choice" (προαίρεσιν; Usṭāth, 516.1: *irāda*), cf. *Metaphysics* Δ 5, 1015 a 26-32; in the same chapter (1015 b 15), the term "compulsory" is also treated as equivalent to "contrary to nature." The opposition between motion by nature (φύσει; Abū Bishr, 1565.2, and Usṭāth, 1565.2 at bottom of page: *bi-al-ṭab'i*; omitted in the anonymous paraphrase) and motion by constraint (βίᾳ; Abu Bishr, 1565.2: *qasran*; Usṭāth, 1565.2 at bottom of page: *bi-al-qahr*; omitted in the anonymous paraphrase) is stated in *Metaphysics* Λ 6, 1071 b 33-36 (cf. *Physics* Θ 4, 255 b 31-32; *De Caelo* A 8, 276 a 22-27). For Aristotle's treatment of accident, cf. *Metaphysics* E 2-3.

§7.4, 749.23-24: **Once you perceive the issue from the perspective of what Aristotle says in his *Physics*, you find it comes down to the fact that the cause of anything in motion is external to it**. Cf. *Physics* Θ 6, 259 b 13-14, where Aristotle shows that the self-motion of living beings has an external principle. In these and the following lines, Thābit conclusively clarifies that he does not regard the heavenly bodies' souls as the cause of the heavenly bodies' motion (cf. above, §7.2, 749.8-9).

§7.4, 749.24-751.4: **For the mover in anything cannot be the very part of [the thing] by which [the thing as a whole] is in motion. Because if [the thing as whole] relies on the thing by which it does all of what it does, then if it turns that-by-which it is able [to do something] into that-upon-which it is able [to do something] and its ability [to do something] occurs in that thing, then from where would it obtain another ability? And how can something have an effect on that by means of which it produces an effect?** Thābit distinguishes the mover of something from the thing by means of which something is in motion. The former has to be external to the thing in motion, while the latter can be part of it. The necessity of an external mover is proved by showing that the thing by means of which something is in motion not only acts upon the thing in motion, but also is acted upon by it (inasmuch as it is one of its parts); in order to explain the action of the thing in motion over the part by means of which it is in motion, the existence of an external mover is required.

[§8] This section of Thābit's commentary can be divided into two parts. The first part (751.7-16) is a proof of the unicity of the First Principle. It closely resembles *Metaphysics* Λ 8, 1074 a 31-38 (namely Aristotle's demonstration of the unicity of the universe), of which it reproduces, with some interesting developments, the main bulk, namely the demonstration of the unicity of the Principle of the universe. In the second part of the section (751.17-19), Thābit attributes to Aristotle the belief that the affirmation of the First Principle's unicity is in reality a negative statement, which points to the First Principle's immateriality. In doing so, he transforms Aristotle's general remarks on unity as a negative concept into a "negative theology" of divine unity, according to the perspective drawn in the introduction (§1, 737.17-18).

751.7-8: **Once Aristotle concludes this topic, he says that in defining the First Cause necessity requires that there be one thing as the Principle**. Cf. *Metaphysics* Λ 8, 1074 a 36-37: ἓν ἄρα καὶ λόγῳ καὶ αριθμῷ τὸ πρῶτον κινοῦν ἀκίνητον ὄν (Usṭāth, 1683.9: *fa-idhan al-muḥarriku al-awwalu alladhī lā yataḥarraku wāḥidun bi-al-kalimati wa-al-ʿadadi*; cf. anonymous paraphrase, 9.1-2).

751.8-10: **For the form with which matter in no way mixes cannot be multiple; therefore, one single concept** (*maʿnā*) **cannot be multiple, unless it be by way of the matter set down for it** (*māddatihi al-mawḍūʿati lahu*)**, i.e. the terms.** The first sentence is the negative version of *Metaphysics* Λ 8, 1074 a 33-34: ἀλλ' ὅσα ἀριθμῷ πολλά, ὕλην ἔχει (Usṭāth, 1683.6: *wa-ātharu bi-al-ʿadadi kathīrun lahu ʿunṣurun*; anonymous paraphrase, 8.19: *fa-al-kathratu innamā takūnu bi-ḥasabi al-hayūlā*). By the expression "matter set down for it" (*mādda mawḍūʿa*) in the second sentence, Thābit means the matter that is the subject (*mawḍūʿ*) of the form and in which the form inheres. As an example of the individual instances of a concept, he chooses the singular terms signifying that concept – e.g., the terms "man", "homme", "uomo", "Mensch", etc., as signifying the concept of man. In the ontological field, the correlates of these linguistic items would be the individual men Socrates, Plato, Aristotle, etc., as singular tokens of the form of humanity.

751.10-14: **And every form that is multiple in a given matter is also multiple in a way commensurate with the extension of the matter set down for it. That is why Aristotle says in *De Caelo* that if the matter from which people are generated had been combined as a whole in such a way that one man were made from it, there could not be another man in addition to that man in the universe.** This further remark on matter as the principle of individuation is something that Thābit adds to his reworking of the passage of *Metaphysics* Λ 8. The similitude taken from Aristotle's *De Caelo*, in which the case of the universe is compared with that of a single man containing all human matter (cf. Α 9, 278 a 33-36), may have been inspired by Aristotle's use of the same similitude in Λ 8, 1074 a 31-32, where the case of a plurality of universes is compared with that of a plurality of men.

751.14-15: **This being the case with regard to whatever has matter, what would you assume about [the form] with which matter in no way mixes?** Cf. *Metaphysics* Λ 8, 1074 a 35-36: τὸ δὲ τί ἦν εἶναι οὐκ ἔχει ὕλην τὸ πρῶτον (Usṭāth, 1683.8: *wa-ammā mā huwa bi-al-anniyyati al-ūlā fa-laysa lahu 'unṣurun*; no correlate in the anonymous paraphrase).

751.17: **Aristotle says that one arrives at the correct [view about] Oneness** (*tawḥīd*) **only by way of negation**. In *Metaphysics* Δ 6, 1016 b 23-24 (cf. I, 1, 1052 a 36-b 1; 1052 b 15-18) Aristotle defines 'one' by means of a negative concept (indivisibility), saying that 'one' is what is indivisible either in quantity or in form. The Oneness (*tawḥīd*) to which Thābit refers, however, is not the generic concept of unity, but the peculiar unity of the First Principle. Of this more specific unity Plotinus maintains (*Enneads*, V, 5 [32], 6, 348.26, a passage, however, with no correlate in the Plotiniana Arabica) that it is the negation of multiplicity.

751.18-19: **meaning that there is no beginning, matter, or motion to this unmoved Essence and this First Principle**. As a matter of fact, Thābit's reworking of Aristotle's proof of the unity of the universe and of its First Principle is based on negating only the materiality of the First Principle, not its possession of beginning and motion. The expression "Unmoved Essence" is reminiscent of οὐσία ἀκίνητος in *Metaphysics* Λ 6, 1071 b 5, Λ 7, 1073 a 4, Λ 8, 1073 a 30.

[§9] Having discussed the First Mover "from the perspective of its action and relatively and from outside" (§1, 737.18), namely as First Principle of the universe's existence (§§2-6), and having shown that It is not a body and is not multiple (§§7-8), Thābit now proceeds to elucidate positively that the First Principle's essence is knowledge. This section of Thābit's commentary can be divided into three main parts. In the first (751.20-21), Thābit states the *demonstrandum*. In the second part (751.22-26), he goes on to prove that the First Principle is pure form (something that in §8 Thābit had simply assumed). Finally, in the third part (753.1-3) he attributes to the First Principle the capacity of seeing Itself and the other forms (which entails that It has knowledge of everything), and of being the very act of seeing (which entails that Its substance is such a knowledge). This section of Thābit's commentary roughly corresponds to *Metaphysics* Λ 9.

751.21: **Aristotle maintains that the substance of this First Principle is knowledge itself**. The possibility that the substance of the Divine Intellect is intellect or intellection (εἴτε νοῦς ἡ οὐσία αὐτοῦ εἴτε νόησίς ἐστι, 1074 b 21-22; Usṭāth, 1691.8: *in kāna jawharuhu ʿaql<an> aw taʿaqqul<an>* [*sic lege*; *ʿaql wa-taʿaqqul* Bouyges]) is the third hypothesis about the Divine Intellect that Aristotle discusses in *Metaphysics* Λ 9, 1074 b 21-1075 a 5 (the other two hypotheses being the fact that the Divine Intellect does not think anything, 1074 b 17-18, and that It thinks something but without having intellection as Its substance, 1074 b 18-21). Aristotle finally affirms the second alternative stemming from this third hypothesis, namely the fact that the Intellect has Itself as object of intellection (1074 b 33-1075 a 5).

751.22: **when an existent is neither matter nor possessed of matter, it is a form**. Thābit reproduces Aristotle's division of substance into matter, form, and compound of matter and form (*Metaphysics* Λ 3, 1070 a 9-13; cf. Z 3, 1029 a 1-5) as the division of "existent" into matter, material compound (what "is possessed of matter"), and form.

751.22-23: **because in his opinion, there is nothing else in the division, i.e. the division of principle or existent-through-itself**. Thābit applies now the division into compound and form (or matter and form), formerly established with respect to every existent, to that particular kind of existent that is a "principle" or a "thing-existing-through-itself" (two concepts which he apparently regards as equivalent).

751.24-25: **since everything that exists through itself cannot but be either a matter or a form**. The notion of matter as one of the two possible instances of "thing-existing-through-itself" is problematic, since matter without form does not have an independent existence according to Thābit's interpretation of Aristotle (cf. above, §3). It is possible, however, that Thābit uses here the term "matter" in an elliptic sense to mean "matter having a form."

753.1-2: **In his opinion, this form is the source of every form. So when It sees Itself, It has seen the other forms**. Whereas in Aristotle's *Metaphysics* the Divine Intellect knows only Itself (*Metaphysics* Λ 7, 1072 b 19-20; Λ 9, 1074 b 33-34), and has no relation to other things apart from the fact of being their Unmoved Mover, in this passage the Divine Intellect is portrayed as the source of every form and as knowing these forms. The same development in Aristotle's doctrine of the Divine Intellect is present in the Arabic version of Themistius' paraphrase of *Metaphysics* Λ, where it is said that the Divine Intellect "bears all the forms" (*yaḥmilu jamī'a al-ṣuwarī*, 17.12), and that "the First Intellect intellects all the intelligible things together when It intellects Itself" (*ya'qilu al-'aqlu al-awwalu jamī'a al-ma'qūlāti ma'an idhā 'aqala dhātahu*, 21.7-8). As S. Pines ("Some Distinctive Metaphysical Conceptions," pp. 187-188) and R. Brague (*Thémistius, Paraphrase*, p. 37 and n. 3) have shown, Themistius is influenced by Plotinus' noetics in his attribution to the Divine Intellect the knowledge of everything. One of the passages of the *Enneads* where this theme occurs (IV, 4, 2, ed. Henry-Schwyzer, II, 66.12-13) is rendered in its Arabic paraphrase as "We say that when the intellect sees Itself, It sees all things" (*qulnā inna al-'aqla idhā ra'ā dhātahu fa-qad ra'ā al-ashyā'a kullahā*, in *Theologia Aristotelis* II, 24, ed. Badawī, 32.20-33.1). The common presence of the verb "to see" in this text of the Arabic Plotinus and in Thābit's §9, employed in the same context, is noteworthy.

753.2: **When It has seen Itself, It is the act of seeing**. The identity between intellected thing (νοούμενον; Usṭāth and anonymous paraphrase: *ma'qūl*) and intellect (νοῦς; Usṭāth and anonymous paraphrase: *'aql*), and between intellection (νόησις; Usṭāth: *ta'aqqul*; anonymous paraphrase: *'aql*) and intellected thing (νοούμενον; Usṭāth: *in'iqāl*; anonymous paraphrase: *ma'qūl*), is established by Aristotle in *Metaphysics* Λ 9, 1075 a 3-5 (Usṭāth, 1693.2-3; anonymous paraphrase, 10.6-7).

753.2-3: **because It does not see a given state as though It were to separate between [that state] and the substance of Itself**. This statement, rather than explicating the identity between "seer" and "act of seeing" established in the preceding sentence, appears to introduce a further identity, that between "seer" and "object of seeing." For the Aristotelian source of this doctrine, cf. the identity between intellect (νοῦς; *'aql*) and intelligible (νοητὸν; *ma'qūl*) in *Metaphysics* Λ 7, 1072 b 21 (Usṭāth, 1614.3; no exact correlate in the anonymous paraphrase), and the passage from Λ 9 mentioned above in the explanation of 753.2.

INDEX DES AUTEURS ANCIENS

INDEX DES AUTEURS MODERNES

INDEX DES TRAITÉS

INDEX DES MANUSCRITS